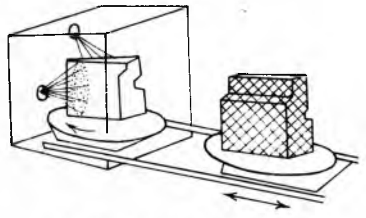
menog pijeska na površinu odljevka i tako ga čisti. Pri tom se pijesak usitnjava, stvarajući velike količine kremene prašine. Pjeskarenje je skuplje od sačmanja zbog relativno velikog utroška energije za proizvodnju komprimiranog zraka i odvod nastale prašine; kremeni se pijesak može upotrijebiti samo za jedno čišćenje, dok metalna sačma služi za višekratnu upotrebu, a i čišćenje pijeskom traje duže nego čišćenje sačmom.



Sl. 27. Sačmalica s komorom

Pogreške na odljevcima. Kvaliteta dovršenog odljevka ovisi o mnogobrojnim faktorima koji u različitim oblicima i na različite načine sudjeluju u tehnološkom procesu proizvodnje odljevaka. Svaki od tih faktora zasebno, ili interakcija više faktora zajedno, može biti uzrokom grešaka na odljevku. Zadatak je kontrole kvalitete dovršenih odljevaka da različitim metodama pronađe moguće greške i da ustanovi da li odljevak zadovoljava propisane zahtjeve i standarde.

Prema najnovijoj međunarodnoj klasifikaciji, greške se na odljevcima svrstavaju u sedam razreda. Svaki se razred dalje raspoređuje na skupine, svaka skupina na podskupine, a podskupine na pojedinačne greške. Tom je klasifikacijom definirano 110 pojedinačnih grešaka, raspoređenih u razrede na sljedeći način:

Razred A000. Metalne izrasline: suvišne pločaste ili masivne izbočine; neravnomjerna površina zadebljanja; udubljenja uljevne šupljine koja su djelomično ili potpuno ispunjena skrućenom litinom.

Razred B000. Šupljine: odljevak ima u unutrašnjosti ili na površini jednu ili više šupljina koje potječu od zraka ili plinova, odnosno posljedica su slijeganja.

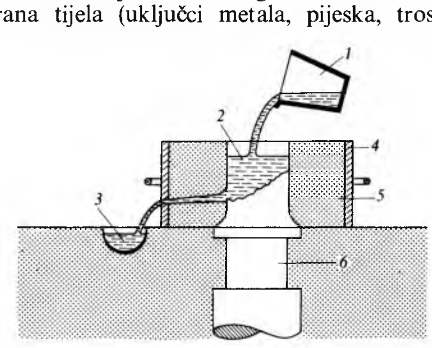
Razred C000. Prekinuti odljevak: masa odljevka je djelomično ili potpuno prekinuta; položaj prekida prema površini odljevka može biti proizvoljan; pojedini dijelovi mogu se još držati skupa, mogu biti razmaknuti ili potpuno odvojeni.

Razred D000. Površinski nedostaci: površine odljevaka nisu dovoljne glatke ili homogene, ili se na njima nalaze nabori, plitke jamice ili plitki uključci. Ako su te greške većih razmjera, onda se nazivaju šupljinama (B000) ili uključcima (G000).

Razred E000. Nepotpuni odljevak: nedostaje dio odljevka, bilo zbog nedovoljno ispunjene uljevne šupljine, bilo zbog prijeloma.

Razred F000. Netočnosti mjera i oblika: odljevak ima pravilan geometrijski oblik, ali su mu dimenzije netočne; geometrijski oblik odljevka je netočan i izvitoperen.

Razred G000. Uključci i heterogenost: u osnovnoj se masi nalaze strana tijela (uključci metala, pijeska, troske, oksida



Sl. 28. Ljevačko zavarivanje sivog lijeva. *1* lonac za ulijevanje, *2* rastaljeni metal, *3* bazen za višak materijala, *4* kalupnik, *5* pijesak, *6* odljevak

itd.) s izdancima ili bez njih na površini. Heterogenošću se smatra nejednak izgled i raspored svojstava u odljevku (strukturne anomalije).

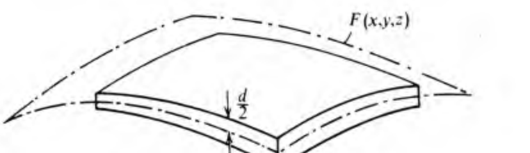
Popravljanje odljevaka. Neke se greške na odljevcima mogu i popraviti. Površinske šupljine koje kvare izgled odljevka popunjavaju se pastom (kitom) od metalnog praha i veziva. Veća se porozna mjesta zabrtve nanošenjem i ubrizgavanjem istorodnog rastaljenog metala (metaliziranje), a sitne se poroznosti impregniraju prikladnim tekućinama koje ulaze u mikropore i tu očvrsnu. Električnim ili plinskim zavarivanjem mogu se popuniti i zatvoriti šupljine i pukotine. Nepotpuni odljevci popravljaju se ljevačkim zavarivanjem tako da se dio odljevka, koji nedostaje, naknadno dolije (sl. 28). Taj se postupak najviše primjenjuje za popravke velikih odljevaka od sivog lijeva. Slomljeni ili naprsli odljevci, koji kasnije neće biti mehanički opterećeni, mogu se popraviti lemljenjem.

Da li će se neki odljevak s greškom popravljati, i koji će se postupak primijeniti za popravak, ovisi o vrsti greške i namjeni odljevka.

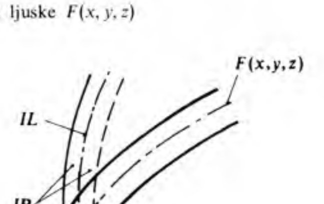
LIT.: *R. Girard,* La fonderie sous pression. ATF, Paris 1953. — *E. Brunhuber,* Leicht- und Schwermetall-Kokillenguss. Schiele Schön, Berlin 1958. — *G. Somigli,* Fonderia meccanizzata. AIM, Milano 1960. — *F. Roll,* Handbuch der Giesserei-Technik. Springer Verlag, Berlin 1963. — *F. Hoffmann,* Technologie der Giessereiformstoffe. Georg Fischer, Schaffhausen 1965. — *W. R. Heine, C. P. Rosenthal,* Principles of metal casting. McGraw-Hill, New York 1967. — *V. Kondic,* Metallurgical principles of founding. E. Aron, London 1968. — *P. R. Beeley,* Foundry technology. Butterworths, London 1972. — International atlas of casting defects. American Foundrymen's Society, Des Plaines 1974.

C. Pelhan

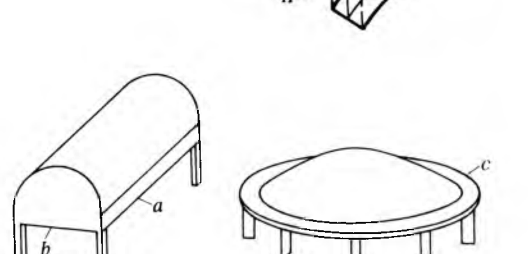
LJUSKE, tankozidne zakrivljene noseće konstrukcije sa prostornim prenošenjem opterećenja (v. *Armiranobetonske konstrukcije*, TE 1, str. 403). U odnosu na ostale dimenzije ljuske njena je debljina vrlo mala. Skup tačaka koje polove debljinu ljuske obrazuje srednju površinu ljuske (sl. 1). Granična površina ljuske, koja je upravna na srednju površinu ljuske, naziva se ivičnom površinom ili ivicom, a ivičnom linijom pre-



Sl. 1. Srednja površina ljuske $F(x, y, z)$



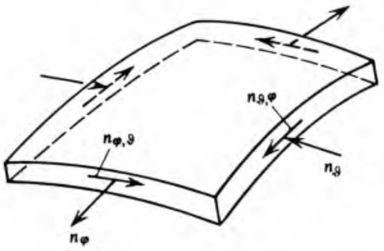
Sl. 2. Ivična površina ili ivica IP, ivična linija IL



Sl. 3. Ivični element *a*, ivična dijafragma *b*, ivični prsten *c*

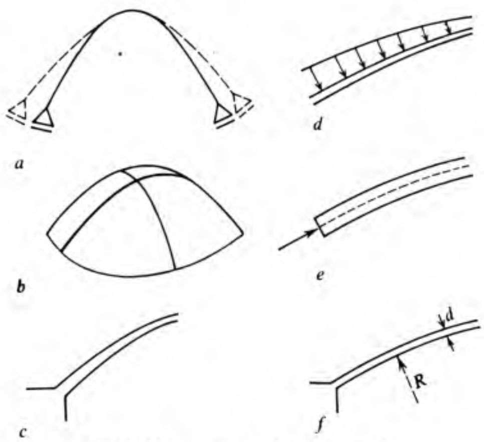
sečna linija ivične i srednje površine (sl. 2). Ljuske su obično ograničene ivičnim elementima (*a* na sl. 3) i ivičnim dijafragmama (*b* na sl. 3), ili su obuhvaćene ivičnim prstenom (*c* na sl. 3).

