nika: prema (11) iz 1 g LiH dobija se 2,82 l H_2. Služi za punjenje gumenih čamaca, antenskih i signalnih balona vodonikom u pomorstvu i za snabdevanje vodonikom u vojne svrhe. Zbog toga što lako sagoreva u kiseoniku upotrebljava se i kao čvrsto gorivo za rakete. U organskim se sintezama litijum-hidrid upotrebljava kao katalizator za procese selektivne kondenzacije i redukcije, te kao sirovina za proizvodnju organometalnih jedinjenja koja se takođe upotrebljavaju kao katalizatori. U nuklearnoj tehnici litijum-hidrid se upotrebljava za zaštitu od zračenja i kao sredstvo za apsorpciju toplote.

Litijum-deuterid, LiD, ima svojstva vrlo slična svojstvima litijum-hidrida. Posebno je važan ^{6}LiD, jer je glavno fuzijsko termonuklearno gorivo. Tako se djelovanje vodonikove bombe zasniva na nuklearnim reakcijama

$$^6_3\mathrm{Li}^2_1\mathrm{D} + ^1_0\mathrm{n} \rightarrow ^3_2\mathrm{He} + ^3_1\mathrm{T} + ^2_1\mathrm{D} + 4{,}8\,\mathrm{MeV}, \quad (12)$$

$$^3_1\mathrm{T} + ^2_1\mathrm{D} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^1_0\mathrm{n} + 17{,}6\,\mathrm{MeV} \quad (13)$$

pri čemu se neutroni potrebni za reakciju (12) dobiju eksplozijom uranove bombe koja služi kao upaljač. Eksplozijski ekvivalenat 1 kg $^6_3$LiD jest 50 kt TNT (trinitrotoluola).

Litijum-deuterid se dobija iz ^{6}Li i deuterijuma na isti način kao i litijum-hidrid iz litijuma i vodonika.

Kompleksni hidrid litijuma, posebno litijum-tetrahidroaluminat ($LiAlH_4$, litijum-aluminijum-hidrid, litijum-alanat) važni su katalizatori za redukciju u procesima organske kemijske industrije. (Sa litijum-tetrahidroaluminatom mogu se lako reducirati jedinjenja koja se ne mogu ili mogu samo vrlo teško drugim postupcima, usled smetnji uzrokovanih steričkim faktorima.) Za upotrebu u te svrhe važno svojstvo litijum-tetrahidroaluminata jeste njegova dobra rastvorljivost u organskim rastvaračima: npr. 280 g u 1 l dietiletra, 130 g u 1 l tetrahidrofurana. (Za rastvaranje ne smeju se upotrebiti rastvarači sa reducibilnim funkcionalnim grupama.)

Industrijski se litijum-tetrahidroaluminat uglavnom dobija reakcijom

$$4\,\mathrm{LiH} + \mathrm{AlCl_3} \rightarrow \mathrm{LiAlH_4} + 3\,\mathrm{LiCl}, \quad (14)$$

koja se izvodi mešanjem suspenzije litijum-hidrida u razblaženom rastvoru litijum-tetrahidroaluminata i rastvora aluminijum-hlorida u etru, u atmosferi azota. Reakcijska se smeša ugreje do ključanja reakcijskom toplotom. Suvišak litijum-hidrida i nastali litijum-hlorid odvoje se filtracijom, a litijum-tetrahidroaluminat izluči uparavanjem filtrata.

Za slične se svrhe, ali u manjoj meri, upotrebljava i litijum-tetrahidroborat ($LiBH_4$, litijum-borhidrid, litijum-boranat). Dobija se reakcijom

$$\mathrm{NaBH_4} + \mathrm{LiCl} \rightarrow \mathrm{LiBH_4} + \mathrm{NaCl}, \quad (15)$$

koja se obično izvodi u rastvoru u izopropilaminu. Po završetku reakcije filtrira se, a litijum-tetrahidroborat izluči iz filtrata uparavanjem. Čisti se ekstrakcijom sa dietiletrom.

Organska jedinjenja litijuma. Alkillitijumska jedinjenja sa više od tri atoma ugljenika u lancu teško su isparljive tečnosti. Metillitijum, etillitijum i aromatična jedinjenja čvrste su, kristalne supstance. Osim metillitijuma sva su ta jedinjenja rastvorljiva u ugljenovodonicima. Odlikuju se velikom reaktivnošću. Izvanredno su osetljiva prema kiseoniku (na vazduhu se odmah upale), vodi i ugljen(IV)-oksidu, pa se sve operacije s njima izvode u atmosferi azota ili nekog plemenitog gasa.

Organska jedinjenja litijuma obično se dobijaju iz litijuma i organskih halogenida u rastvorima u petroletru, cikloheksanu, etru reakcijama tipa

$$2\,\mathrm{Li} + \mathrm{RX} \rightarrow \mathrm{RLi} + \mathrm{LiX} \quad (16)$$

(gde je R organski radikal, a X atom halogena). U tim se postupcima za dobijanje alifatičnih jedinjenja litijuma obično upotrebljavaju alkilhloridi, jer teže stupaju u reakcije tipa

$$\mathrm{RLi} + \mathrm{RX} \rightarrow \mathrm{R \cdot R} + \mathrm{LiX} \quad (17)$$

nego alkilbromidi i alkiljodidi. Naprotiv, za dobijanje aromatičnih litijumovih jedinjenja prema (16) prikladniji su bromidi i jodidi.

Od jednostavnijih organskih jedinjenja litijuma najvažniji su butillitijum i fenillitijum. Najviše se upotrebljavaju za dobijanje drugih, složenijih organskih jedinjenja litijuma, npr. s litijumom vezanim za aromatičnu jezgru, na bočne lance, te za slične svrhe kao i Grignardova jedinjenja. U takvim su procesima jedinjenja litijuma reaktivnija, pa je s njima moguće izvesti reakcije neprovedive s Grignardovim jedinjenjima.

Privredno značenje litijumovih jedinjenja. Podaci o svetskoj proizvodnji litijumovih jedinjenja veoma su oskudni. Znade se da se potražnja tih jedinjenja više nego upedeseterostručila tokom četrdesetih godina i da se docnije naglo smanjivala, da bi se poslednjih godina ustalila. Tako je potražnja jedinjenja litijuma računata na bazi litijum-karbonata u SAD prije drugoga svetskog rata bila manja od 200 kt, pa je nakon rata dosegla vrhunac od $\sim$13 Mt, a sada je $\sim$5 Mt.

Najviše se litijumovih jedinjenja troši za proizvodnju maziva (verovatno $\sim$50%) i u keramičkoj industriji (verovatno $\sim$35%). Znatne se količine jedinjenja litijuma troše u proizvodnji akumulatora, sredstava za lemljenje i zavarivanje (verovatno $\sim$7%). Od ostalih količina jedinjenja litijuma najviše se troši u farmaceutskoj industriji i za sušenje vazduha.

LIT.: *W. Schreiter,* Seltene Metalle, Bd. 2. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1961. — *P. E. Landolt, M. Sittig,* Rare Metals Handook. Reinhold Publishing Co., New York 1961. — *P. E. Landolt, C. A. Hampel,* Encyclopedia of The Chemical Elements. Van Nostrand Reinhold Co., New York 1968. — *А. Н. Зеликманан, Г. А. Мерсон,* Металлургия редких металлов. Металлургия, Москва 1973. — *B. Đurković,* Metalurgija retkih metala. Građevinska knjiga, Beograd 1976.

B. Đurković

LOGIKA, MATEMATIČKA

LOGIKA, MATEMATIČKA, matematičkim sredstvima izučava logičko zaključivanje i konstruira matematičko-logičke strukture koje će, što je moguće adekvatnije i strože, opisivati određena područja logike i matematike.

Počeci matematičke logike nalaze se već u nekim radovima G. W. Leibniza, te kasnije — za uže područje detaljnije razrađeni — u radovima G. Boolea. Sustavno se matematička logika počela izgrađivati kad je razvoj klasične Cantorove teorije skupova doveo do antinomija koje su zahtijevale reviziju uobičajenih metoda u matematici, posebno definiranja matematičkih objekata i zaključivanja o relacijama među njima.

U programima refundiranja matematike mogu se razlikovati tri smjera:

U tzv. *logicističkom* programu B. Russella i A. N. Whiteheada ideja je u biti ova: treba strogo zasnovati i razviti logiku te zatim na toj osnovi izgrađivati matematiku kao granu logike. O tome se u tekstu koji slijedi neće pisati opširnije.

Tzv. *formalistički* smjer D. Hilberta razdvaja formalnu matematičku teoriju *koja* se izgrađuje od sadržajne tzv. *metamatematike* (ili »teorije dokaza«), *pomoću koje se* ta izgradnja provodi. Vrlo oštrim zahtjevima i restrikcijama u metateoriji nastoji se postići da unutar formalne teorije ne bi moglo doći do proturječja.

Tzv. *intuicionistički* smjer L. E. J. Brouwera vrlo radikalnom revizijom klasičnih pojmova o legitimnosti matematičkih objekata i zaključivanja o relacijama među njima nastoji graditi matematiku u kojoj su dopustivi samo oni objekti koji se, bar u načelu, mogu efektivno konstruirati i samo ona zaključivanja koja se mogu efektivno provesti. Po Brouweru, suprotno od Russellova shvaćanja, logika je grana matematike.

Formalistički program ide za tim da uz potrebne reinterpretacije sačuva i osigura što veći dio klasične matematike. Intuicionistički program mnogo toga iz nje žrtvuje u nastojanju da ponovno izgradi razna područja matematike inzistirajući na evidenciji njihove sadržajne istinitosti; pri tome se neka intuicionistički koncipirana grana matematike često duboko razlikuje od klasične koja je potakla njenu izgradnju. Iako svaki od spomenutih smjerova često može na svom jeziku »reinterpretirati« rezultate nekog drugog, ti različiti smjerovi načelno nisu međusobno pomirljivi.

