To su tzv. modificirane Eulerove jednadžbe koje se odnose na ishodište što se nalazi u točki $O$ rotacije (sl. 32). Iste jednadžbe vrijede ako je os rotacije i u središtu masa. Jedino ako se točka rotacije nalazi izvan osi $z$ (os nutacije), jednadžbe treba preurediti.

Uvrste li se pripadne komponente kutnih brzina iz izraza (251) i (252) u modificirane Eulerove jednadžbe (254), bit će

$$\sum M_x = I_O(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta) + I\dot{\psi}\omega_z \sin\vartheta$$

$$\sum M_y = \frac{I_O}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi}\sin^2\vartheta) - I\dot{\vartheta}\omega_z \tag{255}$$

$$\sum M_z = I\dot{\omega}_z .$$

To su opće jednadžbe rotacije simetričnog tijela oko nepomične točke $O$ ili oko središta masa.

Kada se simetrično tijelo giba precesijski s konstantnom kutnom brzinom $\dot{\varphi}$ te s konstantnim $\vartheta$ i $\dot{\psi}$, iz čega proistječe da je $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ i $\ddot{\psi} = 0$, jednadžbe (255) prelaze u oblik

$$\sum M_x = \dot{\psi}\sin\vartheta(I\omega_z - I_O\dot{\psi}\cos\vartheta)$$

$$\sum M_y = 0 \tag{256}$$

$$\sum M_z = 0 .$$

Iz toga se zaključuje da potrebni moment što djeluje na tijelo koje rotira oko točke $O$ (ili oko $G$) mora biti u smjeru osi $x$, dok u smjeru osi $y$ i $z$ ima vrijednost nula. Osim toga, uz stalne komponente veličina $\varphi$, $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ i vrijednost je momenta stalna. Moment je s obzirom na os $x$

$$\sum M_x = mgl_s \sin\vartheta , \tag{257}$$

odakle se izjednačenjem sa (256) dobiva

$$I\omega_z\dot{\psi} - I_O\dot{\psi}^2\cos\vartheta = Gl_S . \tag{258}$$

gdje je $l_S = \overline{OS}$.

Budući da su u suvremenim giroskopima brzine vrtnje oko osi $z$ mnogo veće od rotacije oko osi $Z$, tj.

$$\omega_z \gg \omega_Z \tag{259}$$

(praktično $\omega_z = 2000 \cdots 5000\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_Z \approx 0{,}001\ \mathrm{s}^{-1}$), izraz (258) mijenja se u oblik

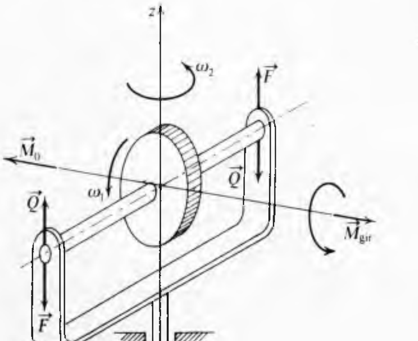
$$I\omega_z\dot{\psi} = Gl_S . \tag{260}$$

Veličina $I\omega_z\dot{\psi}$ naziva se giroskopskim momentom. Iz tog je izraza očito da je brzina precesije u približnoj teoriji giroskopa

$$\dot{\psi} = \frac{Gl_S}{I\omega_z} . \tag{261}$$

Budući da je

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \vec{M}_O \quad \text{i} \quad \vec{K}_O = I\omega\vec{k}, \tag{262}$$




Sl. 33. Djelovanje momenta sprega sila u giroskopu kojemu se rotor giba brzinom $\omega_1$ bitno većom od brzine $\omega_2$

vektor je kinetičkog momenta $\vec{K}$ u smjeru $\vec{\omega}_z$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega_z)\vec{k}. \tag{263}$$

**Giroskopski efekt.** Ako je giroskopu kojemu se rotor okreće velikom brzinom $\omega_1$ s obzirom na brzinu $\omega_2$, kako je prikazano na sl. 33, nametnuto prisilno precesijsko gibanje, u ležajima u kojima se nalazi osovina giroskopa pojavljuje se moment sprega sila $M_{gir}$, jer je

$$M_{gir} = -M_O = I_z(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2). \tag{264}$$

Taj spreg teži da odvede os vlastite rotacije giroskopa u takav položaj da ona bude paralelna s osi precesije, tj. da vektori $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ budu kolinearni.

*O. Muftić*


LIT.: *H. Favre*, Cours de mécanique. Dunod, Paris 1946. — *T. Pöschl*, Lehrbuch der technischen Mechanik I. Springer, Berlin 1948. — *W. Kaufmann*, Einführung in die technische Mechanik. Springer, Berlin 1949. — *А. А. Космодемьянский*, Курс теоретической механики. Госпедиздат, Москва 1955. — *Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье*, Курс теоретической механики I/II, Гостехиздат, Ленинград-Москва, 1948/1955. — *V. M. Faires, S. D. Chambers*, Analytic mechanics. The Macmillan Co., New York 1956. — *S. H. Crandall, N. C. Dahl*, An introduction to the mechanics of solids McGraw-Hill, New York 1959. — *F. Gunder, A. Stuart*, Engineering mechanics. J. Wiley and Sons, New York 1959. — *J. C. Grassie*, Applied mechanics for engineers. Longmans, London 1960. — *S. T. Timošenko, D. H. Jang*, Tehnička mehanika (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1962. — *S. T. Timošenko, D. H. Jang*, Viša dinamika (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1962. — *T. Anđelić, Lj. Radosavljević*, Mehanika I. Tehnička knjiga, Beograd 1964. — *S. M. Targ*, Kratki kurs teorijske mehanike (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd $^{2}$1964. — *S. Pivko*, Mehanika I—III. Naučna knjiga, Beograd: Statika, 1963; Dinamika, 1966; Građevinska knjiga, Beograd: Kinematika, 1964. — *D. Rašković*, Mehanika I—III. Naučna knjiga, Beograd: Statika, 1967; Kinematika, 1964; Dinamika, 1948. — *H. Ziegler*, Vorlesungen über Mechanik. Birkhäuser, Basel 1970. — *J. P. Den Hartog*, Vibracije u mašinstvu (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1972. — *V. Andrejev*, Mehanika I—III. Tehnička knjiga, Zagreb: Statika, 1969; Kinematika, 1971; Dinamika, 1973. — *L. J. Meriam*, Mechanics. J. Wiley and Sons, New York: Part I (Statics), 1966; Part II (Dinamics), 1975. — *B. Vujanović*, Dinamika. Naučna knjiga, Beograd 1976. — *D. Bazjanac*, Tehnička mehanika I—III. Tehnička knjiga, Zagreb: I dio (Statika), $^{5}$1976; II dio (Kinematika), $^{2}$1977; Liber, Zagreb: III dio (Dinamika), $^{2}$1980.


*D. Bazjanac S. Jecić O. Muftić*

**MEHANIKA, ANALITIČKA,** dio teorijske ili racionalne mehanike koja, polazeći od općih principa mehanike, analitički izvodi jednadžbe gibanja. Umjesto uobičajenih koordinatnih sustava upotrebljavaju se *poopćene* ili *Lagrangeove koordinate.* Zakoni i principi u analitičkoj mehanici izraženi su pomoću skalarnih veličina: kinetičke i potencijalne energije, virtualnog rada, Lagrangeove i Hamiltonove funkcije itd. Na tim dvjema činjenicama temelji se prednost metoda analitičke mehanike pred klasičnim metodama u kojima se pretežno primjenjuju vektorske veličine: sila, moment, količina gibanja itd., ili njihove skalarne komponente u uobičajenim koordinatnim sustavima.

Prednost analitičkih metoda je to veća što je sustav složeniji, osobito ako se radi o holonomnim sustavima s idealnim vezama. Tada su reakcije veza automatski isključene iz razmatranja, što uvelike pojednostavnjuje problem. Eliminiranje nepoznatih reakcija veza iz jednadžbi gibanja klasičnim postupkom može biti dugotrajno i zamorno. Analitička mehanika lako se može primijeniti na elektromehaničke sustave i druge sustave koji nisu čisto mehanički. Utjecaj je analitičke mehanike na razvoj teorijske fizike velik, posebno na razvoj kvantne mehanike, statističke mehanike i teorije relativnosti.

Naziv *analitička mehanika* potječe od Lagrangea, koji je 1788. objavio svoje djelo *Mécanique analytique.* U tom je djelu obrađena teorijska mehanika strogo sustavno i matematički. Zakone i principe koji su u tom djelu obrađeni već su prije Lagrangea formulirali njegovi prethodnici i suvremenici: G. Galilei, Ch. Huygens, I. Newton, J. R. d'Alembert, L. Euler i drugi. J. L. Lagrange je shvatio mehaniku kao dio matematike i u svom djelu nije razmatrao fizikalnu i primijenjenu stranu mehanike. Lagrange je napisao: »U ovom djelu nema nijednog crteža. Metode koje predlažem ne zahtijevaju geometrijsko ili mehaničko rasuđivanje, dovoljno je samo koristiti se algebarskim operacijama po jednoobraznom postupku«.

Razvoju analitičke mehanike pridonijeli su mnogi znanstvenici: W. R. Hamilton, C. G. Jacobi, S. D. Poisson, M. V. Ostrogradski, J. H. Poincaré, S. A. Čaplygin, P. Appell i mnogi drugi.