Membransko stanje. Zbog svoje zakrivljenosti ljuske prenose opterećenje uglavnom unutrašnjim, normalnim i smičućim silama, koje se nazivaju membranskim silama. To stanje naprezanja ljuske, bez momenata savijanja, naziva se *membransko stanje*. Pri tome se pretpostavlja da je krutost ljuske, s obzirom na njenu debljinu, mala, tako da se otpornost prema savijanju može zanemariti u odnosu na otpornost prema normalnim i smičućim silama koje deluju u srednjoj površini ljuske (sl. 4). Pretpostavlja se da su te sile ravnomerno raspodeljene po debljini ljuske, da se njihova rezultanta nalazi u srednjoj površini ljuske i da se ljuska delovanjem membranskih sila neometano deformiše.

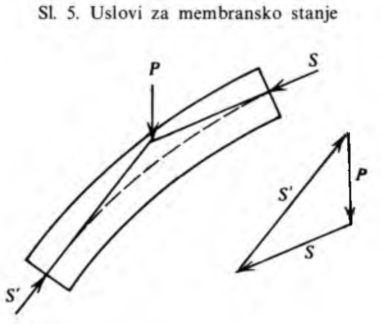


Sl. 4. Membranske sile: n_φ, n_ϑ normalne sile; $n_{\varphi,\vartheta}$, $n_{\vartheta,\varphi}$ smičuće sile

Za ostvarenje membranskog stanja neophodni su sledeći uslovi: tangencijalno oslanjanje s pomerljivošću u pravcu normale na srednju površinu ljuske (sl. 5a); kontinualnost promene nagibnog ugla i krivine srednje površine ljuske u svim tačkama (sl. 5b); kontinualna promena debljine ljuske (sl. 5c); kontinualnost promene opterećenja po površini ljuske (sl. 5d); tangencijalni pravac sila na slobodnim ivicama ljuske (sl. 5e) i neznatna debljina ljuske s obzirom na njene ostale dimenzije (sl. 5f).



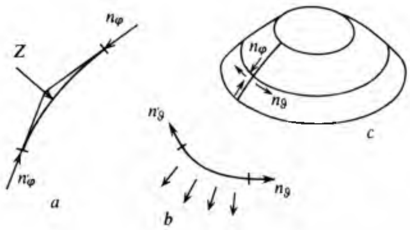
Sl. 5. Uslovi za membransko stanje



Sl. 6. Skretanje linije sila u jednoj od lamela luka usled spoljnog opterećenja

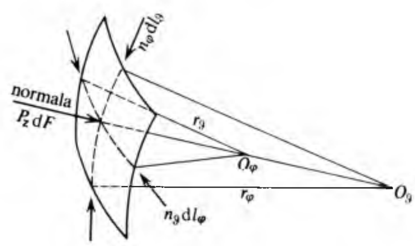
Ti uslovi i prethodne pretpostavke najčešće nisu potpuno ostvarljivi i većinom se ne mogu izbeći momenti savijanja na pojedinim ograničenim sektorima, naročito u ivičnom elementu ili prstenu. Membranska teorija je ograničene tačnosti, a ponekad naponsko stanje ljuske ne može se odrediti njenom primenom. Tačnija i ujedno složenija teorija savijanja iziskuje komplikovane proračune, a razrađena je samo za jednostavnije slučajeve. Zbog toga se u praksi primenjuje membranska teorija, iako ona uvek ne pruža vernu sliku naponskog stanja ljuske.

Za razliku od lukova i visećih konstrukcija, gde se poligon sila usled spoljnog opterećenja nalazi u jednoj ravnini (sl. 6), u ljuskama se uticaj spoljne sile prenosi prostorno. U ljuskama u obliku rotacione kupole (sl. 7c) usled sopstvene težine javlja se aksijalna sila pritiska koja prati zakrivljenost meridijana, slično kao u svodu (sl. 7a), a u pojasu po horizontalnom krugu aksijalna sila pritiska ili zatezanja (zavisno od udaljenosti od temena kupole), kao dejstvo prstena ili lanca (sl. 7b).



Sl. 7. Prostorno noseće dejstvo ljuske: *a* lučno dejstvo, *b* dejstvo lanca, *c* prikaz dejstava luka i lanca na rotacionoj ljusci

Površinsko opterećenje ljuske razlaže se na tangencijalne komponente p_x i p_y i na komponentu p_z upravnu na srednju površinu ljuske (sl. 8). Komponenta p_z prenosi se unutrašnjim silama ljuske na linije glavnih krivina, tj. na linije sa ekstremnim vrednostima krivina koje se u dvostruko zakrivljenim površinama nalaze u međusobno upravnim ravninama. Zbog toga se, usled opterećenja silama upravnim na srednju površinu ljuske, javljaju ortogonalne trajektorije membranskih sila u pravcu linija najveće i najmanje krivine.



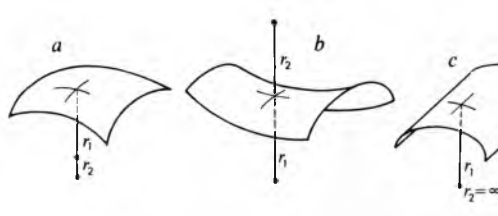
Sl. 8. Prenošenje spoljnog opterećenja prema normali na srednju površinu u pravcu linija najveće i najmanje krivine

Geometrijske površine ljuske, tj. srednje površine ljuski klasificiraju se prema predznaku Gaussove krivine

$$K = K_1 K_2 = \frac{1}{r_1 r_2}, \tag{1}$$

gde je $K_1 = \dfrac{1}{r_1}$ prva glavna krivina, a $K_2 = \dfrac{1}{r_2}$ druga glavna krivina u tački površine. Karakteristični su sledeći slučajevi (sl. 9): pozitivno dvostruko zakrivljene površine

$$\frac{1}{r_1 r_2} > 0, \tag{2}$$



Sl. 9. Klasifikacija površina prema predznaku Gaussove krivine: *a* pozitivno dvostruko zakrivljena površina, *b* negativno dvostruko zakrivljena površina, *c* jednostruko zakrivljena površina

negativno dvostruko zakrivljene površine

$$\frac{1}{r_1 r_2} < 0, \tag{3}$$

jednostruko zakrivljene površine

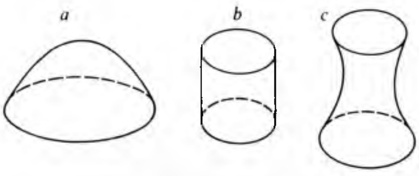
$$(r_2 = \infty)\,\frac{1}{r_1 r_2} = 0. \tag{4}$$

Ljuske se klasificiraju i prema obliku površine. Rotacione površine s vertikalnom ili horizontalnom osom rotacije primenjuju se obično s meridijanom u obliku kružnog luka, prave ili hiperbole (sferna kalota, kružni cilindar, rotacioni hiperboloid, sl. 10). Translatorne površine ljuski pogodne su za primenu zbog ponavljanja identičnih paralelnih preseka (sl. 11 i 12). Isto tako su povoljne i translatorne površine izvedene kretanjem pravolinijskih izvodnica (sl. 13). Kada je jedna od krivih prava linija, prema primerima na sl. 11 i sl. 12 dobija se cilindrična površina (sl. 14).

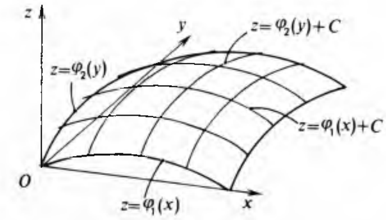
Preseci ravnima $y = c_2$ i $x = c_1$ paralelnim sa koordinatnim ravnima daju parabole podudarne sa glavnim parabolama, samo pomerene od ose Oz, jer je

$$z = f\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + f\left(\frac{c_2}{r_2}\right)^2 = z_1 + k_1 \quad \text{i} \quad z = f\left(\frac{y}{r_2}\right) + f\left(\frac{c_1}{r_1}\right) = z_2 + k_2, \tag{7}$$

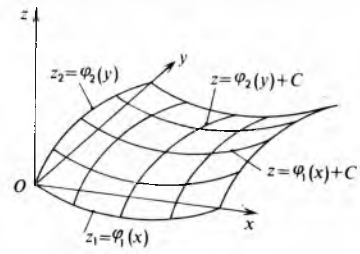
što pokazuje da eliptični paraboloid nastaje translacijom jedne glavne parabole po drugoj glavnoj paraboli i obrnuto (sl. 16). Preseci eliptičnog paraboloida ravnima $z = c$ ($c > 0$), paralelnim sa koordinatnom ravni xOy, daju elipse, što je očigledno kada se $z = c$ unese u jednačinu eliptičnog paraboloida (5). Eliptični paraboloid nad osnovom u obliku pravougaonika, sa