ALGEBRA SUDOVA

Na najelementarnijoj razini izgrađuje se algebra sudova, kao prvi korak u semantičkom pristupu konstrukciji jedne matematičke strukture koja bi po mogućnosti što adekvatnije opisivala određeno područje logičkog zaključivanja.

Sudovi. Pod sudom se razumijeva suvisla deklarativna izreka (iskaz) koja se u pogledu istinitosti podvrgava načelu isključenog trećeg i načelu kontradikcije, tj. koja ima posve određenu, jednu i samo jednu vrijednost istinitosti: ona je bilo istinita, bilo neistinita (lažna).

To je samo deskriptivna, »intuitivna« i neformalna definicija suda, a ne neka definicija u striktno matematičkom smislu.

Primjeri. »2 + 2 = 4« jest (istinit) sud. »2 + 2 = 3« jest neistinit sud. »Sutra će padati kiša« nije sud jer vrijednost istinitosti te izreke ovisi o budućim događajima i nije izrekom samom jednoznačno određena.

Unutar algebre sudova nije važan sadržaj nekog suda, već jedino njegova vrijednost istinitosti.

Sudovi se označuju velikim latinskim slovima: A, B, C,... Radi kraćeg izražavanja kaže se redovno samo npr. »sud A«, iako bi korektnije bilo »sud označen sa A« i slično. Ako je sud A istinit, piše se $\tau A = \top$ i kaže da mu je vrijednost istinitosti $\top$ (čitaj: te); ako je sud A neistinit, kaže se da mu je vrijednost istinitosti $\perp$ (čitaj: ne-te) i piše $\tau A = \perp$. ($\top$ podsjeća na prvo slovo engleske riječi *true* istinit.)

OSNOVNI ZNAKOVI MATEMATIČKE LOGIKE

Znak	*Alternativni znakovi*	*Čitanje*	*Značenje*
$\top$	1	te	istina
$\perp$	0	ne-te	neistina
$\neg$	$-$, $\sim$	non	negacija
$\&$	$\wedge$, $\circ$	et	konjunkcija
$\vee$		vel	(inkluzivna) disjunkcija
$\veebar$		aut	(ekskluzivna) disjunkcija
$\Rightarrow$	$\supset$, $\rightarrow$	povlači	(formalna) implikacija
$\Leftrightarrow$	$\equiv$, $\leftrightarrow$	ekvivalentno	ekvivalencija
$\uparrow$	$\mid$	šefer	Shefferova operacija
$\downarrow$		lukašjevič	Łukasiewiczeva operacija
$\vdash$		vodi na	iz ... izvedivo je
$\models$		uz ... vrijedi	ako je ..., istina je
$\forall$	$\wedge$	za svaki	kvantor generalizacije
$\exists$	E, $\vee$	za neki	kvantor egzistencije

Ako nema mogućnosti zabune, piše se kadšto samo $A = \top$ odnosno $A = \perp$ (umjesto $\tau A = \top$ odnosno $\tau A = \perp$); takav način pisanja, iako u načelu, strogo uzevši, nekorektan, može se dopustiti jer je analogan postupak u matematici i onako uobičajen, i uz potreban oprez neće dovesti do nesporazuma, a izbjegavanje takva načina pisanja često bi dovelo do niza teškoća. Kadšto će se u toj »nekorektnosti« poći i dalje, »izjednačujući« uopće sud s njegovom vrijednosti istinitosti, a neće doći do nesporazuma ako se stalno bude imalo na umu da je riječ samo o kraćem načinu izražavanja, a ne o stvarnoj identifikaciji različitih pojmova.

Operacije sa sudovima. Polazeći od elementarnih, osnovnih sudova, mogu se graditi novi, sastavljeni sudovi, povezujući osnovne na način koji će odgovarati povezivanju izreka sa »i«, »ili«, »ako..., onda« itd. Najjednostavnije operacije povezivanja sudova jesu unarne i binarne operacije.

Unarne operacije. *Negacija.* Ako je A neki sud, značit će $\neg A$ (čitaj: non A) novi sud »nije A«; to je *negacija* suda A. Po (prirodnoj) definiciji, ako je $\tau A = \top$, bit će $\tau(\neg A) = \perp$, a ako je $\tau A = \perp$, bit će $\tau(\neg A) = \top$. To se izražava tablicom toka vrijednosti istinitosti za $\neg A$:

$\tau(\neg A)$

τA	$\top$	$\perp$
$\tau(\neg A)$	$\perp$	$\top$

Unarnih operacija sa sudovima, tj. funkcijâ koje jednom sudu određene vrijednosti istinitosti pridružuju neki sud pripadne vrijednosti istinitosti, ima svega $2^2 = 4$; pored negacije to su još ove operacije:

τA	$\top$	$\perp$
$\tau(f_1 A)$	$\top$	$\top$

τA	$\top$	$\perp$
$\tau(f_2 A)$	$\top$	$\perp$

τA	$\top$	$\perp$
$\tau(f_3 A)$	$\perp$	$\perp$

f_1 je identički istinita unarna operacija, f_2 je identitet, a f_3 je identički neistinita operacija.

Binarne operacije. *Konjunkcija.* Ako su A i B neki dani sudovi, značit će $A \& B$ (čitaj: A et B) složenu izreku, novi sud »A i B«. Po (prirodnoj) definiciji taj novi sud $A \& B$ — koji se zove *konjunkcija* sudova A, B — imat će vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda ako oba suda A, B imaju vrijednost istinitosti $\top$. Npr. $\tau((2+2=4)\&(2+3=5)) = \top$, $\tau((2+2= =4)\&(2+3=6)) = \perp$. Ovisnost vrijednosti istinitosti konjunkcije $A \& B$ o vrijednosti istinitosti njenih komponenata A, B predočuje se tablicom toka vrijednosti istinitosti za konjunkciju:

$\tau(A \& B)$

τA \ τB	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Pripomena. Na razini algebre sudova i npr. veznicima »a«, »ali« odgovarat će također konjunkcija, upravo zato što nije zanimljiv sadržaj suda, već jedino njegova vrijednost istinitosti. Npr. za $A \equiv$ »Petar je radin«, $B \equiv$ »Florijan je lijen« odgovarat će $A \& B$ svim ovim sudovima: »Petar je radin i Florijan je lijen«, »Petar je radin, a Florijan je lijen«, »Petar je radin, ali Florijan je lijen«.

Disjunkcija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \vee B$ (čitaj: A vel B) složenu izreku, novi sud »A ili B«, gdje »ili« ima slabi, inkluzivni smisao (kao latinski vel) koji dopušta i istodobnu istinitost sudova A, B (za razliku od jakog, ekskluzivnog »ili« — latinski aut — koji tu istodobnu istinitost obaju sudova A, B isključuje). Po (prirodnoj) definiciji taj novi sud $A \vee B$ — koji se zove (inkluzivna) disjunkcija sudova A, B — imat će vrijednost istinitosti $\perp$ onda i samo onda ako oba suda A, B imaju vrijednost istinitosti $\top$. Npr. $\tau((2+2=3) \vee \vee (2+2=5)) = \perp$, $\tau((2+2=3) \vee (2+2=4)) = \top$. Tablica toka vrijednosti istinitosti za disjunkciju glasi:

$\tau(A \vee B)$

τA \ τB	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

Implikacija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \Rightarrow B$ (čitaj: A implicira B) složenu izreku, novi sud »Ako je A, onda je B«, odnosno tome ekvivalentno »A povlači B« ili »A je dovoljan uvjet za B« ili »B je nuždan uvjet za A«. Pri tom »ako..., onda« nije mišljeno u kauzalnom, već u formalnom smislu, tj. tvrdi se samo da nije istodobno A, ali ne i B. Tako shvaćena implikacija, tzv. *formalna implikacija*, nema isti smisao kao što ga pojam »implikacije« ima u svakodnevnom govoru, već treba da bude shvaćen kao *terminus technicus* algebre sudova. Za takvo definiranje implikacije postoje jaki razlozi. (Ipak, u nekim »neklasičnim« logikama sudova implikacija se definira drugačije, u nekim aspektima »bliže« značenju tog pojma u običnom govoru.) Prema tome taj novi sud

$A \Rightarrow B$ imat će vrijednost istinitosti $\bot$ onda i samo onda ako je $\tau A = \top$, $\tau B = \bot$. Tablica toka vrijednosti istinosti za implikaciju glasi:

$\tau(A \Rightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

Pripomena. U matematici je formalna interpretacija implikacije uobičajena: npr. izreka »Za realne brojeve x, ako je $x > 2$, bit će $x^2 > 4$« ne smatra se lažnom za realne brojeve koji su $\leqq 2$, iako tada $\tau(x^2 > 4)$ može biti $= \bot$ (za $|x| \leqq 2$) i $= \top$ (za $|x| > 2$), a $\tau(x > 2)$ tada je svakako $= \bot$.

Kauzalni »jer« ne može se u (klasičnoj) algebri sudova interpretirati kao binarna operacija među sudovima.

