najbolje priljubljuje nultoj razini mora. Na takvoj normalnoj Zemlji djeluje normalno ubrzanje sile teže. Nakon brojnih ispitivanja i računanja utvrđeno je da nije moguće izračunati jednu formulu koja bi se dobro prilagodila mjerenim vrijednostima na svim dijelovima Zemlje. Zbog toga postoji veći broj formula za računanje normalnih vrijednosti ubrzanja sile teže u kojima je argument geografska širina ili eventualno i geografska duljina. Ukoliko je u formuli za računanje normalne vrijednosti ubrzanja sile teže samo geografska širina, uzet je za normalnu Zemlju oblik rotacijskog elipsoida, a ukoliko sadrži i geografsku duljinu, oblik troosnog elipsoida. Od mnoštva formula za računanje normalnog ubrzanja sile teže γ_0 navode se samo dvije: Cassinisova (1930)

$$\gamma_0 = 978049[1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2(2\varphi)] \quad (35)$$

i najnovija, izvedena iz definicije konstanti *Geodetskog sistema 1967*,

$$\gamma_0 = 978031{,}8[1 + 0{,}0053024\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2(2\varphi)]. \quad (36)$$

Vrijednosti γ_0 dobivaju se u mgal, a razlike su među vrijednostima za γ_0, izračunate iz izraza (35) i (36), male.

Mjerene vrijednosti ubrzanja sile teže popravljene korekcijama slobodnog zraka, Bouguera i reljefa neće se slagati s vrijednostima normalnog ubrzanja zbog nepravilne razdiobe gustoće masa, a razlike tih vrijednosti nazivaju se *anomalije*. Kako se pojedinim korekcijama otklanja utjecaj svih nadzemnih, vidljivih masa u bližem okolišu stajališta, anomalije prikazuju podzemne, nevidljive mase. Uz neophodne geološke pretpostavke o obliku, veličini i dubini podzemnih masa tumače se, interpretiraju, utvrđene anomalije.

Razlikuju se tri osnovne vrste anomalija: anomalije slobodnog zraka, anomalije Bouguera i potpune anomalije, već prema upotrijebljenim korekcijama.

Anomalija slobodnog zraka Δg_1 računa se tako da se od mjerene vrijednosti ubrzanja sile teže g, popravljene korekcijom slobodnog zraka Δg, odbije normalna vrijednost ubrzanja sile teže:

$$\Delta g_1 = g + \Delta g - \gamma_0. \quad (37)$$

Analogno se računa anomalija Bouguera Δg_2:

$$\Delta g_2 = g + \Delta g' - \gamma_0. \quad (38)$$

To vrijedi i za proračun potpune anomalije:

$$\Delta g_3 = g + \Delta g + \Delta g' + \Delta g'' - \gamma_0. \quad (39)$$

GRAVIMETRIJSKA IZMJERA I IZRADBA GRAVIMETRIJSKIH KARATA

Gravimetrijska izmjera je određivanje ubrzanja sile teže na pojedinim točkama na Zemlji. Prije početka gravimetrijskih radova izrađuje se projekt mreže (odabire se grupa točaka na kojima treba odrediti ubrzanje sile teže).

Analogno podjeli drugih geodetskih mreža (triangulacijskih, nivelmanskih) i gravimetrijske se mreže dijele na redove. Gravimetrijska mreža I reda — osnovna gravimetrijska mreža — mora biti što točnija i u nju se uklapaju gravimetrijske mreže II i III reda, dakle, primjenjuje se u geodeziji poznato načelo izvođenja manje točnih radova u točnijem okviru.

Gravimetrijska mreža I reda obuhvaća veće područje a formira se kao zatvorene figure (poligoni). U takvim figurama razvija se gravimetrijska mreža II reda (vlakovi — linije koje spajaju gravimetrijske točke I reda ili gravimetrijske čvorne točke II reda). Unutar tako dobivenog okvira gravimetrijskih točaka razvija se gravimetrijska mreža III reda.

Položaj gravimetrijskih točaka mora biti lako dostupan, blizu cesta, na mjestima bez mikroseizmičkih pokreta tla, izvan većih gradova a neke se točke moraju nalaziti na aerodromima ili mjestima gdje se određuje ubrzanje sile teže njihalima. Gustoću točaka na terenu uvjetuje svrha zadataka pa se točke postavljaju na određenom razmaku prema karakteristikama prometnica u geodetskoj gravimetriji ili da što ravnomjernije pokriju područje u primijenjenoj gravimetriji. Svaka se gravimetrijska točka stabilizira na terenu armiranobetonskim prizmatičnim stupom ili kamenom, željeznim klinom, križem uklesanim u živom kamenu ili iznimno čvrstim drvenim kolcem, bez podzemne oznake, dakle, isto tako kao u ostalim geodetskim radovima. Za svaku gravimetrijsku točku izrađuje se opis položaja s potrebnim podacima za njeno lako i brzo pronalaženje.

Pojedinačna mjerenja i računanja obavljaju se po određenim postupcima a konačna cjelokupna obrada podataka za cijelu mrežu ili dio mreže postiže se izjednačenjem. Za izjednačenje gravimetrijskih mreža vrijede ista načela i metode kao za izjednačenje nivelmanskih mreža.

Osim gravimetrijskog mjerenja potrebno je za svaku točku odrediti položaj u povoljnoj projekciji. U SFRJ to je Gauss-Krügerova projekcija. Dakle, položaj svake točke mjerenja treba odrediti Gauss-Krügerovim koordinatama (x, y) iz kojih se lako izračunaju geografske (geodetske) koordinate (φ, λ), koje su potrebne za računanje normalnog ubrzanja. Za računanje korekcija potrebna je i nadmorska visina H točke mjerenja. Prema tome, položaj svake točke na kojoj se mjeri ubrzanje sile teže definira se geodetskim koordinatama (x, y, H), što u terenskim gravimetrijskim radovima čini pretežni dio posla.

Poznavajući koordinate točaka, njihov položaj se prikazuje na karti povoljnog mjerila. Kako je za svaku takvu točku određeno i ubrzanje sile teže, odnosno anomalije, mogu se rezultati i grafički predočiti. Sličnim postupcima kao pri interpolaciji slojnica, prikaza terena slojnicama, konstruiraju se krivulje jednakih vrijednosti ubrzanja sile teže, izogame, ili krivulje jednakih vrijednosti anomalija, izoanomalije. To su gravimetrijske karte.