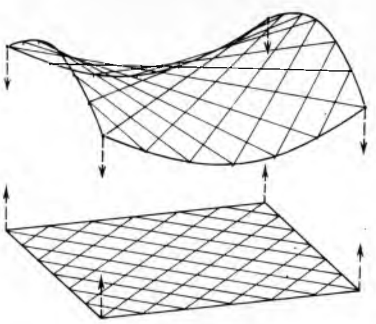
Sl. 10. Rotacione površine. *a* sferna kalota, *b* kružni cilindar, *c* rotacioni hiperboloid



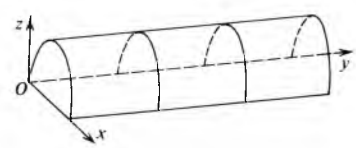
Sl. 11. Translatorna površina sa pozitivnom Gaussovom krivinom



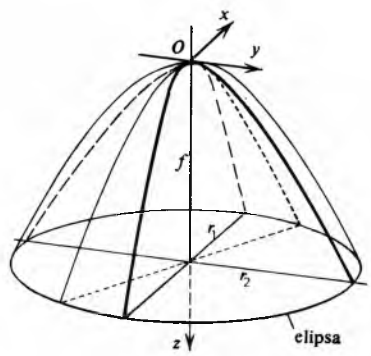
Sl. 12. Translatorna površina sa negativnom Gaussovom krivinom



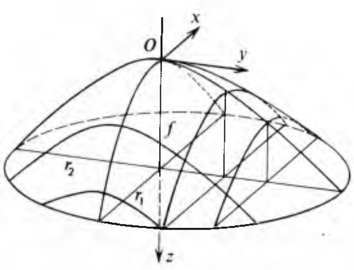
Sl. 13. Translatorna površina sa pravim izvodnicama (sa horizontalnom projekcijom izvodnica)



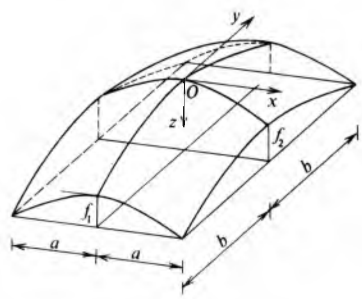
Sl. 14. Translatorna površina sa krivolinijskom vodiljom i pravom izvodnicom (cilindrična površina)



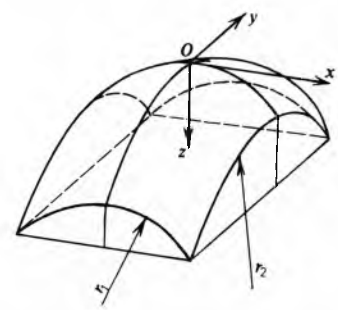
Sl. 15. Eliptični paraboloid



Sl. 16. Eliptični paraboloid izveden translacijom jedne po drugoj paraboli



Sl. 17. Eliptični paraboloid na pravougaonoj osnovi



Sl. 18. Kružna translatorna površina sa pozitivnom Gaussovom krivinom

Translatorne površine ljuski s pozitivnom Gaussovom krivinom najviše su zastupljene eliptičnim paraboloidom, koji se definiše jednačinom

$$z = f\left[\left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_2}\right)^2\right] \tag{5}$$

sa temenom O u koordinatnom početku i elipsom sa poluosama r_1 i r_2 na rastojanju f od temena (sl. 15). Koordinatne ose x i y paralelne su sa osama elipse, a koordinatne ravni xOz i yOz su ravni simetrije, kojima preseci sa eliptičnim paraboloidom daju njegove glavne parabole

$$z_1 = f\frac{x^2}{r_1^2} \quad \text{i} \quad z_2 = f\frac{y^2}{r_2^2}. \tag{6}$$

stranama $2a$ i $2b$ i strelama ivičnih parabola f_1 i f_2 (sl. 17), definisan je jednačinom

$$z = f_1\left(\frac{x}{a}\right)^2 + f_2\left(\frac{y}{b}\right)^2. \tag{8}$$

Kružna translatorna površina sa pozitivnom Gaussovom krivinom (sl. 18) određena je poluprečnicima r_1 i r_2 krugova, od kojih je jedan izvodni, a drugi direktivni (analogno glavnim parabolama eliptičnog paraboloida).

Translatorne površine ljuski sa negativnom Gaussovom krivinom najviše su zastupljene hiperboličnim paraboloidom, koji se definiše jednačinom

$$z = f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \tag{9}$$

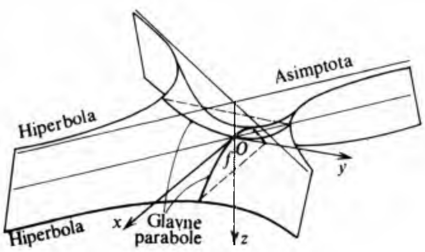
sa temenom O u koordinatnom početku i hiperbolama sa poluosama a i b na rastojanju $\pm f$ od temena (sl. 19). Preseci hiperboličnog paraboloida njegovim simetralnim koordinatnim ravnima xOz i yOz daju njegove glavne parabole

$$z_1 = f\frac{x^2}{a^2} \quad \text{i} \quad z_2 = -f\frac{y^2}{b^2}. \tag{10}$$

Kao i za eliptični paraboloid, preseci ravnina $y = c_2$ i $x = c_1$ paralelnim sa koordinatnim ravnima daju parabole podudarne sa glavnim parabolama, samo pomerene od ose Oz, jer je

$$z = f\left(\frac{x}{a}\right)^2 - f\left(\frac{c_2}{b}\right) = z_1 - k_1 \text{ i } z = -f\left(\frac{y}{b}\right)^2 + f\left(\frac{c_2}{a}\right)^2 = z_2 + k_2. \tag{11}$$

Prema tome, hiperbolični paraboloid dobija se translacijom jedne glavne parabole po drugoj glavnoj paraboli ili obrnuto.



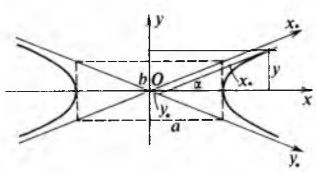
Sl. 19. Hiperbolični paraboloid

Preseci hiperboličnog paraboloida ravnima $z = c$, paralelnim sa koordinatnom ravni xOy, daju hiperbole, što se uočava kada se $z = c$ unese u jednačinu hiperboličnog paraboloida (9). Za $z = 0$, tj. presekom koordinatnom ravni xOy dobija se jedan par pravih linija

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{i} \quad y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{12}$$

Par vertikalnih ravni provučenih kroz ove prave sadrži asimptote hiperboli u horizontalnim presecima (u ravnima paralelnim sa koordinatnom ravni xOy). Ako se umesto pravougaonog koordinatnog sistema uzme kosougli sistem sa koordinatnim osama x_* i y_*, koje se poklapaju sa parom pravih linija $y = \pm\frac{b}{a}x$ (sl. 20), veza sa prvobitnim koordinatama dobija se pomoću jednačina

$$x = \cos\alpha(x_* + y_*), \qquad y = \sin\alpha(y_* - x_*). \tag{13}$$



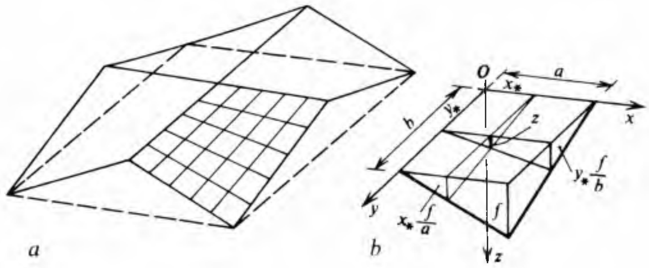
Sl. 20. Prelaz iz pravougaonog u kosougaoni koordinatni sistem radi dobijanja pogodnije jednačine hiperboličnog paraboloida

Unošenjem x i y u jednačinu hiperboličnog paraboloida i zamenom $\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$ i $\sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$, dobija se jednačina hiperboličnog paraboloida u kosouglom koordinatnom sistemu $O\ (x_*, y_*, z_*)$

$$z = \frac{4f}{a^2 + b^2}x_* y_*, \tag{14}$$

koja pokazuje da svaka tačka površine sadrži par pravih izvodnica u ravnima paralelnim sa koordinatnim ravnima xOz i yOz. Kada su asimptotne ravni upravne, kao što je to za hiperbolični paraboloid nad pravougaonom osnovom (sl. 21 a), glavne parabole su podudarne i jednačina površine dobija se direktno (sl. 21 b)

$$z = \frac{f}{ab}x_* y_*. \tag{15}$$



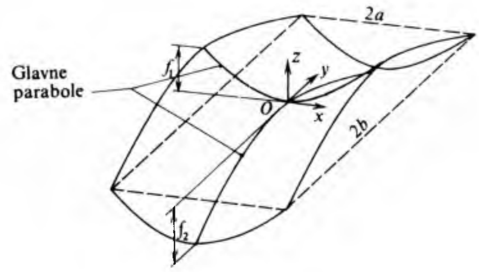
Sl. 21. Element ravnostranog hiperboličnog paraboloida sa upravnim asimptotama. a element površine u sklopu krovne ljuske, b element površine u pravougaonom koordinatnom sistemu

Hiperbolični paraboloid nad osnovom u obliku pravougaonika, sa stranama $2a$ i $2b$ i strelama ivičnih parabola f_1 i f_2 (sl. 22), definisan je jednačinom

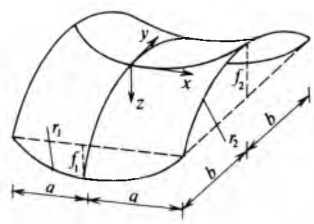
$$z = f_1\left(\frac{x}{a}\right)^2 - f_2\left(\frac{y}{b}\right)^2. \tag{16}$$

Kružna translatorna površina sa negativnom Gaussovom krivinom (sl. 23) određena je poluprečnicima r_1 i r_2 krugova, od kojih je jedan izvodni, a drugi direktivni (analogno glavnim parabolama hiperboličnog paraboloida).