Ekvivalencija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \Leftrightarrow B$ (čitaj: A ekvivalentno B) složenu izreku, novi sud »A je onda i samo onda ako je B« ili, tome ekvivalentno, »A je nuždan i dovoljan uvjet za B«. Po definiciji taj novi sud $A \Leftrightarrow B$ — koji se zove *ekvivalencija* — imat će vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda ako A i B imaju međusobno jednake vrijednosti istinitosti. Tablica toka vrijednosti istinitosti za ekvivalenciju glasi:

$\tau(A \Leftrightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Ekskluzivna disjunkcija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \veebar B$ (čitaj: A aut B) složenu izreku, novi sud »A ili B, ali ne oboje«. Po (prirodnoj) definiciji taj novi sud — koji se zove *ekskluzivna disjunkcija* — imat će vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda ako jedan od sudova A, B ima vrijednost istinitosti $\top$, a drugi $\bot$. Tablica toka vrijednosti istinitosti za ekskluzivnu disjunkciju glasi:

$\tau(A \veebar B)$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Primjeri. U izreci »Treba se pridržavati prometnih propisa ili platiti kaznu« smisao riječi *ili* očito je ekskluzivan. U izreci »Od služenja vojnog roka oslobođene su osobe koje boluju od neke teže bolesti ili su strani državljani« smisao riječi *ili* očito je inkluzivan. U izreci »Smisao riječi *ili* je inkluzivan ili ekskluzivan« smisao drugog *ili* je ekskluzivan.

Shefferova operacija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \uparrow B$ (čitaj: A šefer B) složenu izreku, novi sud »Nije istodobno i A i B«. Po definiciji taj novi sud $A \uparrow B$ imat će vrijednost istinitosti $\bot$ onda i samo onda ako oba suda A, B imaju vrijednost istinitosti $\top$. Tablica toka vrijednosti istinitosti za Shefferovu operaciju glasi:

$\tau(A \uparrow B)$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

Łukasiewiczeva operacija. Ako su A i B neki sudovi, značit će $A \downarrow B$ (čitaj: A lukašjevič B) složenu izreku, novi sud »Niti je A, niti je B«. Po definiciji taj novi sud $A \downarrow B$ imat će vrijednost istinitosti $\top$ onda i samo onda ako oba suda A, B imaju vrijednost istinitosti $\bot$. Tablica toka vrijednosti istinitosti za Łukasiewiczevu operaciju glasi:

$\tau(A \downarrow B)$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Identički istinita odnosno *identički neistinita* binarna operacija vide se u tablicama:

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

τA \ τB	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Za preostalih $16 - 9 = 7$ binarnih operacija nije uobičajeno uvoditi posebne nazive.

n-arne operacije za $n \geqq 3$ redovno se ne uvode neposredno, već se izgrađuju pomoću unarnih i binarnih. Svaka n-arna operacija algebre sudova može se shvatiti kao funkcija od n argumenata, naime kao preslikavanje skupa svih uređenih n-torki iz skupa $\{\top, \bot\}$ u skup $\{\top, \bot\}$. Korisno je definirati i *nularne* operacije algebre sudova; to su funkcije od »nijednog« argumenta s vrijednostima u skupu $\{\top, \bot\}$, dakle konstante $\top$ i $\bot$. U dijelu su literature oznake za pojedine operacije algebre (i logike) sudova drugačije. Npr. piše se $\wedge$ ili $\cdot$ umjesto &; $\rightarrow$ ili $\supset$ umjesto $\Rightarrow$; $\sim$ umjesto $\neg$.

Formule algebre sudova. Nularnim, unarnim i binarnim operacijama algebre sudova i zagradama mogu se u matematici na uobičajeni način tvoriti složeni izrazi koji se zovu formule algebre sudova. Npr. $(A \vee B) \,\&\, C$, $\neg((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \uparrow C))$, $(A \Rightarrow B) \vee (\top \,\&\, (C \veebar (\neg D))$ jesu formule algebre sudova. Broj zagrada u takvim izrazima može se često smanjiti ako se uvede određena hijerarhija moći razdvajanja operatora (znakova za operacije), npr. tako da ta moć opada prema nizu: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, &, $\neg$. Tada, recimo, $A \vee B \,\&\, C$ znači isto što i $A \vee (B \,\&\, C)$, a $\neg A \Rightarrow B \vee \neg C$ znači isto što i $(\neg A) \Rightarrow (B \vee (\neg C))$, i slično. Za kraće označavanje formula algebre sudova upotrebljavaju se velika pisana slova $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ ....

Ovisnost vrijednosti istinitosti neke formule algebre sudova o vrijednostima istinitosti (varijabli) sudova od kojih je izgrađena može se predočiti odgovarajućom tablicom toka vrijednosti istinitosti koja će — ako formula sadrži n različitih varijabli — imati 2^n redaka uz odgovarajući broj stupaca. Npr. za formulu $\mathscr{A} \equiv (A \,\&\, B \Rightarrow C) \,\&\, (C \Rightarrow A)$ takva će tablica izgledati ovako:

A	B	C	$A \,\&\, B$	$A \,\&\, B \Rightarrow C$	$C \Rightarrow A$	$\mathscr{A}$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Logička istovrijednost ili jednakost formula algebre sudova. Za dvije formule $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ algebre sudova kaže se da su logički istovrijedne ili jednake i piše se $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ ako za bilo koju (svaku) kombinaciju vrijednosti istinitosti njihovih varijabli sudova (od kojih su sagrađene) kao cjeline poprimaju istu vrijednost istinitosti, tj. ako im se u njihovim tablicama toka vrijednosti istinitosti posljednji stupci poklapaju. U tome smislu ima 2^{2^n} različitih funkcija algebre sudova od n varijabli. Npr. $\neg(A \,\&\, B) = (\neg A) \vee (\neg B)$; $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \,\&\, (B \Rightarrow A)$. Nadalje, $(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C)$, pa se umjesto toga piše samo $A \,\&\, B \,\&\, C$ i slično za disjunkciju itd.

Identički istinite formule algebre sudova ili tautologije jesu takve formule koje — kao cjelina — uvijek poprimaju vrijednost istinitosti $\top$, bez obzira na to kako su odabrane vrijednosti istinitosti sudova od kojih su izgrađene. Ako je $\mathscr{A}$ identički istinita formula, piše se $\models \mathscr{A}$. Npr. $\models A \vee (\neg A)$, $\models A \Leftrightarrow \neg\neg A$, $\models \neg(A \,\&\, \neg A)$.

Identički neistinite formule algebre sudova jesu one koje kao cjelina uvijek poprimaju vrijednost istinitosti $\perp$, bez obzira na to kako su odabrane vrijednosti istinitosti sudova od kojih su izgrađene.

Ispunjive (ili zadovoljive) formule algebre sudova jesu one koje za bar jednu kombinaciju vrijednosti istinitosti svojih varijabli kao cjelina poprimaju vrijednost istinitosti $\top$.

Oborive formule algebre sudova jesu one koje za bar jednu kombinaciju vrijednosti istinitosti svojih varijabli kao cjelina poprimaju vrijednost istinitosti $\perp$.

Metode zaključivanja algebre sudova. Ako su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ identički istinite formule algebre sudova, i formula $\mathscr{B}$ je identički istinita (modus ponens). Ako je $\models \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}$, $\models \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$, onda je i $\models \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ (demonstratio per enumerationem). Ako je $\models \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$, $\models \mathscr{A} \Rightarrow \neg\mathscr{B}$, onda je $\models \neg\mathscr{A}$ (deductio ad absurdum).

Dualitet. Ako su $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ formule (ili, općenitije, funkcije) algebre sudova u varijablama $A, B, C, \ldots$ i ako vrijedi $\mathscr{A}(A, B, C, \ldots) = \neg\mathscr{B}(\neg A, \neg B, \neg C, \ldots)$, kaže se da je funkcija $\mathscr{A}$ *dualna* funkciji $\mathscr{B}$. Ako je $\mathscr{A}$ dualno $\mathscr{B}$, onda je i $\mathscr{B}$ dualno $\mathscr{A}$. Npr. konjunkcija i disjunkcija su međusobno dualne operacije algebre sudova; Shefferova i Łukasiewiczeva operacija također su međusobno dualne. Formula (funkcija) algebre sudova koja je sama sebi dualna zove se autodualna. Npr. funkcija $\mathscr{A}(A, B, C) = (A \,\&\, B) \vee (B \,\&\, C) \vee (C \,\&\, A)$ je autodualna.

Perfektna disjunktivna i perfektna konjunktivna normalna forma funkcija algebre sudova. Ako je neka funkcija $\mathscr{A}$ algebre sudova zadana svojom tablicom toka vrijednosti istinitosti, može se lako sagraditi njoj jednaka formula koja je oblika disjunkcije blokova koji su konjunkcije varijabli od $\mathscr{A}$ ili njihovih negacija (perfektna disjunktivna forma), odnosno koja je oblika konjunkcije blokova koji su disjunkcije varijabli od $\mathscr{A}$ ili njihovih negacija (perfektna konjunktivna forma). Npr. ako je $\mathscr{A}$ zadano sa

A	B	C	$\mathscr{A}$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

tada je perfektna disjunktivna forma te funkcije

$$(A \& B \& C) \vee (A \& \neg B \& \neg C) \vee (\neg A \& B \& C) \vee (\neg A \& B \& \neg C),$$

a njena je perfektna konjunktivna forma

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \& (\neg A \vee B \vee \neg C) \& (A \vee B \vee \neg C) \& (A \vee B \vee C).$$

Sustav izvodnica ili *sustav generatora algebre sudova* jest svaki skup operacija algebre sudova kojima se može izgraditi formula s proizvoljno zadanim tokom vrijednosti istinitosti. Npr. $\{\neg, \&, \vee\}$ jest sustav izvodnica algebre sudova.

Baza algebre sudova jest svaki sustav izvodnica algebre sudova sa svojstvom da nijedan njegov pravi podskup više nije sustav izvodnica; drugim riječima, baze su minimalni sustavi izvodnica algebre sudova. Npr. $\{\neg, \&\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$ jesu baze algebre sudova. Postoje i jednoelementne baze: $\{\uparrow\}$ i $\{\downarrow\}$. Troelementne baze su npr. $\{\vee, \Leftrightarrow, \veebar\}$, $\{\Leftrightarrow, \&, \veebar\}$. Postoje i četveroelementne baze algebre sudova, no one se ne mogu izgraditi od samih unarnih i binarnih operacija. Može se dokazati da nema baze sa 5 ili više elemenata.