OSNOVE INTERPRETACIJE

Interpretacijom anomalija nastoji se utvrditi unutrašnja struktura Zemlje. Mora se, međutim, naglasiti da se gravitacijskim mjerenjima ne dobivaju jednoznačni podaci o toj strukturi niti su dovoljni za njenu interpretaciju. Iz Newtonovog zakona gravitacije proizlazi da se mogu dobiti jednaki rezultati na površini Zemlje za različiti raspored, iznos i oblik masâ u unutrašnjosti. Dakle, rezultati gravimetrijskih mjerenja su mnogoznačni, a mnogoznačnost se uklanja geološkim podacima. Prema tome, interpretacija obuhvaća dva dijela: fizikalno-matematički i geološki. Iz zadnjeg donose se zaključci za praktičnu primjenu. Gravimetrijska metoda nije direktna metoda, što znači da se njome ne otkrivaju direktno određeni materijali. Ona daje indikaciju o geološkim oblicima koji karakteriziraju neke materijale i u kombinaciji s drugim metodama daje praktičke rezultate. Za tijela pravilnih geometrijskih oblika, koja se nalaze ispod Zemljine površine, mogu se izračunati utjecaji na ubrzanje sile teže ili njene promjene na površini, čime se olakšava rad na interpretaciji. Za tijela nepravilnih oblika postoje posebni postupci.

LIT.: *N. Abakumov*, Viša geodezija II, skripta. Stručna sekcija N. O. Tehničkog fakulteta, Zagreb 1946. — *B. Apsen*, Geodetski priručnik II. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1949. — *N. Svečnikov*, Viša geodezija III. Savezna geodetska uprava, Beograd 1953. — *A. Graf*, Gravimeter. Deutsche geodätische Kommission, Reihe B, Heft 30. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1957. — *J. J. Jakosky*, Geofizička istraživanja. Biblioteka naučnih i stručnih dela, Subotica ²1963 (prijevod s engleskoga). — *A. Graf*, Gravimetrische Instrumente und Methoden (Jordan-Eggert-Kneissl). Handbuch der Vermessungskunde, Bd. Va, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1967. — *Н. П. Макаров*, Геодезическая гравиметрия. Недра, Москва 1968. — *К. Веселов-М. Сагитов*, Гравиметрическая разведка. Недра, Москва 1968. — *C. Morelli*, The International gravity standardization net 1971 (IGSN 71). Bureau central de l'association internationale de géodésie, Paris 1974. — *S. Klak*, Gravimetrija. Sveučilište u Zagrebu, 1975.

S. Klak

GRAVITACIJA ili sila teža je općenita pojava međusobnog privlačenja između materijalnih tijela. Sve do XVII st. sila teža nije se dovodila u vezu sa svemirskim objektima. Prava teorija gravitacije uspostavljena je Newtonovim općim zakonom gravitacije, koji se velikom točnošću slagao s astronomskim opažanjima. Pojavom specijalne teorije relativnosti trebalo je taj zakon revidirati, jer je uključivao pretpostavku djelovanja u daljinu (actio in distans), a tu mogućnost specijalna teorija relativnosti osporava. Služeći se principom ekvivalencije, A. Einstein je poopćio specijalnu teoriju relativnosti i sagradio opću teoriju relativnosti koja uključuje usavršenu teoriju gravitacijskog polja. Danas je ta teorija već uveliko provjerena opažanjima i eksperimentima.

Starija shvaćanja. Otkada čovjek postoji kao misaono biće, poznate su mu osnovne manifestacije Zemljine sile teže. Predmet koji čovjek drži na dlanu gura ruku prema dolje. Ako se ispusti, on pada sve većom brzinom na zemlju. Starogrčki filozofi tu silu težu nisu dovodili u vezu sa svemirskim objektima. Aristotel (←384 do ←322) smatrao je da zvijezde imaju svoje *prirodno* gibanje. Na Zemlji predmeti padajući traže svoje *prirodno* mjesto, a da bi se tijelo gibalo stalnom brzinom, treba neka stalna sila. Tek je G. Galilei (1564–1642) u XVII stoljeću u svome djelu *Razgovori i matematički dokazi o dvjema novim naukama u vezi s mehanikom* (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno due nuove scienze attenenti alla meccanica, 1638) dao zakon inercije i pokazao da Zemljina sila teža uzrokuje konstantno ubrzanje tjelesa koja padaju, nezavisno od njihove mase. S obzirom na objašnjenje gibanja planeta vladala je geocentrička teorija koja se služila predodžbom sfera što rotiraju oko nekih osi (Pitagora ←582 do ←496; Aristotel) i epiciklima (Ptolomej, II st.), svodeći na taj način sva gibanja nebeskih tjelesa na gibanja po kružnici. Ta se teorija održala sve do Kopernika (1473–1543), koji je izgradio heliocentrički sustav. (Za taj sustav je Galilei dao uvjerljive argumente.) Već je Aristarh iz Samosa (←310 do ←250) postavio tezu heliocentričkog sustava, no ona nije bila prihvaćena i trebalo je 18 stoljeća da ta teza ponovo iskrsne i najzad pobijedi. Da je gibanje planeta oko Sunca uvjetovano privlačenjem Sunca, naslućivao je već J. Kepler (1571–1630), no on je mislio da bi ta sila bila obrnuto proporcionalna s udaljenošću. Da je ona obrnuto proporcionalna s kvadratom udaljenosti, izreklo je više učenjaka prije Newtona, napose je to u jednom pismu Newtonu pretpostavio R. Hooke (1635–1703) prije nego što je Newton objelodanio svoje glasovito djelo. Tek je Newton to dokazao i utvrdio istovetnost te sile sa Zemljinom silom težom.

Newtonov zakon gravitacije. Prva teorija gravitacije počinje 1687. Newtonovim kapitalnim djelom *Matematički principi prirodne filozofije* (Philosophiae naturalis principia mathematica) (v. *Fizika*, TE5, str. 453). Isaac Newton (1642–1727) temelji svoja razmatranja na Keplerovim zakonima (v. *Astronomija*, TE1, str. 437; *Astronautika*, TE1, str. 428): *1.* Planeti se gibaju u elipsama oko Sunca koje se nalazi u jednom njihovu žarištu. *2.* Radijusvektor povučen od Sunca do planeta u jednakim vremenima prelazi jednake površine. *3.* Kvadrati ophodnih vremena planeta proporcionalni su kubima velikih osi njihovih eliptičkih orbita.

