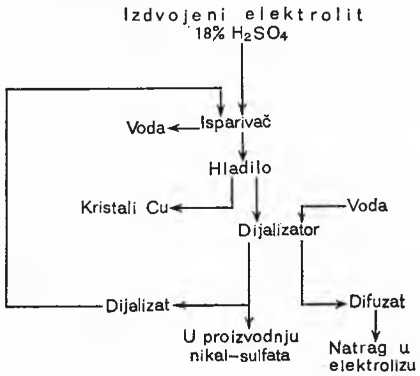
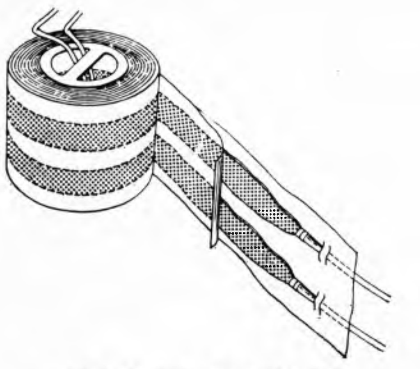
u obzir prvenstveno kad je tvar koju treba dijalizom iz smjese ukloniti prisutna u većoj koncentraciji a nije potrebno da se ukloni praktički potpuno; zamamljiva je također primjena dijalize kad su posrijedi osjetljivi materijali. Te se okolnosti zasad stječu na ekonomski povoljan način gotovo isključivo samo u dva slučaja. Prva je i klasična industrijska primjena dijalize rekuperacija natrijum-hidroksida iz tekućine koja otpada u proizvodnji viskoze kad se presovanjem odvaja u lužini netopljiva alkalna celuloza od topljive hemiceluloze. Ta otopina sadrži pored hemiceluloze nekih 17···20% NaOH; iz nje se dijalizom može dobiti difuzat oslobođen hemiceluloze i sa sadržajem ~ 9···10% NaOH, koji se vraća u proces. Novija je primjena rekuperacija kiseline i otopljenih soli u nekim kiselim otopinama u metalurgiji i otpadnim vodama u metalnoj industriji, npr. čišćenje elektrolita pri elektrolitskoj rafinaciji bakra (v. *Bakar*, TE 1, str. 657) i otpadne vode od močenja (bajcovanja) metala i galvanskog niklovanja, kromovanja itd. Elektrolit koji se izdvaja iz ciklusa elektrolize bakra sadrži ~ 25% H_2SO_4 i 2···5% metalnih soli. Zaslugom Tuwinera sintetizirana je membrana otporna prema kiselini, razrađena je tehnološka shema koja je postala uzor za slične primjene i dat je jak poticaj za znatno usavršavanje konstrukcije dijalizatora. Sl. 4 prikazuje tehnološku shemu po Tuwineru za preradu elektrolita pri rafinaciji bakra.



Sl. 4. Shema Tuwinerova postupka čišćenja elektrolita pri rafinaciji bakra

Iz nje se vidi kako se, kombinacijom isparavanja s dijalizom, postiže da na dijalizu dolazi dovoljno koncentrirana otopina, i s nje se vraća u elektrolizu, i pored razrjeđivanja procesom dijalize, dovoljno koncentrirana kiselina. Tuwinerov proces dao je poticaj za primjenu difuzije na preradu kiselih otpadnih voda i ta će primjena bez sumnje rasti kako propisi o onečišćenju vodnih tokova postaju stroži. Potencijalna područja primjene su prehrambena industrija (čišćenje proteinskog materijala od neželjenih soli, uklanjanje neželjenih velikih molekula iz materijala s manjim molekulama), farmaceutska industrija (povoljno je i da se pri dijalizi sprečava prelaz bakterija iz jedne otopine u drugu), industrija vrenja (selektivno uklanjanje željenih produkata toksičnih za mikroorganizme koji ih proizvode).

Dalji napredak operacije difuzije zavisi od uspjeha u razvijanju jeftinijih, kompaktnijih dijalizatora. Izgleda da bi jedan put razvoja mogao voditi preko dijalizatora u obliku patrone koja se



Sl. 5. Umjetni bubreg Travenol

izmjenjuje i baca. Uzor za to mogu biti medicinski dijalizatori, umjetni bubreg, od kojeg sl. 5 pokazuje jednu izvedbu (Travenol). 2 × 10 m spljoštene celulozne cijevi namotano je spiralno na kalem od plastične mase, zajedno s plastičnom poroznom vrpcom koja odvaja pojedine slojeve cijevi i služi kao separator; sve to smješteno je u tijesno cilindrično kućište. Krv se pušta kroz celuloznu cijev, voda struji u pravcu osi kućišta, poprijeko na pravac strujanja krvi. Drugi put razvoja mogao bi se koristiti kao membranama tankim šupljim nitima od polupropusnog materijala koje je pošlo za rukom proizvesti; od njih se mogu napraviti ploče u kojima su bezbrojne tanke sitne cijevne membrane paralelno spojene. Membranska površina u takvoj ploči vanredno je velika u odnosu na volumen ploče.

LIT.: *G. Génin*, Osmose, dialyse, ultrafiltration, Paris 1929. — *K. Täufel*, Dialyse und Elektrodialyse, u djelu: Bömer-Juckenack-Tillmans, Handbuch der Lebensmittelchemie, Bd 2, Berlin 1933. — *R. E. Stauffer*, Dialysis and electrodialysis, u djelu: A. Weissberger, Technique of organic chemistry, vol. 3, New York-London 1950. — *R. B. Bird, W. E. Steward, E. N. Lightfoot*, Transport phenomena, New York 1960. — *S. B. Tuwiner*, Diffusion and membrane technology, New York-London 1962. — *E. F. Leonard*, Dialysis, u djelu: Kirk-Othmer, Encyclopedia of chemical technology, vol. 7, New York [2]1965.

R. Podhorsky

DIMENZIJSKA ANALIZA, dimenzio(nal)na analiza, analiza dimenzija, matematička metoda koja omogućava da se dobiju informacije o obliku zavisnosti među veličinama u fizičkim sistemima za koje su zbog njihove zamršenosti neostvarljiva potpuna matematička rješenja, i da se odrede uvjeti fizičke sličnosti među zbivanjima, pa time također zakoni modeliranja i prenošenja rezultata dobivenih iz pokusa s modelima na veliko mjerilo tehničke izvedbe. Dimenzijska analiza to postiže na osnovu najopćenitijih svojstava kako fizičkih jednadžbi, tj. jednadžbi kojima su varijable fizičke veličine, tako i sistema jedinica s pomoću kojih se varijable tih jednadžbi mogu izraziti kao imenovani brojevi. Poznavanje tih svojstava omogućilo je da se izrade metode kojima se fizičke jednadžbe s dimenzijskim varijablama, tj. varijablama koje se mogu izraziti imenovanim brojevima, prevedu u oblik s bezdimenzijskim varijablama, tj. varijablama koje se mogu izraziti čistim brojevima, nezavisnim od sistema jedinica. Bezdimenzijske varijable predstavljaju kombinacije (produkte potencija) dimenzijskih varijabli; rješenja jednadžbi koje ih povezuju vrijede stoga ne samo za određene vrijednosti dimenzijskih varijabli nego i za sve kombinacije dimenzijskih varijabli koje daju iste vrijednosti bezdimenzijskih varijabli. Za zbivanja prikazana jednim rješenjem bezdimenzijske jednadžbe kaže se da su fizički slična; bezdimenzijske grupe koje su varijable te jednadžbe nazivaju se i kriterijima sličnosti, a jednadžba koja ih povezuje kriterijskom (kriterijalnom) jednadžbom.

Broj bezdimenzijskih varijabli kriterijske jednadžbe uvijek je manji od broja dimenzijskih varijabli koje ulaze u bezdimenzijske grupe. Kako se metodama dimenzijske analize kriteriji sličnosti za neko zbivanje (ako je takvo da se načelno može prikazati fizičkom jednadžbom) mogu odrediti i bez poznavanja zavisnosti među dimenzijskim varijablama, eksperimentalno je određivanje te zavisnosti u velikoj mjeri olakšano ako se eksperimentima mjesto zavisnosti među dimenzijskim varijablama određuje zavisnost između bezdimenzijskih varijabli kriterijske jednadžbe, a i korelacija postojećih podataka mnogo je jednostavnija između bezdimenzijskih nego između dimenzijskih varijabli uslijed toga što je broj bezdimenzijskih varijabli manji.

Uzmimo, na primjer, da želimo eksperimentalno odrediti i/ili grafički prikazati zavisnost između n varijabli koje određuju neko fizičko zbivanje. U dvodimenzijskom dijagramu može se po pravilu potpuno prikazati zavisnost između najviše tri varijable: dvije su apscisa i ordinata a treća parametar familije krivulja. Pretpostavimo li da za eksperimentalno određivanje zavisnosti između dvije varijable uz konstantnu treću treba 5 mjerenja, bit će za $n = 3$ potreban i dovoljan za prikazivanje zavisnosti jedan dijagram sa 5 krivulja, za čije će određivanje biti potrebno $5 \times 5 = 25$ mjerenja. Treba li pod istim uvjetima odrediti i prikazati zavisnost između 4 varijable, trebat će već 5 takvih dijagrama (svaki za drugu konstantnu vrijednost četvrte varijable), a broj potrebnih mjerenja će skočiti na $5 \times 5 \times 5 = 125$. Ako je $n = 5$, broj potrebnih dijagrama bit će 25, a mjerenja 625, za $n = 6$ treba 125 dijagrama i 3125 mjerenja. Iz toga je vidljivo koliku korist pruža dimenzijska analiza time što omogućava da se broj varijabli smanji, npr., od 6 na 3.

Dimenzijska analiza razvila se iz problematike modeliranja najprije u brodogradnji i hidrotehnici; danas ona predstavlja jedno od najvažnijih i najkorisnijih oruđa kako u tim granama tehnike tako i u aerotehnici, termotehnici, kemijskoj i procesnoj tehnici, a njezina se primjena širi i u drugim granama tehnike.

Problematika obrađena u ovom članku često se u stručnoj literaturi, naročito njemačkoj i sovjetskoj, obrađuje pod naslovom »Teorija sličnosti«; u tom okviru se dimenzijska analiza smatra u prvom redu metodom za određivanje kriterija sličnosti. S druge strane, u drugom dijelu literature, prvenstveno u američkoj, dimenzijska se analiza smatra nadređenim pojmom koji obuhvaća i teoriju sličnosti kao područje primjene te analize. U stvari, dimenzijska analiza i teorija sličnosti nisu pojmovi jedan drugome podređeni, nego dva pojma kojima se opseg presijeca tako da im se područja u velikom dijelu preklapaju, a oba imaju i dijelove koji nisu među sobom u vezi. U ovom članku obrađuje se, uz dimenzijsku analizu u užem smislu riječi, i ponešto iz teorije sličnosti što dopunjuje prikaz metoda za određivanje bezdimenzijskih kriterija i omogućava razumijevanje njihovog fizičkog značenja. Više o tome v. *Modeliranje* i *Sličnost*.

Jedinice i dimenzije. Fizičke jednadžbe predstavljaju izraze objektivnih, od svijesti čovjeka nezavisnih prirodnih zakona. One se stoga mogu napisati — i redovito se tako i pišu — da su nezavisne od toga koji će se sistem jedinica, kao konvencija stvorena od čovjeka, upotrijebiti pri njihovom numeričkom rješavanju. To se misli kad se kaže da varijable fizičkih jednadžbi (u obliku u kojemu se po pravilu pišu, ili treba da se pišu) nisu brojevi nego veličine, da su te jednadžbe *veličinske jednadžbe*.

Smisao svake takve jednadžbe može se izraziti a da se pri tom ne upotrijebi pojam jedinice. Na primjer, jednadžba kojom se u fizici definira brzina, $v = s/t$, znači da definirana veličina v zavisi samo od veličine prevaljenog puta s i za to utrošenog vremena t, i to tako da će v biti n puta veće ako je put prevaljen u određeno vrijeme n puta veće ili ako je vrijeme potrebno da se prevali određen put n puta manje, — što se sve može načelno utvrditi bez upotrebe jedinica. Međutim, računati se može samo s brojevima. Stoga se pri upotrebi veličinskih jednadžbi pridružuje svakoj veličini jedan čisti broj; sa svim tim brojevima mogu se onda vršiti matematičke operacije koje jednadžba traži. To pridruživanje brojeva veličinama provodi se posredstvom mjerenja: za svaku se veličinu G izabere — u načelu proizvoljno — jedinična veličina $[G]$ i utvrdi se koliko se takvih jediničnih veličina mora sabrati da bi se dobila veličina G:

$$G_n = \frac{G}{[G]} \tag{1}$$

Dobiveni čisti broj G_n zove se *brojna (numerička) vrijednost* ili *mjerni broj* veličine G.