Skupovna interpretacija algebre sudova. Postoji uska veza između algebre sudova i algebre skupova: Neka je $\mathscr{U}$ neki neprazni skup i $A, B, C, \ldots$ njegovi podskupovi. Provedu li se pridruženja (c je oznaka za komplement, tj. $cA = \mathscr{U} - A$):

$$\begin{aligned}
&\neg A \leftrightarrow cA,\\
&A \,\&\, B \leftrightarrow A \cap B,\\
&A \vee B \leftrightarrow A \cup B,\\
&A \Rightarrow B \leftrightarrow (cA) \cup B,\\
&A \Leftrightarrow B \leftrightarrow [(cA) \cup B] \cap [(cB) \cup A],\\
&A \veebar B \leftrightarrow [A \cap (cB)] \cup [B \cap (cA)],\\
&A \uparrow B \leftrightarrow c(A \cap B),\\
&A \downarrow B \leftrightarrow c(A \cup B)
\end{aligned}$$

i prošire li se ona rekurzivno na formule algebre sudova, bit će neka formula $\mathscr{A}$ algebre sudova identički istinita onda i samo onda ako za njoj pridruženu formulu $\mathscr{A}'$ algebre skupova vrijedi $\mathscr{A}' = \mathscr{U}$. Npr. $A \vee (\neg A) \leftrightarrow A \cup (cA) = \mathscr{U}$; $\neg(A \,\&\, \neg A) \leftrightarrow c(A \cap (cA)) = \mathscr{U}$; $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \leftrightarrow (cA) \cup (c(cA) \cup B) = (cA) \cup A \cup B = \mathscr{U}$.

Modulo 2 interpretacija algebre sudova. Pridruži li se vrijednosti istinitosti $\top$ broj 1, a vrijednosti istinitosti $\perp$ broj 0, bit će: $\tau(\neg A) = (1 + \tau A) \pmod 2$, $\tau(A \,\&\, B) = (\tau A) \cdot (\tau B) \pmod 2$, $\tau(A \vee B) = (\tau A + \tau B + \tau A \cdot \tau B) \pmod 2$ itd. Formula $\mathscr{A}$ algebre sudova bit će identički istinita onda i samo onda ako je $\tau\mathscr{A} \equiv 1 \pmod 2$.

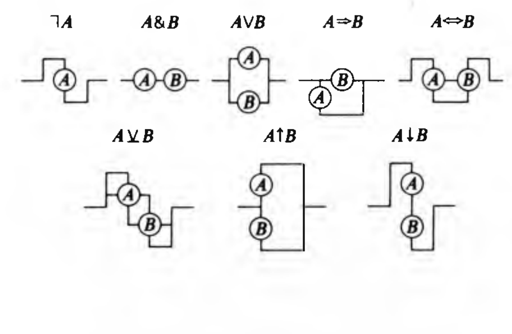
Aritmetička interpretacija algebre sudova. Pridruži li se opet vrijednosti istinitosti $\top$ broj 1, a vrijednosti istinitosti $\perp$ broj 0, vrijede ove jednakosti:

$$\begin{aligned}
\tau(\neg A) &= 1 - \tau A,\\
\tau(A \,\&\, B) &= \tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \vee B) &= \tau A + \tau B - \tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \Rightarrow B) &= 1 - \tau A + \tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \Leftrightarrow B) &= 1 - \tau A - \tau B + 2\tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \veebar B) &= \tau A + \tau B - 2\tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \uparrow B) &= 1 - \tau A \cdot \tau B,\\
\tau(A \downarrow B) &= 1 - \tau A - \tau B + \tau A \cdot \tau B.
\end{aligned}$$

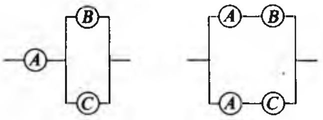
Formula $\mathscr{A}$ algebre sudova bit će identički istinita onda i samo onda ako je $\tau\mathscr{A} \equiv 1$. Npr. (zbog $\tau A = 0$ ili 1 uvijek je $(\tau A)^2 = \tau A$ itd.): Neka je $\mathscr{A} \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$; neka je $\tau A = a$, $\tau B = b$. Tada je $\tau\mathscr{A} = 1 - \tau(A \Rightarrow B) + \tau(A \Rightarrow B) \cdot \tau((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A) = 1 - (1 - a + ab) + (1 - a + ab)[1 - (1 - a + a(1 - b)) + (1 - a + a(1 - b))(1 - a)] \equiv 1$.

Interpretacija algebre sudova električnim sklopovima s prekidačima. Varijablama sudova pridružuju se prekidači; vrijednosti istinitosti $\top$ suda neka odgovara horizontalni položaj prekidača —, a vrijednosti istinitosti $\perp$ neka odgovara vertikalni položaj prekidača |.

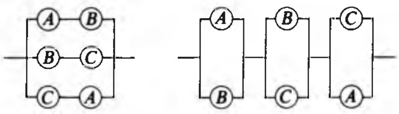
Složenim sudovima pridružit će se sklopovi s odgovarajućim prekidačima tako da vrijednosti istinitosti $\top$ složenog suda odgovara *prolaženje* struje kroz sklop (»horizontalno«), a vrijednosti istinitosti $\perp$ *nemogućnost prolaženja* struje kroz sklop. Sklopovi su tada npr. ovi:



Jednakosti formula algebre sudova odgovara »jednako funkcioniranje« odgovarajućih sklopova; npr. zbog $A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ sklopovi



funkcioniraju jednako. Također, prema već spomenutom, jednako funkcioniraju i sklopovi



Perfektna disjunktivna odnosno perfektna konjunktivna forma omogućuju da se za bilo koju zadanu funkciju algebre sudova konstruiraju sklopovi koji će funkcionirati na odgovarajući način.

Algebra sudova u uskoj je vezi i s tzv. Booleovim algebrana i Booleovim prstenovima s jedinicom.

O tzv. neklasičnim algebrama sudova (polivalentnoj, intuicionističkoj itd.) govorit će se kasnije.

LOGIKA SUDOVA

Algebra sudova, kako je bila skicirana, nije neka »strogo formalizirana« matematička teorija. Pri njenoj se izgradnji upotrebljava »obična« logika; pri zaključivanju o njenim teoremima — o teoremima algebre sudova — upotrebljava se »isto takva« logika — teoremi teorije i teoremi o teoriji nisu bili striktno razlučeni.

»Matematiziranje« logike u strogom smislu te riječi zahtijeva daljnji, bitno nov korak: Treba »formalizirati«, strogo precizirati ne samo objekte teorije koja se izgrađuje i relacije među njima već i dopuštene postupke izvođenja i zaključivanja u teoriji. Za takav program sintaktičke izgradnje teorije potrebna je strogo odvojena tzv. *metateorija*, pomoću koje se sama teorija izgrađuje i ispituje. Pri tome ta metateorija, dakako, i opet radi sa »sadržajnim«, neformaliziranim metodama zaključivanja (inače je potrebna neka daljnja meta-metateorija itd.). Međutim, te metode metateorije — po Hilbertovu programu — treba da su striktno finitne u najstrožem smislu te riječi: prihvatljive su samo efektivno provedive direktne metode zaključivanja i konstrukcije. (Tako npr. u finitnoj metateoriji više nije legitiman apagogički dokaz, transfinitna indukcija, upotreba aksioma izbora, aktualna beskonačnost i sl.) Detaljnije i dublje ulaženje u preciziranje dopuštenih metoda metateorije, kako god je načelno bitno i nužno, zahtijevalo bi vrlo opsežna i složena razmatranja pa ovdje mora izostati.

Paralelno s razdvajanjem teorije od metateorije prirodno se nameće potreba znatno veće strogosti i u definicijama o objektima teorije. Ne smije se npr. više reći da se »formule izgrađuju od osnovnih sudova upotrebom operacija algebre sudova i zagrada, na način kako je to inače uobičajeno u matematici«, već taj pojam »formule« mora biti izravno definiran bez pozivanja na neka druga područja matematike koja, općenito uzevši, nisu izgrađena uz takve zahtjeve strogosti kao što se sada nameću.

Prirodno je očekivati da će na takvim osnovama izgrađena teorija koja treba da »pokrije« područje algebre sudova — a koja se zove *logikom sudova* — biti kompliciranija i »teža« od algebre sudova. Za povećanu strogost koja se sada traži, zbog povećanih zahtjeva »sigurnosti«, treba platiti cijenu, koja je u znatno većoj »zamršenosti« izgradnje logike sudova od one koja je bila skicirana kod algebre sudova.

Većina definicija o logici sudova koje slijede i njenim postupnim proširenjima (logici predikata, elementarnoj aritmetici itd.) u određenoj su mjeri proizvoljne, tj. mogu ekvivalentno biti nadomještene i drugačijim. Izbor unutar dopuštenih okvira nije uvjetovan isključivo matematičkologičkim zahtjevima, već će na nj često bitno utjecati i ekonomičke i estetske motivacije. I tu je zbog složenih okolnosti o kojima je riječ isključena detaljnija analiza u čemu je takva motivacija, kako se očituje itd. (Uostalom, slično — iako u nešto manjoj mjeri — vrijedilo je već i na razini algebre sudova.) Osnovne definicije logike sudova mogu se odabrati npr. ovako:

Slova logike sudova jesu:

a) Konstante logike sudova: $\top$, $\perp$.

b) Promjenljive (ili varijable) logike sudova: A, B, C, ...

c) Operatori logike sudova: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

d) Zagrade logike sudova: (,).

Riječi logike sudova jesu konačni (neprazni) nizovi slova logike sudova.

Formule logike sudova definiraju se rekurzivno; to su određene »istaknute« riječi logike sudova — intuitivno treba da im odgovaraju »smisleni« izrazi algebre sudova. Formule logike sudova definiraju se ovako:

a) Konstanta logike sudova jest formula logike sudova.