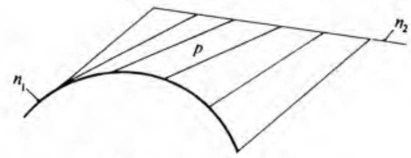
Konoidna površina nastaje kada se prava p kreće tako da uvek ostaje paralelna direktivnoj ravni i seče krivu n_1 i pravu n_2 (sl. 24).



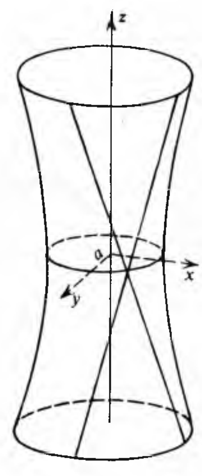
Sl. 22. Hiperbolični paraboloid nad pravougaonom osnovom



Sl. 23. Kružna translatorna površina sa negativnom Gaussovom krivinom



Sl. 24. Konoidna površina



Sl. 25. Rotacioni hiperboloid

Rotacioni hiperboloid spada u površine izvedene pravim linijama (sl. 25), pošto nastaje rotacijom prave oko ose koje nisu u istoj ravni, a može se izvesti i rotacijom oko iste ose hiperbole koja je meridijan te površine. Ako je jednačina hiperbole (meridijana)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{17}$$

onda je jednačina rotacionog hiperboloida

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{18}$$

Preseci horizontalnim ravnima $z=c$ daju krugove

$$x^2+y^2=\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)a^2. \tag{19}$$

Preseci vertikalnim ravnima kroz osu rotacije daju hiperbolu, pa se za $y=0$ dobija

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{20}$$

Presek vertikalnom ravni $y=a$ daje

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{b^2}, \tag{21}$$

što odgovara paru pravih linija

$$z=\pm\frac{b}{a}x. \tag{22}$$

Na sličan način može se pokazati da svaka tačka rotacionog hiperboloida sadrži par pravih linija koje leže na njegovoj površini. Ako se na krugu nastalom presekom horizontalne ravni $z=0$ izaberu tačke saglasno podeli kruga na jednake delove, a zatim kroz ove tačke povuku prave izvodnice, površina rotacionog hiperboloida biće podeljena na rombične elemente, koji kao ravne, obično kasetirane ploče, mogu da posluže za formiranje ljuske na montažni način.

Na sl. 27 prikazano je obeležavanje sila na elementu ljuske i na odgovarajućem pravougaonom elementu u osnovi, gde su unete sile pozitivnog smera. Zbog dualiteta važi

$$N_{\xi\eta}=N_{\eta\xi}. \tag{26}$$

Međusobne veze odgovarajućih sila na ovim elementima lako se izvode prema sl. 28, i one glase

$$N_\xi=n_x\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad N_{\xi\eta}=n_{xy},\quad N_\eta=n_\eta\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad N_{\eta\xi}=n_{yx}, \tag{27}$$

gde je $\tan\alpha=\frac{\partial z}{\partial x}$, a $\tan\beta=\frac{\partial z}{\partial y}$, pa je zbog (26)

$$n_{xy}=n_{yx}. \tag{28}$$

Sile u pravcu međusobno upravnih osa u i v, dobijenih rotacijom koordinatnog sistema za ugao α (sl. 29a), određuju se iz sume u komponenti (sl. 29b), odnosno iz sume v komponenti (sl. 29c),

$$n_u\mathrm{d}v-n_x\mathrm{d}y\cos\alpha-n_y\mathrm{d}x\sin\alpha-n_{xy}\mathrm{d}y\sin\alpha-n_{yx}\mathrm{d}x\cos\alpha=0 \tag{29}$$

$$n_{uv}\mathrm{d}v+n_x\mathrm{d}y\sin\alpha-n_y\mathrm{d}x\cos\alpha-n_{xy}\mathrm{d}y\cos\alpha+n_{yx}\mathrm{d}x\sin\alpha=0. \tag{30}$$

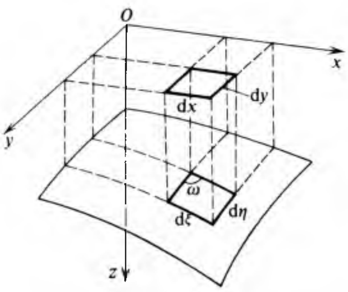
Deobom sa $\mathrm{d}v$ i uz $n_{xy}=n_{yx}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}=\sin\alpha$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}=\cos\alpha$ dobija se

$$n_u=n_x\cos^2\alpha+n_y\sin^2\alpha+2n_{xy}\cos\alpha\sin\alpha \tag{31}$$

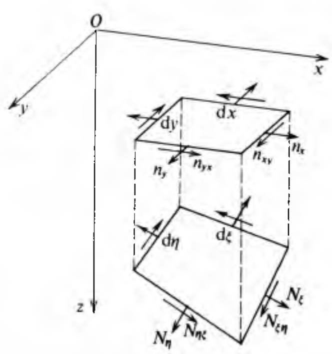
$$n_{uv}=(n_y-n_x)\cos\alpha\sin\alpha+n_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \tag{32}$$

i na sličan način

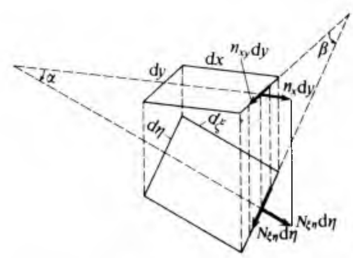
$$n_v=n_x\sin^2\alpha+n_y\cos^2\alpha-2n_{xy}\cos\alpha\sin\alpha \tag{33}$$



Sl. 26. Element ljuske i njegova projekcija u ravni xOy



Sl. 27. Stvarne i redukovane komponente sila na elementu ljuske



Sl. 28. Odnos komponentnih sila n_x, n_{xy} i N_ξ, $N_{\xi\eta}$ elementa ljuske

Opšta membranska teorija. U pravougaonom koordinatnom sistemu (x,y,z), prema sl. 26, srednja površina ljuske definiše se relacijom

$$z=f(x,y) \tag{23}$$

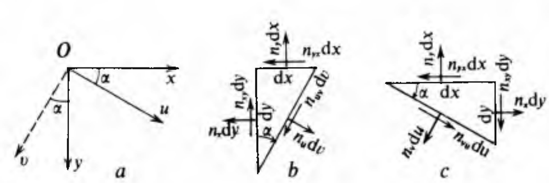
i naziva se funkcijom oblika, uz pretpostavku da se može najmanje dvaput diferencirati u unutrašnjim tačkama površine. Pravougaonom elementu strana $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$, dobijenom u ravni xOy presecima izvedenim ravnima paralelnim sa koordinatnim ravnima xOz i yOz, odgovara element na ljusci sa stranama $\mathrm{d}\xi$ i $\mathrm{d}\eta$. Ako je $\mathrm{d}F$ površina pravougaonog elementa u ravni xOy, onda je $\lambda\mathrm{d}F$ površina elementa na ljusci, gde je

$$\lambda=\sqrt{1+(\partial z/\partial x)^2+(\partial z/\partial y)^2}. \tag{24}$$

Opterećenje na ljusci razlagaće se na komponente u koordinatnim pravama x, y, z, s tim što će se sa p_x, p_y, p_z označavati opterećenje po jedinici površine srednje površine ljuske, a sa g_x, g_y, g_z opterećenje po jedinici površine u ravni xOy, tj. u osnovi. Između ovih komponenti postoji veza

$$p_x=\frac{g_x}{\lambda},\qquad p_y=\frac{g_y}{\lambda},\qquad p_z=\frac{g_z}{\lambda}, \tag{25}$$

pa se upotrebljavaju funkcije opterećenja g_x, g_y, g_z.