U načelu se G_n može pridružiti veličini G i na drugi način, npr. postavljajući $G_n = \log(G/[G])$. To se u iznimnim slučajevima i čini (npr. pri izražavanju razine akustičkog pritiska u belima i koncentracije vodikovih iona brojem *p*H). Ali ako se postavlja zahtjev — kako je to prirodno — da omjer mjernih brojeva dviju veličina iste vrste bude nezavisan od izbora jedinice $[G]$ (to je tzv. uvjet apsolutnog značenja relativnih veličina ili invarijantnosti pri proizvoljnoj promjeni jedinica), taj zahtjev zadovoljava samo linearno pridruživanje. (Na malobrojne jedinice koje taj uvjet ne zadovoljavaju u nastavku se nećemo osvrtati.)

Iz jednadžbe (1) slijedi da je mjerni broj određene veličine obrnuto razmjeran veličini jedinice. Iz te jednadžbe slijedi također da je

$$G = G_n \cdot [G], \tag{2}$$

tj. svaka se fizička veličina može smatrati produktom dvaju faktora: mjernog broja i jedinice.

Načelno se za svaku vrstu veličine može izabrati posebna veličina te vrste kao jedinica $[G]$ za mjerenje drugih veličina iste vrste G. (Tako se nekad i radilo: npr. hvat kao jedinica duljine, jutro oranja kao jedinica površine i vedro kao jedinica zapremine nemaju među sobom nikakve veze.) Ali budući da svaka nezavisna jedinica postavlja osjetljive probleme njenog tačnog određivanja i ostvarenja, izabrane su nezavisne jedinice (*osnovne jedinice*) samo za minimalni broj veličinskih vrsta (osnovnih), a ostale su jedinice (*izvedene jedinice*) definirane na osnovu jednadžbi koje povezuju osnovne veličinske vrste s onima (izvedenima) koje se mjere izvedenim jedinicama. Takvo određivanje jedinica u velikoj mjeri olakšava njihovu upotrebu i omogućava — među ostalim — dimenzijsku analizu.

Jednadžba koja se upotrebljava za definiciju jedne jedinice s pomoću drugih jedinica (osnovnih ili drugim jednadžbama definiranih) zove se njezina definicijska jednadžba. Npr., Newtonov zakon, pisan kao veličinska jednadžba

$$F = m\,a \tag{3}$$

(F je sila, m masa, a akceleracija), može se prema jedn. (2) pisati kao jednadžba

$$F_n\,[F] = m_n\,[m] \cdot a_n\,[a]$$

(indeks n označuje brojne vrijednosti a uglate zagrade jedinice), koja se može rastaviti na dvije jednadžbe:

$$F_n = m_n \cdot a_n, \tag{3a}$$

$$[F] = [m] \cdot [a]. \tag{3b}$$

Jedn. (3a) predstavlja numeričku jednadžbu ili računsku formulu za izračunavanje brojne vrijednosti nepoznate veličine uvrštavanjem brojnih vrijednosti poznatih veličina. Ta jednadžba po obliku jednaka je veličinskoj jednadžbi (3) zbog toga što istovremeno vrijedi i jednadžba (3b), tj., kako se vidi iz jedn. (3a i b), veličinska jednadžba može se upotrijebiti kao računska formula ako i samo ako među jedinicama u kojima su mjerni brojevi izraženi postoji odnos određen tom veličinskom jednadžbom. U navedenom slučaju Newtonova zakona, npr., samo ako je kao jedinica sile uzeta ona sila koja prethodno izabranoj jedinici mase podjeljuje prethodno izabranu (ili definiranu) jedinicu akceleracije, ili ako je kao jedinica mase uzeta ona masa koja djelovanjem prethodno izabrane jedinice sile dobiva akceleraciju jednaku prethodno izabranoj ili definiranoj jedinici te veličinske vrste. Veličinska jednadžba (3) može se, dakle, upotrijebiti kao definicijska jednadžba jedne od jedinica navedenih u jedn. (3b) ako su ostale dvije jedinice već definirane.

S pomoću definicijskih jednadžbi, od ukupnog broja veličinskih vrsta za koje su potrebne jedinice može se eliminirati onolik broj kolikim se definicijskim jednadžbama raspolaže. Minimalni broj m osnovnih jedinica potreban i dovoljan za definiranje svih potrebnih jedinica jednak je dakle njihovom ukupnom broju n umanjenom za broj i nezavisnih definicijskih jednadžbi jedinica za izvedene veličine:

$$m = n - i. \tag{4}$$

Tako se nalazi da je za geometriju potrebna i dovoljna jedna osnovna jedinica (uzeta je jedinica duljine), za kinematiku i statiku dvije (duljina i vrijeme odn. duljina i sila), za mehaniku tri (duljina, vrijeme, masa ili sila), za elektromagnetiku četiri (npr. duljina, vrijeme, količina elektriciteta i magnetski tok). O izboru osnovnih jedinica v. *Jedinice*.

Može se dokazati da iz linearne pridruženosti mjernog broja mjernoj veličini (tj. iz uvjeta invarijantnosti prema promjeni jedinica) slijedi da su izvedene jedinice uvijek produkti potencija osnovnih jedinica. Tako, npr., izaberu li se kao osnovne jedinice jedinica mase [M], jedinica duljine [L] i jedinica vremena [T], jedinica brzine bit će $[v] = [\mathrm{LT}^{-1}]$ (put u jedinici vremena), jedinica akceleracije $[a] = [\mathrm{LT}^{-1}/\mathrm{T}] = [\mathrm{LT}^{-2}]$ (promjena brzine u jedinici vremena), jedinica sile $[F] = [\mathrm{MLT}^{-2}]$ (masa puta akceleracija), jedinica energije $[\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}]$ (sila puta put) itd. Produkti potencijâ u upravo navedenim jednadžbama, koji prikazuju na koji način izvedena jedinica zavisi od osnovnih, nazivaju se *dimenzijama* jedinica, također dimenzijama veličinskih vrsta koje se tim jedinicama mjere. Uglate zagrade u tim jednadžbama znače da se jednakost odnosi samo na dimenzije dotičnih veličinskih vrsta.

Prema starijoj definiciji, koju bi trebalo po mišljenju nekih autora zadržati, dimenzijama neke veličinske vrste nazivaju se eksponenti u produktima potencija koji prikazuju zavisnost izvedenih jedinica od osnovnih, te se u tom smislu kaže, npr., da je dimenzija energije 1 u odnosu na masu, 2 u odnosu na duljinu, a −2 u odnosu na vrijeme. Sami produkti potencija u uglatim zagradama nazivaju se po toj terminologiji dimenzijskim formulama. Obrnuto, ako se pod dimenzijom razumijeva produkt potencija, eksponenti se potencija nazivaju dimenzijskim eksponentima.

Bez obzira na to koja se od ovih dviju definicija pojma dimenzije usvoji, svakako je pogrešno govoriti i pisati, kako to premnogi čine, da je, npr., dimenzija brzine m/s. To je *jedinica* brzine; ona, dakako, ima svoju dimenziju, ali nije isto što i dimenzija.

Uobičajeni izraz »bezdimenzijski« opravdan je zapravo samo ako se pod pojmom »dimenzije« razumijevaju eksponenti u dimenzijskoj formuli, jer se odnosi na veličine kojima su svi ti eksponenti jednaki nuli. Ako se pod dimenzijom razumijeva produkt potencijâ, te veličine nisu bez dimenzije, nego im je dimenzija jednaka 1.

Ako se osnovne jedinice izaberu drukčije, mijenjaju se, razumljivo, i dimenzije svih izvedenih jedinica. Dimenzijama, prema tome, ne pripada nikakvo apsolutno fizičko značenje, one su izrazi određene konvencije.

Ako se u dimenzijske formule umjesto uopćenih oznaka za osnovne jedinice (npr. mase M, duljine L i vremena T) uvrste oznake određenih osnovnih jedinica, dobivaju se oznake jedinica određenog *sistema jedinica* ili *sistema mjera*. Za sisteme mjera koji su dobiveni uvrštavanjem različitih osnovnih jedinica u iste dimenzijske formule kaže se da pripadaju istom *sistemu dimenzija.*

Tako npr. jedinice sistema MKS (metar, kilogram, sekunda), CGS (centimetar, gram, sekunda) i engleskog »apsolutnog« sistema jedinica (pound mass, foot, sekunda) pripadaju istom sistemu dimenzija [MLT]. Metarski tehnički i engleski »gravitacijski« sistem mjera (kilopond, metar, sekunda, odn. pound force, foot, sekunda) pripadaju istom sistemu dimenzija [FLT], u kojemu je jedna od osnovnih veličinskih vrsta sila, s jedinicom [F].

Sistemi mjera koji obuhvaćaju samo jedinice sistema dimenzija s minimalnim brojem osnovnih jedinica prema jedn. (3) nazivaju se *dimenzijski koherentnim*; i za jedinice tog sistema kaže se da su (dimenzijski) koherentne. U dimenzijskoj analizi pretpostavlja se, prećutno ili eksplicitno, da upotrijebljeni sistem dimenzija ima minimalni broj osnovnih jedinica. Stoga, kad se kaže da se veličinske jednadžbe mogu upotrijebiti kao računske formule s jedinicama bilo kojeg sistema mjera, ili da su bezdimenzijski kriteriji nezavisni od sistema mjera, podrazumijeva se, i kad to nije izrijekom rečeno: »dimenzijski koherentnog sistema mjera«. Invarijantnost fizičkih jednadžbi prema promjenama sistema mjera naziva se njihovom *dimenzijskom homogenošću.*

Kako je uvodno rečeno, ona slijedi iz objektivnog karaktera prirodnih zakona i predstavlja zapravo osnov dimenzijske analize, te je ova mogla biti definirana i kao teorija dimenzijski homogenih funkcija. Iz objektivnog karaktera prirodnih zakona slijedi i to da jednakost dimenzija svih članova jednadžbe nije uvijek dovoljna za njezinu dimenzijsku homogenost. Nije dimenzijski homogena, npr., jednadžba u kojoj je s jedne strane vektor, a s druge skalar, makar im dimenzije i bile jednake.

Iz dimenzijske homogenosti veličinskih jednadžbi slijedi nužno da svi članovi takve jednadžbe moraju imati istu dimenziju. Npr. ako se u jedn. (3b) uvrste za $[F]$, $[m]$ i $[a]$ dimenzije sile, mase i akceleracije u sistemu dimenzija [MLT], dobiva se:

$$[\mathrm{MLT}^{-2}] = [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{LT}^{-2}] = [\mathrm{MLT}^{-2}].$$

Može se dokazati da funkcija kojoj su argumenti fizičke veličine ne može biti dimenzijski homogena ako je transcendentna. To znači da se svaka fizička funkcija, budući da mora biti dimenzijski homogena, mora dati svesti na oblik u kojemu npr. sinh, log, exp dolaze samo s bezdimenzijskim argumentima, a dimenzijske varijable u takvim funkcijama mogu dolaziti kombinirane samo kao produkti potencija ili sume takvih produkata.

Provjera dimenzijske homogenosti fizičkih jednadžbi često se upotrebljava kao jedna od kontrola njihove ispravnosti.

Činjenica je da se u nauci, a pogotovo u tehnici, često upotrebljavaju istovremeno jedinice koje među sobom nisu koherentne, tj. jedinice iz različitih koherentnih sistema jedinica. Tako se, npr., često upotrebljava kilopond (jedinica iz dimenzijskog sistema [FLT], jedinica centipoaz (iz sistema (CGS), kilokalorija, kiri (curie) uz kilogram i druge jedinice sistema MKS. Ovamo idu također dekadski i drugi višekratnici i podmultipli koherentnih jedinica: milimetar, kilometar, sat, konjska snaga itd. Engleski tehnički sistem mjera je u cjelini nekoherentan, jer su mu dvije od osnovnih jedinica među sobom nekoherentne: funta sile i funta mase.