Newton je zamišljao da bi se Zemljina sila teža morala protezati do Mjeseca. Ako se računa kolika ta privlačna sila Zemlje mora biti da Mjesec prisili na njegovu (približno) kružnu stazu, izlazi da je privlačna sila obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti od Zemljina središta. Prenoseći taj rezultat na sva svemirska tijela, Newton postavlja svoj opći zakon gravitacije: Svaka dva tijela privlače se uzajamno silom koja je proporcionalna produktu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1}$$

Pri tom se masa tijela zamišlja koncentrirana u točki. Newton dokazuje da tijelo sa sferno simetričnom razdiobom mase (a takva su približno nebeska tijela) djeluje kao da je sva njegova masa koncentrirana u njegovu središtu. U spomenutoj formuli F je sila privlačenja, m_1, m_2 jesu mase dvaju tijela, r njihova međusobna udaljenost, a G je univerzalna konstanta, konstanta gravitacije, koja iznosi

$$G = 6{,}6720\cdot(1 \pm 6{,}15\cdot 10^{-4})\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}. \tag{2}$$

Iz općeg zakona gravitacije slijede Keplerovi zakoni, koji se još znatno preciziraju. Tako, npr., treći Keplerov zakon za dva planeta točnije glasi

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}\cdot\frac{M + m_1}{M + m_2}, \tag{3}$$

gdje su a_1, a_2 velike osi orbita tih planeta, T_1, T_2 ophodna vremena, a m_1, m_2 njihove mase, koje su malene prema masi M Sunca. Ako se m_1, m_2 zanemare prema M, posljedni razlomak je jednak 1, pa izlazi treći Keplerov zakon u izvornom obliku. Uzme li se još u obzir djelovanje međusobnog privlačenja planeta (račun smetnji ili perturbacija), dobiva se izvanredno točno slaganje s astronomskim opažanjima. Tako je na temelju nepravilnosti u gibanju planeta Urana računom smetnji određeno mjesto novog planeta. Taj su račun nezavisno izvršili Francuz U. J. J. Le Verrier (1811–1877) i Englez J. C. Adams (1819–1892). Na temelju toga našao je J. G. Galle (1812–1910) taj planet (1846), koji je dobio ime Neptun. Račun smetnji, među ostalim, pokazuje da se eliptička orbita planeta Merkur mora polagano okretati oko Sunca, u istom smjeru u kojemu Merkur obilazi Sunce. Taj račun daje zakretanje za otprilike 532 lučne sekunde u stoljeću, ali opažanja daju zakretanje koje je za 43 lučne sekunde veće. To sićušno razilaženje između Newtonove teorije gravitacije i astronomskih opažanja objašnjava tek Einsteinova opća teorija relativnosti.

Gravitacijsko polje. Umjesto predodžbe sila, kojima na neku česticu djeluju izravno i na daljinu ostale mase u prostoru, može se zamišljati da svemirske mase stvaraju u prostoru posebno fizikalno stanje, koje se naziva gravitacijskim poljem. To polje ima svojstvo da na neku česticu djeluje silom jednakom rezultanti svih sila kojima ostale mase djeluju na tu česticu prema Newtonovu zakonu. Pridruži li se svakoj točki u prostoru vektor koji je jednak ubrzanju što bi na tom mjestu dobila neka čestica, dobiva se gravitacijsko *vektorsko polje*. Dakle: mase stvaraju polje, a polje djeluje na česticu. Time doduše nije uklonjeno djelovanje u daljinu (actio in distans), jer pomicanjem neke mase mijenja se trenutno gravitacijsko polje u cijelom svemiru. Predodžbom polja utrt je put za savršeniju teoriju u kojoj će se promjena polja uzrokovana pomicanjem neke mase širiti prostorom konačnom brzinom. Iz Newtonova zakona može se izvesti da je vekotor $\vec{g}$ gravitacijskog polja predočiv kao gradijent nekog skalara Φ, koji nazivamo gravitacijskim potencijalom:

$$\vec{g} = \operatorname{grad}\Phi = \vec{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{4}$$

pri čemu su $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jedinični vektori pravokutnog Descartesova koordinatnog sustava i x, y, z pravokutne koordinate točke u kojoj se traži vektor polja. Time je vektorsko gravitacijsko polje svedeno na skalarno polje, i zato se govori o skalarnoj teoriji gravitacije. Pokazuje se, ako je ϱ gustoća materije, da Φ zadovoljava tzv. Laplace-Poissonovu diferencijalnu jednadžbu (P. S. Laplace, 1749–1827; S. D. Poisson, 1781–1840). Ona glasi

$$\triangle\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi G\varrho; \tag{5}$$

$\triangle$ je Laplaceov operator, koji je u pravokutnim koordinatama

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

U dijelovima prostora gdje je $\varrho = 0$, tj. u praznom prostoru, ta se jednadžba svodi na jednostavniju Laplaceovu jednadžbu

$$\triangle\Phi = 0. \tag{7}$$

Ako je zadana razdioba masa u nekom trenutku, tj. ϱ kao funkcija koordinata, onda se potencijal Φ može odrediti kao

$$\Phi(x,y,z) = G\iiint \frac{\varrho(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}, \tag{8}$$

gdje se integracija proteže preko svih dijelova prostora gdje je $\varrho \neq 0$.

Princip ekvivalencije. Već je Galilei ustanovio da sva tjelesa padaju jednako brzo (ako je uklonjen otpor zraka). Obično se kaže da su troma i teška masa jednake. To znači da je sila kojom gravitacijsko polje djeluje na neko tijelo proporcionalna s njegovom (tromom) masom, tako da svakom tijelu podjeljuje isto ubrzanje. Posljedica je toga da se homogeno gravitacijsko polje može ukloniti tako da se stvari promatraju u koordinatnom sustavu koji u tom polju *slobodno pada*, tj. koji ima ono ubrzanje koje odgovara tom polju. Svako je polje približno homogeno ako se ograničimo na dovoljno malen dio prostora. Stoga nastaje *bestežinsko stanje* u liftu koji slobodno pada, isto tako u umjetnom satelitu, ili u svemirskom brodu kada ne radi raketni pogon. Obratno, ako se u predjelu gdje nema gravitacijskog polja (ili je ono zanemarivo slabo, u većoj daljini od svemirskih tijela) promatraju stvari u ubrzanom koordinatnom sustavu (npr. u svemirskom brodu kada radi raketni pogon), tjelesa će se ponašati kao da se nalaze u gravitacijskom polju. Time, je, dakle, koordinatni sustav koji miruje ili se giba jednoliko u gravitacijskom polju ekvivalentan ubrzanom sustavu bez gravitacijskog polja. Odatle i naziv *princip ekvivalencije*. Da taj princip zaista točno vrijedi, provjereno je vrlo preciznim mjerenjima. Tako je R. Eötvös eksperimentima torzijskom vagom (od 1889. do 1908) utvrdio da je eventualno relativno odstupanje od jednakosti trome i teške mase reda veličine 10^{-9}, ali je u novije vrijeme R. H. Dicke (Princeton University) tu točnost povisio na 10^{-11}, a V. Braginsky (Moskva) čak na blizu 10^{-12}. Stoga se princip ekvivalencije može ubrojiti u najtočnije eksperimentalno utvrđene činjenice u fizici. On je, dakako, u skladu s Newtonovom teorijom gravitacije, jer je već sadržan u Newtonovu zakonu privlačenja. Princip ekvivalencije vrijedi, dakle, u klasičnoj mehanici.