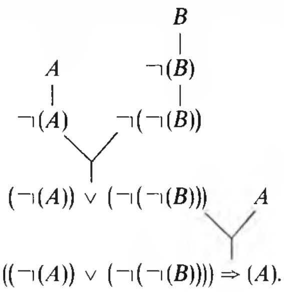
b) Promjenljiva (ili varijabła) logike sudova jest formula logike sudova.

c) Ako je $\mathscr{A}$ formula logike sudova, onda je $\neg(\mathscr{A})$ formula logike sudova.

d$\cdots$*g*) Ako su $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ formule logike sudova, onda su $(\mathscr{A})\,\&\,(\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \vee (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Rightarrow (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Leftrightarrow (\mathscr{B})$ formule logike sudova.

h) Formule logike sudova jesu samo one riječi logike sudova koje se mogu dobiti (eventualno višestruko ponovljenom) konstrukcijom prema $a \cdots g$.

Za svaku riječ logike sudova u konačno mnogo koraka moguća je odluka o tome je li to formula logike sudova ili nije. Također se može dokazati da je za svaku (bilo koju) formulu logike sudova moguća (jednoznačna) rekonstrukcija njene izgradnje prema gornjoj definiciji od $a \cdots g$; ona se pregledno može predočito »stablom« kojem je zadana formula »korijen«, a vrhovi granâ su mu konstante i varijable logike sudova. Npr. za formulu $((\neg(A)) \vee (\neg(\neg(B)))) \Rightarrow (A)$ takvo je stablo ovog oblika:



Zbog kraćeg označavanja i izražavanja zgodno je i u notaciji formula logike sudova izostavljati pojedine zagrade, kao što je to bilo dogovoreno u algebri sudova. No valja imati na umu da je sada riječ o (strogo uzevši nekorektnom) načinu izražavanja. Npr. ako se kaže »formula $A \,\&\, B \Rightarrow C$«, treba to shvatiti kao »formula označena kraće sa $A \,\&\, B \Rightarrow C$«, tj. misli se na formulu »$((A)\,\&\,(B)) \Rightarrow (C)$«; sam izraz $A \,\&\, B \Rightarrow C$ uopće nije formula, nego je to samo riječ logike sudova. Slično se postupa i inače u algebri, logici predikata i drugdje, a da to ubuduće neće više biti posebno isticano.

Aksiomi i teoremi logike sudova definiraju se također rekurzivno, kao »istaknute« formule; intuitivno treba da im odgovaraju identički istinite formule algebre sudova.

Aksiomi logike sudova definiraju se ovako: Neka su $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ bilo koje formule logike sudova. (Točnije bi bilo govoriti o shemama aksioma, a ne o individualnim aksiomima, upravo stoga što $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ u izrazima koji slijede mogu biti bilo koje formule.) Tada su ove formule aksiomi logike sudova:

a) Aksiomi implikacije (aksiomi $\Rightarrow$):

a_1) $\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})$,

a_2) $((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{A}$,

a_3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}))$.

b) Aksiomi konjunkcije (aksiomi &):

b_1) $\mathscr{A} \,\&\, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$,
b_2) $\mathscr{A} \,\&\, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}$,
b_3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \,\&\, \mathscr{C}))$.

c) Aksiomi disjunkcije (aksiomi $\vee$):

c_1) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,
c_2) $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,
c_3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}))$.

d) Aksiomi ekvivalencije (aksiomi $\Leftrightarrow$):

d_1) $(\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$,
d_2) $(\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})$,
d_3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}))$.

e) Aksiomi negacije (aksiomi $\neg$):

e_1) $\mathscr{A} \Rightarrow (\neg\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$,
e_2) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \neg\mathscr{B}) \Rightarrow \neg\mathscr{A})$,
e_3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\neg\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B})$.

f) Aksiomi konstanata (aksiomi $\top$ i $\bot$):

f_1) $\mathscr{A} \Rightarrow \top$,
f_2) $\bot \Rightarrow \mathscr{A}$.

Teoremi logike sudova definiraju se rekurzivno ovako:

a) Svaki aksiom logike sudova jest teorem logike sudova.

b) Ako su $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ teoremi logike sudova, onda je $\mathscr{B}$ teorem logike sudova.

c) Teoremi logike sudova jesu samo one formule logike sudova koje se mogu dobiti (eventualno višestruko ponovljenim) primjenama *a* i *b*.

Može se dokazati da je za svaku formulu logike sudova u konačno mnogo koraka odlučivo je li ona teorem ili nije. Nadalje, ako ona jest teorem, moguće je rekonstruirati kako se ona kao takva dobiva primjenom *a* i *b* — što, međutim, nije jednoznačno.

Ako je formula $\mathscr{A}$ teorem logike sudova, piše se $\vdash \mathscr{A}$.

Primjer. Dokazati da je $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$. Za $\mathscr{A} \equiv A$, $\mathscr{B} \equiv \neg A$ daje b_1 i *a* da je $\vdash A \,\&\, \neg A \Rightarrow A$. Za $\mathscr{A} \equiv A$, $\mathscr{B} \equiv \neg A$ daje b_2 i *a* da je $\vdash A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A$. Za $\mathscr{A} \equiv A \,\&\, \neg A$, $\mathscr{B} \equiv A$ daje e_2 i *a* da je $\vdash (A \,\&\, \neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A \,\&\, \neg A))$, pa zbog ranije dobivenih teorema $\vdash A \,\&\, \neg A \Rightarrow A$, $\vdash A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A$ dvostrukom primjenom *b* proizlazi $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$. I dokazi teorema logike sudova mogu se pregledno napisati u obliku »stabla« u kojem je traženi teorem korijen, a vrhovi grana su mu aksiomi; u razmotrenom primjeru takvo stablo izgleda ovako:

$$A \,\&\, \neg A \Rightarrow A \qquad (A \,\&\, \neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A \,\&\, \neg A))$$

$$A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A \qquad (A \,\&\, \neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A \,\&\, \neg A)$$

$$\neg(A \,\&\, \neg A).$$

Adekvatnost logike sudova. Za sustav aksioma logike sudova i pripadnu definiciju teorema logike sudova kaže se da *adekvatno* formaliziraju algebru sudova ako je za bilo koju formulu $\mathscr{A}$ logike sudova $\vdash \mathscr{A}$ onda i samo onda ako je za tu formulu, shvaćenu kao formulu algebre sudova, $\models \mathscr{A}$. Može se dokazati da skicirani sustav jest adekvatna formalizacija algebre sudova. Detaljnije se pojam adekvatnosti uvodi preko pojmova semantičke konzistencije i semantičke potpunosti logike sudova.

Logika sudova je *semantički konzistentna* ili neproturječna ako je svaki teorem logike sudova, interpretiran kao formula algebre sudova, identički istinita formula. Logika sudova je *semantički potpuna* ako je svaka identički istinita formula logike sudova (koja od operatora algebre sudova sadrži najviše konjunkciju, disjunkciju, implikaciju, ekvivalenciju i negaciju), interpretirana kao formula logike sudova, teorem logike sudova.

Osim pojmova semantičke konzistencije i potpunosti uvode se i drugi; motivacija je (pored ostalog) izbjegavanje svake referencije na algebru sudova, pa tu definicije mogu govoriti samo o svojstvima unutar logike sudova:

Logika sudova konzistentna je u *Hilbertovu* (ili »klasičnom«) smislu ako ni za koju formulu $\mathscr{A}$ logike sudova nije istodobno $\vdash \mathscr{A}$ i $\vdash \neg\mathscr{A}$. Logika sudova potpuna je u Hilbertovu (ili »klasičnom«) smislu ako za svaku formulu $\mathscr{A}$ logike sudova, koja od slova logike sudova sadrži samo konstante, vrijedi bilo $\vdash \mathscr{A}$ bilo $\vdash \neg\mathscr{A}$.

Logika sudova konzistentna je u *sintaktičkom* smislu ako postoji bar jedna formula logike sudova koja nije teorem logike sudova. Logika sudova potpuna je u sintaktičkom smislu ako ima ovo svojstvo: doda li se njenim aksiomima bilo koja shema formula koja nije shema teorema logike sudova, onda je u proširenom sustavu svaka formula teorem logike sudova, tj. prošireni je sustav sintaktički nekonzistentan. Može se pokazati da skicirani sustav ima sva ta svojstva.

Zanimljiva su i ispitivanja nezavisnosti pojedinih aksioma ili grupa aksioma logike sudova od preostalih; posebno: sustav (shema) aksioma zove se *nezavisan* ako se ni jedan od njih ne može izvesti iz preostalih kao shema teorema. Ispitivanja ove vrste mogu u konkretnim slučajevima biti teška. Međutim, nezavisnost aksioma logike sudova nije uvjet za njenu adekvatnost. Ona može biti poželjnom i prvenstveno iz estetskih, a ne nužno iz matematičkih razloga u užem smislu — što ne znači da ispitivanja nezavisnosti nisu i od znatnog matematičkog interesa.

Općenito se za neku matematičku teoriju kaže da je *kategorična* ako su joj sve interpretacije (modeli) međusobno izomorfne, tj., grubo rečeno, ako između objekata i relacija dvaju takvih modela može biti uspostavljena uzajamno jednoznačna korespondencija koja čuva sve odnose među njima: kakvi su u jednom modelu, takvi su i u drugom. Posebno kategoričnost teorije neke matematičke strukture implicira da sve njene realizacije imaju isti kardinalni broj, tj. da sadrže jednako mnogo objekata. Logika sudova nije kategorička teorija (što, naravno, nije nikakav njen »nedostatak«).