Ako se upotrebljavaju nekoherentne jedinice, veličinske se jednadžbe ne mogu bez daljeg upotrijebiti kao računske formule. Npr. ako su nezavisno utvrđene jedinice za silu i masu (recimo kp i kg) Newtonov se zakon u svom obliku (3) odn. (3a) ne može upotrijebiti za izračunavanje mjernog broja jedne veličine kad su zadani mjerni brojevi ostalih dviju veličina. U tom slučaju treba umjesto jedn. (3) pisati

$$F = k\, m\, a,$$

tj. treba pisati konstantu proporcionalnosti koja je u jedn. (3) jednaka 1 s razlogâ koji proizlaze iz naprijed navedenog. Jedn. (3a) i (3b) postaju:

$$F_n = k_n\, m_n\, a_n$$
$$[F] = [k]\,[m]\,[a].$$

Konstanta k ima dimenziju takvu da je uspostavljena dimenzijska homogenost jedn. (3) (u našem slučaju, ako su pomiješani sistemi dimenzija [FLT] i [MLT], njezina je dimenzija $[\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{TF}^{-1}]$); njezina brojna vrijednost zavisi od izabranih jedinica. Konstante koje imaju dimenziju zovu se *dimenzijske konstante.*

U literaturi koja se služi engleskim tehničkim sistemom mjera, pošto ovaj pripada takvom nekoherentnom sistemu dimenzija MLTF, recipročna vrijednost konstante k pojavljuje se pod oznakom g_C u mnogim fizičkim jednadžbama, tehničkim formulama i bezdimenzijskim kriterijima:

$$g_C = 32{,}17398\,(\mathrm{lb\ mass})(\mathrm{ft})/(\mathrm{lb\ force})(\mathrm{s})^2 = 9{,}80665\ \mathrm{kg\ m/kp\ s^2}$$

Druga takva dimenzijska konstanta, koja se još donedavna pojavljivala u jednadžbama tehničkih termodinamičara, jest mehanički ekvivalent topline $L = 427$ kpm/kcal.

Činjenica je također da se ponekad u nauci, a često u tehnici, upotrebljavaju i jednadžbe koje nisu dimenzijski homogene. Te jednadžbe, upotrijebljene kao računske formule, daju ispravne rezultate samo ako se u njih uvrštavaju brojne vrijednosti veličina u određenim jedinicama. To su po pravilu bilo tzv. nepotpune fizikalne jednadžbe, u koje su vrijednosti nekih varijabli već uvrštene u određenim jedinicama (ubrzanje sile teže, specifična težina vode, itd.), bilo jednadžbe koje ne izražavaju prirodnu zakonitost, nego više ili manje slučajno empirijsko »pravilo«. U nastavku ovog članka prepostavljat će se, ako nije izričito drukčije rečeno, da su upotrijebljene jednadžbe dimenzijski homogene, a upotrijebljene jedinice dimenzijski koherentne. (Pri tom u okviru obrađenog predmeta nije relevantno kojemu sistemu mjera pripadaju jedinice, nego samo koje su im dimenzije.) Prema tome se (osim u primjeru) više nećemo sretati s dimenzijskim konstantama koje potječu od nekoherentnih sistema dimenzija.

Postoje, međutim, i dimenzijske konstante druge vrste, koje se pojavljuju i u potpunim veličinskim jednadžbama jer su izraz određenih prirodnih datosti. Takve su dimenzijske konstante: konstanta gravitacije G, opća plinska konstanta R, brzina svjetla c, Planckov kvant djelovanja h, Stefan-Boltzmannova konstanta σ, itd. Svaka od tih konstanti definirana je jednadžbom kojom joj je određena i dimenzija; stoga ostaje na snazi jedn. (4) ako se u njoj pod m razumijeva ukupni broj veličinskih vrsta i dimenzijskih konstanta, a pod i broj nezavisnih definicijskih jednadžbi za jedinice i dimenzijske konstante. S gledišta dimenzijske analize nema, dakle, bitne razlike između varijabli i dimenzijskih konstanti, te će se u nastavku ovog članka, kad se kaže »varijable«, podrazumijevati »i dimenzijske konstante«.

Buckinghamov teorem, tzv. π-teorem, osnovni je teorem dimenzijske analize i sadrži u stvari svu njezinu bit. On glasi ovako: Svaka dimenzijski homogena funkcija od n dimenzijskih varijabli može se svesti na zavisnost između $(n-r)$ bezdimenzijskih produkata potencijâ (bezdimenzijskih grupa), pri čemu je r najveći broj dimenzijskih varijabli (od onih n) koje ne mogu između sebe dati bezdimenzijsku grupu, ili, drugim riječima, r je minimalni broj varijabli čijim se jedinicama mogu izraziti jedinice svih n varijabli. Broj r ne može biti veći od broja osnovnih veličina dimenzijskog sistema upotrijebljenog za izražavanje dimenzijâ varijabli.

Da je za prevođenje jednadžbe u bezdimenzijski oblik njezina dimenzijska homogenost dovoljan uvjet, lako je uvidjeti: dovoljno je jednadžbu podijeliti jednim od svojih članova pa da svi članovi postanu bezdimenzijski. Da je dimenzijska homogenost i nuždan uvjet, to je egzaktno dokazao tek Langhaar (v. literaturu). Dokaz nije zamršen ali je dug, pa se ovdje neće iznositi.

Da se s pomoću jedinica onih r varijabli koje između sebe ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu mogu izraziti jedinice ostalih $(n - r)$ varijabli dimenzijski homogene jednadžbe, to znači da pogodni produkti potencija tih r varijabli imaju jednake dimenzije kao $(n - r)$ ostalih varijabli. Ako se svaka od tih $(n - r)$ »mjerenih« varijabli podijeli s produktom potencijâ onih r »mjerećih« varijabli koji ima istu dimenziju kao ona, dobiva se $(n - r)$ bezdimenzijskih grupa, kako to tvrdi π-teorem. Tih $(n - r)$ bezdimenzijskih grupa potpune serije među sobom su nezavisne, što znači da se nijedna od njih ne može dobiti kombinacijom ostalih grupa serije. To slijedi iz toga što svaka na navedeni način dobivena bezdimenzijska grupa sadrži (u brojniku) po jednu varijablu koje u drugim grupama nema. Serija je »potpuna« jer se kombinacijom grupâ te serije u produkt potencija može dobiti bilo koja druga bezdimenzijska grupa tvorena iz varijabli polazne dimenzijski homogene jednadžbe. To slijedi iz toga što grupe u seriji sadrže sve varijable, pa se pogodnom kombinacijom produkata njihovih potencija može svaka željena varijabla u grupu unijeti ili iz nje eliminirati.

Iz jedne date potpune serije bezdimenzijskih brojeva može se, dakle, dobiti druga potpuna serija time što se množenjem potencija pojedinih članova polazne serije obrazuje nova grupa, koja ulazi u seriju umjesto jedne od grupa s pomoću kojih je obrazovana. Umjesto svakog člana polazne serije može u novu seriju ući i njegova potencija ili druga jednoznačna funkcija. Ove bezgranične mogućnosti obrazovanja bezdimenzijskih brojeva iz jedne potpune serije vrlo su korisne u primjeni dimenzijske analize jer omogućavaju da se dimenzijske varijable raspodijele među bezdimenzijske grupe na način koji je najpogodniji za praktičnu upotrebu.

Broj r ne može biti veći od broja osnovnih veličina upotrijebljenog dimenzijskog sistema. Naime, budući da smo načelno u izboru osnovnih veličina dimenzijskog sistema sasvim slobodni, pod uvjetom da biramo veličine koje su među sobom nezavisne (ne mogu između sebe tvoriti bezdimenzijsku grupu), mi bismo mogli izraziti dimenzije svih varijabli naše jednadžbe i u dimenzijskom sistemu kojemu su osnovne veličine onih r veličina čije dimenzije mogu izraziti sve ostale. Kako je broj minimalno potrebnih osnovnih veličina određen jednadžbom (4), on se ne može povećati pri prelazu s jednog sistema dimenzija na drugi. Stoga r ne može biti veći od m; on je po pravilu jednak m, ali može u nekim slučajevima biti i manji od njega.

Npr. dimenzije svih veličina u jednadžbama nauke o čvrstoći mogu se izraziti dimenzijama sile i dužine, tj. $r = 2$, ali je $m = 3$ ako upotrebljavamo za prikaz dimenzija sistem MLT.

Provedba dimenzijske analize. Zadaća dimenzijske analize pri njezinoj primjeni u tehnici svodi se na to da se na osnovu poznavanja varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$ dimenzijski homogene jednadžbe

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{5}$$

odrede bezdimenzijske varijable (grupe) $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}$ kriterijske jednadžbe

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0 \tag{6}$$

koja izražava istu fizičku zakonitost, i to kad oblik funkcije f nije poznat. (Određivanje oblika funkcije f, ili rješavanje zadataka za koje bi inače bilo potrebno poznavanje te funkcije, obično i jest konačna svrha primjene dimenzijske analize.) Tehnika dimenzijske analize sastoji se od čisto matematičkih operacija; stoga, ako nije poznat oblik funkcije f, ne može se ni očekivati da će dimenzijska analiza dati oblik funkcije φ. Taj se mora po pravilu odrediti eksperimentalno; koliko je eksperimentalno određivanje funkcije φ jednostavnije od određivanja funkcije f, prikazano je u uvodu ovog članka.

Samo u iznimnom slučaju da je $n - r = 1$, tj. kad se od varijabli može sastaviti jedna jedina bezdimenzijska grupa, tom je grupom potpuno određen način na koji su varijable povezane, tj. određen je oblik funkcije f. Npr., uzmimo da hoćemo odrediti zavisnost puta od vremena pri prostom padu, a znamo samo to da u (nepoznatu nam) jednadžbu prostog pada ulazi i ubrzanje sile teže g. Varijable nepoznate jednadžbe $f(s, t, g) = 0$ imaju dimenzije: $[s] = [L]$, $[t] = [T]$, $[g] = [LT^{-2}]$; dvije od njih nisu dovoljne da se obrazuje bezdimenzijska grupa a tri jesu, dakle $r = 2$. Budući da je $n = 3$, broj bezdimenzijskih grupa je $3 - 2 = 1$. Ta jedna grupa očito je s/gt^2; nepoznata funkcija je dakle: $f(s/g\,t^2) = 0$, ili $s/g\,t^2 =$ konst., ili $s =$ konst. $\cdot\, g\,t^2$. Jedino ovakva povezanost varijabli osigurava ispunjenje uvjeta apsolutnog značenja relativnih veličina. Konstantu u gornjoj jednadžbi dimenzijska analiza ne može dati; iz integrala odgovarajuće diferencijalne jednadžbe znamo da je jednaka $\frac{1}{2}$; eksperimentalno bi se mogla načelno odrediti jednim jedinim pokusom.

Kad bi netko mislio (kao što je mislio Aristotel) da put pada zavisi i od mase, dimenzijska analiza poučila bi ga o protivnom: masa ne može da tvori bezdimenzijski broj s ostalim varijablama.

Ne treba iz gornjeg zaključiti da dimenzijska analiza omogućava — makar samo u nekim slučajevima — da se prirodni zakoni određuju za pisaćim stolom bez veze s eksperimentom. Dimenzijska se analiza u posljednjoj liniji uvijek osniva na iskustvu; u našem slučaju iskustvena je činjenica da u zakon prostog pada ulazi veličina koja se zove ubrzanje i ima dimenziju $[LT^{-2}]$.

Kako se vidjelo, dimenzijska analiza pretpostavlja da između veličina koje određuju neko zbivanje postoji zavisnost izražljiva dimenzijski homogenom jednadžbom. Da bi se moglo pristupiti dimenzijskoj analizi, potrebno je stoga o ispitanom zbivanju znati bar toliko da se može sastaviti spisak veličina koje su potrebne (ili bar bitne) za njegovo opisivanje (date veličine, tražene veličine, parametri, dimenzijske konstante i drugi iskustveni koeficijenti) i da se može sa sigurnošću pretpostaviti da je zavisnost među tim veličinama načelno izražljiva u obliku dimenzijski homogene jednadžbe.

Ako su upravo navedeni uvjeti ispunjeni, za izračunavanje potpune serije bezdimenzijskih grupa potreban je i dovoljan spisak mjerodavnih među sobom nezavisnih varijabli (i dimenzijskih konstanti itd.) i njihovih dimenzija.