EINSTEINOVA TEORIJA GRAVITACIJE

Prema Einsteinovoj specijalnoj teoriji relativnosti nijedno se djelovanje, odnosno signal, ne može prenositi brže od brzine svjetlosti, pa je stoga Newtonova teorija gravitacije u neskladu sa specijalnom teorijom relativnosti. Taj su nesklad pokušali ukloniti mnogi fizičari. Relativno najuspjeliju teoriju gravitacije, prilagođenu specijalnoj teoriji relativnosti, dao je G. Nordström (1912. i 1913), ali je Einstein vidio da je potreban dublji zahvat. Njegova polazna točka bio je princip ekvivalencije. Budući da se gravitacijsko polje može *ukloniti* uvođenjem ubrzanog koordinatnog sustava (npr. sustava lifta koji slobodno pada), Einstein traži da u takvu sustavu, u vrlo malom dijelu prostora i vremena, vrijedi specijalna teorija relativnosti, i to za sve prirodne pojave, ne samo za mehaničke. Time je, dakle, princip ekvivalencije protegnut na sva fizikalna zbivanja. Ali on ne promatra samo pravocrtno ubrzane sustave nego, npr., i sustave koji rotiraju. Pokuša li se u takvu sustavu izmjeriti opseg kruga kojemu je središte u osi rotacije, a ravnina okomita na tu os, mjerila će zbog obodne brzine biti skraćena (prema specijalnoj teoriji relativnosti), i zato će na taj opseg stati više takvih mjerila i mjerenje će za taj opseg dati broj veći od $2r\pi$. Naprotiv, mjerenje polumjera r dat će isti broj kao u mirnom sustavu, jer se mjerila okomito na smjer gibanja ne skraćuju. Vidi se da u sustavu koji rotira vrijedi drukčija geometrija. No, u tom sustavu djeluje na mase (koje u njemu miruju) centrifugalna sila. To znači da postoji, u tom sustavu, centrifugalno gravitacijsko polje. Može se, dakle, očekivati da gravitacijsko polje utječe na geometriju koja vrijedi u prostoru. Einstein taj problem zahvaća sasvim općenito, tražeći da prirodni zakoni moraju imati isti oblik u svim koordinatnim sustavima, pa i krivocrtnim, tj. svi su koordinatni sustavi načelno ravnopravni. Taj zahtjev se naziva principom opće relativnosti, i taj princip zajedno s principom ekvivalencije omogućuje gradnju zadovoljavajuće teorije gravitacije. Pri tom će poslužiti tzv. opća Riemannova geometrija, a matematičko sredstvo je tenzorski račun. Geometrijska svojstva likova na nekoj plohi ili u prostoru (trodimenzionalnom ili, općenito, n-dimenzionalnom) ovise o izrazu za kvadrat linijskog elementa, ds^2, koji je dan kvadratnom diferencijalnom formom (tj. homogenim polinomom 2. stupnja u diferencijalima koordinata). Ako su x, y pravocrtne pravokutne koordinate u ravnini, onda je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{9}$$

što odgovara Pitagorinu teoremu za pravokutan trokut s katetama dx i dy paralelnim s koordinatnim osima. Uvedu li se druge, općenito krivocrtne koordinate x_1, x_2, taj će izraz primiti oblik

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2, \tag{10}$$

ili kraće

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}dx_idx_k, \tag{11}$$

pri čemu treba uzeti $g_{12} = g_{21}$. Koeficijenti g_{ik} jesu pri tom neke funkcije koordinata x_1, x_2. Ako su na nekoj plohi uvedene neke koordinate x_1, x_2, onda opet vrijedi izraz (11), gdje su g_{ik} neke funkcije koordinata. Postoji li na toj plohi takav sustav koordinata x, y, da transformacija koordinata na taj sustav prevodi izraz za ds^2 na oblik (9), onda se kaže da na toj plohi vrijedi euklidska metrika i likovi na njoj imaju svojstva kao u euklidskoj geometriji u ravnini. Takve su plohe, npr., valjci i čunjevi. No, može i da ne postoji takav sustav koordinata. Onda je geometrija na toj plohi drukčija nego u ravnini. Tako je npr. na kugli, na elipsoidu itd. Svakako su geometrijska svojstva određena koeficijentima g_{ik} kao funkcijama koordinata na plohi. Analogno vrijedi u prostoru. Npr., ako se u 4-dimenzionalnom prostoru mogu uvesti koordinate x_1, x_2, x_3, x_4 takve da bude

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \tag{12}$$

onda taj prostor ima euklidsku metriku. Prostorno-vremenski kontinuum ili, kraće, prostor-vrijeme, prema specijalnoj teoriji relativnosti ima tzv. pseudoeuklidsku metriku, jer u pravokutnom koordinatnom sustavu vrijedi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2, \tag{13}$$

gdje je ct vremenska koordinata. Vidi se da se u izrazu za ds^2 pojavljuje jedan negativni predznak. Ako se piše x_1, x_2, x_3, x_4 umjesto x, y, z, t, onda u općem izrazu za ds^2 koji glasi:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}dx_idx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \tag{14}$$

u pseudoeuklidskoj metrici (13) vrijedi:

$$g_{ik} = 0 \quad \text{za} \quad i \neq k, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = -c^2. \tag{15}$$

U prisutnosti masa, koje uzrokuju gravitacijsko polje, ne postoji koordinatni sustav u kojemu bi koeficijenti g_{ik} primili ove vrijednosti, tj. metrika više nije pseudoeuklidska, nego opća *Riemannova*. Tada se kaže da se radi o *zakrivljenom* prostoru, analogno zakrivljenim plohama, na kojima ne vrijedi euklidska metrika. Provede li se transformacija koordinata $x_i (i = 1,2,3,4)$ na neke druge koordinate $x'_k (k = 1,2,3,4)$, onda se koeficijenti g_{ik} transformiraju prema

$$g'_{ik} = \sum_{r,s=1}^{4} \frac{\partial x_r}{\partial x'_i}\frac{\partial x_s}{\partial x'_k}. \tag{16}$$

Radi kratkoće pisanja obično se izostavlja znak sumacije i prihvaća tzv. Einsteinov propis sumacije prema kojem treba u svakom članu nekog izraza sumirati od 1 do 4 po svakom indeksu koji se pojavljuje dvaput. Tada se kraće piše

$$g'_{ik} = g_{rs}\frac{\partial x_r}{\partial x'_i}\frac{\partial x_s}{\partial x'_k}. \tag{17}$$