## SUSTAVI ČESTICA I VEZE

**Sustav čestica i mehanički sustav.** Sustav čestica jest skup čestica u kojem gibanje svake čestice ovisi o položaju i gibanju ostalih čestica sustava. Svako kruto tijelo može se smatrati kao skup veoma mnogo čestica kojima je međusobni razmak nepromjenljiv, pa se skup tijela i čestica kojih je gibanje međusobno ovisno može također smatrati sustavom čestica. Međutim, u tom slučaju češće se upotrebljava izraz *mehanički sustav* ili *materijalni sustav.*

Gibanje pojedinih čestica sustava može biti ograničeno vezama. Te su veze matematički opisane pomoću jednadžbi koje međusobno povezuju koordinate položaja i brzine pojedinih čestica ili dijelova sustava i vrijeme. Jednadžba veze ima oblik

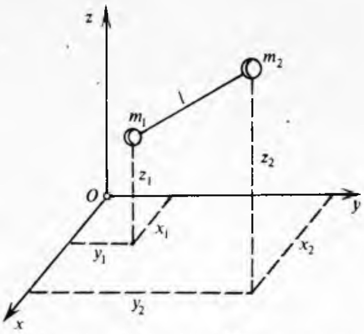
$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_i, \ldots, \dot{\vec{r}}_n, t) \leqq 0, \tag{1}$$

odnosno kraće

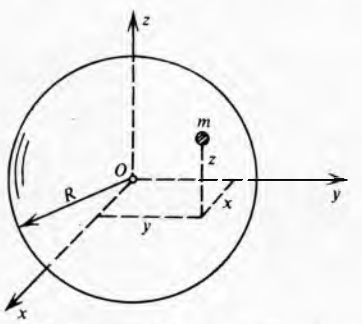
$$f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \leqq 0, \tag{2}$$

gdje su $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$ vektor položaja, $\dot{\vec{r}}_i = \dot{x}_i\vec{i} + \dot{y}_i\vec{j} + \dot{z}_i\vec{k}$ vektor brzine, a $t$ vrijeme. Znak jednakosti odnosi se na *obostrane veze*, a znak $\leqq$ na *jednostrane veze*, tj. veze koje sprečavaju gibanje čestice samo u jednom smjeru, a dopuštaju gibanje čestice u drugom smjeru. Obostrana veza je npr. veza dviju čestica krutim štapom (sl. 1). Štap sprečava ne samo udaljavanje nego i približavanje čestica. Očito tada među koordinatama čestica postoji veza

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2. \tag{3}$$




Sl. 1. Dvostrana holonomna skleronomna veza



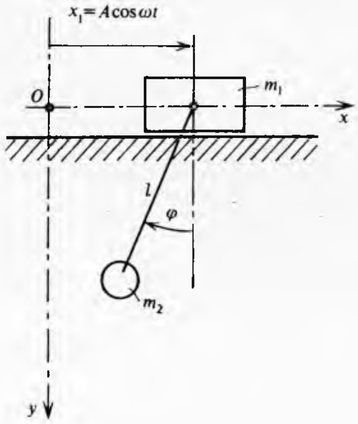

Sl. 2. Jednostrana holonomna skleronomna veza

Da su čestice bile povezane nerastezljivom niti, umjesto znaka jednakosti u izrazu (3) stajao bi znak $\leqq$ i veza bi bila jednostrana. Nit sprečava samo udaljavanje čestica na razmak veći od $l$, međutim dopušta smanjenje udaljenosti. Kao primjer jednostrane veze može poslužiti i čestica koja je zatvorena u sfernoj posudi polumjera $R$ (sl. 2). Tada jednadžba veze glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2. \tag{4}$$

Primjerom takve veze mogu biti i čestice plina u posudi proizvoljna oblika.

**Skleronomne i reonomne veze.** Ako se u izrazu koji opisuje neku vezu vrijeme javlja eksplicitno, veza je *reonomna* ili *nestacionarna.* Nasuprot tome, u *skleronomnim* ili *stacionarnim* vezama u izrazu koji opisuje vezu vrijeme $t$ ne javlja se eksplicitno. Tako npr. izrazi (3) i (4) opisuju skleronomnu vezu.




Sl. 3. Holonomna reonomna veza

Sustav koji se sastoji od dvije mase (sl. 3) podvrgnut je reonomnim vezama, jer je masa $m_1$ prisiljena da titra prema zakonu $x_1 = A\cos(\omega t)$. Tada jednadžba veze glasi

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2, \tag{5}$$

odnosno

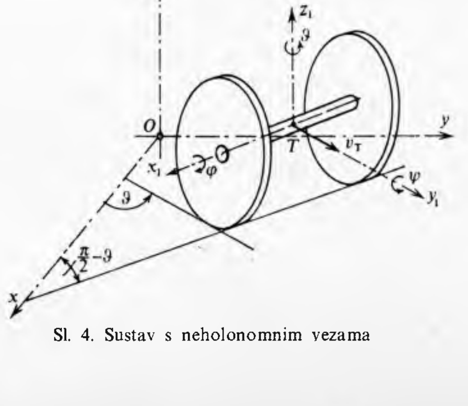
$$(x_2 - A\cos\omega t)^2 + y^2 = l^2, \tag{6}$$

jer je $y_1 = 0$.

**Holonomne i neholonomne veze.** Veze se svrstavaju nadalje po tome da li su izražene pomoću algebarskih ili diferencijalnih jednadžbi. *Holonomne* (*integralne*, *geometrijske*) veze izražavaju se pomoću algebarskih jednadžbi ili diferencijalnih jednadžbi koje se dadu integrirati a da se ne riješi cijeli problem. Ako su veze izražene pomoću diferencijalnih jednadžbi koje se ne dadu integrirati, zovu se *neholonomne*, *diferencijalne* ili *kinematičke* veze. Ako je materijalni sustav podvrgnut bar jednoj neholonomnoj vezi, sustav se smatra neholonomnim.

*Primjer.* Dva kotača spojena osovinom koja se kotrljaju bez trenja po horizontalnoj podlozi (sl. 4) primjer su neholonomnog sustava.

Položaj krutog tijela što ga čine kotači s osovinom može se odrediti pomoću tri koordinate težišta $x_T$, $y_T$, $z_T$ i tri kuta $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ za koje je tijelo okrenuto oko osiju $x_1$, $y_1$, $z_1$. Očito




Sl. 4. Sustav s neholonomnim vezama

je tijelo podvrgnuto dvjema geometrijskim ili holonomnim vezama, koje glase

$$z_T = R, \qquad \psi = 0. \tag{7}$$

Osim toga, tijelo je podvrgnuto i kinematičkim vezama. Naime,

$$\dot{x}_T = v_T \cos\vartheta; \qquad \dot{y}_T = v_T \sin\vartheta.$$

Kako je $v_T = R\dot{\varphi}$, bit će

$$\dot{x}_T = R\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{y}_T = R\dot{\varphi}\sin\vartheta. \tag{8}$$

Izrazi (8) ne mogu se u općem slučaju, tj. kad je $\vartheta = \vartheta(t)$, integrirati, pa su veze neholonomne. Ako je $\vartheta = \text{const.}$, npr. ako se kotači gibaju po ravnim tračnicama, izrazi (8) mogu se integrirati, pa sustav postaje holonoman.

## PRINCIP VIRTUALNIH RADOVA

**Stvarni, mogući i virtualni pomak.** Beskonačno mali pomak čestice $d\vec{r}$ koji se zbiva u vremenu $dt$ u skladu s vezama i silama koje djeluju na česticu naziva se stvarnim pomakom čestice. Stvarni pomak zadovoljava i jednadžbe veza i jednadžbe gibanja. Mogući pomak $d\vec{r}$, za razliku od stvarnoga, jest beskonačno mali pomak koji zadovoljava samo jednadžbe veza, ali ne mora zadovoljavati jednadžbe gibanja. Ako je čestica podvrgnuta obostranoj holonomnoj vezi

$$f(x,y,z,t) = f(\vec{r},t) = 0,$$

mogući pomak mora zadovoljiti izraz

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

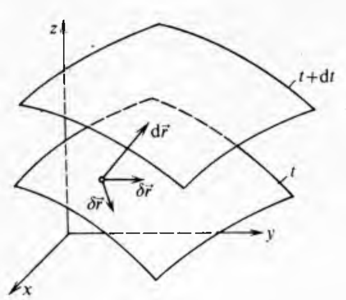
odnosno

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Virtualni pomak $\delta\vec{r}$ jest beskonačno mali pomak koji dopuštaju veze u zadanom trenutku vremena. Za razliku od stvarnog pomaka koji se zbiva u vremenu $dt$, virtualni pomak se zbiva trenutno. Virtualni pomak treba da zadovolji uvjet

$$\delta f = \nabla f \cdot \delta\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0. \tag{10}$$

Svaki stvarni pomak ujedno je i jedan od mogućih pomaka. Virtualni pomak $\delta\vec{r}$ podudara se s jednim od mogućih pomaka samo kad su veze skleronomne, tj. kad je $\partial f/\partial t = 0$, odnosno kad jednadžba veze nije funkcija vremena. Ako je čestica vezana za površinu koja se giba (sl. 5), mogući ili stvarni pomak $d\vec{r}$ nisu tangencijalni na površinu dok virtualni pomak




Sl. 5. Kod reonomnih veza virtualni pomak $\delta\vec{r}$ ne spada u grupu mogućih pomaka $d\vec{r}$

$\delta\vec{r}$ jest. U skleronomnim sustavima iščezava razlika između virtualnih i mogućih pomaka. Dok je stvarni pomak potpuno određen jednadžbama gibanja i jednadžbama veza, mogući i virtualni pomak mogu se odabrati potpuno proizvoljno, pod uvjetom da zadovoljavaju izraze (9), odnosno (10).

**Virtualni rad, idealne veze.** Virtualni rad $\delta A$ sile koja djeluje na česticu jest rad koji sila izvrši na virtualnom pomaku, tj.

$$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z. \tag{11}$$

Ako na materijalni sustav u zadanom položaju i fiksiranom trenutku vremena djeluju sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ i ako su virtualni pomaci hvatišta sila $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2 \dots \delta\vec{r}_n$, virtualni rad sustava jest zbroj radova svih sila na virtualnim pomacima, tj.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i. \tag{12}$$

Materijalni sustav je podvrgnut idealnim vezama ako je virtualni rad reakcija veza jednak nuli, tj. ako je

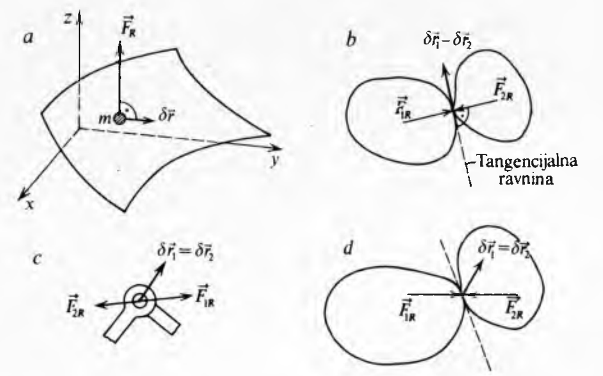
$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i. \tag{13}$$

*Nekoliko primjera idealnih veza. 1.* Gibanje čestice po glatkoj deformabilnoj i krutoj površini. Reakcija veze $F_R$ uvijek je normalna, a virtualni pomak $\delta\vec{r}$ tangencijalan na površinu, pa je $\vec{F}_R\cdot\delta\vec{r} = \delta A_R = 0$ (sl. 6a).