Sl. 29. Element ljuske u uv koordinatnom sistemu. *a* relativni položaj prava x, y i u, v; *b* projekcija u osnovi elementa ljuske sa dejstvujućim silama za određivanje sila n_u i n_{uv}; *c* projekcija u osnovi elementa ljuske sa dejstvujućim silama za određivanje sila n_v i n_{vu}

$$n_{vu}=(n_y-n_x)\cos\alpha\sin\alpha+n_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \tag{34}$$

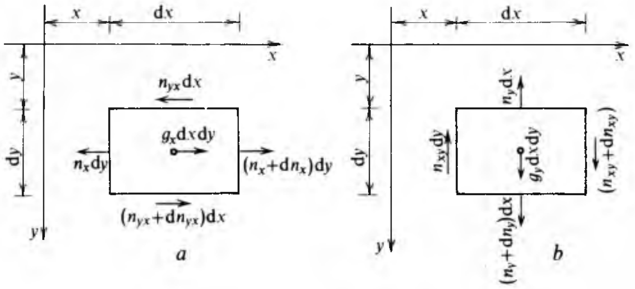
gde je očigledno $n_{vu}=n_{uv}$.

Uslovi ravnoteže na isečenom elementu ljuske izražavaju se preko komponentnih koordinatnih pravâ:

a) za x komponente (sl. 30a) važi

$$\mathrm{d}n_x\mathrm{d}y+\mathrm{d}n_{yx}\mathrm{d}x+g_x\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}y=0, \tag{35}$$

sa $\mathrm{d}n_x=\frac{\partial n_x}{\partial x}\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}n_{yx}=\frac{\partial n_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$ dobija se



Sl. 30. Komponente sila na element ljuske. *a* *x* komponente sila koje deluju na element ljuske, *b* *y* komponente sila koje deluju na element ljuske

$$\frac{\partial n_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + g_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{36}$$

i konačno

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + g_x = 0; \tag{37}$$

b) za y komponente (sl. 30b), slično kao za x komponentu dobija se

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + g_y = 0; \tag{38}$$

c) za z komponente (sl. 31) važi

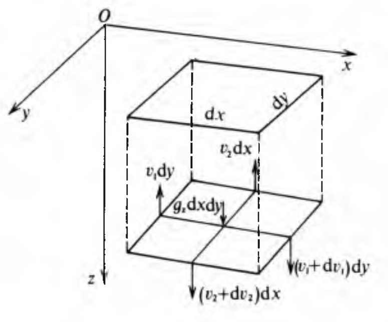
$$V_1 = n_x\frac{\partial z}{\partial x} + n_{xy}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad V_2 = n_y\frac{\partial z}{\partial y} + n_{yx}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{39}$$

gde su, kao za (28), $\tan\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $\tan\beta = \frac{\partial z}{\partial y}$. Tu je

$$\mathrm{d}V_1\mathrm{d}y + \mathrm{d}V_2\mathrm{d}x + g_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{40}$$

gde je $\mathrm{d}V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x}\mathrm{d}x$, a $\mathrm{d}V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial y}\mathrm{d}y$, i analogno kao za x komponente

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + g_z = 0. \tag{41}$$



Sl. 31. *z* komponente sila koje deluju na element ljuske

Zamenom vrednosti za V_1 i V_2 dobija se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(n_x\frac{\partial z}{\partial x} + n_{xy}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(n_y\frac{\partial z}{\partial y} + n_{yx}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + g_z = 0. \tag{42}$$

i dalje

$$\begin{aligned} &n_x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial n_x}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + n_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \\ &+ n_y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial n_y}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} + n_{yx}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} + g_z = 0, \end{aligned} \tag{43}$$

a odatle

$$\begin{aligned} &n_x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (n_{xy} + n_{yx})\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + n_y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \\ &+ \left(\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + g_z = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Pošto je $n_{xy} = n_{yx}$, a zamenom iz (37) i (38)

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = -g_x \quad \text{i} \quad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial x} = -g_y, \tag{45}$$

dobija se

$$n_x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + n_y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + g_z' = 0, \tag{46}$$

$$\text{gde je } g_z' = g_z - g_x\frac{\partial z}{\partial x} - g_y\frac{\partial z}{\partial y}. \tag{47}$$

Uslovi ravnoteže membranskih ljuski izraženi su izvedenim jednačinama (37), (38) i (46), koje zajedno formiraju sistem od tri simultane diferencijalne jednačine. Primenom postupka koji je uveo A. Pucher, rešavanje sistema od tri jednačine svodi se na rešenje samo jedne jednačine.

a) Pucherova naponska funkcija za ljuske opterećene vertikalnim silama. U tom je specijalnom slučaju $g_x = g_y = 0$, pa se sistem jednačina (37), (38), (46) svodi na jednostavniji oblik

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{48}$$

$$n_x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + n_y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + g_z = 0. \tag{49}$$

Radi pojednostavnjenja uvodi se Pucherova naponska funkcija $F = F(x, y)$ sa sledećim relacijama:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{50}$$

Unošenjem ovih relacija u dve jednačine (48), vidi se da ih one zadovoljavaju, a kada se unesu u jednačinu (49), dobija se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + g_z = 0. \tag{51}$$

To je Pucherova diferencijalna jednačina membranskih ljuski opterećenih vertikalnim silama.

b) Pucherova naponska funkcija za ljuske opterećene proizvoljnim silama. Kada opterećenje ljuske ima sve komponente g_x, g_y, g_z, uvodi se uopštena Pucherova naponska funkcija sa sledećim relacijama:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y, \tag{52}$$

gde su G_x i G_y funkcije vezane za komponentna opterećenja po jedinici površine osnove

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = g_x, \quad \frac{\partial G_y}{\partial y} = g_y. \tag{53}$$

Naponska funkcija zadovoljava prve dve jednačine (37) i (38) sistema, a treća jednačina (46) je zadovoljena ako je ispunjen uslov

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - G_x\right) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G_y\right) + g_z' = 0. \tag{54}$$

Posle uređivanja te jednačine dobija se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = g_z'' = 0, \tag{55}$$

gde je

$$g_z'' = g_z' - G_x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - G_y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{56}$$

Uvrštenjem izraza (47) u jednačinu (55) dobija se

$$g_z'' = g_z - g_x \frac{\partial z}{\partial x} - g_y \frac{\partial z}{\partial y} - G_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - G_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{57}$$

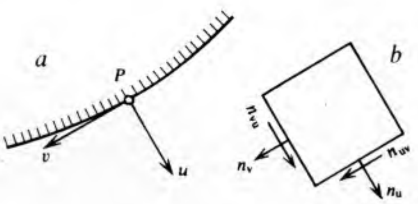
Jednačina (55) je Pucherova diferencijalna jednačina membranskih ljuski opterećenih proizvoljnim silama.

Ivični uslovi. Rešenje sistema diferencijalnih jednačina (37), (38), (46) ili Pucherove diferencijalne jednačine (51) ili (57) treba da ispuni ivične uslove koji odražavaju oslanjanje ljuske. U daljim razmatranjima razmatraće se samo opterećenja vertikalnim silama.

Neka je P proizvoljna tačka na projekciji u osnovi ljuske, a u i v normala i tangenta u toj tački ivične linije (sl. 32a). Sile na elementu ljuske u okolini tačke P prikazane su na sl. 32b i one se, za vertikalne sile, mogu izraziti pomoću Pucherove naponske funkcije

$$n_u = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \quad n_{uv} = n_{vu} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, \quad n_v = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \tag{58}$$

Razmotriće se nekoliko karakterističnih slučajeva uslova oslanjanja ljuske.



Sl. 32. Projekcija u osnovi ivične linije ljuske (*a*), redukovane sile n_u, n_{uv}, n_v, n_{vu} (*b*)

1. Potpuno slobodne ivice ljuske su one kada ljuska nema nikakvo oslanjanje jer ne postoji bilo kakva konstrukcija (zid, ivična greda ili ivični luk). Tada nema mogućnosti da nastanu sile n_u i n_{uv}, jer nema ni odgovarajućih reakcija, pa je

$$n_u = 0, \quad n_{uv} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \tag{59}$$

Ako je projekcija u osnovi potpuno slobodne ivice prava linija, tada je tangenta v ista u svakoj tački, pa je $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$, a naponska funkcija F na toj ivici može najviše da se menja linearno. Pošto je naponska funkcija površina u koordinatnom sistemu (x, y, z), ona se naziva naponskom površinom, pa je zbog uslova $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ na razmatranoj ivici nagibni ugao na naponsku površinu svuda konstantan. Stoga je za takvu ivicu

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{const.} \tag{60}$$

Za potpuno slobodnu ivicu može se propisati da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{61}$$

tako da je ispunjen uslov da bude $F = 0$.

2. Ako je ivica oslonjena na savitljiv element, nema otpora bočno usmerenim silama, tako da je u svakoj tački ivice

$$n_u = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0. \tag{62}$$

Kada je savitljiva konstrukcija oslonca jedne ivice ivična greda ili ivični luk u vertikalnoj ravni, tada je tangenta v ista u svim tačkama te ivice, pa je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \text{const}, \tag{63}$$

tj. ivična linija naponske površine je prava linija.

Ako su ljuske oslonjene na savitljive konstrukcije u vertikalnim ravnima, može se staviti da je $F = 0$.