Bezdimenzijske grupe predstavljaju produkte potencija, tj. imaju oblik:

$$\pi = \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \tag{7}$$

pri čemu su x_k varijable, a p_k mali realni brojevi, ne svi istovremeno jednaki nuli. Svaka od veličina x_k može se izraziti kao produkt potencijâ m osnovnih veličina; za jedinice veličinâ x_k vrijedi dakle:

$$[x_k] = \prod_{i=1}^{m} E_i^{a_{ik}} \tag{8}$$

pri čemu su E_i jedinice osnovnih veličina upotrijebljenog dimenzijskog sistema, a a_{ik} mali realni brojevi, ne svi istovremeno jednaki nuli. Prema tome, za jedinicu svake bezdimenzijske grupe vrijedi:

$$[\pi_j] = \prod_{k=1}^{n} [x_k]^{p_k} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} E_i^{a_{ik} p_k} \tag{9}$$

i time:

$$[\pi_j] = \prod_{i=1}^{m} E_i^{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_k} \tag{10}$$

Budući da su svi π_j bezdimenzijski, jedinica im je identički jednaka 1, tj.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, p_k = 0 \text{ za } i = 1, 2, \dots, m. \tag{11}$$

Dimenzijska analiza, određivanje potpune serije bezdimenzijskih grupa, svodi se na rješenje homogenog sistema (11) linearnih jednadžbi s nepoznanicama p_k (eksponentima veličinâ x_k u bezdimenzijskim grupama π_j) i matricom koeficijenata (a_{ik}). Taj homogeni sistem linearnih jednadžbi ima ili samo trivijalno rješenje $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ ili, općenito, beskonačno mnogo rješenja (tačno ∞^{n-r}), koja se mogu dobiti linearnom kombinacijom iz $(n - r)$ linearno nezavisnih netrivijalnih rješenja, pri čemu je r rang matrice koeficijenata.

Ako među veličinama potrebnim za opisivanje ispitanog zbivanja ima i bezdimenzijskih (npr. kutova), one su bez daljeg članovi serije bezdimenzijskih grupa. Isto tako, ako ima među tim veličinama više njih s istom dimenzijom, radi pojednostavnjenja postupka samo jedna od njih uvrštava se među varijable x_k, a omjeri ostalih s tom jednom ulaze bez daljeg kao tzv. *simpleksi* u seriju bezdimenzijskih grupa. Ako varijable x_k s kojima ulazimo u analizu nisu sve među sobom nezavisne, rezultat analize neće biti pogrešan, ali od konačno dobivenih bezdimenzijskih grupa onoliko njih neće biti nezavisne od ostalih koliko je bilo zavisnih varijabla među dimenzijskim varijablama x_k. Ukupni broj među sobom nezavisnih bezdimenzijskih grupa u seriji dobivenoj upravo opisanom analizom bit će, prema tome, $p - r + l + t - q$, gdje je p ukupni broj dimenzijskih varijabli x_k različitih dimenzija (od njih n nezavisnih i q zavisnih), r maksimalni broj varijabli koje između sebe ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu [ili rang matrice koeficijenata (a_{ik})], l broj bezdimenzijskih konstanti, a t broj simpleksa koji se mogu obrazovati od varijabli s istim dimenzijama u polaznoj homogenoj jednadžbi.

Za praktičnu provedbu dimenzijske analize ima više postupaka, od kojih će glavni u nastavku biti opisani.

Buckinghamova metoda najopćenitiji je postupak; sastoji se u primjeni jedn. (10) i (11). Ta metoda će se ilustrirati primjerom.

Primjer 1. Treba odrediti oblik jednadžbe koja povezuje pad pritiska s mjerodavnim varijablama strujanja realne tekućine u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka.

Varijable i njihove dimenzije u sistemu dimenzija [MLT] su ove:

Varijabla	*Oznaka*	*Dimenzija*
Pad pritiska	Δp	$ML^{-1}T^{-2}$
Duljina cijevi	l	L
Promjer cijevi	d	L
Srednja brzina strujanja	v	LT^{-1}
Dinamički viskozitet	η	$ML^{-1}T^{-1}$
Specifična masa	ϱ	ML^{-3}
Hrapavost cijevi	ε	L

Varijable l, d i ε imaju jednake dimenzije; u spisku dimenzijskih varijabla x_k možemo ostaviti d, a kao prve članove u spisak bezdimenzijskih grupa unijeti simplekse $\pi_1 = l/d$ i $\pi_2 = \varepsilon/d$.

Matrica koeficijenata homogenog sistema linearnih jednadžbi (matrica eksponenata, matrica dimenzija) za ovaj slučaj je ova:

$k =$	1	2	3	4	5
$x_k =$	Δp	d	v	η	ϱ
M	1	0	0	1	1
L	−1	1	1	−1	−3
T	−2	0	−1	−1	0

Rang je matrice 3, stoga je $r = 3$. (Osnovne veličine M, L, T međ u sobom su nezavisne, stoga su među sobom nezavisni i reci matrice, te je rang matrice jednak broju redaka, tj. r je jednako broju osnovnih veličina.) Broj među sobom nezavisnih bezdimenzijskih grupa koji se može obrazovati iz gornjih $n = 5$ varijabli iznosi, prema tome, $n - r = 2$.

S pomoću matrice dimenzija može se napisati homogeni sistem linearnih jednadžbi $\Sigma\, a_{ik}\, p_k = 0$ za ovaj slučaj:

$$\begin{aligned} &\text{za M:}\ p_1 + p_4 + p_5 = 0 \\ &\text{za L:}\ -p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - 3\,p_5 = 0 \\ &\text{za T:}\ -2\,p_1 - p_3 - p_4 = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

Budući da je $r = 3$, a $n = 5$, mogu se za dvije od gornjih pet p_k vrijednosti izabrati po volji, pa peti, šesti i sedmi p_k izraziti tim vrijednostima. Svrsishodno je izabrati te vrijednosti tako da je pri izračunavanju eksponenata za π_3 jedan od izabranih dvaju p_k jednak 1, a drugi jednak 0, a pri izračunavanju eksponenata za π_4, obrnuto. (Ako je broj bezdimenzijskih grupa veći, veći je i broj eksponenata za koje se vrijednosti mogu birati, pa se bira redom tako da je jedan jednak 1 a ostali jednaki 0.) S time se dobiva iz gornjeg sistema jednadžbi ova matrica rješenjâ:

$p_k =$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$x_k =$	Δp	d	v	η	ϱ
3	1	0	−2	0	−1
4	0	1	1	−1	1

Potpuna serija bezdimenzijskih brojeva za ovaj je problem, prema tome:

$$\pi_1 = \frac{l}{d}\,,\quad \pi_2 = \frac{\varepsilon}{d}\,,\quad \pi_3 = \frac{\Delta p}{\varrho\, v^2}\,,\quad \pi_4 = \frac{d\, v\, \varrho}{\eta}\,.$$

Mnoge bezdimenzijske grupe (koje nisu simpleksi) nazvane su po autorima koji su zaslužni za teoriju sličnosti ili za područje u kojemu se ona primjenjuje; u toj vezi se grupe nazivaju i »brojevima«. Tako se grupa π_3 naziva Eulerovim brojem, a grupa π_4 Reynoldsovim brojem. Kad je grupa sva sastavljena od parametara, tj. kad predstavlja uvjet sličnosti (v. dalje), ona se naziva i kriterijem, npr. Reynoldsov kriterij. Eulerova grupa primjer je tzv. »grupe tražene veličine«, tj. sadrži veličinu Δp za koju se traži funkcijska zavisnost od veličina sadržanih u ostalim grupama. Bezdimenzijske grupe se obično označuju početnim slovima njihova imena ili slovom N i početnim slovima njihova imena kao indeksom: Re ili N_{Re} je Reynoldsov broj, Eu ili N_{Eu} Eulerov.

Prema π-teoremu vrijedi odnos:

$$\mathrm{Eu} = \varphi\left(\mathrm{Re}, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \quad \text{odn.} \quad \frac{\Delta p}{\varrho\, v^2} = \varphi\left(\frac{d\, v\, \varrho}{\eta}, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right).$$

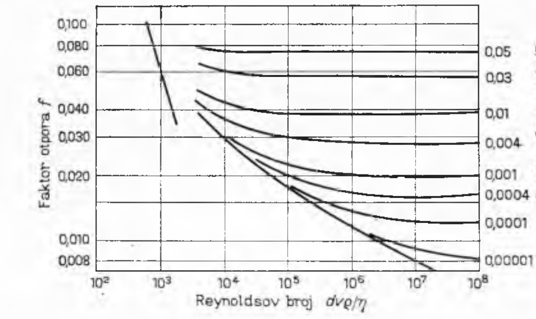
Da bi dimenzijska analiza dala najbolje rezultate, treba je kombinirati sa što više drugih informacija o istraživanoj pojavi. Tako je u našem slučaju poznato da je iz teorijskih razloga pad pritiska proporcionalan duljini cijevi, tj. može se pisati:

$$\mathrm{Eu} = \frac{l}{d}\,\psi\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right), \quad \text{odn.} \quad \mathrm{Eu}\cdot\frac{d}{l} = \psi\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right).$$

Bezdimenzijski broj $\mathrm{Eu}\cdot d/l = f/2$ zove se Fanningov faktor (faktor otpora ili trenja). To uvršteno u gornju jednadžbu, sa $\mathrm{Eu} = \Delta p/\varrho\, v^2$, daje

$$\Delta p = f \cdot \frac{\varrho\, v^2}{2} \cdot \frac{l}{d}\,.$$

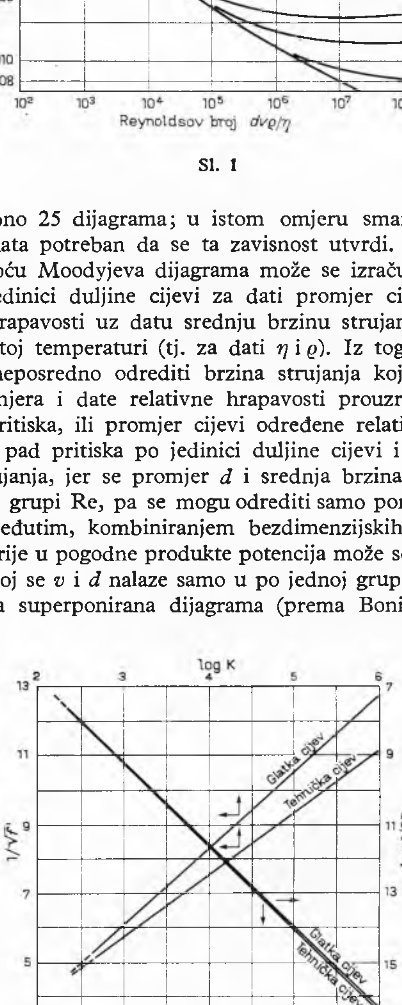
To je tzv. Darcy-Weissbachova jednadžba za izračunavanje pada pritiska u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka. O obliku funkcije $\frac{f}{2} = \psi\,(\mathrm{Re}, \varepsilon/d)$ dimenzijska analiza — kako je naprijed obrazloženo — ne može reći ništa, on se mora odrediti eksperimentalno. Sl. 1 grafički prikazuje funkcijsku zavisnost između Fanningova faktora, Reynoldsova broja i relativne hrapavosti ε/d prema eksperimentima različitih autora (Moodyjev dijagram). Zahvaljujući dimenzijskoj analizi, tim jednim dijagramom omogućen je potpun prikaz zavisnosti između 5 varijabla, za koji bi inače



Sl. 1

bilo potrebno 25 dijagrama; u istom omjeru smanjen je i broj eksperimenata potreban da se ta zavisnost utvrdi.

S pomoću Moodyjeva dijagrama može se izračunati pad pritiska po jedinici duljine cijevi za dati promjer cijevi određene relativne hrapavosti uz datu srednju brzinu strujanja date tekućine na datoj temperaturi (tj. za dati η i ϱ). Iz tog dijagrama se ne može neposredno odrediti brzina strujanja koja će u cijevi datog promjera i date relativne hrapavosti prouzrokovati određen pad pritiska, ili promjer cijevi određene relativne hrapavosti za dati pad pritiska po jedinici duljine cijevi i datu srednju brzinu strujanja, jer se promjer d i srednja brzina v nalaze i u grupi f i u grupi Re, pa se mogu odrediti samo ponovljenim kušanjem. Međutim, kombiniranjem bezdimenzijskih grupa jedne potpune serije u pogodne produkte potencija može se dobiti druga serija u kojoj se v i d nalaze samo u po jednoj grupi. Sl. 2 prikazuje u dva superponirana dijagrama (prema Bonilli) korelaciju



Sl. 2

između takvih modificiranih bezdimenzijskih grupa: s jedne strane između modificiranog Reynoldsovog broja

$$\mathrm{Re}' = \frac{w}{d\eta}$$

i tzv. faktora veličine (size factor, SF):

$$\mathrm{SF} = (\mathrm{Re}')^{5/2} \cdot (f')^{1/2} = \left[\frac{(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}l)\,\varrho\, w^3}{\eta^5}\right]^{1/2},$$

gdje je f' modificirani faktor trenja,

$$f' = \frac{(-\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}l)\,\varrho\, d^5}{w^2}\,,$$

s druge strane između modificiranog faktora trenja f' i tzv. von Kármánovog broja

$$K = Re'(f')^{1/2} = \frac{[(-dp/dl)\,\varrho\,d^3]^{1/2}}{\eta}.$$

U tim brojevima znači w masenu brzinu strujanja (dimenzija M/T), a $-dp/dl$ gradijent pritiska, tj. pad pritiska po jedinici duljine cijevi. U paru Re'-SF pojavljuju se $-dp/dl$ i d samo jedanput, u paru K-f' pojavljuje se w samo jedanput, pa se taj dijagram može upotrijebiti za izračunavanje sve tri te veličine bez kušanja. Varijacije u relativnoj hrapavosti nisu pri tom uzete u obzir.