Taj propis sumacije vrijedi i za druge formule koje slijede. Za veličine sa dva indeksa koje se transformiraju prema (17) kaže se da tvore kovarijantan tenzor 2. reda. Zbog $g_{ik} = g_{ki}$ kaže se da je tenzor simetričan. Stoga koeficijenti g_{ik} tvore simetričan kovarijantan tenzor 2. reda. Taj se tenzor naziva metričkim tenzorom. On određuje gravitacijsko polje u tom smislu što je gibanje neke slobodne čestice (tj. čestice na koju ne djeluju druge sile, npr. elektromagnetske) određeno geodetskom linijom u kontinuumu prostor-vrijeme. Pod geodetskom linijom na nekoj plohi razumijeva se najkraća spojnica dviju točaka. Analogno je u prostoru. U pseudoeuklidskoj metrici (13) diferencijalne jednadžbe geodetske linije glase

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} = 0 \qquad (i = 1,2,3,4). \tag{18}$$

One daju jednoliko gibanje po pravcu. U općem slučaju Riemannove metrike te jednadžbe imaju oblik

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix} i \\ k \; l \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{19}$$

gdje su izrazi $\begin{Bmatrix} i \\ k \; l \end{Bmatrix}$ tzv. Christoffelove zagrade. Da ih se definira, treba najprije uvesti tzv. kontravarijantni metrički tenzor g^{ik} pomoću formule

$$g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g}, \tag{20}$$

gdje je g determinanta veličina g_{ik}, a G_{ik} je kofaktor i, k-tog elementa te determinante. Tada je

$$\begin{Bmatrix} i \\ k \; l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{lr}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_r} \right). \tag{21}$$

U pseudoeuklidskoj metrici veličine g_{ik} jesu konstantne i njihove derivacije, dakle i Christoffelove zagrade, jednake nuli. Time (19) prelazi u (18)

Preostaje glavni problem, naime, kako se metrički tenzor određuje iz zadane razdiobe masa. To je Einsteinu uspjelo riješiti sagradivši diferencijalne jednadžbe gravitacijskog polja. Da se formuliraju, treba najprije reći da se zakrivljenost u teoriji ploha pri prijelazu u višedimenzionalni prostor zamjenjuje Riemann-Christoffelovim tenzorom zakrivljenosti. To je tenzor 4. reda (sa četiri indeksa) i definiran je sa

$$R^i_{trq} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i \\ t \; q \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_q}\begin{Bmatrix} i \\ t \; r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ t \; q \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ p \; r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p \\ t \; r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i \\ p \; q \end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Dalje se definira tzv. Riccijev tenzor koji je 2. reda i glasi

$$R_{tr} = R^i_{tri}. \tag{23}$$

Neka je

$$R = g^{tr} R_{tr}. \tag{24}$$

Onda jednadžbe gravitacijskog polja glase

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -8\pi G T_{ik}, \tag{25}$$

gdje je T_{ik} tenzor energije i impulsa, ovisan o raspodjeli i svojstvima materije, a G je konstanta gravitacije. U praznom prostoru, npr. izvan središnje mase, vrijedi $T_{ik} = 0$ i također $R = 0$, tako da tada vrijedi $R_{ik} = 0$, što se može shvatiti kao analogon Laplaceove jednadžbe. Uz pretpostavku sferne simetrije, i u polarnim koordinatama može se izvesti tzv. Schwarzschildovo rješenje za gravitacijsko polje izvan središnje mase m:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2mG}{c^2 r}} + r^2 \mathrm{d}\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, \mathrm{d}\varphi^2 - \left(c^2 - \frac{2mG}{r}\right)\mathrm{d}t^2. \tag{26}$$

Vidi se da se za $r = 2mG/c^2$ dobiva singularitet, i taj se polumjer zove Schwarzschildov polumjer. Za slaba gravitacijska polja, npr. za polja u našem Sunčevu sustavu, glavni je utjecaj komponente g_{44} koja se može dovesti u vezu s gravitacijskim potencijalom Φ u Newtonovoj teoriji. Dobiva se da je približno

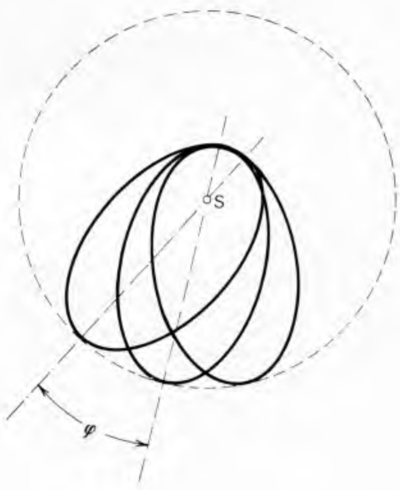
$$g_{44} \approx -c^2 + 2\Phi. \tag{27}$$

Zbog toga se komponente g_{ik} nazivaju potencijalima gravitacije. S obzirom na $g_{ik} = g_{ki}$ ima ih svega 10, umjesto jednog u Newtonovoj teoriji. U Einsteinovoj teoriji gravitacijsko polje je, dakle, određeno tenzorskim poljem g_{ik}, pa se stoga govori o tenzorskoj teoriji gravitacije. Naprotiv, u Newtonovoj teoriji gravitacija je opisana potencijalom Φ, tj. skalarnim poljem, i stoga je Newtonova teorija skalarna teorija gravitacije. Mnogi drugi učenjaci pokušali su sagraditi i neke drukčije teorije gravitacije, od kojih je najvažnija ona koju su razradili C. H. Brans i R. H. Dicke. Ta Brans-Dickeova teorija je skalarno-tenzorska, tj. pored tenzorskoga polja gravitacije pojavljuje se i jedno skalarno polje, što omogućuje da konstanta gravitacije bude vremenski promjenljiva. Ekstremno fina mjerenja, izvršena posljednjih godina, izgleda da govore u prilog Einsteinovoj teoriji.

Iz diferencijalnih jednadžbi (25) gravitacijskog polja uspjelo je izvesti da je gibanje čestice određeno geodetskom linijom, tako da to ne treba uvesti kao poseban temeljni zahtijev. Time, dakako, Einsteinova teorija dobiva na konsekventnosti i uvjerljivosti.