*2.* Dodir dvaju glatkih tijela u gibanju. U ovom slučaju je prema zakonu akcije i reakcije $\vec{F}_{1R} = -\vec{F}_{2R}$. Obje su reakcije okomite na zajedničku tangencijalnu ravninu. Relativna brzina točaka u dodiru $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ leži u tangencijalnoj ravnini, pa i razlika virtualnih pomaka $\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2$ također leži u tangencijalnoj ravnini. Virtualni rad reakcija veza iznosi

$$\delta A_R = \vec{F}_{1R}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{2R}\cdot\delta\vec{r}_2 = \vec{F}_{1R}\cdot(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2) = 0$$

jer su vektori $\vec{F}_{1R}$ i $(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2)$ međusobno okomiti (sl. 6b).




Sl. 6. Idealne veze: *a* glatka kruta ili deformabilna površina, *b* dodir glatkih tijela, *c* zglob bez trenja, *d* dodir hrapavih tijela kad je trenje dovoljno veliko da spriječi međusobno klizanje

*3.* Veza dvaju tijela zglobom bez trenja (sl. 6c). U tom slučaju je $\vec{F}_{1R} = -\vec{F}_{2R}$ i $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2$, pa je

$$\delta A_R = \vec{F}_{1R}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{2R}\cdot\delta\vec{r}_2 = 0.$$

*4.* Dva hrapava tijela u dodiru kad je trenje dovoljno veliko da spriječi međusobno klizanje (sl. 6d). Kao i u primjeru prema sl. 6c, bit će $\delta A_R = 0$, jer je

$$\vec{F}_{1R} = -\vec{F}_{2R} \qquad \text{i} \qquad \delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2.$$

*5.* Veza dviju čestica krutim štapom.

*6.* Veza dviju čestica nerastezljivom niti ako je gibanje takvo da je nit uvijek napeta.

**Princip virtualnih pomaka.** Princip virtualnih pomaka ili Lagrangeov princip glasi: Za ravnotežu materijalnog sustava s holonomnim dvostranim idealnim vezama nužno je i dovoljno da algebarski zbroj virtualnih radova aktivnih sila bude jednak nuli, tj. da je

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0. \tag{14}$$

Prednost je tog principa u tome što se u obzir uzimaju samo aktivne sile pa ne treba posebno izračunavati nepoznate reakcije veza. To osobito vrijedi kad se traži odnos pogonske i radne sile u različitim mehanizmima.

Ako je sustav podvrgnut neidealnim vezama, princip se ne može neposredno primijeniti. Međutim, mogu se reakcije veza rastaviti na normalne komponente i sile trenja. Ako se sile trenja ubroje u aktivne sile, veze se mogu smatrati idealnim jer je virtualni rad normalnih komponenata jednak nuli.

Princip virtualnih pomaka može se primijeniti i pri jednostranim vezama u preinačenom obliku:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \leqq 0, \tag{15}$$

tj. ako je rad aktivnih sila pri virtualnom pomaku negativan ili jednak nuli, sustav se nalazi u ravnoteži.

Pri rješavanju zadataka pomoću principa virtualnih pomaka treba izraz (14) napisati u skalarnom obliku. To se može uraditi na dva načina: geometrijski i analitički. Pri geometrijskom postupku sustavu se dade (u mislima ili na skici) virtualni pomak i pri tome izračuna virtualni rad svih aktivnih sila pomoću izraza

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \delta \varphi_i, \tag{16}$$

gdje je $\delta s_i$ projekcija virtualnog pomaka hvatišta sile $F_i$ na pravac djelovanja sile. Isto tako je $\delta\varphi_i$ komponenta kutnog pomaka oko osi oko koje djeluje spreg $M_i$. Kad sustav ima jedan stupanj slobode, svi pomaci $\delta s_i$ i $\delta\varphi_i$ mogu se izraziti pomoću jednoga, npr. $\delta\varphi_k$. Kad se $\delta s_i$ i $\delta\varphi_i$, izraženi pomoću $\delta\varphi_k$, uvrste u (16), može se pokratiti sa $\delta\varphi_k$. Pomoću dobivenog izraza može se odrediti nepoznata veličina. Ako sustav ima više stupnjeva slobode, odabire se onoliko nezavisnih virtualnih pomaka koliko ima stupnjeva slobode i za svaki pomak ponovi se postupak. Pri tome se može dobiti onoliko jednadžbi koliko ima stupnjeva slobode, a zatim iz njih veličine koje se traže.

Pri analitičkom postupku odabire se povoljni koordinatni sustav, a zatim se pomoću projekcija sila i virtualnih pomaka u tom sustavu izrazi princip virtualnih radova. Ako je sustav kartezijski, princip glasi

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) = 0. \tag{17}$$

Komponente virtualnih pomaka $\delta x_i$, $\delta y_i$ i $\delta z_i$ zapravo su varijacije koordinata i mogu se odrediti operacijom variranja. U tu se svrhu sve koordinate $x_i$, $y_i$ i $z_i$ izraze pomoću konstantnih poznatih veličina (obično dimenzije pojedinih dijelova sustava) i nekog parametra, npr. $\alpha$. Zatim se odrede varijacije koordinata u kojima se javlja varijacija $\delta\alpha$. Nakon uvrštenja varijacija koordinata u (17), može se pokratiti sa $\delta\alpha$. Iz tako dobivene jednadžbe određuje se tražena veličina. Kad sustav ima više stupnjeva slobode, koordinate se izražavaju pomoću onoliko nezavisnih parametara koliko ima stupnjeva slobode.

**Neki elementi varijacionog računa.** Neka je zadana funkcija $x = x(t)$, koja opisuje gibanje čestice s jednim stupnjem slobode. Diferencijal te funkcije jest

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

i odgovara stvarnom pomaku čestice u vremenu d$t$ (sl. 7). Neka se oblik funkcije malo promijeni, tj. neka je

$$\tilde{x} = x(t) + \varepsilon\eta(t), \tag{19}$$

gdje je $\tilde{x}$ nova promijenjena funkcija, $\eta(t)$ proizvoljna konačna, jednoznačna derivabilna funkcija vremena, a $\varepsilon$ po volji mala konstanta. Infinitezimalno mala promjena funkcije koja nastaje u trenutku $t$ zbog promjene oblika funkcije zove se *izokrona* ili *nepuna varijacija* funkcije $x(t)$ i označuje se slovom $\delta$, tj.

$$\delta x = \tilde{x} - x = \varepsilon\eta(t). \tag{20}$$

Variranje se formalno provodi prema istim pravilima kao i diferenciranje tako da se simbol d zamjenjuje simbolom $\delta$. Ako je

$$y = 2a\cos\alpha \qquad a = \text{const.}, \tag{21}$$

bit će

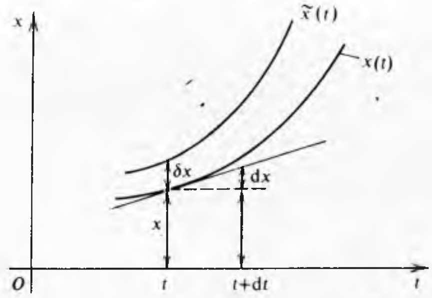
$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= -2a\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\ \delta y &= -2a\sin\alpha\,\delta\alpha. \end{aligned} \tag{22}$$

Variranje i deriviranje je komutativno, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) = \delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \delta\dot{x}. \tag{23}$$

Isto je tako komutativno integriranje i variranje

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x\,\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2} x\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$




Sl. 7. Diferencijal d$x$ i izokrona varijacija $\delta x$ funkcije $x(t)$

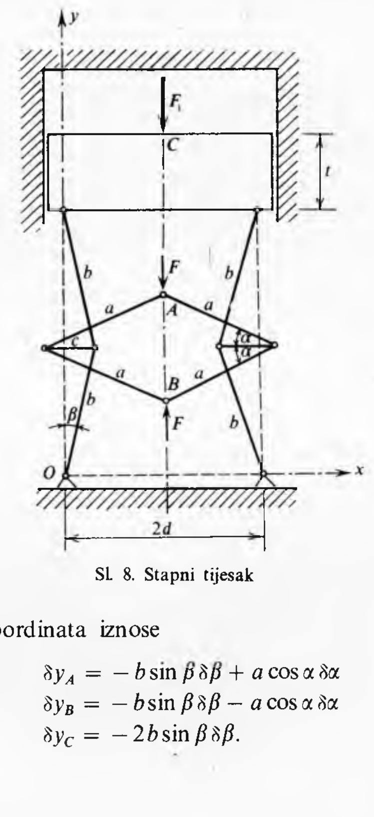
*Primjer.* U točkama $A$ i $B$ stapnog tijeska (sl. 8) djeluju pogonske sile $F$. Treba odrediti radnu silu $F_1$. Princip virtualnih radova za tijesak glasi

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = F_{Ay}\delta y_A + F_{By}\delta y_B + F_{Cy}\delta y_C = 0. \tag{25}$$

Sve su sile vertikalne, pa su uzete samo varijacije koordinate $y$, jer se pri horizontalnim pomacima $x_i$ ne obavlja rad. Pri tom je

$$F_{Ay} = -F, \qquad F_{By} = F \quad \text{i} \quad F_{Cy} = -F_1 \tag{26}$$

$$\begin{aligned} y_A &= b\cos\beta + a\sin\alpha \\ y_B &= b\cos\beta - a\sin\alpha \\ y_C &= 2b\cos\beta + t. \end{aligned} \tag{27}$$




Sl. 8. Stapni tijesak

Varijacije koordinata iznose

$$\begin{aligned} \delta y_A &= -b\sin\beta\,\delta\beta + a\cos\alpha\,\delta\alpha \\ \delta y_B &= -b\sin\beta\,\delta\beta - a\cos\alpha\,\delta\alpha \\ \delta y_C &= -2b\sin\beta\,\delta\beta. \end{aligned} \tag{28}$$

Nakon uvrštenja (26) i (28) u (25) i sređivanja, bit će

$$F_1 = F\frac{a}{b}\frac{\cos\alpha\,\delta\alpha}{\sin\beta\,\delta\beta}. \tag{29}$$

Pomaci $\delta\alpha$ i $\delta\beta$ jesu zavisni. Njihov odnos može se odrediti iz izraza

$$2a\cos\alpha - 2c = 2d - 2b\sin\beta. \tag{30}$$

Odatle se nakon variranja dobije

$$-2a\sin\alpha\,\delta\alpha = -2b\cos\beta\,\delta\beta,$$

odnosno

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{b}{a}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \tag{31}$$

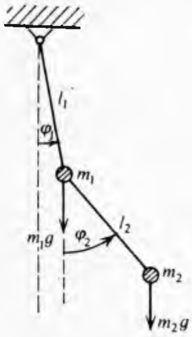
pa je radna sila

$$F_1 = F\cot\alpha\cot\beta. \tag{32}$$

## JEDNADŽBE GIBANJA U POOPĆENIM KOORDINATAMA

**Poopćene koordinate.** Poopćene, generalizirane ili Lagrangeove koordinate jesu skup međusobno nezavisnih parametara koji jednoznačno određuju položaj sustava. Broj poopćenih koordinata jednak je broju stupnjeva slobode sustava. Poopćene koodinate označuju se sa $q_1, q_2, \ldots, q_s$, gdje je $s$ broj stupnjeva slobode. Kao poopćene koordinate mogu se upotrijebiti raznovrsne veličine, npr. duljine, kutovi, lukovi, površine itd. Kartezijske, sferne i cilindrične koordinate specijalni su slučajevi poopćenih koordinata sustava slobodnih čestica. Ako sustav ima $n$ čestica i $k$ veza, imat će $3n-k$ stupnjeva slobode, pa može imati samo $3n-k$ poopćenih koordinata.