Upotreba matrica (i ev. determinanata uz primjenu Cramerova pravila, v. Sistemi linearnih jednadžbi u članku *Aritmetika i algebra,* TE 1, str. 382) olakšava rutinsko izračunavanje bezdimenzijskih grupa, ali nije bitno za Buckinghamovu metodu. Umjesto da se homogeni sistem linearnih jednadžbi napiše na osnovu matrice dimenzija i r određuje kao rang te matrice, može se r odrediti kušanjem kao maksimalni broj varijabla koje ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu, a homogeni sistem linearnih jednadžbi napisati na osnovu jedn. (10), npr. u našem primjeru: $[M^0L^0T^0] = [ML^{-1}T^{-2}]^{p_1} \cdot [L]^{p_2} \cdot [LT^{-1}]^{p_3} \cdot [ML^{-1}T^{-1}]^{p_4} \cdot [MT^{-3}]^{p_5}$. Izabrali smo vrijednosti $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ za π_3 i $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ za π_4 jer želimo da dobijemo u jednoj bezdimenzijskoj grupi Δp, a u drugoj d u prvoj potenciji i da svaka od te dvije varijable bude samo u jednoj od obiju bezdimenzijskih grupa π_3 i π_4. (Budući da je $r = 3$ maksimalni broj varijabli koji ne može tvoriti bezdimenzijsku grupu, 4 varijable su dovoljne za obrazovanje svake grupe.) V. također izvod aerodinamičkih koeficijenata u članku *Aerodinamička sila i moment* (TE 1, str. 10).

Pri praktičnoj upotrebi bezdimenzijskh funkcija (kriterijskih jednadžbi i grafikona) numeričke vrijednosti bezdimenzijskih varijabli dobivaju se uvrštavanjem podataka u jedinicama bilo kojeg koherentnog sistema mjera. Pri tom se mogu upotrijebiti i jedinice različitih sistema za različite kriterije, ako je to zgodno s obzirom na jedinice u kojima su podaci raspoloživi.

Metoda sistematskog kušanja. Često se može analiza dimenzija znatno pojednostavniti, i do potpunog izbjegavanja postavljanja homogenog sistema linearnih jednadžbi, ako se iskorištava prethodno znanje o bezdimenzijskim grupama i primijeni sistematsko kušanje. Tako, npr, ako je ispitivana pojava skopčana sa strujanjem viskozne tekućine, može se odmah napisati kao jedna od traženih grupa Reynoldsov broj i iz spiska varijabla brisati viskozitet η. Neke bezdimenzijske kombinacije varijabla upravo skaču u oči, druge se mogu naći nakon kratkog kušanja. Za svaku tako napisanu grupu briše se po jedna varijabla iz spiska; ponekad se s preostalima mora provesti (znatno pojednostavnjena) analiza po Buckinghamu, ali često se postupak kušanja i brisanja varijabli iz spiska može nastaviti dok ne ostane r varijabli koje ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu.

Primjer 2. Treba odrediti potpunu seriju bezdimenzijskih grupa za konvektivni prelaz topline između čvrste površine (zida) i fluidnog medija. Neka vlada stacionarno stanje, neka su svi izvori topline izvan sistema, neka je brzina strujanja fluida mala prema brzini zvuka; razlike pritiska u sistemu, razlike gustoće medija, utjecaj temperature na materijalne konstante i utjecaj prirode zida na prijenos topline neka su zanemarljivi. Zbivanje će se promatrati samo u jednoj prostornoj dimenziji.

Pod tim uvjetima spisak relevantnih varijabla s oznakama i s dimenzijama u nekoherentnom sistemu dimenzija [HMLTΘ] koji je još najuobičajeniji u tehničkoj praksi [H je toplina (jedinica kcal), Θ razlika temperature (°K)] jest ovaj (v. *Prenos topline*):

Varijabla	*Oznaka*	*Dimenzija*
Specifična masa	ϱ	ML^{-3}
Specifična toplina	c_p	$HM^{-1}\Theta^{-1}$
Toplinska vodljivost	λ	$HL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}$
Dinamički viskozitet	η	$ML^{-1}T^{-1}$
Volumni koeficijent rastezanja	β	Θ^{-1}
Ubrzanje sile teže	g	LT^{-2}
Koeficijent prelaza topline	α	$HL^{-2}T^{-1}\Theta^{-1}$
Brzina (rubni uvjet)	v_0	LT^{-1}
Razlika temperature između zida i medija	t_0	Θ
Dužina	l	L
Mjesna koordinata	x	L
Temperatura	t	Θ
Brzina prisilnog strujanja	v	ML^{-1}
Mehanički ekvivalent topline	L	$ML^2T^{-2}H^{-1}$

Odmah možemo obrazovati simplekse $\pi_1 = v/v_0$, $\pi_2 = x/l$ i $\pi_3 = t/\Delta t_0$ i Reynoldsov broj $\pi_4 = Re = v_0\,l\,\varrho/\eta$; za to brišemo iz spiska varijabla v, x, t i η. Pri promatranju dimenzija preostalih varijabla neposredno skaču u oči bezdimenzijski brojevi $\pi_5 = \beta \cdot \Delta t_0$ i $\pi_6 = v_0^2/g\,l$; za to brišemo iz spiska varijabli β i g. Ako uzmemo veličinu λ i pokušamo da je množenjem ili dijeljenjem s drugim veličinama učinimo bezdimenzijskom, naskoro nam to uspijeva kombinacijom $\pi_7 = \lambda/\varrho\,v_0\,c_p\,l$; isto tako nalazimo bezdimenzijski koeficijent α kao $\pi_8 = \alpha/\varrho\,v_0\,c_p$; iz spiska varijabli se brišu λ i α. Na kraju ostaju u spisku 4 varijable: ϱ, c_p, Δt_0, v_0 i l, i dimenzijska konstanta L. S tim varijablama i dimenzijskom konstantom ne može se obrazovati nezavisna bezdimenzijska grupa; budući da su sve navedene varijable već sadržane u napisanim bezdimenzijskim grupama, svaka grupa koja bi se između njih mogla obrazovati, npr. $\Delta t_0\,c_p/v_0^2$, nije nezavisna od bezdimenzijskih grupa $\pi_1, \ldots, \pi_8$. To ukazuje na to da ni varijable u spisku nisu sve među sobom nezavisne. (Jedan je nedostatak čisto računskog određivanja bezdimenzijskih grupa što on daje bez diskriminacije zavisne i nezavisne grupe ako nisu sve polazne varijable nezavisne među sobom.) Dimenzijska konstanta L nije se pojavila ni u jednoj bezdimenzijskoj grupi i ne može uopće ni s kojim varijablama u spisku tvoriti bezdimenzijsku grupu; nju dakle nije uopće trebalo unositi u spisak. Ona je uzeta u spisak zbog toga što u dimenzijskom sistemu [HMLTΘ] energija ima dvije dimenzije, [H] i $[ML^2T^{-2}]$, pa se pretpostavljalo da treba uzeti u spisak dimenzijsku konstantu koja predstavlja njihov odnos. Međutim, to nije bilo potrebno jer se u traženoj funkciji ne pojavljuju istovremeno toplinska i mehanička energija.

Analiza je dakle dala 8 među sobom nezavisnih bezdimenzijskih grupa: 3 simpleksa i 5 kriterija kojima su data ova imena:

$$Re = \frac{\varrho\,v_0\,l}{\eta} \qquad \text{Reynoldsov broj}$$

$$\frac{1}{\pi_5} = Ga = \frac{1}{\beta\,\Delta t_0} \qquad \text{Gay-Lussacov broj}$$

$$Fr = \frac{v_0^2}{g\,l} \qquad \text{Froudeov broj}$$

$$Pe = \frac{v_0\,c_p\,l}{\lambda} \qquad \text{Pécletov broj}$$

$$St = \frac{\alpha}{\varrho\,v_0\,c_p} \qquad \text{Stantonov broj}$$

Kombinacijom tih grupa dobivaju se ove često upotrebljavane bezdimenzijske grupe:

$$Nu = St \cdot Pe = \frac{\alpha\,d}{\lambda} \qquad \text{Nusseltov broj}$$

$$Pr = Pe/Re = \frac{\eta\,c_p}{\lambda} \qquad \text{Prandtlov broj}$$

$$Gr = Fr \cdot Re^2/Ga = \frac{g\,l^3\,\varrho^2}{2}\,\beta\,\Delta t_0 \qquad \text{Grashofov broj}$$

(Oni se dobivaju i izravno dimenzijskom analizom ako se drukčije izabere onih r (5) »mjerećih« varijabli.)

Tako je npr. prelaz topline sa fluida koji struji u cijevi na zid cijevi prikazan kriterijskom jednadžbom:

$$Nu = f(Re, Pr),$$

a prelaz topline s čvrste površine na fluid slobodnom konvekcijom jednadžbom

$$Nu = f(Gr, Pr).$$

U ovom posljednjem slučaju pokazalo se da se zadovoljavajuća korelacija eksperimentalnih podataka dobiva jednadžbom oblika

$$Nu = k \cdot f(Gr \cdot Pr)^n$$

tj. ako se grupe Gr i Pr spoje u jednu bezdimenzijsku grupu. U tom se slučaju dakle postiže da se zavisnost između 9 varijabla može grafički prikazati jednom jedinom krivuljom!

U brodogradnji upotrebljava se pod imenom Froudeov broj drugi korijen gore navedenog Froudeova broja: $Fr = V/\sqrt{gL}$.

Bezdimenzijski koeficijenti prelaza mase, analogni Stantonovu i Nusseltovu broju, zovu se maseni Stantonov broj (ili Stantonov broj druge vrste) $St' = \frac{k}{v}$ i Sherwoodov broj (također zvan maseni Nusseltov broj ili Nusseltov broj druge vrste) $Sh = \frac{k\,l}{D}$, gdje je k koeficijent prelaza mase.

Rayleighjeva metoda. Umjesto da se Pécletov i Stantonov broj odrede kušanjem time što se po jedna varijabla učini bezdimenzijskom, može se to provesti računski metodom koja se i općenito može upotrijebiti za izračunavanje svih bezdimenzijskih grupa. Po toj metodi izabere se za svaku od $(n - r)$ očekivanih bezdimenzijskih grupa jedna veličina »vodilica« koja se izrazi kao produkt potencija od r drugih veličina iz spiska, koje sadrže po jednu od osnovnih dimenzija upotrijebljenog dimenzijskog sistema. Veličine vodilice su one veličine koje u neku ruku imaju istaknutu ulogu u bezdimenzijskom kriteriju; npr. Reynoldsov broj je kao neki bezdimenzijski predstavnik viskoziteta η, Froudeov broj predstavnik sile teže (kroz g), Stantonov broj i Nusseltov broj predstavnici koeficijenta α, itd. (v. dalje Sličnost u ovom članku). Tako se npr. za vodilice λ i α može napisati:

$$\lambda = K_1 \cdot \varrho^{a_1} \cdot v^{a_2} \cdot c_p^{a_3} \cdot l^{a_4},$$
$$\alpha = K_2 \cdot \varrho^{a_1} \cdot v^{a_2} \cdot c_p^{a_3} \cdot l^{a_4}.$$

Ako se umjesto veličina uvrste dimenzije, dobije se:

$$[\mathrm{HL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}}] = [\mathrm{ML^{-3}}]^{a_1} \cdot [\mathrm{LT^{-1}}]^{a_2} \cdot [\mathrm{HM^{-1}\,\Theta^{-1}}]^{a_3} \cdot [\mathrm{L}]^{a_4},$$
$$[\mathrm{HL^{-2}T^{-1}\Theta^{-1}}] = [\mathrm{ML^{-3}}]^{b_1} \cdot [\mathrm{LT^{-1}}]^{b_2} \cdot [\mathrm{HM^{-1}\,\Theta^{-1}}]^{b_3} \cdot [\mathrm{L}]^{b_4}.$$

Iz toga slijede sistemi jednadžbi:

$$\begin{array}{lll}
\text{za H:} & 1 = a_3 & 1 = b_3 \\
\text{za M:} & 0 = a_1 - a_3 & 0 = b_1 - b_3 \\
\text{za L:} & -1 = 3a_1 + a_2 + a_4 & -2 = -3\,b_1 - b_2 - b_4 \\
\text{za T:} & -1 = -a_2 & -1 = -b_2 \\
\text{za } \Theta\text{:} & -1 = a_3 & -1 = b_3.
\end{array}$$

Rješenja tih sistema jesu:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = 1, \quad b_4 = 0.$$

Prema tome jednadžbe glase:

$$\lambda = \varrho\, v\, c_p\, l \qquad \text{i} \qquad \alpha = \varrho\, v\, c_p,$$

a bezdimenzijski brojevi:

$$K_1 = \mathrm{Pe} = \frac{\lambda}{\varrho\, v\, c_p\, l} \qquad K_2 = \mathrm{St} = \frac{\alpha}{\varrho\, v\, c_p}.$$

Ovaj se način izračunavanja bezdimenzijskih grupa zove Rayleighjeva metoda. Prednost joj je što se po njoj bezdimenzijske grupe od samog početka u neku ruku sistematski sređuju tako da se dobivaju grupe među kojima su varijable raspodijeljene na način najpogodniji za upotrebu.