ALGEBRA PREDIKATA

Kao iduća etapa, kao drugi korak u izgradnji neke matematičke teorije koja bi opisivala određeno područje logičkog zaključivanja — zasad ne strogo formalizirano, već u obliku jedne klasične matematičke teorije — izgrađuje se algebra predikata. Pored ostalog, algebra predikata pokrivat će klasične Aristotelove silogizme: zaključivanja prema shemama Barbara, Celarent, Darii, Ferio itd. — no, kao što će se vidjeti, bit će bitno šira i sadržajnija od njih. Pored operacija algebre sudova, algebra predikata uključivat će i konstrukcije koje odgovaraju primjeni kvantificiranja na relacije kao »svaki«, »neki« itd.

Predikati. Neka je $\mathscr{U}$ neki neprazni skup; $\mathscr{U}$ se zove univerzum. Svakom podskupu $\mathscr{P}$ od $\mathscr{U}$ odgovara neki predikat $P(x)$ takav da je (po definiciji) za sve elemente u od $\mathscr{U}$, kao moguće »vrijednosti« od x, $P(u)$ istinito ako je $u \in \mathscr{P}$, a neistinito ako je $u \notin \mathscr{P}$. Vrijednost istinitosti od $P(x)$ ovisi, dakle, o jednom parametru ili varijabli x, pa se takav predikat zove jednomjesni predikat ili predikat duljine 1. Uvrštavanjem za taj argument x nekog određenog elementa od $\mathscr{U}$, od tog predikata nastaje sud.

Slično, svakom podskupu $\mathscr{R}$ skupa svih uređenih parova elemenata od $\mathscr{U}$ odgovara predikat $R(x, y)$ takav da je (po definiciji) za sve uređene parove (u, v), kao elemente od $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$, $\tau R(u, v) = \top$ za $(u, v) \in \mathscr{R}$, a $\tau R(u, v) = \bot$ za $(u, v) \notin \mathscr{R}$. Takav predikat ovisi o dva parametra ili dvije varijable, pa se zove dvomjesni predikat ili predikat duljine 2. On postaje sudom ako se za oba njegova argumenta uvrste određeni objekti univerzuma.

Analogno se definiraju tromjesni, četveromjesni i općenito n-mjesni predikati $T(x_1, \ldots, x_n)$. Prirodno je i zgodno da se i sudovi smatraju posebnim slučajevima predikata, naime predikatima duljine nula, jer takav predikat već jest sud, pa to »postaje« nakon »nula« uvrštavanja određenih objekata na mjesto varijabli (koje ne sadrži).

Kvantifikatori ili kvantori. »Kvantificiranjem« kvantifikatorima ili kvantorima određene su operacije kojima se, polazeći od predikata duljine k, konstruiraju novi predikati eventualno manje duljine.

Kvantifikator generalizacije $\forall$ (okrenuto slovo A). Ako je $P(x)$ predikat duljine 1, značit će $(\forall x) P(x)$ novi predikat (duljine nula, dakle sud) »za svaki x je $P(x)$«. Ako je $R(x, y)$ predikat duljine 2, značit će $(\forall x)R(x, y)$ novi predikat (duljine 1) »za svaki x je $R(x,y)$«, a $(\forall y)R(x,y)$ značit će analogno »za svaki y je $R(x,y)$«. $(\forall x)(\forall y)R(x,y)$ značit će novi predikat (duljine nula, tj. sud) »za svaki x i za svaki y je $R(x,y)$«. Simbol $\forall$ čita se »za svaki« i podsjeća na prvo slobo engleske riječi *all* svi.

Kvantifikator egzistencije $\exists$ (okrenuto slovo E). Ako je $P(x)$ neki predikat duljine 1, značit će $(\exists x)P(x)$ novi predikat (duljine 1, dakle sud) »postoji (bar jedan) x takav da je $P(x)$«. Ako je $R(x, y)$ neki predikat duljine 2, značit će $(\exists x)R(x, y)$ novi predikat (duljine 1) »postoji (bar jedan) x takav da je $R(x, y)$«, a $(\exists y)R(x, y)$ značit će »postoji (bar jedan) y takav da je $R(x, y)$«. $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ značit će sud »postoji (bar jedan) x i (bar jedan) y tako da je $R(x,y)$«. Simbol $\exists$ podsjeća na prvo slovo riječi *exists* postoji.

Na isti predikat mogu se primjenjivati i različiti kvantori. Neka je npr. univerzum skup prirodnih brojeva, $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, a $R(x, y)$ neka ima značenje »$x < y$«. Tada je $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$ (istiniti) sud »za svaki x postoji y tako da je $x < y$«. $(\exists y)(\forall x)R(x, y)$ je (neistiniti) sud »postoji y takav da je za svaki x $x < y$«.

Analogno se kvantori primjenjuju na tromjesne i višemjesne predikate.

U slučaju konačnog univerzuma kvantor generalizacije ekvivalentan je konjunkciji, a kvantor egzistencije disjunkciji.

Duljina predikata može se smanjiti i drugačije, npr. uvrštavanjem na mjesto neke njegove varijable određenog objekta univerzuma ili pak »identificiranjem« varijabli. Npr. ako $S(x,y,z)$ znači »$x + y = z$«, značit će $S(x,5,z)$ iskaz »$x + 5 = z$«, a $S(x,x,z)$ bit će iskaz »$2x = z$«. Analogno je za općenitije supstitucije.

Formule algebre predikata. Polazeći od danih predikata, mogu se operacijama algebre sudova, kvantorima i uvrštavanjima (objekata univerzuma ili varijabli) tvoriti novi predikati veće, manje ili iste duljine. Iz algebre sudova preuzimaju se i konvencije o hijerarhiji moći razdvajanja s time da kvantori vežu jače od operatora, tako da npr. $(\exists x)P(x,y)\,\&\,Q(x)$ znači $((\exists x)P(x, y))\,\&\,Q(x)$.

Primjer. Neka je univerzum skup prirodnih brojeva, $J(x,y) \equiv x = y$, $S(x, y, z) \equiv x\,y = z$. Tada jednomjesni predikat $P(y) \equiv \neg(\exists x)[\neg J(x, 1)\,\&\,\neg J(x, y)\,\&\,(\exists z)S(x,z,y)]\,\&\,\neg J(y,1)$ znači »y je primbroj«.

Vezane i slobodne varijable. Ako neka varijabla (parametar), na nekom mjestu gdje dolazi u danoj formuli algebre predikata, stoji bilo neposredno desno od nekog kvantora, bilo unutar dosega kvantora s istom varijablom (tj. kvantor se na nju odnosi), kaže se da je ta varijabla na tome mjestu vezana odgovarajućim kvantorom; u protivnom slučaju ona je na tom mjestu slobodna (ukoliko na istom mjestu nije već vezana nekim drugim kvantorom).

Npr. u formuli $(\forall x)[P(x, y) \vee Q(x, z)]\,\&\,(\exists y)S(x, y, z)$ varijabla x je slobodna u $S(x,y,z)$, a vezana na svim ostalim mjestima gdje dolazi. Varijabla y je slobodna u $P(x,y)$, a drugdje je vezana. Sastavljena formula algebre predikata predstavlja predikat tolike duljine koliko u njoj ima međusobno različitih slobodnih varijabli. Posebno, formula algebre predikata u kojoj su sve varijable vezane predočuje sud.

Simbolika algebre predikata često omogućuje koncizno, kompaktno i jasno izražavanje matematičkih definicija i teorema, kakvo kadšto nije prisutno u njihovu uobičajenom zapisu.

Primjeri. Neka je $\mathcal{U}$ skup svih realnih brojeva, a N skup svih prirodnih brojeva. Tada je po definiciji niz $(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ konvergentan i ima limes a ako je

$$(\exists a)(\exists \varepsilon)\{(\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists n_0)(\forall n)[(n \in N)\,\&\,(n > n_0) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]\}.$$

Neka je f realna funkcija definirana u okolini (a,b) točke x_0. Tada je po definiciji f neprekinuta u x_0 ako je

$$(\forall \varepsilon)\{(\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists \delta)[(\delta > 0)\,\&\,(\forall x)(x \in (a,b)\,\&\,|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]\}.$$

Valuacije formula algebre predikata. Određivanju vrijednosti istinitosti neke formule algebre sudova uz odabranu kombinaciju vrijednosti istinitosti za varijable sudova od kojih je formula sagrađena odgovarat će u algebri predikata općenitije određivanje vrijednosti istinitosti formule algebre predikata uz neku *valuaciju* dane formule: Vrijednosti istinosti neke formule $\mathcal{A}$ algebre predikata ovisit će općenito o univerzumu $\mathcal{U}$ koji je područje (mogućih) vrijednosti argumenata predikata što ulaze u $\mathcal{A}$, zatim o predikatima koje $\mathcal{A}$ sadrži (tj. o tome koje im relacije odgovaraju) i konačno o odabranim vrijednostima za slobodne varijable od $\mathcal{A}$. Za tako odabranu valuaciju v formula $\mathcal{A}$ poprimit će neku određenu vrijednost istinitosti $\tau\mathcal{A}(v)$.

Formula algebre predikata koja uz svaku moguću valuaciju kao cjelina poprima vrijednost istinitosti $\top$ zove se *identički istinita;* za takvu formulu piše se $\models\mathcal{A}$. Formula algebre predikata koja uz svaku moguću valuaciju poprima vrijednost istinitosti $\perp$ zove se *identički neistinita.*

Formula algebre predikata koja uz bar jednu valuaciju poprima vrijednost istinitosti $\top$ zove se ispunjiva. Formula algebre predikata koja uz bar jednu valuaciju poprima vrijednost istinitosti $\perp$ zove se oboriva.