Provjera Einsteinove teorije gravitacije

Gibanje planeta. Prema Newtonovoj teoriji, planet u svom obilasku oko Sunca opisuje elipsu koja miruje u koordinatnom sustavu Sunca orijentiranom prema dalekim svemirskim objektima. Prema općoj teoriji relativnosti, ta se elipsa polako okreće u svojoj ravnini. Točnije rečeno, planet zapravo opisuje krivulju poput rozete. To se očituje tako da se Suncu najbliža točka staze planeta, tzv. perihel, pomalo pomiče. Taj je pomak to veći što je planet bliži Suncu, i to se točnije može odrediti što je veći eskcentricitet elipse. Od Sunčevih planeta Merkur je najbliži Suncu i ima najveći numerički ekscentricitet (omjer udaljenosti žarišta elipse od središta prema velikoj poluosi), naime 0,2056, dok za Veneru i Zemlju taj ekscentricitet iznosi 0,0068, odnosno 0,0167. Stoga je pomicanje Merkurova perihela najveće i može se najtočnije odrediti. Prema teoriji relativnosti treba da iznosi 43,03 lučne sekunde u stoljeću.



Sl. 1. Pomicanje Merkurova perihela. Označen je kut φ pomicanja afela koji je jednak kutu pomicanja perihela. Ekscentricitet staze i pomaka ekstremno su povećani

(To je sićušni kut pod kojim se vidi kovani novčić u udaljenosti od ~100m.) Prema klasičnoj, Newtonovoj teoriji, taj bi kut bio nula da je Merkur jedini planet. No, zbog smetnji drugih planeta, najviše Venere, Zemlje i Jupitera, trebalo bi i prema Newtonovoj teoriji nastati pomicanje Merkurova perihela, otprilike za 532 lučne sekunde u stoljeću. No, opažanja daju više, pa vrijednost razilaženja opažanja i klasičnog računa, uzevši u obzir sve potrebne korekcije, iznosi $43{,}11 \pm 0{,}45''$, što se izvrsno slaže sa spomenutim iznosom koji zahtijeva Einsteinova teorija. Pri tom se smetnje drugih planeta računaju prema Newtonovoj teoriji, jer bi njihova relativistička korekcija bila reda veličina 10^{-4} lučnih sekunda u stoljeću, što dakako izmiče mogućnosti opažanja. Treba napomenuti da

Brans-Dickeova teorija daje samo oko 40″ pomaka perihela, ali ta bi razlika mogla biti uvjetovana spljoštenošću Sunca koje nije pouzdano ustanovljeno, tako da taj razultat još ne daje pouzdanu odluku između Einsteinove i Brans-Dickeove teorije. Za Veneru i Zemlju, kao i za planetoid Ikar (Icarus, pronađen 1949), rezultati opažanja također se dobro slažu s Einsteinovom teorijom, dok je relativistički pomak perihela za ostale planete premalen, a da bi se dao pouzdano izmjeriti. Formula koja daje kut zakretanja perihela (u smjeru obilaženja planeta) po jednom obilasku u radijanima glasi

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{MG}{c^2(1-\varepsilon^2)a}, \tag{28}$$

gdje je M masa planeta, G konstanta gravitacije, ε numerički ekscentricitet i a velika poluos staze planeta.

Gravitacijski Dopplerov učinak. Ako izvor svjetlosti brzo odmiče od opažača, svjetlost pokazuje pomak frekvencije prema crvenom kraju spektra i ta se pojava zove Dopplerov učinak. Ali prema općoj teoriji relativnosti i onda kada je izvor svjetlosti prema opažaču na miru, a nalazi se u jakom gravitacijskom polju, nastaje pomak prema crvenom, pa je običaj govoriti o gravitacijskom Dopplerovu učinku, koji se često izražava pomoću brzine koju bi izvor svjetlosti morao imati da nastane obični Dopplerov učinak iste veličine. Ako emitirana svjetlost izvora u statičkom gravitacijskom polju (gdje veličine g_{ik} ne ovise o vremenu) ima frekvenciju ν, a opažač mjeri frekvenciju ν', onda prema općoj teoriji relativnosti vrijedi

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}, \tag{29}$$

gdje su g_{44} i g'_{44} vrijednosti koje taj koeficijent ima na mjestu emisije, odnosno opažanja. Množenjem sa h (Planckova konstanta) dobiva se, zbog $E = h\nu$, da za energiju fotona vrijedi analogno

$$E' = E\sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}}, \tag{30}$$

što isto tako vrijedi i za energiju drugih čestica.

S obzirom na (27) vrijedi približno

$$\sqrt{\frac{g_{44}}{g'_{44}}} \approx \sqrt{\frac{-c^2+2\Phi}{-c^2+2\Phi'}} = \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2\Phi'}{c^2}\right)^{-1/2} \approx$$

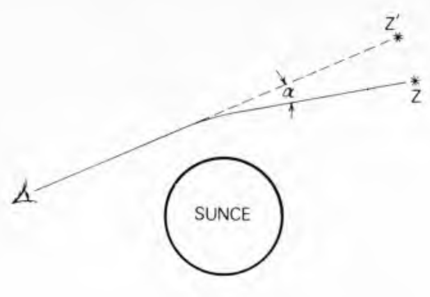
$$\approx \left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right)\left(1+\frac{\Phi'}{c^2}\right) \approx 1-\frac{\Phi-\Phi'}{c^2}, \tag{31}$$

pri čemu je upotrijebljen binomni razvoj i odbačeni su članovi s višim potencijama od c^2 u nazivniku. Prema (29) i (31) dobiva se

$$\frac{\nu-\nu'}{\nu} \approx \frac{\Phi-\Phi'}{c^2}. \tag{32}$$

Shvate li se atomi koji emitiraju svjetlost kao atomski satovi, vidi se da satovi duboko u gravitacijskom polju idu polaganije, pa se govori o gravitacijskoj dilataciji vremena. Za svjetlost koja dolazi od Sunca na Zemlju vrijednost prema (32) iznosi otprilike $2{,}1\cdot 10^{-6}$, tj. frekvencija se smanjuje za oko dvije milijuntnine svojega iznosa. To odgovara običnom Dopplerovu učinku uz brzinu $0{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Mjerenja su otežana zbog gibanja užarenih plinova na površini Sunca, čime se superponiraju obični Dopplerovi učinci. Ipak je usavršenom tehnikom opažanja uspjelo potvrditi očekivanu vrijednost do na nekoliko postotaka. Mnogo veći gravitacijski Dopplerovi učinci mogu se ustanoviti kod dvojnih zvijezda, npr. Siriusa i njegova tamnijeg pratioca (koji ima podjednaku masu, ali mnogo manji polumjer, pa je na njegovoj površini velik potencijal gravitacije) i kod nekih bijelih patuljaka koji pripadaju istom zvjezdanom skupu. No, i tu se javljaju različite teškoće, pa je teško postići veliku točnost. U novije vrijeme uspjelo je na Zemlji ustanoviti promjenu frekvencije γ-zračenja koje je prošlo vertikalnu udaljenost od dvadesetak metara. Pri tom je poslužio tzv. Mössbauerov učinak, koji omogućuje oštru rezonantnu apsorpciju time što su jezgre koje emitiraju, odnosno apsorbiraju ove γ-kvante vezane u kristalnoj rešetki koja preuzima impuls γ-kvanta, tako da se praktički ništa ne gubi na energiji pri emisiji, odnosno apsorpciji. Uz primjenu još i drugih domišljatih doskočica u eksperimentalnoj tehnici, uspjeli su na taj način R. V. Pound i G. A. Rebka 1960. uz razliku visine od 22,6 m osigurati predviđenu vrijednost $\Delta\nu/\nu = 2{,}46\cdot 10^{-15}$, dobivši kao rezultat $(2{,}57 \pm 0{,}26)\cdot 10^{-15}$. Kasnije (1964) su pooštrili R. V. Pound i J. L. Snider točnost mjerenja na $\sim 1\%$ i tako potvrdili tu posljedicu Einsteinove teorije gravitacije. No i Brans-Dickeova teorija zahtijeva isti iznos promjene frekvencije.