Dosad su prikazane metode određivanja bezdimenzijskih grupa koje se služe dimenzijskom analizom u užem smislu te riječi. Radi zaokruženja prikaza obradit će se u nastavku metode koje se služe pojmovima sličnosti i analogije, pri čemu će se objasniti i fizički smisao bezdimenzijskih kriterija.

Sličnost. U analogiji s geometrijskom sličnošću, pri kojoj u sličnim geometrijskim tvorevinama odgovarajuće dužine (površine, volumeni) stoje među sobom u konstantnim omjerima, može se definirati *fizička sličnost*. Kaže se da su stanja ili zbivanja u dva sistema s obzirom na određenu veličinsku vrstu slična ako između tačaka jednog i drugog sistema postoji uzajamno jednoznačna pridruženost — tj. ako svakoj tački u jednom sistemu odgovara jedna i samo jedna (njoj »homologna«) tačka u drugom — i ako fizičke veličine dotične vrste u homolognim tačkama obaju sistema i u homolognim vremenima stoje među sobom u konstantnom omjeru. (»U homolognim vremenima« znači da se, npr., pri periodskim promjenama stanja ne uspoređuju vrijednosti koje veličine u homolognim tačkama zauzimaju u isto vrijeme, nego vrijednosti što ih zauzimaju u razmacima vremena koji među sobom stoje u omjeru trajanja periode u jednom i drugom sistemu.) Fizička stanja mogu biti s obzirom na neku veličinsku vrstu slična a da inače nisu slična, pa ni geometrijski. Ako su dva stanja ili zbivanja slična s obzirom na sve veličinske vrste od kojih zavise, kaže se da su *potpuno slična*. U tom slučaju ona su i geometrijski slična. (Više o tome v. *Modeliranje* i *Sličnost*.) Iz jednakosti omjera homolognih dužina u dvije slične geometrijske tvorevine, npr. homolognih stranica dvaju sličnih trokuta:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

slijedi da je nuždan i dovoljan uvjet za sličnost dvaju trokuta jednakost dvaju omjera stranica jednog i drugog trokuta, npr.:

$$k_1 = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}, \qquad k_2 = \frac{B}{C} = \frac{b}{c}.$$

k_1 i k_2 mogu se nazvati kriterijima sličnosti trokuta. Takvih parova kriterija može se očito obrazovati ∞^2, stavljajući u omjer sve moguće linearne elemente trokuta, ali dva su nužna i dovoljna da karakteriziraju jedan trokut i istovremeno sve njemu slične. Analogno vrijedi i za fizičku sličnost. Jedna potpuna serija od $(n - r)$ kriterija (čistih brojeva koji predstavljaju omjere istovrsnih veličina), između njih ∞^{n-r} koji su mogući, određuje svako fizičko stanje ili zbivanje i istovremeno sva njemu potpuno slična, pri čemu je n broj veličinskih vrsta od kojih zavisi to stanje ili zbivanje, a r broj onih između njih kojima se sve ostale mogu prikazati. Ta potpuna serija od $(n - r)$ kriterija sličnosti identična je s potpunom serijom bezdimenzijskih grupa koja se dobiva analizom dimenzija. Zbog toga tvorenje omjera istovrsnih veličina koje određuju slična stanja ili zbivanja predstavlja jednu od metoda određivanja bezdimenzijskih grupa.

Prema veličinama u odnosu na koje postoji sličnost, razlikuje se i više vrsta fizičke sličnosti. Ako su to brzine i akceleracije, govori se o kinematičkoj sličnosti, ako su to sile, o dinamičkoj sličnosti. Osim toga se susrećemo sa statičkom sličnošću, s termodinamičkom sličnošću i sa sličnošću u kemijsko-tehničkim zbivanjima, također — iako rjeđe — s električnom i magnetskom sličnošću. U nastavku ćemo pokazati da su svi naprijed dimenzijskom analizom dobiveni bezdimenzijski brojevi kriteriji dinamičke i termodinamičke sličnosti.

Strujanje u cijevi (prema primjeru 1). Sile koje u našem hidrodinamičkom sistemu djeluju na svaku česticu jesu: sila pritiska koja održava stacionarno gibanje, sile ustrajnosti (inercije) koje se pojavljuju uslijed fluktuacija brzine pri turbulentnom strujanju i sila unutarnjeg trenja ili viskoziteta (o njihovoj prirodi v. *Difuzija*). U slučaju stacionarnog strujanja u horizontalnoj cijevi te se sile mogu izraziti varijablama navedenim na str. 343 ovako:

$$\begin{array}{lll}
\text{sila pritiska:} & F_p = \Delta p \cdot d^2 & \text{(pritisak} \times \text{površina)}, \\
\text{sila ustrajnosti:} & F_i = d^3\,\varrho \cdot \dfrac{v^2}{d} & \text{(masa} \times \text{akceleracija)}, \\
\text{sila viskoziteta:} & F_v = \eta\,\dfrac{v}{d} \cdot d^2 & \text{(napon smicanja} \times \text{površina)}.
\end{array}$$

(Svaka je dužina izražena sa d, svaka površina sa d^2 a svaki volumen sa d^3 jer se sve druge dužine, površine i volumeni od tako izraženih razlikuju samo za bezdimenzijski i u slučaju geometrijske sličnosti konstantan faktor.) Uvjeti su sličnosti konstantni omjeri između tih sila. Potpuna serija kriterija dinamičke sličnosti u ovom je slučaju, prema tome:

$$\frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta p\, d^2}{d^2\,\varrho\, v^2} = \frac{\Delta p}{\varrho\, v^2} = \mathrm{Eu}$$
$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{d^2\,\varrho\, v^2}{\eta\, v\, d} = \frac{d\, v\, \varrho}{\eta} = \mathrm{Re}$$

(Treći omjer, F_p/F_v, nije, dakako, nezavisan od prva dva.) K tome dolaze uvjeti geometrijske sličnosti: l/d i ε/d.

Konvektivni prenos topline (prema primjeru 2). Taj se problem može promatrati kao energetski problem. Ukupna energija koja se dodaje fluidu radi održanja stacionarnog strujanja (a koja se sastoji od mehaničke energije dodate radi izazivanja prisilnog strujanja brzine v i/ili energije konvektivnog strujanja izazvanog silom teže i ekspanzijom fluida uslijed razlike temperature) troši se na prevladavanje otpora strujanju, i to kako otpora uslijed unutarnjeg trenja fluida, tako i otpora uslijed pulzacija brzine i stvaranja vrtloga (turbulencije). Toplinska energija dovodi se u fluidu zidu ili se od njega odvodi kako kondukcijom (provođenjem), tako i konvekcijom. Budući da je posrijedi zbivanje a ne stanje, možemo uzeti kao uvjet sličnosti jednakost omjera odgovarajućih fluksova energije (količinâ energije koje prolaze kroz jedinicu površine u jedinici vremena) u homolognim presjecima sličnih sistema.

Fluksovi energija [sila × (put kroz vrijeme = brzina) kroz površinu], mogu se izraziti varijablama iz spiska na str. 345 kako je navedeno u nastavku.

Mehanička energija:

energija unutarnjeg trenja:

$$q_v = \eta \frac{v}{d} d^2 \cdot v \cdot \frac{1}{d^2} = \eta \frac{v^2}{d} = \frac{\eta}{\varrho} \cdot \frac{v^2 \varrho}{d},$$

energija turbulencije:

$$q_t = d^3 \varrho \frac{v^2}{d} \cdot \frac{v}{d^2} = d\, v \cdot \frac{v^2 \varrho}{d},$$

energija ekspanzije:

$$q_e = \varrho \beta \Delta t\, d^3 \cdot \frac{v^2}{d} \cdot \frac{1}{d^2} = \beta \Delta t\, d\, v \cdot \frac{v^2 \varrho}{d}$$

(povećanje specifične mase po Gay-Lussacovu zakonu iznosi $\varrho \cdot \beta \Delta t$),

energija teže:

$$q_g = d^3 \varrho g \cdot v \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{g d^2}{v} \cdot \frac{v^2 \varrho}{d}.$$

Toplinska energija:

toplina prenijeta provođenjem:

$$q_p = \frac{\lambda}{d} \cdot \Delta t = \frac{\lambda}{\varrho c_p} \cdot \frac{\varrho c_p \Delta t}{d} \quad \text{(po Fourierovu zakonu)},$$

toplina prenijeta konvekcijom:

$$q_k = v \varrho c_p \cdot \Delta t = v\, d \cdot \frac{\varrho c_p \Delta t}{d}$$

(brzina v je također volumen prenijet kroz jedinicu površine u jedinici vremena),

toplina prenijeta s tekućine na zid (ili obrnuto):

$$q_z = \alpha \cdot \Delta t = \frac{\alpha d}{\varrho c_p} \cdot \frac{\varrho c_p \Delta t}{d} \quad \text{(po Newtonovu zakonu)}.$$

Omjeri ovih fluksova energije na homolognim mjestima zbivanja uvjeti su sličnosti. Međutim, da bi ti uvjeti u svakoj tački (one jedne prostorne dimenzije u kojoj promatramo ispitivano zbivanje) mogli biti ispunjeni ako su ispunjeni u jednoj tački, dalji je uvjet da i gradijenti energijâ, tj. promjene energija pri kretanju fluida u toj dimenziji, budu na homolognim mjestima jednaki. Ti su gradijenti prikazani izrazima $v^2\varrho/d$ i $\varrho c_p \Delta t$ koji su u gornjim jednadžbama za pojedine energije desno izdvojeni (energija sadržana u jedinici volumena kroz vrijeme kroz put). S uvjetom da oni moraju biti jednaki:

$$\frac{v^2 \varrho}{d} = \frac{\varrho c_p \Delta t}{d},$$

dobivamo kao omjere navedenih fluksova energije ove kriterije sličnosti:

$$\frac{q_t}{q_v} = \frac{q_k}{q_v} = \frac{v d \varrho}{\eta} = \mathrm{Re}$$

$$\frac{q_t}{q_g} = \frac{q_k}{q_g} = v\, d \cdot \frac{v}{g d^2} = \frac{v^2}{g d} = \mathrm{Fr}$$

$$\frac{q_t}{q_p} = \frac{q_k}{q_p} = v\, d \cdot \frac{\varrho c_p}{\lambda} = \frac{\varrho v c_p d}{\lambda} = \mathrm{Pe}$$

$$\frac{q_z}{q_t} = \frac{q_z}{q_k} = \frac{\alpha d}{\varrho c_p} \cdot \frac{1}{v d} = \frac{\alpha}{\varrho v c_p} = \mathrm{St}$$

$$\frac{q_e}{q_t} = \frac{q_e}{q_k} = \frac{1}{\beta \Delta t} = \mathrm{Ga}.$$

Kako se vidi, fizički smisao bezdimenzijskih grupa kao kriterija sličnosti nije jednoznačan. Tako se Reynoldsov broj može tumačiti i kao omjer homolognih sila, i kao omjer energije turbulencije i energije viskoziteta, i kao omjer topline prenijete konvekcijom i energije viskoziteta. Froudeov broj je omjer energija, ili omjer sila, ili omjer ubrzanja. Nusseltov broj prema gornjemu bi bio omjer topline prenijete na zid i energije prenijete do zida provođenjem, ali može se za nj dati i drugo tumačenje na osnovu predodžbe o laminarnom sloju uz zid. Tom sloju, kroz koji se toplina može prenijeti samo provođenjem, pripisuje se debljina δ takva da se uz datu provodljivost λ fluida prenosi ona količina topline koja je eksperimentalno utvrđena. To znači da je

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t = \alpha \Delta t.$$

Iz toga slijedi da je $\alpha \cdot \delta/\lambda = 1$. S druge strane, $\mathrm{Nu} = \alpha\, d/\lambda$. Iz posljednje dvije jednadžbe slijedi: $\mathrm{Nu} = d/\delta$, tj. Nusseltov broj je kriterij geometrijske sličnosti hipotetskih laminarnih slojeva koje smo snabdjeli potrebnim fizičkim i geometrijskim svojstvima.