Položaj krutog tijela što rotira oko nepomične osi može se odrediti pomoću kuta $\varphi$, koji tada služi kao poopćena koordinata. Poopćene koordinate slobodnog krutog tijela mogu biti npr. tri koordinate težišta i tri Eulerova kuta, tj. $x_T$, $y_T$, $z_T$, $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$. U dvostrukom njihalu (sl. 9) kao poopćene koordinate mogu se odabrati kutovi $\varphi_1$ i $\varphi_2$.




Sl. 9. Dvostruko njihalo

Ako je mehanički sustav holonoman, kartezijske koordinate mogu se izraziti eksplicitno pomoću poopćenih koordinata i vremena, tj.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \end{aligned} \tag{33}$$

ili kraće

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t) \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n \\ j &= 1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{34}$$

Npr. za dvostruko njihalo kartezijske koordinate izražene preko poopćenih koordinata $\varphi_1$ i $\varphi_2$ glase:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1\sin\varphi_1 & x_2 &= l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \\ y_1 &= l_1\cos\varphi_1 & y_2 &= l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 \\ z_1 &= 0 & z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

**Poopćene sile, princip virtualnih radova u poopćenim koordinatama.** Princip virtualnih radova izražen analitički glasi

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{36}$$

Kako je $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$, bit će prema pravilu o diferenciranju funkcija više varijabli (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288)

$$\mathrm{d}\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \cdots \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\mathrm{d}q_s + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{37}$$

Virtualni pomak $\delta\vec{r}_i$ izračunava se na sličan način, ali je za fiksirani trenutak (izokrono variranje), tj. za $\mathrm{d}t = 0$,

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial r_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial r_i}{\partial q_s}\delta q_s,$$

odnosno

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{38}$$

Nakon uvrštenja tog izraza u (36) dobit će se

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j, \tag{39}$$

odnosno kada se zamijeni redoslijed sumiranja,

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j\delta q_j, \tag{40}$$

gdje su

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{41}$$

poopćene sile. Svakoj poopćenoj koordinati $q_j$ odgovara poopćena sila $Q_j$. Izraz (41) u skalarnom obliku glasi

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right). \tag{42}$$

Princip virtualnih pomaka u poopćenim koordinatama glasi

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots Q_s\delta q_s = 0. \tag{43}$$

Kada su sustavi holonomni, varijacije $q_1, q_2, \ldots, q_s$ međusobno su nezavisne. Ako se uzme $\delta q_1 \neq 0$, a sve su ostale varijacije jednake nuli, iz izraza (43) slijedi $Q_1 = 0$. Na sličan način, ako je samo $\delta q_2 \neq 0$, a sve su ostale varijacije jednake nuli, slijedi $Q_2 = 0$. Općenito je

$$Q_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{44}$$

tj. nuždan i dovoljan uvjet ravnoteže holonomnog sustava s idealnim dvostranim vezama jest jednakost nuli svih poopćenih aktivnih sila.

Poopćene sile mogu se izračunavati neposredno primjenom izraza (42), ili tako da se sustavu dade virtualni pomak i pri tom izračuna $\delta A$. Koeficijent uz $\delta q_1$ jest $Q_1$, koeficijent uz $\delta q_2$ jest $Q_2$ itd. Ponekad se sustavu daje samo virtualni pomak $\delta q_1$, zatim $\delta q_2$ itd., i pri tome se izračunaju virtualni radovi iz kojih neposredno slijede poopćene sile $Q_1$, $Q_2$ itd.

*Primjer.* Poopćene sile dvostrukog njihala mogu se izračunati pomoću izraza (42). Pri tome treba uvažiti da je $F_{1x} = F_{1z} = F_{2x} = F_{2z} = 0$, $F_{1y} = m_1 g$, $F_{2y} = m_2 g$. Kad se te vrijednosti i (35) uvrste u (42), dobit će se

$$Q_1 = m_1 g\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_1} + m_2 g\frac{\partial y_2}{\partial\varphi_1}$$

$$Q_2 = m_1 g\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_2} + m_2 g\frac{\partial y_2}{\partial\varphi_2},$$

odnosno

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1$$
$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin\varphi_2. \tag{45}$$

Te se sile mogu odrediti i tako da se sustavu dade virtualni pomak, tj. da se kutovi $\varphi_1$ i $\varphi_2$ povećaju za iznos $\delta\varphi_1$, odnosno $\delta\varphi_2$, i izračuna virtualni rad. Tada je

$$\delta A = -m_1 g l_1 [\cos(\varphi_1 + \delta\varphi_1) - \cos\varphi] - $$
$$- m_2 g \{l_1 [\cos(\varphi_1 + \delta\varphi_1) - \cos\varphi_1] + $$
$$+ l_2 [\cos(\varphi_2 + \delta\varphi_2) - \cos\varphi_2]\}. \tag{46}$$

Kad se taj izraz sredi i uoči da su $\delta\varphi_1$ i $\delta\varphi_2$ male veličine višeg reda, dobit će se

$$\delta A = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 =$$
$$= Q_1 \delta\varphi_1 + Q_2 \delta\varphi_2. \tag{47}$$

Odatle odmah slijede poopćene sile $Q_1$ i $Q_2$.

**Konzervativne sile.** Ako su sile koje djeluju na holonomni sustav sa stacionarnim vezama konzervativne, postoji funkcija $U = U(x_i, y_i, z_i)$ iz koje se mogu odrediti komponente aktivnih sila (v. *Mehanika krutih tijela*)

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{48}$$

Funkcija $U$ naziva se potencijalnom energijom.

Kad se (48) uvrsti u (42), dobit će se

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \tag{49}$$

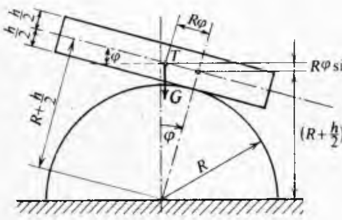
Prema pravilu o deriviranju složene funkcije više varijabli, taj izraz predstavlja derivaciju $U$ po koordinati $q_j$, tj.

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{50}$$

Tada je uvjet ravnoteže (44)

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \tag{51}$$

tj. u ravnotežnom položaju potencijalna energija ima ekstremnu stacionarnu vrijednost. Podrobnija bi analiza pokazala kad je ravnoteža stabilna da potencijalna energija ima minimum, a kad je ravnoteža nestabilna maksimum. Strogu definiciju stabilne ravnoteže izražava Lagrange-Dirichletov poučak koji glasi: Ako se holonomni sustav sa skleronomnim idealnim vezama nalazi u potencijalnom polju sila i ako je u ravnotežnom položaju potencijalna energija minimalna, ravnotežni položaj je stabilan.




Sl. 10. Stabilnost ravnoteže ploče debljine $h$ na valjku polumjera $R$

*Primjer.* Potencijalna energija sustava (sl. 10) iznosi

$$U = U_0 + G\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\varphi + GR\varphi\sin\varphi. \tag{52}$$

Da bi sustav bio u ravnoteži, mora biti $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, tj.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = G\left(R\varphi\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right) = 0. \tag{53}$$

Rješenje te jednadžbe jest $\varphi = 0$, tj. ravnoteža je moguća samo ako je ploča postavljena horizontalno na valjak. Karakter ravnoteže može se odrediti iz druge derivacije. Za granični položaj između stabilne i nestabilne ravnoteže druga je derivacija jednaka nuli. Kako je

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = GR(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - G\frac{h}{2}\cos\varphi, \tag{54}$$

bit će za ravnotežni položaj, tj. za $\varphi = 0$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = G\left(R - \frac{h}{2}\right). \tag{55}$$

Ako je $R > h/2$, druga derivacija je veća od nule, tj. potencijalna energija je minimalna, pa je položaj ravnoteže stabilan. Ako je $R < h/2$, položaj je nestabilan.