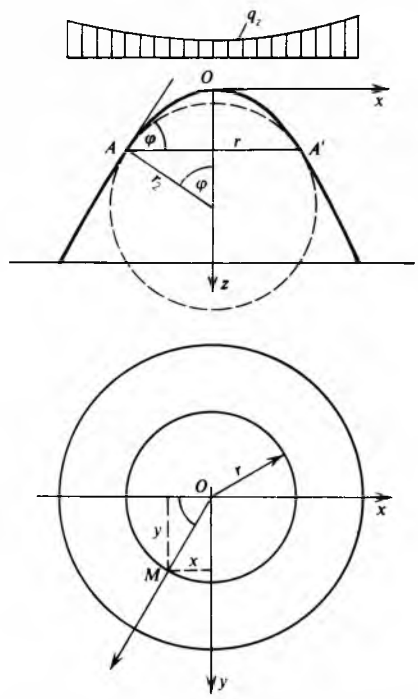
3. Kada konstrukcija oslonca ne pruža nikakav otpor tangencijalnim silama u pravcu V, ispunjen je uslov

$$n_{uv} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \tag{64}$$

4. Kad su ivice potpuno oslonjene, javljaju se sile n_u i n_{uv} i slučaj je statički neodređen, osim za rotaciono simetrično opterećene i oslonjene rotacione ljuske. Tada se statička neodređenost lako otklanja. U drugim slučajevima potrebno je naći pomeranja u osnovnom sistemu i iz određenih uslova naći prekobrojne statičke veličine.

5. Kad su ljuske obuhvaćene prstenom, može se uzeti da je $F = 0$ ako je prsten aksijalno pritisnut ili zategnut, što se javlja u specijalnim slučajevima kao što su rotaciono simetrično opterećene rotacione ljuske kojima se prsten kontinualno oslanja na zid.

Analize ljuski pojedinih oblika. *Rotacione ljuske.* Srednja površina rotacione ljuske nastaje rotacijom jedne krive (meridijana) oko jedne prave (ose rotacije), koja leži u istoj ravni sa krivom (sl. 33). Položaj ose rotacije uzima se da je vertikalan, pa će svaka tačka A meridijana prilikom rotacije opisivati horizontalni krug AA', koji se označava kao paralelni



Sl. 33. Srednja površina rotacione ljuske izvedena rotacijom krive (meridijana) oko vertikalne rotacione ose

krug. Jednačine površina koje se pretežno primenjuju za rotacione ljuske jesu:

konusna površina (sl. 34a)

$$z = r \cot \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \frac{h}{a} \tag{65}$$

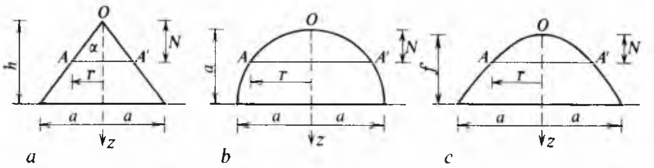
sferna površina (sl. 34b)

$$z = a - \sqrt{a^2 - r^2} = a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \tag{66}$$

površina rotacionog paraboloida (sl. 34c)

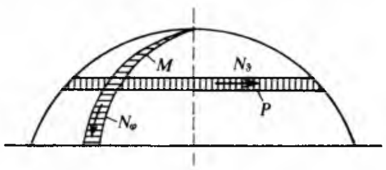
$$z = f \frac{r^2}{a^2} = f \frac{x^2 + y^2}{a^2}. \tag{67}$$

Umesto koordinata x, y, z, za rotacione ljuske se obično upotrebljavaju ugaone koordinate φ, ϑ (sl. 33), slično kao u pomorskoj navigaciji. U tački površine sa r_1 označava se polupreсnik krivine meridijanske krive, a sa r_2 poluprečnik lopte koja dodiruje paralelni krug na kome se nalazi posmatrana tačka.

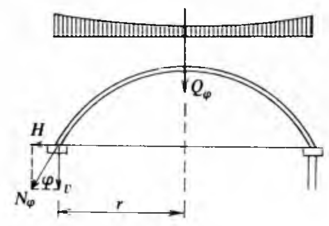


Sl. 34. Rotacione ljuske. *a* konusna ljuska, *b* sferna ljuska, *c* ljuska oblika rotacionog hiperboloida

Unutrašnje sile rotacione ljuske lako se nalaze kad je rotaciono simetrično opterećenje, kad je svaka ravan meridijana ujedno i ravan simetrije opterećenja. Radi lakše predstave može se zamisliti da se ljuska sastoji od meridijanskih lukova M i prstenova P na mestu paralelnih krugova (sl. 35). Rotaciono simetrično opterećena ljuska (sl. 36) obuhvaćena je kružnim prstenom koji prihvata horizontalne komponente H od sila N_φ, reakcija ljuske tangencijalnih na srednju površinu ljuske, tako da je prsten zategnut silom Z_p, a na zid ili stubove koji nose prsten prenose se samo vertikalne komponente V od sile N_φ.



Sl. 35. Statički model prenošenja opterećenja na ljusci (meridijanski lukovi i prstenovi na mestu paralelnih krugova)



Sl. 36. Rotaciono simetrično opterećena ljuska sa ivičnim prstenom

Ako se sa Q_φ označi zbir svih vertikalnih spoljnih sila na ljusci, onda je

$$V = -N_\varphi \sin\varphi = \frac{Q_\varphi}{2\pi r \sin\varphi} \sin\varphi = \frac{Q_\varphi}{2\pi r} \tag{68}$$

$$H = -N_\varphi \cos\varphi = \frac{Q_\varphi}{2\pi r} \cot\varphi \tag{69}$$

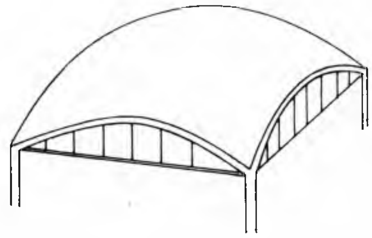
$$Z_p = Hr = -N_\varphi r \cos\varphi = \frac{Q_\varphi}{2\pi} \cot\varphi. \tag{70}$$

Ljuske oblika eliptičkog paraboloida. Ako se jednačina eliptičnog paraboloida unese u izraz (55) sa opterećenjem $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = q$, dobija se diferencijalna jednačina ravnoteže

$$\frac{f_2}{b^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{f_1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{q}{2}. \tag{71}$$

Problem se sastoji u traženju rešenja koje će istovremeno da zadovolji realne granične uslove. Oni zavise od ivičnih elemenata koji mogu biti elastični ili kruti, tako da u pojedinim koordinatnim pravcima daju nepomerljiv ili elastični oslonac, ili pak ne pružaju nikakav otpor.

Ljuska oblika eliptičnog paraboloida nad kvadratnom ili pravougaonom osnovom oslanja se na elastične ivične lukove (sl. 37), gde se njihovi potisci obično preuzimaju zategama koje su vešaljkama obešene o luk.

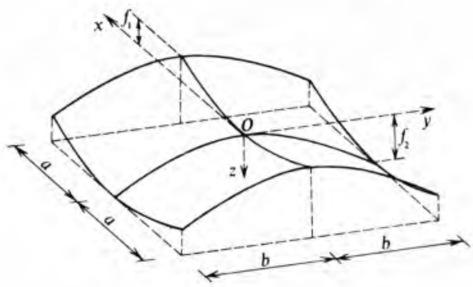


Sl. 37. Ljuska oblika eliptičnog paraboloida nad kvadratnom ili pravougaonom osnovom

Ljuske oblika hiperboličnog paraboloida. Element površine hiperboličnog paraboloida se često upotrebljava kao srednja površina ljuske sa paraboličnim ili pravim ivicama.

Hiperbolični paraboloid sa paraboličnim ivicama (sl. 38) definisan je jednačinom (16). Kada se ta jednačina unese u izraz (55) sa opterećenjem $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = q$, dobija se diferencijalna jednačina ravnoteže

$$\frac{f_1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{f_2}{b^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{q}{2}. \tag{72}$$



Sl. 38. Ljuska oblika hiperboličnog paraboloida sa paraboličnim ivicama

Ako se za naponsku funkciju izabere relacija

$$F = -\frac{1}{4}\frac{b^2}{f_2} q x^2, \tag{73}$$

kao jedna od mogućnosti (*W. Flügge*, Stresses in Shells), zamenom u (52) dobija se

$$n_x = 0, \quad n_y = -\frac{1}{2}\frac{b^2}{f_2} q, \quad n_{xy} = 0. \tag{74}$$

Prema tome celokupno se opterećenje u ljusci prenosi duž parabola paralelnih sa yOz ravni, a puno je oslanjanje u ravni $y = \pm b$.

Za drugu izabranu mogućnost kad je

$$F = \frac{1}{4}\frac{a^2}{f_1} q x^2 \tag{75}$$

dobija se

$$n_x = \frac{1}{2}\frac{a^2}{f_1} q, \quad n_y = 0, \quad n_{xy} = 0. \tag{76}$$

Celokupno opterećenje prenosi se, dakle, duž parabola paralelnih sa xOz ravni, a oslanjanje je u ravni $x = \pm a$.