Analogija je fizička srodnost među pojavama koja je izražena time što su analogne pojave matematički prikazane formalno identičnim jednadžbama. O tome v. Analogija prenošenja mase, toplote i količine kretanja u članku *Difuzija*, str. 306. Ako se kriteriji sličnosti dviju analognih pojava stave u omjer, dobiva se tzv. analogijski bezdimenzijski broj. U slučaju analogije između prenošenja mase, topline i impulsa (količine kretanja) bezdimenzijski kriteriji sličnosti koji se stavljaju u omjer jesu: Reynoldsov broj za prenos impulsa, Pécletov broj za prenos topline i tzv. Pécletov broj druge vrste (maseni Pécletov broj) $\mathrm{Pe}' = \frac{d\,v}{D}$, gdje je D koeficijent difuzije, za prenos mase. Ako se uvrsti u Reynoldsovu broju $\nu = \eta/\varrho$ (kinematički viskozitet), a u Pécletovu broju (prve vrste) $\lambda/\varrho c_p = a$ (toplinska difuzivnost ili koeficijent temperaturne vodljivosti), postaje jasno vidljiv formalni identitet uvjeta sličnosti spomenutih triju pojava, koji je posljedica formalne jednakosti jednadžbi kojima su definirani D, ν i a:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,d}{\nu}, \quad \mathrm{P\acute{e}} = \frac{v\,d}{a}, \quad \mathrm{P\acute{e}}' = \frac{v\,d}{D}.$$

Analogijski bezdimenzijski brojevi dobivaju se kao omjeri tih kriterija sličnosti:

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta}{\varrho} \cdot \frac{\varrho c_p}{\lambda} = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \mathrm{Pr} \text{ (Prandtlov broj)},$$

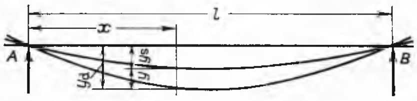
$$\frac{\mathrm{Pe}'}{\mathrm{Pe}} = \frac{a}{D} = \mathrm{Le} \text{ (Lewisov broj)},$$

$$\frac{\mathrm{Pe}'}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{D} = \mathrm{Sc} \text{ (Schmidtov broj)}.$$

Analogijski bezdimenzijski brojevi na neki način izražavaju u kojoj mjeri formalnoj analogiji odgovara identičnost mehanizma pojave: što je takav broj različitiji od 1, to se i mehanizmi formalno analognih pojava više razlikuju. Analogijski bezdimenzijski brojevi sadrže samo materijalne konstante fluida, a ne varijable procesa, pa su stoga praktički vrlo pogodni kao argumenti kriterijskih funkcija.

Određivanje bezdimenzijskih kriterija iz diferencijalnih jednadžbi. Ako se za jednu pojavu ili zbivanje raspolaže diferencijalnim jednadžbama (makar aproksimativnim) i rubnim uvjetima, treba se njima u dimenzijskoj analizi koristiti pri sastavljanju spiska mjerodavnih varijabli: sve veličine — i samo one veličine — koje dolaze u potpunoj seriji diferencijalnih jednadžbi i u rubnim uvjetima kojima je opisana neka pojava, treba da uđu u taj spisak. Međutim, iz diferencijalnih jednadžbi, iako ih ne umijemo integrirati, mogu se izravno odrediti bezdimenzijske varijable kriterijske jednadžbe dotične pojave. Dobiva se potpuna serija bezdimenzijskih brojeva ako se polazi od svih za opis ispitane pojave potrebnih (među sobom nezavisnih) diferencijalnih jednadžbi i rubnih uvjeta; ako nedostaje koja od tih relacija, dobiva se toliko bezdimenzijskih grupa manje koliko ta relacija daje uvjetnih jednadžbi, tj. dobiva se nijedna, jedna ili više bezdimenzijskih grupa manje. Tehniku određivanja bezdimenzijskih grupa iz diferencijalnih jednadžbi ilustrirat će se jednim jednostavnim primjerom.

Primjer 3. Odrediti mjerodavni kriterij sličnosti za transverzalno titranje štapova s jednolično raspodijeljenom masom



Sl. 3

prema slici 3. Diferencijalna jednadžba titranja glasi:

$$E\,J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

gdje je E modul elasticiteta, J ekvatorijalni moment tromosti, μ masa opterećenja po jedinici duljine, y razlika između dinamičkog i statičkog progiba štapa ($y_d - y_s$), x udaljenost presjeka od oslonca, t vrijeme.

Uočimo dvije slične pojave opisane upravo navedenom diferencijalnom jednadžbom: za jednu neka su varijable označene indeksom 1, za drugu indeksom 2. Prema definiciji sličnosti važi da je:

$$\xi_{k1} = c_k\, \xi_{k2},$$

gdje su ξ_{k1}, ξ_{k2} varijable pojave 1 odn. 2, a c_k konstante. Prema tome, ako se varijable pojave 2 izraze s pomoću varijabli pojave 1 i uvrste u diferencijalnu jednadžbu, dobiva se:

$$c_E E_1 \cdot c_J\, J_1 \cdot \frac{\partial^4 (c_y\, y_1)}{\partial (c_x^4\, x_1^4)} = -\, c_\mu\, \mu_1 \frac{\partial^2 (c_y\, y_1)}{\partial (c_t^2\, t_1^2)}.$$

Izvucimo konstante pred produkte i diferencijale:

$$c_E\, c_J \cdot E_1\, J_1 \cdot \frac{c_y}{c_x^4} \cdot \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} = -\, c_\mu\, \mu_1 \frac{c_y \cdot \partial^2 y_1}{c_t^2\, \partial t_1^2}.$$

Podijelimo li ovu jednadžbu s jednadžbom za pojavu 1, dobivamo:

$$\frac{c_E\, c_J\, c_y}{c_x^4} = \frac{c_\mu\, c_y}{c_t^2}.$$

Konstanta c_k je jednaka za sve veličine iste vrste, te je stoga $c_x = c_y = c_l$ (v. sl. 3), pa gornja jednadžba postaje

$$\frac{c_E\, c_J}{c_l^4} = \frac{c_\mu}{c_t^2}.$$

Uvrste li se u ovu jednadžbu jednadžbe $c_k = \xi_{k1}/\xi_{k2}$ i skupe li se sve varijable s indeksom 1 na jednoj strani a varijable s indekskom 2 na drugoj, dobiva se:

$$\frac{E_1\, J_1\, t_1^2}{\mu_1\, l_1^4} = \frac{E_2\, J_2\, t_2^2}{\mu_2\, l_2^4},$$

ili općenito:

$$\frac{E\, J\, t^2}{\mu\, l} = \text{konst.} = C^2.$$

To je, dakle, kriterij sličnosti za istraženu pojavu. Budući da ima samo jedna bezdimenzijska grupa, iz nje slijedi i oblik integrala diferencijalne jednadžbe, npr.

$$t = \text{konst.}\; l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E\,J}}.$$

U ovom slučaju može se odrediti čak i konstanta. Promatranje polazne diferencijalne jednadžbe pokazuje da bezdimenzijska konstanta predstavlja omjer kvadrata vremenski promjenljivog kuta (βt) i četvrte potencije kuta (αl) promjenljivog s položajem x ($x = l$):

$$\frac{E\, J\, t^2}{\mu\, l^4} = \frac{(\beta\, t)^2}{(\alpha\, l)^4} = \frac{(\beta\, t)^2}{\pi^4}$$

ili

$$\beta = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E\,J}{\mu}},$$

iz čega slijedi, ako je t trajanje titraja:

$$t = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\, l^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{E\,J}}.$$

S pomoću teorije sličnosti riješili smo diferencijalnu jednadžbu bez integracije!

Kako se vidjelo, u prethodnom primjeru upotrijebljene su konstante mjerila c_k za to da, takoreći, izvuku na vidjelo dimenzijski kostur jednadžbe. To se često može i bez tih konstanti, kako će se pokazati u posljednjem primjeru.

Primjer 4. Pri sipanju zrnatog ugljena, pijeska, rude itd. preko kosina i na hrpe, zanimljivo je znati kako se zrna pri tom razdvajaju po veličini, specifičnoj masi, koeficijentu trenja itd. Razmotrimo najprije klizanje takvog zrnja preko kosine. Pojedina su zrna, pretpostavljamo, toliko teška da otpor zraka i sile adhezije nemaju utjecaja na zbivanje; kao sile koje djeluju ostaju: sila teže, tromost i trenje među čvrstim tijelima. Diferencijalna jednadžba za klizanje niz kosinu glasi:

$$\varrho\, V \frac{d^2 x}{dt^2} = v\, \varrho\, g \sin\alpha - f\, V\, \varrho\, g \cos\alpha,$$

gdje je V volumen dotičnog zrna, ϱ njegova gustoća, x koordinata položaja, g ubrzanje sile teže, α kut priklona kosine a f koeficijent trenja. Umjesto ubrzanja d^2x/dt^2 uvodimo ekvivalentni izraz v^2/l, pa dobivamo, nakon kraćenja sa V, ovaj dimenzijski kostur prednje diferencijalne jednadžbe:

$$\left[\frac{\varrho\, v^2}{l}\right] = [\varrho\, g] - [f\, \varrho\, g].$$

Dijeljenjem sa ϱg dobivaju se dvije bezdimenzijske varijable:

$$\frac{v^2}{l\,g} = \text{Fr} \quad \text{i}\; f.$$

K tome dolazi još bezdimenzijski kut α.

Iz oblika diferencijalne jednadžbe vidi se da mora biti moguće zbivanje prikazati jednadžbom ovog oblika:

$$\varphi(\text{Fr}, f) = \text{konst.}, \tag{13}$$

pri čemu konstanta zavisi samo od kuta priklona kosine i od oblika zrnâ, ali je nezavisna od njihove veličine ili gustoće. S pomoću takve jednadžbe, nakon što je pokusom na modelu određena konstanta za određeni oblik zrna, može se za stacionarno klizanje zrnja po kosini odrediti Froudeov broj (i time brzina klizanja v) u zavisnosti od koeficijenta trenja i kuta nagiba kosine.

Nestacionarno je zbivanje posrijedi kad se zrnje brzinom v sipa na hrpu: ono će se klizati po pokosu dok uslijed trenja brzina v ne opadne na nulu. U tom slučaju nepoznanica je kut prirodnog pokosa α, i on se može izračunati s pomoću jednadžbe oblika (13) ako su pokusima na modelu određeni oblik funkcije φ i konstanta. Pri planiranju takvih pokusa postavlja se pitanje: s koje visine treba sipati zrnje da bi zbivanje bilo slično zbivanju u velikom mjerilu?

Budući da slobodnim padom s visine h čestica dobiva brzinu $v = \sqrt{2\,g\,h}$, uvjet sličnosti — Froudeov broj — zahtijeva da brojna vrijednost izraza $2\,g\,h/l\,g = 2\,h/l$ bude jednaka za model i za provedbu u velikom mjerilu, a to znači da visinu pada treba mijenjati u istom omjeru kao veličinu zrna.

Kad su već raspoložive potpune diferencijalne jednadžbe za neke pojave (kao npr. Navier-Stokesove jednadžbe u aerodinamici), potpuna serija bezdimenzijskih grupa najbrže i najpouzdanije se određuje s pomoću njih. Međutim, kad bi trebalo za neku pojavu ili zbivanje diferencijalne jednadžbe tek postaviti da bi se mogle odrediti bezdimenzijske varijable, ta metoda nema prednosti pred metodama dimenzijske analize. Ona nije ni brža ni lakša (postaviti diferencijalnu jednadžbu nije uvijek lako) a nije ni pouzdanija, jer se pri sastavljanju spiska varijabli koje treba povezati diferencijalnom jednadžbom može jednako pogriješiti kao pri sastavljanju spiska varijabli za dimenzijsku analizu.