Otklon zrake svjetlosti u gravitacijskom polju Sunca. Prema Einsteinovoj teoriji gravitacije, Sunce djeluje na fotone svojom privlačnom silom kao i na svaku drugu česticu. Prolazi li stoga zvjezdana svjetlost kraj Sunca, ona će se otkloniti za neki sićušni kut. Ako se motri zvijezda koja je na nebeskom svodu blizu Sunca, oko će je vidjeti u produženju otklonjene zrake svjetlosti i stoga će izgledati kao da je zvijezda nešto odmaknuta od Sunca. Ako zraka prolazi tik



Sl. 2. Otklon zrake svjetlosti pri prolazu kraj Sunca. α kut otklona (vrlo povećan), Z pravi položaj zvijezde, Z' prividni položaj zvijezde

kraj Sunca, kut otklona iznosi 1,75 lučnih sekunda. Ako zraka prolazi u nekoj udaljenosti od Sunca, otklon je obrnuto proporcionalan s udaljenosti zrake od središta Sunca. Taj se rezultat dobiva nezavisno od toga računa li se gibanje fotona ili se računaju valovi svjetlosti. U Brans-Dickeovoj teoriji zahtijeva se otklon koji je za $\sim 7\%$ manji. Otklon se mjeri pri pomrčini Sunca, kad je glavnina jarke Sunčeve svjetlosti zaklonjena. Prvi put je to mjerenje izvršeno 29. 5. 1919, zatim 21. 9. 1922, 9. 5. 1922, 19. 6. 1936, 20. 5. 1947. i 25. 2. 1952, sve to na različitim mjestima Zemlje. Ta su mjerenja uglavnom potvrdila rezultat teorije relativnosti, no točnost mjerenja nije velika i tek se može tvrditi da je vrijednost otklona između 1,6 i 2,2 lučnih sekunda. Razvojem radio-astronomije postalo je moguće postići mnogo veću točnost motreći metodama radio-interferometrije otklon radio-valova koji potječu od nekih kvazara. Pri tom se uspoređivanjem rezultata pri različitim frekvencijama može ukloniti neizvjesnost veličine loma u Sunčevoj koroni, a točnost je mjerenja bila 5···10%. No, prema najnovijim podacima, vrijednost je otklona prema Einsteinovoj teoriji ustanovljena čak s točnošću od 1%. Ako dalja mjerenja potvrde taj rezultat, bila bi opovrgnuta Brans-Dickeova teorija.

Zakašnjenje radarske jeke. Pošalje li se radarski signal sa Zemlje na Merkur u vrijeme kada je Merkur, gledano sa Zemlje, onkraj Sunca, onda taj signal prolazi pored Sunca i, odbivši se od Merkura, vraća se na Zemlju opet prolazeći kraj Sunca. Irwin I. Shapiro upozorio je 1964 da je prema općoj teoriji relativnosti trajanje puta toga signala nešto dulje nego prema klasičnom računu, naime za 0,24 milisekunde dulje, uz cijelo trajanje od nekih 17 minuta. Ta razlika znači da bi prema klasičnom računu Merkur morao biti za 36 km udaljeniji nego što jest. Mjerenja iziskuju vrlo složene pripreme s obzirom na vrlo točno određivanje udaljenosti Merkura, svojstava njegove površine s obzirom na refleksiju radarskog zračenja itd. Mjerenja su izvršena i daju dobro slaganje s teorijom relativnosti s točnošću od ~5%.

Gravitacijski valovi

Prema općoj teoriji relativnosti nastaju gravitacijski valovi, npr., kada neka asimetrična zvijezda brzo rotira. U posljednjih 15 godina pokušalo se eksperimentalno ustanoviti postojanje takvih valova. Tako je J. Weber dobio pozitivne rezultate vrlo domišljatim uređajima koji su se nalazili na dva mjesta u udaljenosti od 1000 km (da se isključe lokalni utjecaji) pri University of Maryland i u Argonne National Laboratory kod Chicaga. Ti rezultati upozoravaju na neobjašnjivo snažan izvor gravitacijskog zračenja u središnjem dijelu naše galaksije. Drugi fizičari pokušali su provjeriti njegove rezultate, ali ih nisu mogli potvrditi, tako da se pitanje detekcije takvih valova za sada mora smatrati još otvorenim.

Teorijska istraživanja o gravitacijskim valovima polazna su točka za nastojanja da se teorija gravitacije uklopi u okvir moderne kvantne fizike. Usprkos vrlo zanimljivim pokušajima u tom smjeru, do sada nije uspjelo doći do zadovoljavajućeg rezultata.

Može se reći da je opća teorija relativnosti opažanjima i eksperimentima izvrsno potvrđena. Nekoliko konkurentnih drugih teorija gravitacije postepeno je otpadalo na temelju sve točnijih mjernih rezultata. Jedino je ostala Brans-Dickeova teorija koja je važna jer predviđa polagano smanjivanje konstante gravitacije (primjetno u milijardama godina), a to utječe na tempo i način razvoja svemira, pa i Zemlje. Izgleda da se ni ta teorija neće održati kako je već spomenuto. Dalja usavršavanja mjerne tehnike uz upotrebu umjetnih satelita i svemirskih brodova u toku su ili u planu i očekuje se da će se u idućim godinama riješiti ovo pitanje, kao i neka druga, također u vezi s teorijom relativnosti.