**Disipativne sile.** Vrlo čest i važan primjer disipativnih sila jesu viskozne sile, tj. sile koje su proporcionalne brzini i usmjerene suprotno od vektora brzine

$$\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{rel}} \qquad k > 0, \tag{56}$$

gdje je $k$ faktor prigušenja, a $\vec{v}_{\text{rel}}$ relativna brzina dijelova sustava među kojima djeluje viskozno trenje. Tada je

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \tag{57}$$

gdje $\vec{v}_i$ znači relativnu brzinu. Kako je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{58}$$

bit će

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \tag{59}$$

što uvršteno u (57) daje

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} k_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i. \tag{60}$$

Skalarna funkcija

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i (v_i)^2_{\text{rel}} \tag{61}$$

naziva se Rayleigheva disipativna funkcija. U skleronomnim vezama je

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \tag{62}$$

pa je

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_k, \tag{63}$$

odnosno

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{64}$$

gdje je

$$k_{jk} = k_{kj} = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \tag{65}$$

Rayleigheva funkcija jest homogena kvadratna funkcija poopćenih brzina s koeficijentima koji ovise o poopćenim koordinatama. Poopćena sila koja potječe od disipativnih viskoznih sila dobije se uvrštenjem izraza (61) i (60) te iznosi

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \tag{66}$$

**Lagrangeove jednadžbe prve vrste.** Jednadžbe gibanja čestice koja se giba po glatkoj površini (sl. 11) glase

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + F_{Rx} \\ m\ddot{y} &= F_y + F_{Ry} \\ m\ddot{z} &= F_z + F_{Rz}, \end{aligned} \tag{67}$$

odnosno u vektorskom obliku

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R, \tag{68}$$

gdje je $\vec{F}$ rezultanta aktivnih sila, a $F_x$, $F_y$, $F_z$ njene su komponente. $\vec{F}_R$ je reakcija veze, a $F_{Rx}$, $F_{Ry}$ i $F_{Rz}$ njene su komponente. Tri jednadžbe (67) i jednadžba veze

$$f(x,y,z) = 0 \tag{69}$$

nisu dovoljne da se odredi šest nepoznanica: $x$, $y$, $z$ i $F_{Rx}$, $F_{Ry}$ i $F_{Rz}$. Međutim, kad je površina glatka, reakcija $\vec{F}_R$ okomita je na površinu $f(x,y,z)$, pa njene komponente nisu nezavisne. Pravac normale, tj. reakcije $\vec{F}_R$, podudara se s pravcem gradijenta $\nabla f$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \tag{70}$$

Kosinusi kutova koje $\nabla f$, odnosno $\vec{F}_R$, čini s osima $x$, $y$ i $z$ iznose

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{|\nabla f|}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{|\nabla f|}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{|\nabla f|}, \tag{71}$$

gdje je

$$|\nabla f| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{72}$$

Sada izrazi (67) prelaze u

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \frac{F_R}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \frac{F_R}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \frac{F_R}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{73}$$

Veličina $\lambda = \frac{F_R}{|\nabla f|}$ naziva se *Lagrangeov multiplikator*. Tri jednadžbe (73) zajedno s jednadžbom veze (69) dovoljne su da se odrede četiri nepoznanice $x$, $y$, $z$ i $\lambda$, a zatim i reakcija pomoću izraza

$$\vec{F}_R = \lambda\nabla f. \tag{74}$$

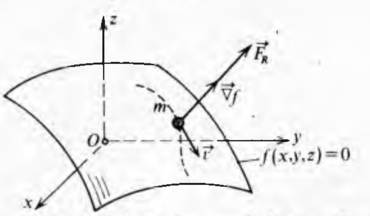
Jednadžbe (73) zovu se Lagrangeove jednadžbe prve vrste.

Ako sustav ima $n$ čestica i $k$ veza

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad j = 1,2,3,\ldots,k, \tag{75}$$

Lagrangeove jednadžbe prve vrste glase

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{xi} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{yi} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_i} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n \\ m\ddot{z}_i &= F_{zi} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \end{aligned} \tag{76}$$




Sl. 11. Gibanje čestice po glatkoj površini

Ukupno ima $n$ Lagrangeovih jednadžbi i $k$ jednadžbi veza sa $n$ nepoznatih koordinata i $k$ Lagrangeovih multiplikatora $\lambda_j$.

**Lagrangeove jednadžbe druge vrste.** Diferencijalne jednadžbe gibanja holonomnog sustava s dvostranim idealnim vezama u poopćenim koordinatama glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1,2,\ldots,s, \tag{77}$$

gdje je $E_K$ ukupna kinetička energija sustava, $Q_j$ poopćena sila, $q_j$ i $\dot{q}_j$ poopćene su koordinate, odnosno poopćene brzine, $t$ je vrijeme, a $s$ broj stupnjeva slobode sustava.

Izraz (77) može se primijeniti i kad veze nisu idealne. Tada treba reakcije veza rastaviti na normalne komponente i sile trenja, pa zatim sile trenja uključiti u aktivne sile, odnosno poopćene sile. Izraz (77) može se preinačiti u

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j^* + Q_j^{**} + Q_j, \tag{78}$$

gdje je

$$Q_j^* = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{79}$$

dio poopćene sile koji potječe od potencijalnih sila i

$$Q_j^{**} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \tag{80}$$

dio poopćene sile koji potječe od viskoznih sila, a $Q_j$ dio poopćene sile koji potječe od ostalih sila. Sada izraz (78) prelazi u

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = Q_j. \tag{81}$$

Ako na sustav djeluju samo konzervativne sile, Lagrangeove jednadžbe mogu se pisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{82}$$

gdje je $L$ Lagrangeova funkcija:

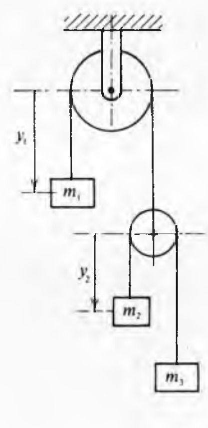
$$L = E_K - U. \tag{83}$$

Naime, potencijalna energija $U$ ne ovisi o poopćenim brzinama, pa je

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Pomoću Lagrangeovih jednadžbi druge vrste mogu se vrlo lako, u usporedbi s klasičnim metodama, dobiti jednadžbe gibanja. Prednost je Lagrangeovih jednadžbi to veća što je sustav složeniji. Ako posebno nije naglašeno o kojim se Lagrangeovim jednadžbama radi, misli se uvijek na Lagrangeove jednadžbe druge vrste. Primjena Lagrangeovih jednadžbi ilustrirana je pomoću dva primjera.

*Primjer 1.* Sustav čestica (sl. 12) sastoji se od tri mase $m_1$, $m_2$ i $m_3$ koje su povezane nerastezljivim nitima prebačenim preko kolotura zanemarive mase. Sustav ima dva stupnja slo-




Sl. 12. Sustav čestica s dva stupnja slobode i holonomno skleronomnim vezama

bode. Kao poopćene koordinate odabrane su veličine $y_1$ i $y_2$. Kinetička energija sustava iznosi

$$E_K = \frac{1}{2}[m_1 \dot{y}_1^2 + m_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + m_3(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2]. \tag{84}$$

Ako se sustavu dade virtualni pomak $\delta y_1 \neq 0$, $\delta y_2 = 0$, bit će

$$\delta A_1 = Q_1 \delta y_1 = m_1 g \delta y_1 - (m_2 + m_3) g \delta y_1. \tag{85}$$

Odatle je $Q_1 = (m_1 - m_2 - m_3)g$. Kad se sustavu dade virtualni pomak $\delta y_2 \neq 0$, $\delta y_1 = 0$, bit će

$$\delta A_2 = Q_2 \delta y_2 = m_2 g \delta y_2 - m_3 g \delta y_2. \tag{86}$$

Odatle je $Q_2 = (m_2 - m_3)g$.

Lagrangeove jednadžbe za taj sustav glase

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial y_1} &= Q_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial y_2} &= Q_2. \end{aligned} \tag{87}$$

Deriviranjem $E_K$ po $\dot{y}_1$ dobit će se

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 + m_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + m_3(\dot{y}_1 + \dot{y}_2).$$

Odatle je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_1}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_2. \tag{88}$$

Na sličan način može se dobiti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_2}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y}_2 + (m_3 - m_1)\ddot{y}_1. \tag{89}$$

Također je $\dfrac{\partial E_K}{\partial y_1} = \dfrac{\partial E_K}{\partial y_2} = 0$, pa Lagrangeove jednadžbe u sređenom obliku glase

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_2 &= (m_1 - m_2 - m_3)g \\ (m_3 - m_1)\ddot{y}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{y}_2 &= (m_2 - m_3)g. \end{aligned} \tag{90}$$

*Primjer 2.* Na sustav koji se sastoji od tri mase $m_1$, $m_2$ i $m_3$ (sl. 13) djeluje uzbudna sila $F = F_0 \cos \omega t$. Mase su međusobno povezane oprugama konstante $c_1$, $c_2$ i $c_3$ te viskoznim prigušivačima konstante $k_1$ i $k_2$. Trenje između mase i podloge je zanemarivo.

Sustav ima tri stupnja slobode, a kao poopćene koordinate odabrani su pomaci masa iz ravnotežnog položaja $x_1$, $x_2$ i $x_3$.

Tada na mase djeluju konzervativne sile opruga, viskozne sile prigušivača i vanjska sila $F$, a Lagrangeove jednadžbe imaju oblik

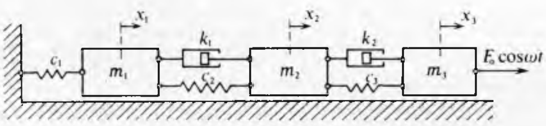
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} = Q_i. \tag{91}$$

Kinetička energija sustava glasi

$$E_K = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2). \tag{92}$$

Potencijalna energija jest

$$U = \frac{1}{2}[c_1 x_1^2 + c_2(x_2 - x_1)^2 + c_3(x_3 - x_2)^2], \tag{93}$$




Sl. 13. Sustav s tri stupnja slobode

a disipativna funkcija

$$\Phi = \frac{1}{2}[k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + k_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2]. \tag{94}$$

Ako se sustavu uzastopce dade virtualni pomak $\delta x_1$, zatim $\delta x_2$ i napokon $\delta x_3$, dobit će se za poopćene sile

$$Q_1 = Q_2 = 0, \qquad Q_3 = F_0 \cos \omega t.$$

Lagrangeove jednadžbe u sređenom obliku sada glase

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) - k_1 \dot{x}_1 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) - c_3(x_3 - x_1) + k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + & \\ + k_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3(x_3 - x_2) + k_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F_0 \cos \omega t. \end{aligned} \tag{95}$$

**Struktura kinetičke energije u poopćenim koordinatama.** Kinetička energija sustava glasi

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i.$$

Ako se u taj izraz uvrsti (58), bit će

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2, \tag{96}$$

odnosno

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2, \tag{97}$$

gdje je

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ b_j &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{98}$$

Sada se $E_K$ može rastaviti na tri dijela

$$E_K = E_{K2} + E_{K1} + E_{K0}, \tag{99}$$

gdje je

$$\begin{aligned} E_{K2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \\ E_{K1} &= \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{q}_j \\ E_{K0} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2. \end{aligned} \tag{100}$$

Očito je u skleronomnim vezama $E_{K1} = E_{K0} = 0$, pa je kinetička energija homogen kvadratni polinom poopćenih brzina.