Primjeri.

$$\models (\exists x)(\forall y)\,P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,P(x, y);$$

$$\models (\forall x)\,A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x)).$$

Formula

$$(\exists x)\,A(x)\,\&\,(\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x)\,\&\,B(x))$$

jest i ispunjiva i oboriva. Važne identički istinite formule algebre sudova jesu također npr.

$$\neg(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg P(x, y);$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(\exists y)\neg P(x, y).$$

Za razliku od algebre sudova, gdje je uvijek bilo moguće za danu formulu ispitati u konačno mnogo koraka je li ona identički istinita ili nije, u algebri predikata okolnosti su drugačije. Budući da valuacijâ ima beskonačno mnogo, nije ih moguće efektivno sve enumerirati i redom za svaku ispitati pripadnu vrijednost istinitosti dane formule. Dapače, uz preciziranje pojma algoritma kao sustavnog postupka može se dokazati da nema opće metode koja bi, primijenjena na bilo koju danu formulu algebre predikata, u konačno mnogo koraka vodila do odluke je li ta formula identički istinita ili nije. Ipak, u mnogim jednostavnijim slučajevima bit će relativno lako ispitati je li riječ o identički istinitoj formuli algebre predikata ili nije. Naime, često je npr. moguće »za sve valuacije odjednom« odrediti vrijednost istinitosti neke formule algebre predikata, ili će pak biti moguće sve valuacije podijeliti u konačno mnogo grupa, od kojih će opet za svaku grupu biti moguće odjednom odrediti odgovarajuću vrijednost istinitosti dane formule. Za slučaj oborivosti, dakako, bit će dovoljno naći jednu valuaciju uz koju dana formula poprima vrijednost istinitosti $\perp$.

LOGIKA PREDIKATA

Kao što je zahtjev za striktnom formalizacijom i odvajanjem formalne teorije koja se izgrađuje od strogo finitne metateorije pomoću koje se formalna teorija izgrađuje od algebre sudova doveo do logike sudova, tako se, slično, da bi se jednom strogo formaliziranom teorijom »pokrilo« područje algebre predikata, izgrađuje logika predikata. I tu postoje okviri unutar kojih se to može provesti na različite načine, a motivacija izbora jednog od njih i opet nije samo matematička, već i estetska i ekonomička. Slijedi skica jedne od mogućnosti takve formalizacije:

Slova logike predikata definiraju se ovako:

a) Konstante logike predikata: $\top$, $\perp$.

b) Individualne promjenljive (ili varijable) logike predikata: x, y, z, ... (pretpostavlja se da ih ima potencijalno prebrojivo beskonačno mnogo).

c) Promjenljive (ili varijable) predikata: A, B, C, ... (pretpostavlja se da i njih ima prebrojivo beskonačno mnogo).

d) Operatori logike predikata: $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

e) Zarez logike predikata: , .

f) Zagrade logike predikata: (,).

Riječi logike predikata jesu neprazni nizovi slova logike predikata.

Atomarni predikati logike predikata jesu: nulmjesni predikati A, B, C, …; jednomjesni predikati $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, …; dvomjesni predikati $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, … itd.

Formule logike predikata, kojima intuitivno treba da odgovaraju smisleni izrazi algebre predikata, definiraju se rekurzivno ovako:

a) Konstante logike predikata jesu formule logike predikata.

b) Ako je $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n-mjesni atomarni predikat ($n > 0$) i ako su $u_1,u_2,\ldots,u_n$ (ne nužno različite) individualne varijable, onda je $M(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ formula logike predikata.

c) Ako je $\mathscr{A}$ formula logike predikata, onda je $\neg(\mathscr{A})$ formula logike predikata.

d) Ako su $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ formule logike predikata, onda su $(\mathscr{A})\,\&\,(\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \vee (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Rightarrow (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Leftrightarrow (\mathscr{B})$ formule logike predikata.

e) Ako je u individualna varijabla i $\mathscr{A}$ formula logike predikata, onda su $(\forall u)(\mathscr{A})$, $(\exists u)(\mathscr{A})$ formule logike predikata.

f) Formule logike predikata jesu samo one riječi logike predikata koje se mogu dobiti (eventualno višestruko ponovljenim) konstrukcijama $a \cdots e$.

Može se dokazati da je za bilo koju danu riječ logike predikata u konačno mnogo koraka moguća odluka je li to formula logike predikata ili nije, i ako jest, može se jednoznačno rekonstruirati njena izgradnja prema $a \cdots e$.

Slobodne i vezane individualne varijable formulâ logike predikata definiraju se ovako:

a) Ako je $M(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ formula po b, sve su njene varijable slobodne.

b) Ako je u individualna varijabla, a $\mathscr{A}$ formula, onda je u formulama $(\forall u)(\mathscr{A})$, $(\exists u)(\mathscr{A})$ varijabla u vezana svagdje gdje je u $\mathscr{A}$ bila slobodna, kao i uz operator $\forall$ odnosno $\exists$, te tamo gdje je u $\mathscr{A}$ već bila vezana.

c) Ako je individualna varijabla u slobodna (vezana) na nekom mjestu u formuli $\mathscr{A}$ odnosno $\mathscr{B}$, ona je slobodna (vezana) i na odgovarajućem mjestu u formulama $\neg(\mathscr{A})$, $(\mathscr{A})\,\&\,(\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \vee (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Rightarrow (\mathscr{B})$, $(\mathscr{A}) \Leftrightarrow (\mathscr{B})$.

d) Ako je varijabla u slobodna na nekom mjestu u $\mathscr{A}$ i ako je $v \neq u$, onda je u slobodna i na odgovarajućem mjestu u $(\forall v)(\mathscr{A})$, $(\exists v)(\mathscr{A})$.

Formula logike predikata koja ne sadrži nijedne slobodne individualne varijable zove se *zatvorena*. Intuitivno takvim formulama odgovaraju sudovi (nulmjesni predikati) algebre predikata.

Kaže se da je varijabla u *slobodna* za varijablu v u formuli $\mathscr{A}$, ako v ni na kojem mjestu gdje je slobodno u $\mathscr{A}$ nije u dosegu nekog kvantora $\forall$ ili $\exists$ koji veže u.

Aksiomi i teoremi logike predikata definiraju se kao određene »istaknute« formule; intuitivno treba da im odgovaraju identički istinite formule algebre predikata.

Aksiomi logike predikata definiraju se ovako: Neka su $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ bilo koje formule. U g i h neka je u slobodno za v u $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}(u|v)$ neka znači formulu koja nastaje od $\mathscr{A}$ kad se u njoj v na svim mjestima gdje dolazi slobodan zamijeni sa u. Tada su ove formule aksiomi logike predikata:

$a \cdots f$) kao u logici sudova.

g) $(\forall v)\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}(u|v)$.

h) $\mathscr{A}(u|v) \Rightarrow (\exists v)\mathscr{A}$.

Teoremi logike predikata definiraju se ovako:

a) Svaki aksiom logike predikata jest teorem logike predikata.

b) Ako su $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ teoremi logike predikata, onda je $\mathscr{B}$ teorem logike predikata.

c) Ako je $\mathscr{A}$ formula koja ne sadrži v kao slobodnu varijablu, onda, ako je $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$ teorem logike predikata, i formula $\mathscr{B} \Rightarrow (\forall v)\mathscr{A}$ jest teorem logike predikata.

d) Uz ograničenje kao u *c*, ako je $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ teorem logike predikata, i formula $(\exists v)\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ jest teorem logike predikata.

e) Teoremi logike predikata jesu samo one formule logike predikata koje se mogu dobiti (eventualno višestruko ponovljenom) primjenom $a \cdots d$.

Ako je formula $\mathscr{A}$ teorem logike predikata, piše se $\vdash \mathscr{A}$.

Adekvatnost, konzistentnost (semantička) i potpunost logike predikata definiraju se isto kao u logici sudova. Može se dokazati da je logika predikata, kako je skicirana, konzistentna i potpuna. Međutim, za razliku od logike sudova, ne postoji jedinstven algoritam kojim bi se za bilo koju danu formulu logike predikata u konačno mnogo koraka moglo odlučiti je li ona teorem ili nije. Postoji, dakle, samo »egzistencijalni« dokaz da $\models \mathscr{A}$ povlači da je $\vdash \mathscr{A}$ i obrnuto, ali ne i jedinstvena efektivna, konstruktivna metoda da se za bilo koju formulu $\mathscr{A}$ logike predikata sazna je li ili nije $\vdash \mathscr{A}$.

Pojmovi konzistentnosti i potpunosti u Hilbertovu smislu definiraju se ovako: Logika predikata je konzistentna ako ni za koju njenu formulu nije istodobno $\vdash \mathscr{A}$ i $\vdash \neg\mathscr{A}$. Ona je potpuna ako za svaku zatvorenu formulu $\mathscr{A}$ vrijedi bilo $\vdash \mathscr{A}$ bilo $\vdash \neg\mathscr{A}$. Skicirani sustav logike predikata ima i ta svojstva.

Logika predikata s jednakošću izgrađuje se daljim proširenjem logike predikata dodavanjem dvomjesnog predikata »=« uz odgovarajuće modifikacije u definicijama slova, formula, aksioma i teorema. I takva logika predikata s jednakošću još je »logika prvog reda« jer kvantori u njoj djeluju samo na individualne varijable, a ne i na varijable predikata (kao što je to slučaj u tzv. logici drugog reda).

FORMALIZIRANA ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA

Unutar logike prvog reda mogu se formalizirati različite klasične matematičke teorije. Učini li se to npr. s aritmetikom, dobiva se formalizirana elementarna teorija brojeva. Definicije se modificiraju tako da opći i posebni prirodni brojevi intuitivno odgovaraju varijablama i individualnim konstantama, odnosno tzv. termima formalizirane teorije, a teoremima teorije odgovaraju relacije među tim brojevima.