Treća mogućnost sastoji se u raspodeli prenošenja opterećenja n oba sistema parabola. Tada je naponska funkcija

$$F = -\frac{1}{8}\left(\frac{b^2}{f_2}x^2 - \frac{a^2}{f_1}y^2\right) q, \tag{77}$$

pa se dobija

$$n_x = \frac{1}{4}\frac{a^2}{f_1} q, \quad n_{xy} = 0. \tag{78}$$

Izbor funkcije F i time pravaca prenošenja opterećenja treba provesti zavisno od ivičnog oslanjanja. Kada postoji puno oslanjanje na ivicama $y = \pm b$ i nema izrazitijih ukrućenja na ivicama $x = \pm a$, nema ni značajnijeg oslanjanja na viseće parabole, pa se konstrukcija ponaša kao svod. Kada postoje lukovi na ivicama u ravnima $x = \pm a$ i nema oslanjanja duž ivica $y = \pm b$, viseće parabole predaju svoje reakcije lukovima. Treće rešenje je primenljivo kada su sve ivice krute.

Hiperbolični paraboloid sa pravim ivicama i upravnim koordinatnim osama x, y (sl. 21b) definisan je jednačinom (15). Unošenjem te jednačine u izraz (55), uzevši u obzir (57) i $k = \frac{f}{ab}$, a za opterećenje $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = q$, dobija se diferencijalna jednačina ravnoteže ljuske

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}k = q. \tag{79}$$

Pomoću izraza (52) izvodi se

$$n_{xy} = n_{yx} = -\frac{q}{2k}. \tag{80}$$

Diferenciranjem po x nastaje

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{2k}\frac{\partial q}{\partial x} \tag{81}$$

i integrisanjem po y dobija se prema (52)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}y + f_2(x) = n_y + G_y. \tag{82}$$

Slično se dobija

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{d}x + f_1(y) = n_x + G_x. \tag{83}$$

Pošto je $g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = q$, izrazi (80), (82), (83) svode se na

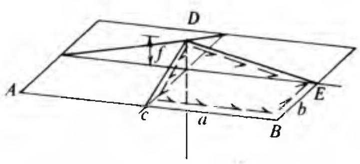
$$n_{xy} = -\frac{q}{2k}, \quad n_y = f_2(x), \quad n_x = f(y). \tag{84}$$

Ljuska u obliku kišobrana (sl. 39), oslonjena na jedan stub, sastoji se od četiri elementa hiperboličnog paraboloida sa pravim ivicama, gde su ravni simetrije xOz i yOz. Za $BC = a$, $BE = b$ i $DA = f$ dobija se konstanta

$$k = \frac{f}{ab} \tag{85}$$

i rezultanta smicanja

$$n_{xy} = -\frac{q}{2k} = -\frac{q}{2}\frac{ab}{f}. \tag{86}$$



Sl. 39. Ljuska u obliku kišobrana od četiri elementa hiperboličnog paraboloida sa pravim ivicama oslonjena na jedan stub

Na sl. 39 prikazano je dejstvo tih sila, a pošto je n_{xy} sila po jedinici dužine, ukupni pritisak u tački C dobija se integracijom rezultanti smicanja po dužini ivice, pa je

$$N_C = n_{xy}a = -\frac{qa}{2k}. \tag{87}$$

Integracijom rezultante smicanja duž kose ivice CD dobija se sila zatezanja u tački D, i to od elementa $BCDE$

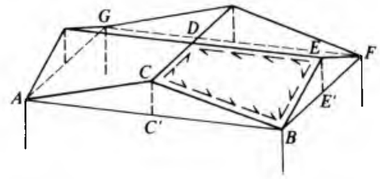
$$N_{DC} = \frac{q}{2k}\sqrt{b^2 + f^2}. \tag{88}$$

Na sličan način se dobija sila zatezanja u tački D od ivice DE od elementa $BCDE$

$$N_{DE} = \frac{q}{2k}\sqrt{a^2 + f^2}. \tag{89}$$

Ukupne sile u ivicama CD, odnosno DE, iznose $2N_{DC}$, odnosno $2N_{DE}$, jer po dva susedna elementa deluju na te ivice.

Ljuska od četiri elementa hiperboličnog paraboloida sa pravim ivicama (sl. 40), oslonjena na četiri stuba, ima jednostavnu raspodelu sila kao i prethodna. Ovde su neophodne zatege AB, BF, FG, AG.



Sl. 40. Ljuska od četiri elementa hiperboličnog paraboloida sa pravim ivicama oslonjena na četiri stuba

Kroz tačku M površine jednog elementa ljuske, oblika hiperboličnog paraboloida sa pravim ivicama (sl. 41a), prolaze dve parabole, od kojih se jedna može uzeti za pritisnuti luk, a druga za lančanicu. Jednačina je ose luka (sl. 41b) u koordinatnom sistemu (u, z)

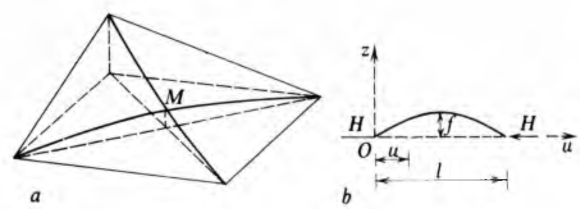
$$z = \frac{4f}{l^2}u(l - u), \tag{90}$$

gde je f strela, a l raspon luka. Pod pretpostavkom da se opterećenje q ljuske podjednako raspodeljuje na luk i na lančanicu, a iz uslova da je moment u temenu luka jednak nuli,

$$M = \frac{1}{8}\frac{q}{2}l^2 - Hf = 0, \tag{91}$$

dobija se

$$H = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{8f}. \tag{92}$$



Sl. 41. Pritisnuta parabolična traka i zategnuta parabolična traka ljuske oblika hiperboličnog paraboloida (*a*) i parabola u koordinatnom sistemu uOz u ravni prenošenja pritiska (*b*)

Diferencirajući dvaput po u jednačinu za z (90) izlazi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\frac{8f}{l^2}. \tag{93}$$

pa se zamenom vrednosti iz jednačine (92) dobija

$$H\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}u^2} = -\frac{q}{2}, \tag{94}$$

Pošto je $K = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, dobija se za luk

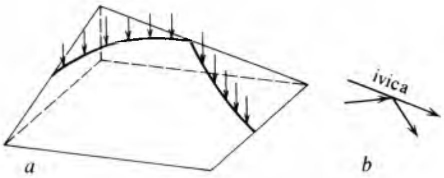
$$H = -\frac{q}{2K}, \tag{95}$$

a za lančanicu

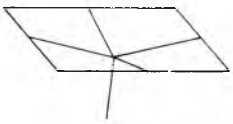
$$H = \frac{q}{2K}. \tag{96}$$

Na ivici ljuske (sl. 42a) reakcije luka i lančanice daju rezultantnu silu pritiska ili zatezanja koja je paralelna s ivicom (sl. 42b).

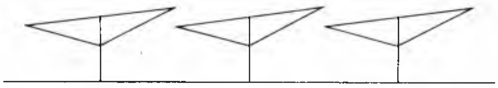
Kombinovanje elemenata ljuske oblika hiperboličnog paraboloida pruža interesantne i raznovrsne mogućnosti za formiranje krovnih konstrukcija, od kojih su neke prikazane na sl. 43, 44 i 45.



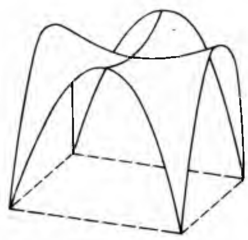
Sl. 42. Reakcije pritisnute parabolične trake i zategnute parabolične trake na ivici ljuske oblika hiperboličnog paraboloida. *a* položaj parabola na ljusci, *b* reakcije paraboličnih traka i rezultujuća sila duž ivice ljuske



Sl. 43. Ljuska od četiri elementa hiperboličnog paraboloida oslonjena na jedan stub (pečurkasta ljuska)



Sl. 44. Kose pečurkaste ljuske u nizu koje formiraju testerastu konturu krova radi osvetljavanja hale

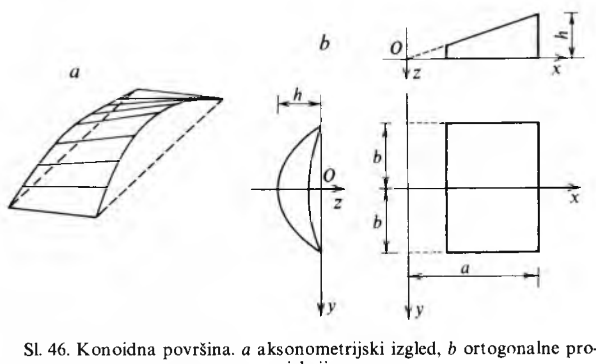


Sl. 45. Ljuska od četiri elementa hiperboličnog paraboloida sa paraboličnim ivicama