**Hamiltonove jednadžbe.** Lagrangeove jednadžbe (77) čine sustav od $s$ običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda u poopćenim koordinatama sa $s$ nepoznatih funkcija $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Taj sustav od $s$ jednadžbi drugog reda moguće je transformirati u sustav od $2s$ jednadžbi prvog reda uvođenjem novih $s$ varijabli. Hamilton je predložio da kao nove varijable posluže poopćeni impulsi $p_1, p_2, \ldots, p_s$ koji su definirani izrazom

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{101}$$

Kako je $L = E_K - U$, a $U$ ne ovisi o $\dot{q}_i$, može se pisati

$$p_i = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i}. \tag{102}$$

Npr., ako se radi o gibanju slobodne čestice mase $m$ i ako su kao poopćene koordinate odabrane kartezijske koordinate, bit će

$$E_K = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]. \tag{103}$$

Tada se poopćeni impulsi podudaraju s pravim impulsima, odnosno količinama gibanja, tj.

$$p_x = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{104}$$

Uzme li se u obzir (97), dobit će se

$$p_k = \sum_{m=1}^{s} a_{km}\dot{q}_m + b_k. \tag{105}$$

Ako se (101) uvrsti u (82), dobit će se

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{106}$$

Hamiltonova funkcija $H$ definirana je izrazom

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L. \tag{107}$$

Prema tom izrazu očito je $H$ funkcija od $t$, $q_i$, $\dot{q}_i$ i $p_i$. Pogodnom transformacijom treba eliminirati $\dot{q}_i$ pomoću $p_i$, pa će se dobiti

$$H = H(p_i, q_i, t). \tag{108}$$

Izokronim variranjem izraza (107) dobit će se

$$\delta H = \sum_{i=1}^{s} p_i\delta\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i\delta p_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i. \tag{109}$$

Uz pomoć (101) mogu se prvi i četvrti član desne strane pokratiti. Nakon uvrštenja (106) u taj izraz slijedi

$$\delta H = \sum_{i=1}^{s} (\dot{q}_i\delta p_i - \dot{p}_i\delta q_i). \tag{110}$$

Izokronim variranjem izraza (108) dobit će se

$$\delta H = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right). \tag{111}$$

Kako je sustav holonoman, svi $\delta q_i$ i $\delta p_i$ međusobno su nezavisni, pa usporedbom izraza (110) i (111) slijedi

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \tag{112}$$

Te se jednadžbe zovu *Hamiltonove jednadžbe* ili *kanonske jednadžbe* dinamike. Hamiltonove jednadžbe u tom obliku vrijede ako je gibanje u polju konzervativnih sila. Kad djeluju disipativne sile, Hamiltonove jednadžbe imaju oblik

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = Q_i - \dot{p}_i. \tag{113}$$

Izraz za Hamiltonovu funkciju može se preinačiti, a prema (105) jest

$$\sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} b_i\dot{q}_i = 2E_{K2} + E_{K1}, \tag{114}$$

što uvršteno u (107) daje

$$H = 2E_{K2} + E_{K1} - (E_{K2} + E_{K1} + E_{K0} - U) \tag{115}$$

$$H = E_{K2} - E_{K0} + U. \tag{116}$$

Kad su veze skleronomne, tada je $E_{K0} = E_{K1} = 0$ i $E_{K2} = E_K$, pa Hamiltonova funkcija predstavlja ukupnu mehaničku energiju, tj. zbroj potencijalne i kinetičke energije. Tada je

$$H = E_K + U. \tag{117}$$

Međutim, u općem slučaju $H$ nije jednako ukupnoj mehaničkoj energiji.

Pri rješavanju mnogih problema tehničke i primijenjene mehanike Hamiltonove jednadžbe su manje prikladne nego Lagrangeove jednadžbe. Hamiltonove jednadžbe imaju veliku prednost u mnogim granama fizike, npr. statističkoj mehanici, kvantnoj mehanici, teoriji perturbacija u nebeskoj mehanici itd.

**Integral energije.** Kad Lagrangeova funkcija $L$ ne ovisi eksplicitno o vremenu $t$, postoji prvi integral koji karakterizira promjenu energije sustava. Taj se integral zove *integral energije* ili *Jacobijev integral.* Ako se svaka Lagrangeova jednadžba (82) pomnoži sa $\dot{q}_i$ i sumira, dobit će se

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i = 0. \tag{118}$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i,$$

bit će

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) = 0, \tag{119}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0. \tag{120}$$

Odatle je

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = h = \text{const.} \tag{121}$$

Kako je $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, usporedbom sa (107) vidi se da je $h = H$, tj. prvi integral jednak je Hamiltonovoj funkciji. Prema tome je

$$E_{K2} - E_{K0} + U = \text{const.} \tag{122}$$

Ako su veze skleronomne, bit će

$$E_K + U = \text{const.}, \tag{123}$$

što izražava zakon o održanju mehaničke energije.

**Cikličke koordinate.** U izrazu za Lagrangeovu funkciju ne moraju se pojaviti eksplicitno sve poopćene koordinate. One koordinate koje se ne pojavljuju eksplicitno nazivaju se *cikličkima.* Neka ima ukupno $s$ poopćenih koordinata, od kojih je $k < s$ cikličkih

$$q_1, q_2, \ldots, q_k,$$

tj. takvih da je

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{124}$$

Iz Lagrangeovih jednadžbi (82) slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{125}$$

odnosno

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \lambda_i = \text{const.} \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{126}$$

Ovi izrazi predstavljaju prve integrale Lagrangeovih jednadžbi i nazivaju se *cikličkim integralima.*

## VARIJACIONI PRINCIP MEHANIKE

**Zakoni i principi mehanike.** Opći zakoni mehanike, kao npr. zakon količine gibanja, zakon kinetičkog momenta, zakon kinetičke energije itd., izvedeni su iz Newtonovih aksioma mehanike. Oni opisuju neke, ali ne i sve karakteristike gibanja. Iz njih se ne mogu izvesti sve jednadžbe gibanja. Osim tih zakona, postoje i općenitiji zakoni koji se nazivaju principima. Da bi neki zakon mogao biti smatran principom, mora u potpunosti karakterizirati gibanje mehaničkog sustava i biti potpuno ekvivalentan svim diferencijalnim jednadžbama gibanja tog sustava. Princip mehanike može vrijediti općenito ili samo za određenu klasu sustava. Prema tome, princip u određenim uvjetima može zamijeniti aksiome mehanike.

Principi se dijele na diferencijalne i integralne. *Diferencijalni principi* odnose se na jednu proizvoljno odabranu konfiguraciju u proizvoljnom trenutku i pri tome se promatraju elementarni pomaci sustava s obzirom na odabranu konfiguraciju. Nasuprot tome, *integralni principi* razmatraju konačnu promjenu konfiguracije u konačnom intervalu vremena.

U diferencijalne principe spadaju: d'Alembert-Lagrangeov princip, Gaussov princip najmanje prinude, Hertzov princip gibanja po putanji najmanje zakrivljenosti i dr. Integralni principi jesu Hamiltonov princip najmanjeg djelovanja i Maupertius-Lagrangeov princip stacionarnog djelovanja.

**Konfiguracijski prostor.** Položaj mehaničkog sustava sa $n$ čestica određen je sa $3n$ koordinata. Po tri koordinate određuju točku $P_i$ koju zauzima u danom trenutku čestica $m_i$. Skup $3n$ koordinata može se shvatiti kao položaj samo jedne točke $P$ u $3n$-dimenzionalnom prostoru koji se naziva *konfiguracijskim prostorom.* Svakoj konfiguraciji sustava odgovara jedan položaj točke $P$. Pri gibanju pojedinih točaka sustava mijenjaju se neke od $3n$ koordinata točke $P$, pa ona mijenja svoj položaj, tj. opisuje putanju u konfiguracijskom prostoru. Analogno običnom prostoru uvodi se pojam konfiguracijskog vektora položaja, brzine, ubrzanja itd. Konfiguracijski vektor položaja ima $3n$ skalarnih komponenata. Prema tome, matrica tog vektora ima $3n$ skalarnih elemenata, odnosno $n$ vektorskih elemenata. Slično vrijedi i za vektor brzine i vektor ubrzanja u konfiguracijskom prostoru, tj.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) \\ \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_n) \\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = (\ddot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_2, \ldots, \ddot{\vec{r}}_n). \end{aligned} \tag{127}$$

Konfiguracijski prostor olakšava praćenje gibanja sustava u analogiji sa zornim gibanjem jedne čestice u običnom trodimenzionalnom prostoru.

**D'Alembert-Lagrangeov princip.** D'Alembert-Lagrangeov princip glasi: Ako se mehanički sustav giba i ako je podvrgnut idealnim dvostranim vezama, zbroj virtualnih radova aktivnih sila i sila inercije jednaka je nuli, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{128}$$

Za jednostrane veze umjesto izraza (128) vrijedi izraz

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i \leqq 0. \tag{129}$$

D'Alembert-Lagrangeov princip ujedinjuje d'Alembertov princip i princip virtualnih radova. Izraz (129) zove se još i *opća jednadžba dinamike.*

**Gaussov princip najmanje prinude.** Gaussova prinuda $Z$ jest mjera odstupanja gibanja zadanog sustava koji je podvrgnut vezama od gibanja takva istog sustava, ali s odstranjenim vezama. U oba primjera uzima se ista početna konfiguracija, iste početne brzine i iste aktivne sile. Čestice vezanog sustava gibaju se pod djelovanjem aktivnih sila $\vec{F}_i$ i reakcija veza $\vec{F}_{Ri}$, dok se čestice slobodnog sustava gibaju samo pod djelovanjem aktivnih sila $\vec{F}_i$.

Neka u nekom trenutku jedna čestica sustava mase $m_i$ zauzima položaj $P$ i neka ima početnu brzinu $\vec{v}_i$. Pod djelovanjem rezultante aktivnih sila $\vec{F}_i$ i rezultante reakcije veza $\vec{F}_{Ri}$ čestica će dobiti ubrzanje $\vec{a}_i$ i u vrlo kratkom intervalu vremena $\Delta t$ prijeći će put $\overrightarrow{PP_1}$ (sl. 14), gdje je

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{v}_i \Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_i \Delta t^2. \tag{130}$$

Kad bi čestica bila slobodna, prešla bi put $\overrightarrow{PP_2}$

$$\overrightarrow{PP_2} = \vec{v}_i \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_i}{m_i}\Delta t^2. \tag{131}$$

Razlika prijeđenog puta iznosi

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{PP_2} - \overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}_i}{m_i} - \vec{a}_i\right)\Delta t^2. \tag{132}$$

Kao mjeru odstupanja prinudnog gibanja od slobodnog gibanja čestice Gauss je definirao veličinu proporcionalnu kvadratu $\overrightarrow{P_1P_2}$ i tu veličinu nazvao prinudom

$$Z_i = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\vec{F}_i}{m_i} - \vec{a}_i\right)^2, \tag{133}$$

gdje je $Z_i$ prinuda jedne čestice. Prinuda čitavog sustava jednaka je zbroju prinuda pojedinih čestica, tj.