Za takav tip formalizacije elementarne teorije brojeva može se među ostalim dokazati: Ona je nužno bilo nekonzistentna bilo nepotpuna, tj.: Ukoliko je konzistentna, tada u njoj nužno postoje tzv. *neodlučivi* iskazi, tj. formule kojima intuitivno odgovara neki sud, no koje u formalnoj teoriji nisu niti dokazive niti oborive. Ako sustav *jest* konzistentan, unutar sustava to se ne može dokazati (K. Gödel). Nadalje, postoje tzv. »nestandardni modeli« formalne teorije koji se razlikuju od intendirane interpretacije (T. Skolem).

VIŠEVALJANE (POLIVALENTNE) LOGIKE

Dosad razmatrane logike i formalizacije matematičkih teorija bile su »klasične« u smislu da su bile »dvovaljane«: sudovi su u njima mogli poprimiti samo jednu od dviju vrijednosti istinitosti; bili su ili istiniti ili lažni.

Izgrađuju se i »neklasične« viševaljane logike u kojima sudovi mogu imati neku između više od dviju vrijednosti istinitosti. Neke se od takvih logika primjenjuju ne samo u matematici samoj već i u drugim znanostima; radilo se npr. i na pokušajima primjene trovaljane i četverovaljane logike u kvantnoj mehanici. Za dani prirodni broj k može se razviti više međusobno različitih k-valjanih logika. Postoje i viševaljane logike s prebrojivo beskonačno mnogo ili kontinuum beskonačno mnogo vrijednosti istinitosti; posljednje su u vezi i s tzv. probabilističkim logikama.

Npr. za trovaljanu logiku može se treća (pored $\top$ i $\bot$) vrijednost istinitosti za sudove interpretirati kao »neodređena«, »nepoznata«, »proizvoljna« i sl. Označi li se ona sa N, dobivaju se (na razini algebre sudova) među ostalim ove trovaljane logike:

Łukasiewiczeva:

$\tau(\neg A)$

τA	$\top$ N $\bot$
$\tau(\neg A)$	$\bot$ N $\top$

$\tau(A \vee B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
N	$\top$	N	N
$\perp$	$\top$	N	$\perp$

$\tau(A \,\&\, B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	N	N	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$\tau(A \Rightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	$\top$	$\top$	N
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

$\tau(A \Leftrightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	N	$\top$	N
$\perp$	$\perp$	N	$\top$

Kleenejeva: kao Łukasiewiczeva, samo što je sada $N \Rightarrow N = N$, $N \Leftrightarrow N = N$.

Pored intuicionističke matematike, o kojoj će biti govora dalje, postoji još niz »neklasičnih« logika: logike striktne implikacije, modalne logike (koje uzimaju u obzir modalitete, npr. »nužno«, »moguće« itd.), logike s više negacija (različitog značenja), ultraintuicionističke logike Grissa i Jesenjin-Voljpina itd. Od formalizacija pojedinih matematičkih teorija posebno su važne različite formalizacije teorije skupova u logikama prvog i drugog reda.

INTUICIONISTIČKA MATEMATIKA

Od razmotrenih (matematičkih) logika radikalno se i duboko razlikuje tzv. intuicionistička. S gledišta intuicionista, formalizam u matematici nije drugo doli »igra« simbolima; s gledišta formalista, intuicionizam predstavlja nepotrebno i nedopustivo sakaćenje i osiromašenje te kompliciranje matematike.

Osnovna intuicionistička postavka jest mogućnost (bar načelno) *efektivne konstrukcije.* Klasični matematički iskazi o egzistenciji određenih matematičkih objekata koji ujedno ne daju i mogućnost njihova efektivnog pronalaženja intuicionistički su bez vrijednosti i bez sadržaja. Intuicionistički je neka tvrdnja A istinita ako je dokazana (bar potencijalno) efektivnom konstrukcijom. Tvrdnja A je intuicionistički neistinita (i time tvrdnja $\neg A$ »per definitionem« intuicionistički istinita) kad se, polazeći od pretpostavke da ima neka efektivna konstrukcija od A, ova konstrukcija uspjela produžiti do neke (intuicionističke) kontradikcije, npr. iskaza $0 = 1$. Disjunkcija $A \vee B$ intuicionistički je dokazana kad je bilo dan konstruktivni dokaz od A bilo dan konstruktivni dokaz od B. Implikacija $A \Rightarrow B$ intuicionistički je dokazana kad se pretpostavljena konstrukcija od A uspjela produžiti do konstrukcije od B.

Zaključivanje prema shemi $A \vee \neg A$ intuicionistički općenito nije legitimno. Isto tako ne vrijedi tu ni shema $\neg\neg A \Rightarrow A$. Slično otpadaju i klasične tautologije $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$. S druge strane, tautologije $A \Rightarrow \neg\neg A$, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, $\neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$ vrijede i intuicionistički. Na razini predikata npr. sheme $\neg(\exists x) \neg P(x) \Rightarrow (\forall x) P(x)$, $\neg(\forall x) \neg P(x) \Rightarrow (\exists x) P(x)$ intuicionistički nisu legitimne; suprotne implikacije vrijede i intuicionistički.

Na razini sudova vrijedi ovaj rezultat: Ako je formula $\mathscr{A}$ kao formula (klasične) logike sudova identički istinita, onda je $\neg\neg\mathscr{A}$ intuicionistički legitimna shema. Tako npr. i intuicionistički vrijedi $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

Sustavna izgradnja nekog područja matematike prema intuicionističkom programu često je vrlo složena i dobivena teorija obično se duboko razlikuje od klasične; npr. već teorija realnih brojeva, zasnovana intuicionistički, bitno je drugačija od one u klasičnoj analizi.

MATEMATIKA KONSTRUKTIBILNOG

Intuicionistička kritika klasične matematike i Hilbertova programa njene formalizacije bila je i jedan od razloga razvoja matematičkih teorija o konstruktibilnom. Te su teorije uskoro pored samostalnog interesa našle i primjene u različitim područjima matematike a i nekih drugih znanosti, npr. u teoriji automata.

Za razliku od intuicionizma kao konstruktivne teorije, te teorije o konstruktibilnom (redovito, iako ne uvijek i nužno) polaze od prihvaćanja i nekonstruktibilnih objekata kao »egzistencijalno« postojećih, iz »rezervoara« kojih se onda određenim definicijama i metodama »izlučuju«, »odvajaju« oni među njima koji su konstruktibilni u smislu dane teorije. E. Post je u tim teorijama i u spoznajama do kojih su dovele vidio jedan od isto tako dubokih i fundamentalnih osnova čitave matematike uopće, kao što su to i prirodni brojevi.

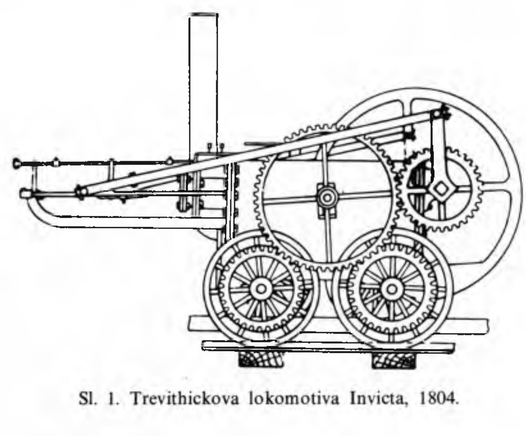
Većina matematičara koji se bave ovim granama matematike ističu neočekivano slaganje po opsegu tih po polaznim koncepcijama naoko vrlo različitih teorija: Turingovih strojeva, rekurzivnih funkcija, Markovljevih algoritama itd. Naime, pokazuje se da su sve te teorije »ekvivalentne« u smislu da je neki matematički objekt konstruktibilan u smislu jedne od tih teorija onda i samo onda ako je konstruktibilan i u smislu druge. Prema glasovitoj *Churchovoj tezi*, svaka u intuitivnom smislu izračunljiva funkcija (određenog tipa) izračunljiva je i u smislu navedenih teorija. Načelno nema izgleda da se ova teza ikada dokaže, iako nije nemoguće da jednom bude opovrgnuta.

LIT.: *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik. Springer, Berlin 1938. — *D. Hilbert, P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik. Springer, Berlin 1939. — *S. C. Kleene*, Introduction to metamathematics. Van Nostrand, New York 1952. — *J. B. Rosser*, Logic for mathematicians. McGraw-Hill, New York 1953. — *A. Heyting*, Intuitionism. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1956. — *A. Church*, Introduction to mathematical logic. Princeton University Press, Princeton 1956. — *E. W. Beth*, The foundations of mathematics. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959. — *П. С. Новиков*, Элементы математической логики. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959. — *H. Hermes*, Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Springer, Berlin 1961. — *H. B. Curry*, Foundations of mathematical logic. McGraw-Hill, New York 1963.

V. Devidé

LOKOMOTIVE, pružna pogonska vozila koja služe za vuču vagona, bez prostora za putnike ili teret. Po tome se i razlikuju od pogonskih kola koja uz pogonsko postrojenje imaju i prostor uređen za prijevoz korisnog tereta, tj. putnika i robe.

Prvu upotrebivu lokomotivu izgradio je 1804. godine Englez Richard Trevithick (1771—1833). Ta lokomotiva s imenom *Invicta* (sl. 1) počela je voziti 1. II 1804. na industrijskoj pruzi duljine 15,6 km gdje je vukla vlak od 5 vagona, bruto-mase nekih 25 t, maksimalnom brzinom od 7 m/s (25,2 km/h) na horizontalnoj pruzi, a sa 2 m/s na usponu.



Sl. 1. Trevithickova lokomotiva Invicta, 1804.

Nakon duge i žučne borbe u engleskom parlamentu bila je odobrena gradnja željezničke pruge Liverpool-Manchester. Uprava te željeznice raspisala je nagradni natječaj za najbolju lokomotivu uz ove uvjete: najveća masa lokomotive u službi 6 t, najveći tlak pare u kotlu 0,34 MPa (3,5 at) i najmanja