Ljuske konoidnog oblika. Konoidna ljuska (sl. 46a), sa parabolom kao linijom vodiljom u vertikalnoj ravni, izvedena je kretanjem prave paralelno vertikalnoj ravni simetrije ljuske po paraboli i po pravoj upravnoj na ravan simetrije ljuske (sl. 46b). Na dvema naspramnim stranama ljuska se oslanja na ivične lukove, a na drugim dvema stranama nalaze se horizontalni ivični nosači. U koordinatnom sistemu (x, y, z) srednja površina ljuske je predstavljena jednačinom

$$z = -\frac{x}{a}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{97}$$

Za opterećenje ljuske uzima se da je $g = g(x, y)$, koje je simetrično s obzirom na ravan simetrije ljuske $y = 0$. Za razmatrane ljuske važi



Sl. 46. Konoidna površina. *a* aksonometrijski izgled, *b* ortogonalne projekcije

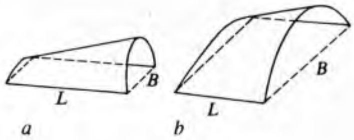
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2hy}{ab^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2hx}{ab^2}, \tag{98}$$

pa se izrazom (51) za naponsku funkciju $F = F(x, y)$ dobija

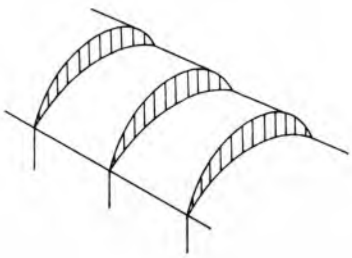
$$-\frac{4hy}{ab^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{2hx}{ab^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x} + g = 0. \tag{99}$$

Naponska funkcija se bira u zavisnosti od ivičnih uslova.

Najveća je zakrivljenost ljuske u blizini čeonog luka. Kada je raspon luka B mali s obzirom na dužinu ljuske L $(L > B)$, tj. kad je ljuska duga (sl. 47a), tada se može uzeti da se opterećenje pretežno prenosi lučno prema pravim ivicama (kao u svodu). Kad je ljuska kratka (sl. 47b), odnosno kad je $B > L$, opterećenje se prenosi u većoj meri prema lučnim ivicama. Primena konoidnih ljuski za formiranje testerastog krova prikazana je na sl. 48.



Sl. 47. Duga konoidna ljuska (*a*) i kratka konoidna ljuska (*b*)



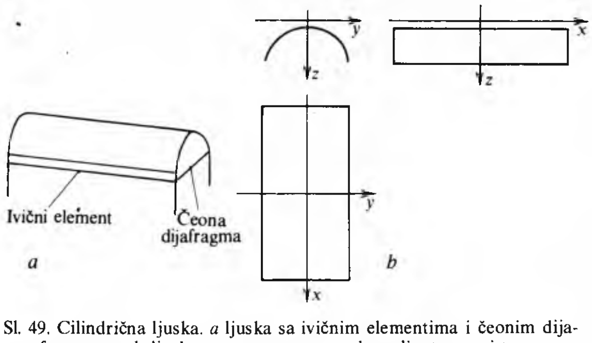
Sl. 48. Testerasti krov formiran konoidnim ljuskama

Cilindrična ljuska ima na svojim čeonim ivicama luk ili zidni nosač (dijafragmu), a na pravim ivicama ivične grede (ivične elemente) (sl. 49a). Razmatra se ljuska koja ima međusobno upravne ravni dijafragme i ivičnih elemenata. Jednačina je srednje površine cilindrične ljuske (sl. 49b) u koordinatnom sistemu (x, y, z)

$$z = f(y) \tag{100}$$

a uzima se da vertikalno opterećenje ne zavisi od x, pa je

$$g = g(y).$$



Sl. 49. Cilindrična ljuska. *a* ljuska sa ivičnim elementima i čeonim dijafragmama, *b* ljuska u pravougaonom koordinatnom sistemu

Za cilindrične ljuske važi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}, \tag{101}$$

tako da izraz (51) za naponsku funkciju $F = F(x, y)$ daje

$$\frac{d^2 z}{dy^2}\frac{\partial F}{\partial x^2} + g(y) = 0. \tag{102}$$

Dvokratnim integrisanjem ove jednačine dobija se

$$F = -\iint \frac{g(y)}{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}x. \tag{103}$$

U toj formuli izraz pod znakom integrala

$$\frac{g(y)}{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}} \equiv G(y) \tag{104}$$

ne zavisi od x, pa se može staviti ispred znaka integrala

$$F = -G(y)\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}G(y) + xK(y) + L(y), \tag{105}$$

gde su $K(y)$ i $L(y)$ funkcije koje se određuju u zavisnosti od uslova oslanjanja ljuske. Pošto je naponska funkcija F nađena, iz relacija (50) dobijaju se redukovane sile

$$n_x = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 G(y)}{\mathrm{d}y^2} + x\frac{\mathrm{d}^2 K(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2 L(y)}{\mathrm{d}y^2} \tag{106}$$

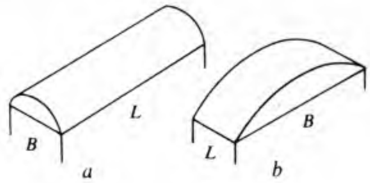
$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = x\frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}K(y)}{\mathrm{d}y} \tag{107}$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -G(y). \tag{108}$$

Te formule pokazuju da na vrednost od n_y utiču samo vertikalne sile i da ona ne zavisi od oslonačkih uslova. Zbog toga ivične elemente treba tako konstruisati da silama n_y na ivicama ljuske ne pružaju otpor. Pogodnim izborom funkcija $K(y)$ i $L(y)$ može se postići da na mestu zakrivljene ivice bude $n_x = 0$ i da je dijafragma savitljiva upravno na svoju ravan.

Cilindrične ljuske se klasifikuju zavisno od odnosa dužine L prema širini B (sl. 50): duge ljuske $L:B > 2$, srednje ljuske $1 < L:B \leqq 2$, kratke ljuske $L:B \leqq 1$. S obzirom na naprezanje duga ljuska se približno ponaša kao greda zakrivljenog poprečnog preseka (sl. 50a). U kratkim ljuskama dominira membransko stanje naprezanja; one se ponašaju slično kao svodovi oslonjeni na dijafragme ili lukove (sl. 50b).

Ostali oblici ljuski. Pored navedenih, najviše primenjivanih oblika ljuski i njihovih kombinacija, izvode se i druge forme koje su povoljne s obzirom na ostvarivanje membranskog stanja naprezanja u ljusci. Za viseće konstrukcije upotrebljavaju se pretfabrikovane armiranobetonske ploče kojima se formira krovna površina i posle betoniranja spojnica dobija se prednapregnuta ljuska u obliku obrnute kupole ili obrnutog svoda. Tako ostvarena kruta armiranobetonska ljuska malo se deformiše pri različitim opterećenjima krova, čime je i mreža kablova koja nosi ljusku obezbeđena od većih promena svoga oblika.



Sl. 50. Duga cilindrična ljuska (*a*) i kratka cilindrična ljuska (*b*)

Konstruisanje ljuski. Ljuske se najčešće realizuju od armiranog betona, a takođe i od prednapregnutog betona. Sem toga, one se izrađuju od drveta, metala i livenih plastičnih materijala. Armiranobetonske ljuske najčešće se izvode u debljinama od 5···8 cm. Ekonomičnost tih ljuski mnogo zavisi od oplate za njihovo livenje, zbog čega se teži pretfabrikaciji elemenata ljuske u kalupima sa toplotnom obradom betona, da bi se kalup brzo oslobodio za livenje novog elementa. Ljuska se tada formira montiranjem pretfabrikovanih delova i posle betoniranja spojnica dobija se monolitna celina. Kada se ljuska betonira u oplati na gradilištu, vreme zadržavanja oplate znatno se skraćuje ako se primeni toplotna obrada betona, kojom se za kraće vreme postiže dovoljna čvrstoća betona da se oplata može ukloniti i iskoristiti za sledeći element ljuske.

LIT.: *W. Flügge,* Stresses in Shells. Springer-Verlag OHG, Berlin 1960. — *M. Sanchez-Arcas,* Form und Bauweise der Schalen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1961. — Инструкция по проектированию железобетонных тонкостенных пространственных покрытий и перекрытий. Гостройиздат, Москва 1961. — *C. Faber, Candela,* The Shell Builder. Reinhold Publishing Corp., New York 1963. — *D. P. Billington,* Thin Shell Concrete Structures. McGraw-Hill Book Company, New York 1965. — *K. Girkmann,* Površinski nosači. Građevinska knjiga, Beograd 1965 (prevod). — *P. Csonka,* Membranschalen. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1966. — *L. Fischer,* Theorie und Praxis der Schalenkonstruktionen. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1967. — *A. M. Haas,* Design of Thin Concrete Shells, Vol. 2. John Wiley & Sons, New York 1967. — *P. Starke,* Biegungssteife Rotationsschalen. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1968. — *P. M. Ogibalov* i *T. Anđelić,* Mehanika ljuski i ploča. Izdavačko-informativni centar studenata, Beograd 1975. — *H. Rühle,* Prostorne krovne konstrukcije. Građevinska knjiga, Beograd 1977 (prevod).

Đ. Zloković