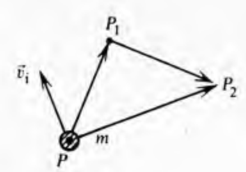
$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\vec{F}_i}{m_i} - \vec{a}_i\right)^2. \tag{134}$$

Gaussov princip najmanje prinude glasi: Stvarno gibanje sustava u svakom trenutku razlikuje se od kinematički mogućih gibanja, koja počinju iz iste konfiguracije i s istim početnim brzinama, po tome što je za stvarno gibanje prinuda minimalna, tj.

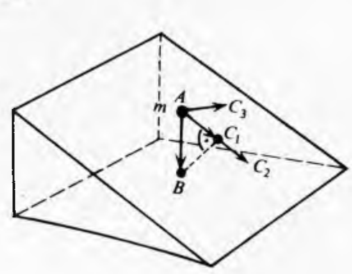
$$\delta Z = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i)\delta a_i = 0. \tag{135}$$

Kako su koordinate i brzine konstantne, varira se samo ubrzanje. U skalarnom obliku Gaussov princip glasi

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta\ddot{y} + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i = 0. \tag{136}$$




Sl. 14. Definicija Gaussove prinude




Sl. 15. Primjena Gaussova principa na gibanje niz kosinu

Primjena Gaussova principa ilustrirana je na primjeru čestice koja se giba niz kosinu (sl. 15). Neka su početni položaj i početna brzina čestice $A$ jednaki nuli. Kad bi čestica bila slobodna, prešla bi put $\overline{AB} = \frac{g}{2}\Delta t^2$. Vezana čestica je prisiljena da se giba po kosini. Ima beskonačno mnogo kinematički mogućih pomaka. Na slici je označeno nekoliko: $\overline{AC}_1 = \frac{a_1}{2}\Delta t^2$, $\overline{AC}_2 = \frac{a_2}{2}\Delta t^2$ itd. Među svim tim pomacima pravi je onaj za koji je prinuda, tj. odrezak $\overline{BC}_1$ najmanji. Ako se iz točke $B$ spusti okomica na kosinu, dobije se točka $C_1$. Očito je od svih odrezaka $\overline{BC}_1$ najmanji, tj. stvarno se gibanje zbiva ubrzanjem $a_1$ tako da je

$$\overline{BC}_1 = \overline{AB}\sin\alpha, \tag{137}$$

odnosno

$$\frac{a}{2}\Delta t^2 = \frac{g}{2}\Delta t^2 \sin\alpha. \tag{138}$$

Odatle je pravo ubrzanje $a = g\sin\alpha$.

**Hertzov princip putanje najmanje zakrivljenosti.** Ako je mehanički sustav podvrgnut skleronomnim vezama i ako na njega ne djeluju aktivne sile, stvarno gibanje zbiva se konstantnom brzinom i od ostalih kinematički mogućih gibanja razlikuje se po tome što putanja stvarnog gibanja ima najmanju zakrivljenost. Misli se na brzinu i putanju u konfiguracijskom $3n$-dimenzionalnom prostoru.

Ako je čestica prisiljena da se giba po glatkoj površini i ako na česticu ne djeluju aktivne sile (mora biti isključena i gravitacija), čestica će se gibati po *geodezijskoj liniji*, tj. po *putanji najmanje zakrivljenosti.*

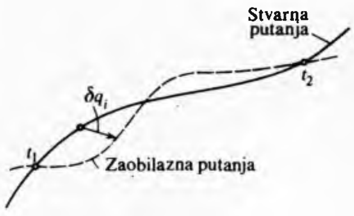
**Hamiltonov princip najmanjeg djelovanja.** Hamiltonovim djelovanjem $S$ naziva se određeni integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t, \tag{139}$$

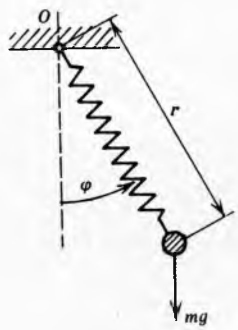
gdje je $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ Lagrangeova funkcija. Hamiltonov princip uspoređuje Hamiltonovo djelovanje na stvarnom putu s Hamiltonovim djelovanjem na zaobilaznim putovima, pri čemu zaobilazna putanja ima istu početnu i krajnju točku kroz koju čestica ili sustav prolaze u istim trenucima $t_1$ i $t_2$ (sl. 16). Ako se radi o gibanju jedne čestice, putanje na sl. 16 odnose se na zorne putanje u običnom trodimenzionalnom prostoru, a ako se radi o gibanju sustava, radi se o hiperkrivulji u konfiguracijskom $3n$-dimenzionalnom prostoru. Budući da se u trenucima $t_1$ i $t_2$ obje putanje podudaraju, izokrone varijacije poopćenih koordinata identički su jednake nuli, tj.

$$\delta q_i(t_1) = 0, \qquad \delta q_i(t_2) = 0. \tag{140}$$

Duljine prave i zaobilazne putanje nisu jednake, a kako sustav po objema putanjama prelazi za isto vrijeme $t_2 - t_1$, poopćene brzine koje se odnose na isti trenutak prave i zaobilazne putanje jesu različite, pa je i kinetička energija u istim trenucima različita, a različite su i potencijalne energije.




Sl. 16. Stvarna i zaobilazna ili uspoređbena putanja u Hamiltonovu principu




Sl. 17. Čestica mase $m$ vezana oprugom giba se u vertikalnoj ravnini

Uza sva ta ograničenja Hamiltonov princip za holonomne sustave glasi: gibanje po stvarnoj putanji razlikuje se od gibanja po bliskoj zaobilaznoj putanji po tome što Hamiltonovo djelovanje ima stacionarnu vrijednost u usporedbi s djelovanjem po zaobilaznim putanjama, ili izraženo na drugi način, samo je pri stvarnom gibanju izokrona varijacija Hamiltonova djelovanja jednaka nuli, tj.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = 0. \tag{141}$$

Hamiltonov princip u tom obliku vrijedi samo ako su sve sile konzervativne. Ako sile nisu konzervativne, bit će

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_\mathrm{K} + \delta A)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (\delta E_\mathrm{K} - Q_i\,\delta q_i)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{142}$$

Hamiltonov princip može se proširiti i na linearne neholonomne veze.

*Primjer.* Kuglica mase $m$ obješena je na oprugu konstante $c$ (sl. 17). Gibanje je ograničeno na ravninu slike. Lagrangeova funkcija sustava iznosi

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2} c(r - r_0)^2, \tag{143}$$

gdje je $r_0$ duljina nenapete opruge. Hamiltonov princip daje

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{r}\,\delta\dot{r} + mr\dot{\varphi}^2\,\delta r + mr^2\dot{\varphi}\,\delta\dot{\varphi} + mg\,\delta r\cos\varphi -$$
$$- mgr\sin\varphi\,\delta\varphi - c(r - r_0)\,\delta r]\,\mathrm{d}t. \tag{144}$$

Kako je

$$m\dot{r}\,\delta\dot{r}\,\mathrm{d}t = m\dot{r}\,\mathrm{d}(\delta r) = \mathrm{d}(m\dot{r}\,\delta r) - m\,\delta r\,\ddot{r}\,\mathrm{d}t$$

i

$$mr^2\dot{\varphi}\,\delta\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi}\,\delta\varphi) - \delta\varphi\,\frac{\mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t} =$$
$$= \mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi}\,\delta\varphi) - \delta\varphi(mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi})\,\mathrm{d}t,$$

bit će

$$\int_{t_1}^{t_2} \{[m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + c(r - r_0)]\,\delta r + [mr\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} +$$
$$+ mgr\sin\varphi]\,\mathrm{d}\varphi\}\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} [\mathrm{d}(m\dot{r}\,\delta r) + \mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi}\,\delta\varphi)]\,\mathrm{d}t = 0. \tag{145}$$

Drugi integral jednak je nuli, jer je za $t_1$ i $t_2$ $\delta r = \delta\varphi = 0$. Kako su $\delta r$ i $\delta\varphi$ nezavisni, prvi integral jednak je nuli za sve $\delta r$ i $\delta\varphi$ samo ako je

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + c(r - r_0) = 0 \tag{146}$$

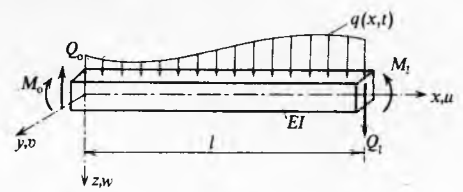
i

$$mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0.$$

Izraz (146) predstavlja jednadžbe gibanja sustava sa slike 17.

Hamiltonov princip ima veliko teorijsko značenje u klasičnoj mehanici, a još više u kvantnoj mehanici, teoriji relativnosti i drugim granama fizike. Međutim, taj princip ne olakšava rješavanje konkretnih problema vezanih uz diskretne sustave. Hamiltonov princip u posljednje vrijeme sve se više upotrebljava pri rješavanju problema iz dinamike kontinuiranih sustava: štapova, ploča, ljuski itd.

*Primjer.* Na elastični štap konstantnog presjeka (sl. 18) djeluje dinamičko kontinuirano opterećenje $q = q(x, t)$. Rubni uvjeti za sada nisu određeni.