Astrofizikalna i kozmološka pitanja

U mnogim pitanjima astrofizike nije potrebno posegnuti za općom teorijom relativnosti jer ona postaje važna tek onda kada se javljaju vrlo jaka gravitacijska polja. To se dešava kod tzv. neutronskih zvijezda koje se javljaju napose kao pulsari, a naročito kod tzv. crnih jama koje su rezultat gravitacijskog urušavanja (kolapsa) zvijezda. Naime, ako neka zvijezda s masom većom od tri Sunčeve mase istroši svoje nuklearno gorivo, ona se počinje stezati, i to se stezanje ne zaustavlja, tako da se ona smanjuje ispod tzv. Schwarzschildova polumjera $2MG/c^2$. (Taj polumjer, npr., za Sunce iznosi 2,95 km.) Pita se kakva metrika vrijedi unutar toga Schwarzschildova polumjera. M. D. Kruskal pokazao je 1960. da se uvođenjem prikladnih prostorno-vremenskih koordinata Schwarzschildov singularitet može ukloniti, no prostorno-vremenska metrika unutar Schwarzschildova polumjera postaje vrlo neobična i teško predočiva. Najvažnija je osobina da je gravitacija tolika da se s površine zvijezde nijedna čestica, pa ni foton, ne može odvojiti, jer je brzina oslobađanja prešla brzinu svjetlosti. Stoga nikakav svjetlosni signal ne može doprijeti do vanjskog opažača, i zato se kaže da je nastala crna jama. Čestica koja pada prema toj jami treba konačno vlastito vrijeme da dođe do kritične udaljenosti i pada dalje, doprijevši u konačnom vlastitom vremenu do središta. No, prema vanjskom opažaču treba beskonačno dugo da čestica dođe do kritične udaljenosti, a što se dalje zbiva, ne može se nikad saznati. Postojanje crnih jama teško je ustanoviti jer su nevidljive. Ako je crna jama jedna komponenta dvojne zvijezde, može se njeno postojanje naslutiti prema gibanju druge komponente. Izgleda da je uspjelo otkriti takvu crnu jamu. Posebno je pitanje kakvo je gravitacijsko polje crne jame koja brzo rotira.

Opća teorija relativnosti bitno zahvaća u pitanje konstitucije i razvoja čitavog svemira. S obzirom na mogućnosti neeuklidske metrike, postoje različiti modeli svemira koji su u skladu s teorijom relativnosti. Napose, svemir može biti konačan, premda bez granica, kao što je konačna, ali bez granica kuglina ploha. Tada se kaže da je svemir zatvoren. Kakva je metrika svemira u velikom (ne gledajući na lokalne prilike u blizini pojedinih svemirskih tijela), ovisi o srednjoj gustoći materije koja nije pouzdano određena. Zna se da je svemir u fazi rastezanja, no da li će se rastezati beskrajno ili će se poslije nekog vremena (nakon mnogo milijardi godina) opet početi stezati, ovisi o toj srednjoj gustoći. Isto tako nije još jasno da li je svemir zatvoren ili otvoren (beskonačan).

Na kraju neka bude spomenuto da su različiti učenjaci, uključivši Einsteina, pokušali poopćiti Einsteinovu opću teoriju relativnosti tako da ne samo gravitacija nego i elektromagnetizam bude izraz geometrijskih svojstava kontinuuma prostor-vrijeme. Ti matematički zanimljivi pokušaji nisu doveli do naročito zadovoljavajućeg rezultata.

LIT.: *M. v. Laue*, Die Relativitätstheorie. Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig, I 1919, II 1921. — *W. Pauli jun*, Relativitätstheorie. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1921. — *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie. Springer, Berlin 1923. — *P. G. Bergmann*, Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall, Inc., New York 1946. — *M. Born*, Einsteinova teorija relativnosti. Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb 1948. — *S. Weinberg*, Gravitation and Cosmology. John Wiley Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto 1972. — *D. Blanuša, V. Vujnović*, Teorija relativnosti. Liber, Zagreb (u tisku).

D. Blanuša

GRAVITACIJSKA KONCENTRACIJA, skup postupaka za oplemenjivanje čvrstih mineralnih sirovina. Postupci se zasnivaju na razlici u gustoći (pa prema tome i specifičnoj težini) pojedinih sastojaka sirovine, u prvom redu korisne supstancije i jalovine (nekorisne supstancije). Kako je ta razlika gotovo uvijek manje ili više izražena, postupci gravitacijske koncentracije praktično su najstarije metode sortiranja mineralnih sirovina. Sve do početka ovog stoljeća, one su bile glavni, a često i jedini način za odvajanje i dobivanje korisnog sastojka iz sirovine. U savremenim oplemenjivačkim postrojenjima u nekim područjima pretežu drugi separacijski postupci, ali je gravitacijska koncentracija još uvijek glavna tehnološka metoda u separaciji ugljena, a neki njeni postupci posljednjih se dvadesetak godina opet sve više primjenjuju i u oplemenjivanju ruda, i to naročito za odvajanje jalovine radi rasterećenja glavnog tehnološkog procesa putem prethodnog odvajanja jalovine (tzv. pretkoncentracija).

Postupci gravitacijske koncentracije pretežno su mokri postupci, tj. odvijaju se u vodi i vodenim suspenzijama, ali je ponekad i zrak radna sredina (pneumatska koncentracija). Kao što ime kazuje, osnovni je djelujući činilac sila teža. Pored toga, na čestice u postupku mogu djelovati i druge sile, kao što su hidrodinamičke i centrifugalne sile i sile trenja.

U uređajima za gravitacijsku koncentraciju mogu se preraditi svi granulati koji dolaze u redovnom rudarskom pogonu osim najsitnijih. Gornja je granica određena veličinom uređaja, tako da se npr. u separatorima sa suspenzijama za ugljen (lignit) mogu preraditi i komadi do 1000 i više mm. Međutim, teškoće prerade proporcionalno rastu sa smanjenjem zrna, tako da se zrna sitnija od 0,02 mm postupcima gravitacijske koncentracije ne mogu preraditi.

Kao orijentacijsko mjerilo može li se neka dvokomponentna sirovina preraditi gravitacijskom koncentracijom služi tzv. koncentracijski kriterij Q:

$$Q = \frac{S_h - R}{S_l - R}, \tag{1}$$

gdje je S_h gustoća komponente veće gustoće, S_l gustoća komponente manje gustoće i R gustoća medija u kojem se koncentracija obavlja. Ukoliko je Q veće od 2,5, gravitacijska je koncentracija moguća za sve granulate osim za najsitnija zrna (<20 μm); pri $Q = 1{,}75$ donja je granica preradivih zrna 0,2 mm; pri 1,5 mogu se preraditi samo zrna veća od 1,5 mm; pri 1,25 koncentracija je još moguća za zrna veća od 6 mm, a pri Q manjem od 1,25, gravitacijska koncentracija današnjim industrijskim postupcima nije moguća.

Gravitacijska se koncentracija obavlja u slijedećim uređajima: u plakalicama, na koncentracijskim stolovima, u uređajima za koncentraciju u suspenzijama i u žljebovima.