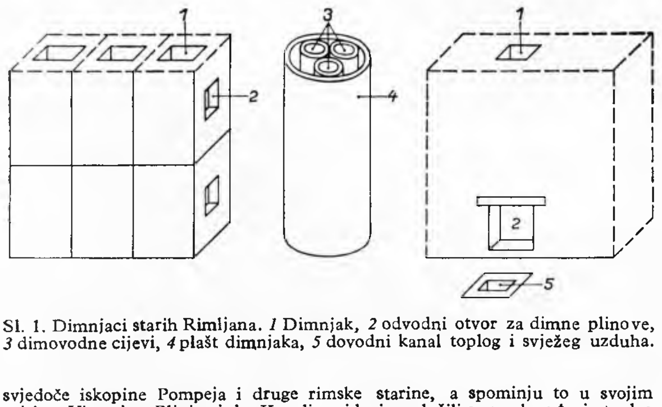
Historijska bilješka. Najstariji bezdimenzijski broj nesumnjivo je Ludolphov broj $\pi = O/d$, omjer opsega i promjera kruga: već Arhimed odredio ga je tačnošću koja još i danas u praksi većinom zadovoljava. Temelje teorije sličnosti položio je Newton (1687) u svojem djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica*, a zakon homogenosti fizičkih jednadžbi izrekao je J. Fourier (1807), ali u tehniku su princip sličnosti uveli tek Froude (1869) i O. Reynolds (1883) za svrhe brodogradnje i za rješavanje problemâ strujanja. Golemo značenje za razvoj teorije sličnosti imali su aerodinamički pokusi na modelima što su ih provodili početkom ovog stoljeća G. Eiffel, L. Prandtl i brojni njihovi suradnici, kao i modelni pokusi što su ih provodili u isto vrijeme W. Nusselt, H. Gröber, H. Reiher, F. Merkel i dr. izučavajući prenos topline. Radove od fundamentalne važnosti za nauku o modeliranju dao je i Stanton. Počevši od 1914 zaslugom niza naučnih radnika (R. C. Tolman 1914, E. Buckingham 1914, J. W. Rayleigh 1915, T. Ehrenfest-Afanassjeva 1916, M. Weber 1919, A. H. Davis 1920, A. H. Gibson 1924, P. W. Bridgman 1922, F. London 1922, F. Eisner 1925, J. Wallot 1926, M. V. Kirpičev, A. A. Guhman i dr.) razvita je iz rezultata tih istraživanja opća teorija sličnosti i dimenzijska analiza. U posljednjih dvadesetak godina dobila je dimenzijska analiza strogo matematičko obrazloženje (za to je zaslužan naročito H. L. Langhaar) i proširena je na nova područja, naročito na područje tehnike kemijskih reakcija i metalurgije (Damköhler, Traustel).

LIT.: *M. Weber*, Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft, u djelu: Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Berlin 1930. — *A. W. Porter*, The method of dimensions, London 1933. — *G. Damköhler*, Das Ähnlichkeitsprinzip bei chemischen Systemen, u djelu: A. Eucken-M. Jakob, Der Chemie-Ingenieur, Bd 3, 1. T., Leipzig 1937. — *R. Esnault-Pelterie*, L'analyse dimensionelle, Lausanne 1946. — *P. W. Bridgman*, Dimensional analysis, New Haven-Oxford ^{6}1949. — *S. Traustel*, Modellgesetze der Vergasung und Verhüttung, Berlin 1949. — *G. Murphy*, Similitude in engineering, New York 1950. — *H. L. Langhaar*, Dimensional analysis and theory of models, New York 1951. — *C. M. Focken*, Dimensional methods and their applications, London 1953. — *M. B. Кирпичев*, Теория подобия, Москва 1953. — *W. Matz*, Anwendung des Ähnlichkeitsgrundsatzes in der Verfahrenstechnik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — *U. Stille*, Messen und Rechnen in der Physik, Braunschweig 1955. — *L. I. Sedov*, Metody podobnosti a rozměrovosti v mechanice (prijevod s ruskoga), Praha 1955. — *Г. К. Дьяконов*, Вопросы теории подобия в области физико-химических процессов, Москва-Ленинград 1956. — *A. Signorini*, Origini e direttive delle teorie dei modelli, u djelu: Atti Conv. I modelli nella tecnica, Venezia 1956. — *J. Wallot*, Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen, Leipzig ^{2}1957. — *R. E. Johnstone, M. W. Thring*, Pilot plants, models and scale-up methods in chemical engineering, New York 1957. — *V. Doležalík*, Podobnost a modelování v chemické technologii, Praha 1959. — *L. I. Sedov*, Similarity and dimensional methods in mechanics (prijevod s ruskog), London 1959. — *G. Birkhoff*, Hydrodynamics, a study in logic, fact and similarity, Princeton, N. J. 1960 — *D. C. Ipsen*, Units, dimensions and dimensionless numbers, New York 1960 — *A. Sacklowski*, Physikalische Größen und Einheiten, Stuttgart 1960. — *J. Palacios*, Analyse dimensionelle (preveo sa španjolskog J. Prévot), Paris 1960. — *Я. М. Брайнес*, Подобие и моделирование в химической и нефтехимической технологии, Москва 1961. — *M. Landolt*, Größe, Maßzahl und Einheit, Zürich ^{2}1962. — *E. W. Jupp*, An introduction to dimensional method, London 1962. — *A. A. Гухман*, Введение в теорию подобия, Москва 1963. — *R. C. Pankhurst*, Dimensional analysis and scale factors, London 1964. — *S. Kattanek, R. Gröger, C. Bode*, Ähnlichkeitstheorie, Leipzig 1967.

R. Podhorsky

DIMNJAK (odžak), građevna konstrukcija u obliku kanala, ugrađena kao sastavni dio zgrade ili postavljena kao samostalni građevni objekt, kojoj je svrha da iz ložišta odvede dimne plinove u atmosferu i da stvara promaju koja dovodi potrebnu količinu uzduha u ložište. Dimnjaci spadaju među najvažnije građevne konstrukcije i neophodne termotehničke elemente stambenih, industrijskih i drugih zgrada.

Prvi historijski podaci o dimnjacima datiraju još od prije naše ere, iz vremena starih Rimljana, koji su već gradili i uređaje za centralno grijanje. O tome



Sl. 1. Dimnjaci starih Rimljana. *1* Dimnjak, *2* odvodni otvor za dimne plinove, *3* dimovodne cijevi, *4* plašt dimnjaka, *5* dovodni kanal toplog i svježeg uzduha.

svjedoče iskopine Pompeja i druge rimske starine, a spominju to u svojim spisima Vitruvius, Plinius i dr. Kanali u zidovima služili su za dovođenje toplog uzduha iz ložišta koje je bilo smješteno pod zgradom ili izvan zgrade, a ujedno su njima odvodili dimne plinove iz prostorija. Osim toga su u prostorijama bili ugrađeni dimnjaci uza zidove ili u uglovima, i to od šuplje opeke pravokutnog ili kružnog presjeka (sl. 1). Od VIII st. gradili su se u kućama kamini, a sa razvojem obzidanih i samostalnih štednjaka i peći razvijala se je i gradnja dimnjaka.

Funkcija i dimenzioniranje dimnjaka. Funkcija je dimnjaka da dimne plinove koji nastaju pri sagorijevanju odvede u atmosferu i da promajom dovede potrebnu količinu uzduha u ložište radi potpunog sagorijevanja goriva. To se postiže strujanjem vanjskog hladnog (težega) uzduha odozdo kroz ložište u dimnjak i vrućih (lakših) dimnih plinova iz ložišta kroz dimnjak gore u atmosferu. Učinak promaje prikazan je jednadžbom:

$$p = (s_1 - s_2) \cdot h,$$

gdje je p učinak promaje (pritisak), s_1 specifična težina vanjskog uzduha, s_2 specifična težina dimnih plinova, h korisna visina dimnjaka (od ložišta kao dna dimnjaka do njegova grla). Ako su specifične težine uzduha i dimnih plinova jednake, ne dolazi do potrebnog procesa promaje i gorivo ne sagorijeva, ako je zbog velike razlike specifičnih težina ili velike visine dimnjaka promaja prejaka, dovodi se previše uzduha u ložište, gorivo sagorijeva prebrzo, temperatura dimnih plinova je suviše visoka pa toplina odlazi neiskorišćena u atmosferu, spali se više goriva i loženje je neekonomično. Ako je vanjski uzduh topao a zidovi su dimnjaka hladni, može doći do obrnutog strujanja i do probijanja dimnih plinova u prostoriju, umjesto kroz dimnjak u atmosferu.

Promaji a time i funkciji dimnjaka mogu da smetaju različite okolnosti, kao npr. nedovoljna visina ili nedovoljan presjek dimnjaka, ili neispravna konstrukcija dimnjaka; trenje čvrstih čestica u dimnim plinovima o zidove dimnjaka i među sobom; meteorološki utjecaji kao što je: vjetar, visoka temperatura i vlaga vanjskog uzduha, itd.; otpori strujanja uslijed mijenjanja smjera dimovodnih kanala, neispravnih priključaka, sužavanja ili proširivanja presjeka dimovodnih kanala; oštećenje zidova dimnjaka, nedovoljna toplinska izolacija dimnjaka.

Spomenuti otpori mogu se izbjeći ili bitno smanjiti ispravnom konstrukcijom i izgradnjom dimnjaka, njegovim pravilnim održavanjem i redovitim čišćenjem, eventualno i pomoćnim uređajima (npr. nastavcima, ventilatorima i dr.).

Dimenzioniranje dimnjaka i dimovodnih kanala (cijevi), a naročito određivanje presjeka (grla) i korisne visine kao glavnih dimenzija dimnjaka, vrši se prema broju i vrsti ložišta, vrsti goriva, trajanju loženja i prema količini i temperaturi dimnih plinova koje treba odvesti u atmosferu. Dimnjaci moraju biti projektirani i izgrađeni tako da odgovaraju građevnotehničkim, termotehničkim, sigurnosnim i ekonomskim zahtjevima i tehničkim propisima.

Sistematizacija dimnjaka. Dimnjaci se prema namjeni dijele na obične dimnjake (za ložišta stambenih, javnih i dr. zgrada), i na visoke tvorničke dimnjake (za ložišta većih industrijskih pogona).

Prema materijalu od kojega se grade razlikuju se: zidani dimnjaci (dimnjaci od opeke, betona ili kamena, od fasonskih blokova od opeke ili betona, dimnjaci sa ugrađenim gotovim cijevima), armiranobetonski dimnjaci (s izolacijom i unutrašnjim zaštitnim plaštem od šamotne ili obične opeke, ili od betonskih fasonskih blokova), čelični dimnjaci (od čeličnog lima s izolacijom i zaštitnim plaštom od šamotne ili obične opeke).

OBIČNI DIMNJACI

Obični dimnjaci se grade i upotrebljavaju za ove svrhe: za ložišta s čvrstim gorivom (drvom, lignitom, ugljenom, koksom i dr.), tj. za sobne i kupaoničke peći, kuhinjske štednjake, kuhinjske i praoničke kotlove i za manje industrijske pogone (npr. pekarne, kovačnice, praonice i dr.); za ložišta s plinskim gorivom, tj. za plinske peći, štednjake i druge uređaje koji se lože plinom; za specijalna ložišta s tekućim gorivom (naftom i dr.). Kanali za ventilaciju i klimatizaciju stambenih, radnih, zdravstvenih, sportskih i drugih prostorija nisu dimnjaci, ali se grade po istim ili sličnim načelima kao dimnjaci, pa se zato ovdje ukratko navode, a opširnije će biti obrađeni na drugom mjestu u ovoj enciklopediji.

Najmanji presjek običnog dimnjaka je 14×14 cm ili krug ⌀ 15 cm, a najmanja korisna visina 5⋯7 m. Presjek dimnjaka može imati oblik kruga, kvadrata ili paralelograma. Najbolji je kružni presjek jer u njemu dimni plinovi nailaze na najmanje otpore. Kod pravokutnih presjeka veće su površine na kojima nastaju otpori, pa dimni plinovi stvarno prolaze samo kroz odgovarajući upisani kružni ili eliptični presjek, a u uglovima nastaju vrtlozi i dimni plinovi se u njima zadržavaju. Od pravokutnih presjeka je najbolji kvadratičan presjek. Kad je presjek pravokutan paralelogram, ne smije odnos stranica pravokutnika biti veći nego 1,5 : 1.