Sl. 18. Poprečne vibracije štapa

Potencijalna energija deformacije štapa iznosi (v. *Nauka o čvrstoći*)

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} w''\mathrm{d}x, \tag{147}$$

dok je kinetička energija

$$E_\mathrm{K} = \int_0^l \frac{\varrho}{2} \dot{w}^2\,\mathrm{d}x, \tag{148}$$

gdje je $\varrho$ linijska gustoća nosača, tj. masa po jedinici duljine, a

$$w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad w'' = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}, \quad \dot{w} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \quad \text{itd.}$$

Potencijal vanjskog opterećenja jest

$$U_\mathrm{E} = -\int_0^l q(x,t)w(x,t)\,\mathrm{d}x + Q_0 w(0,t) +$$
$$+ M_0 w'(0,t) - Q_l w(l,t) - M_l w'(l,t). \tag{149}$$

Hamiltonov princip sada glasi

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_\mathrm{E} - E_\mathrm{K})\mathrm{d}t = 0, \tag{150}$$

odnosno

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[ \frac{EI}{2}(w'')^2 - \frac{\varrho}{2}\dot{w}^2 - q(x,t)w(x,t) \right] \mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + Q_0 w(0,t) + M_0 w'(0,t) - Q_l w(l,t) - M_l w'(l,t) \right\} \mathrm{d}t = 0. \tag{151}$$

Kad se provede variranje podintegralne funkcije, dobit će se

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \int_0^l [EIw''\delta(w'') - \varrho w'\delta\dot{w} - q(x,t)\delta w]\mathrm{d}x + Q_0\delta w(0,t) +$$

$$+ M_0\delta w'(0,t) - Q_l\delta w(l,t) - M_l\delta w'(l,t)\}\mathrm{d}t = 0. \tag{152}$$

Kako je $\delta(w'') = (\delta w)''$ i $\delta\dot{w} = \frac{\partial(\delta w)}{\partial t}$, nakon parcijalnog integriranja dobit će se

$$\int_{t_1}^{t_2} [\int_0^l EIw''\delta(w'')]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \{[EIw''\delta w']_0^l -$$

$$- [(EIw'')'\delta w]_0^l + \int_0^l (EIw'')''\delta w\,\mathrm{d}x\}\mathrm{d}t. \tag{153}$$

Isto tako je

$$\int_{t_1}^{t_2} [\int_0^l \varrho\dot{w}\delta(w)\mathrm{d}x]\mathrm{d}t = \int_0^l \{[\varrho\dot{w}\delta w]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \varrho\ddot{w}\delta w\,\mathrm{d}t\}\mathrm{d}x. \tag{154}$$

Prema definiciji je $\delta w = 0$ za trenutke $t_1$ i $t_2$, pa prvi član desne strane izraza (153) iščezava, tako da nakon uvrštenja (153) i (154) u (152) slijedi

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \int_0^l [(EIw'')'' + \varrho\ddot{w} - q(x,t)]\delta w\,\mathrm{d}x + [Q_0 + (EIw'')']_{x=0}\delta w(0,t) +$$

$$+ [-Q_l - (EIw'')']\delta w(l,t) + [M_0 - EIw'']\delta w'(0,t) +$$

$$+ [-M_l - EIw'']_{x=l}\delta w'(l,t)\}\mathrm{d}t = 0. \tag{155}$$

Kako se $\delta w$ može odabrati proizvoljno, da bi izraz (155) za svako $\delta w$ bio jednak nuli, mora biti

$$(EIw'')'' + \varrho\ddot{w} = q(x,t) \tag{156}$$

i

$$\left.\begin{array}{lll} Q_0 = (EIw'')'_{x=0} & \text{ili} & \delta w(0,t) = 0 \\ Q_l = (EIw'')'_{x=l} & \text{ili} & \delta w(l,t) = 0 \\ M_0 = (EIw'')_{x=0} & \text{ili} & \delta w'(0,t) = 0 \\ M_l = (EIw'')_{x=l} & \text{ili} & \delta w'(l,t) = 0. \end{array}\right\} \tag{157}$$

Izraz (156) predstavlja diferencijalnu jednadžbu fleksijskih vibracija štapa. Izrazi (157) predstavljaju rubne uvjete. Očito je da na svakom kraju štapa mora biti zadana bilo poprečna sila bilo pomak $w$, ali ne oboje istodobno. Isto tako treba biti zadan moment savijanja $M$ ili kutni pomak $w'$, ali ne oba istodobno.

**Princip najmanjeg Lagrangeovog djelovanja.** Lagrangeovo djelovanje $A$ definirano je izrazom

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2E_\mathrm{K}\,\mathrm{d}t. \tag{158}$$

U principu najmanjeg Lagrangeova djelovanja uspoređuje se gibanje po stvarnoj i zaobilaznoj putanji koje se obavlja pri konstantnoj ukupnoj energiji $E_\mathrm{K} + U = \text{const.}$ Kako je energija konstantna, moraju i poopćene brzine biti konstantne, a jer su putovi različiti, mora i interval vremena biti različit. Prema tome, na krajevima putanje izokrone varijacije poopćenih koordinata nisu jednake nuli. Umjesto toga uzima se da su pune varijacije poopćenih koordinata na krajevima obiju putanja jednake nuli, tj.

$$(\Delta q_i)_{t=t_1} = 0 \quad \text{i} \quad (\Delta q_i)_{t=t_2} = 0. \tag{159}$$

Pod svim tim uvjetima taj princip glasi: Puna varijacija Lagrangeova djelovanja jednaka je nuli, tj.

$$\delta A = 0. \tag{160}$$

Osim obrađenih principa mehanike formulirani su i drugi principi, a mogu se formulirati i novi ili već formulirani poopćiti na nove klase sustava.

LIT.: *R. Dugas,* Histoire de la mechanique. Dunod, Paris 1950. — *H. Goldstein,* Classical mechanics. Addison Wesley, Reading 1951. — *C. L. Siegel,* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Springer Verlag, Berlin 1956. — *Ф. Гантмахер,* Лекции по аналитической механике. Наука, Москва 1960. — *C. W. Kilmister,* Hamiltonian dynamics. John Wiley, New York 1964. — *T. Anđelić, R. Stojanović,* Racionalna mehanika. Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1965. — *Z. Janković,* Teorijska mehanika. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1966. — *C. Lanczos,* Variational principles of mechanics. University of Toronto Press, Toronto 1966. — *D. A. Wells,* Theory and problems of Lagrangian dynamics. McGraw-Hill, New York 1967. — *Н. В. Бутенин,* Введение в аналитическую механику. Наука, Москва 1971. — *D. Bazjanac,* Tehnička mehanika III, Dinamika. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1974. — *В. В. Добронравов,* Основы аналитической механики. Высшая школа, Москва 1976.

*I. Alfirević*

**MEHANIKA FLUIDA,** znanost o mehaničkom ponašanju fluida. Prema stanju fluida razlikuju se: *statika fluida,* koja se bavi zakonima ravnoteže i tlakova u fluidima u mirovanju, *kinematika fluida,* koja se bavi zakonima gibanja fluida, i *dinamika fluida,* koja se bavi silama koje djeluju na fluide, gibanjima koja nastaju djelovanjem tih sila i interakcijama između čvrstih tijela i fluida u gibanju. Prema vrsti fluida razlikuju se dvije osnovne grane mehanike fluida: *aerodinamika,* znanost o ravnoteži i gibanjima stlačivih fluida (zraka, plinova), te *hidrodinamika,* znanost o ravnoteži i gibanjima nestlačivih fluida (vode, kapljevina).

Arheološki nalazi, rijetki izvorni crteži i stare legende dokazuju da je već u prethistorijsko doba čovjek iskustvom pronalazio praktična rješenja brojnih problema mehanike fluida. Izumio je splav, čamac i brod, te veslo i jedro za pogon tih plovila, naučio gradnjom kanala i nasipa kontrolirati vodene tokove, navodnjavati i odvodnjavati zemlju, te sprečavati poplave, izumio je strelicu s repnim stabilizatorom, kovački mijeh, primitivno vodeničko kolo, primitivnu vjetrenjaču itd.

Prva zapisana tumačenja nekih pojava mehanike fluida potječu od grčkih filozofa starog vijeka. U jednoj se od svojih rasprava Aristotel (←384. do ←322) bavi gibanjem tijela kroz vodu i zrak i zaključuje da je otpor koji medij pruža gibanju tijela proporcionalan gustoći medija. Arhimed iz Sirakuze (←287. do ←212) smatra se osnivačem hidrostatike. On je postavio tri osnovna poučka o uzgonu i istisnini tijela koje pluta na površini vode ili je uronjeno u vodu, te teoriju stabilnosti sfernog segmenta koji pluta. Ktesibije iz Aleksandrije (krajem ←III st.) izumio je vodeni sat, hidrauličke orgulje, zračnu pušku i vatrogasnu dvostapnu crpku. Heron iz Aleksandrije (između ←250. i ←150) ostavio je zapise o pneumatici, razradio teoriju sifona, prvi opisao mlazni pogon pomoću vodene pare i prikazao postupak kojim se može proračunati količina vode koja protječe kroz cijev. Filon iz Bizanta (←II st.) bavio se pneumatikom i primjenom sifona za održavanje konstantne razine tekućine u tlačnim komorama.

Znanje o mehanici fluida Rimljani su preuzeli od Grka, ali nisu doprinijeli daljem razvoju te znanosti. Rimljani su doduše izgradili velike vodovodne sustave i kanalizaciju u gradovima, te poboljšali oblik brodskog trupa, ali to su sve bile samo primjene grčkih spoznaja i teorija. Jedini važniji pisani radovi s područja mehanike fluida iz rimskog vremena potječu od Marka Vitruvija Poliona (←I st.), koji je kompilirao tadašnja grčka znanja o hidraulici, i Seksta Julija Frontinia (40—103), koji je opisao metode raspodjele vode.

Nakon propasti Rimskog Carstva u kršćanskoj Evropi znanost je skoro tisuću godina stagnirala, ili čak i nazadovala. Grčke su spoznaje o mehanici fluida zaboravljene, a velike su rimske hidrogradnje zapuštene ili uništene. U arapskom je svijetu nastavljen razvoj hidrauličkih strojeva i naprava; usavršeno je vodeničko kolo i vjetrenjača, izumljeni su neki novi hidraulički automati, poboljšani su vodovodni uređaji itd. Neke od tih pronalazaka Mauri su donijeli u Španjolsku, a neke su, kao npr. usavršeno vodeničko kolo, križari prenijeli u Evropu.

U XV st. renesansa je oslobodila umjetnost i znanost od skolastičkih stega, pa se i mehanika fluida ponovno počinje razvijati. Na osnovi promatranja prirode i fizikalnih pokusa Leonardo da Vinci (1452—1519) opisuje u svojim radovima mnoge pojave hidrostatike, hidrodinamike i mehanike leta. Prvi je postavio princip zakona kontinuiteta, a približno je točno rastumačio relativno gibanje, prirodu valova na površini vode, putanju slobodnog mlaza kapljevine, raspodjelu brzina u vrtložnom strujanju, protjecanje vode u otvorenim kanalima, stvaranje virova u području odjeljivanja strujnica itd. Otkrio