

Izvori zračenja, dipolni momenti atoma u promatranom slučaju, množeni su skalarno s elektromagnetskim poljem, što je skalarna veličina, pa je to jamstvo da se ukupni angularni moment atoma i zračenja ne mijenja. To je sadržano u matricnom elementu dipola, u kojemu je razlika projekcije impulsa vrtnje početnog i konačnog stanja atoma  $m_i - m_f = \Delta m = -\mu$  jednaka po iznosu i suprotna po smjeru projekcije spina fotona  $\mu$ . Zeemanova komponenta s višom frekvencijom uvijek ima  $\Delta m = +1$ , a  $\mu = -1$ , pa je desno cirkularno polarizirana. Relacija  $m_i + \mu = m_f$ , koju zadovoljavaju projekcije angularnih momenata atoma i zračenja, zove se izborno pravilo za magnetske kvantne brojeve i strogo vrijedi. Zračenje povezano s prijelazima  $\Delta m = 0$  polarizirano je paralelno, a ono sa  $\Delta m = \pm 1$  okomito je na vanjsko polje (os kvantizacije).

Matrični element

$$\langle \alpha' j' m' | e r Y_l^m | \alpha j m \rangle = (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & l & j \\ -m' & m & m \end{pmatrix} \langle \alpha' j' || e r Y_l || \alpha j \rangle \quad (262)$$

može se faktorizirati u dio koji ovisi o magnetskim kvantnim brojevima preko koeficijena vektorskog zbrajanja angularnih momenata i u reducirani matrični element. Komponente angularnih momenata zbrajaju se skalarno, a angularni momenti vektorski, pa su različiti od nule za stroga izborna pravila:  $-m' + \mu + m = 0$  i  $j' + j \geq l \geq |j' - j|$  ili  $\vec{j}' + \vec{j} + \vec{l} = 0$ . (263)

Reducirani matrični element odražava složenost stanja, vezanje angularnih momenata i ovisi o radialnoj gustoći atoma. Reducirani matrični element može približno zabraniti i neke prijelaze koji su dopušteni strogim izbornim pravilima.

Za normalni Zeemanov efekt vidi se da će, gledano u smjeru polja, postojati dvije linije sa  $\Delta m = \pm 1$ . Ona veće frekvencije sa  $\Delta m = 1$  desno je cirkularno polarizirana, a ona manje frekvencije sa  $\Delta m = -1$  lijevo je cirkularno polarizirana. Za  $\vartheta > 0$  pojavit će se tri linije s eliptičkom polarizacijom sve do  $\vartheta = \pi/2$ . Tada je od triju linija ona sa  $\Delta m = 0$  polarizirana paralelno s magnetskim poljem i one sa  $\Delta m = \pm 1$  polarizirane su okomito na polje.

Budući da je suma apsolutnog kvadrata matričnog elementa po magnetskim kvantnim brojevima početnog ( $m$ ) i konačnog ( $m'$ ) stanja neovisna o magnetskom kvantnom broju operatora ( $\mu$ ), dobiva se

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega^3}{hc^3} \sum_{m, m'} |\langle \alpha' j' m' | e r Y_l^m | \alpha j m \rangle|^2 \frac{4\pi}{3} [\sin^2 \vartheta + 1 + \cos^2 \vartheta] d\Omega = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^3}{hc^3} |\langle \alpha' j' || e r || \alpha j \rangle|^2.$$

Dobiva se isti rezultat kao i prije. Za  $\Delta E \approx 10^{-8}$  eV dobiva se  $\tau \approx 10^{-8}$  s.

### Zaključak

Izlaganje razvoja i sadašnjeg stanja kvantne mehanike pokazuje da je kvantna mehanika plod napora da se, u krajnoj liniji, sistematski prouče i ugrade u teoriju posljedice postojanja univerzalne prirodne konstante  $h$ , koja se mora odrediti iz iskustva, jer se ne može izraziti pomoću drugih konstanti. Konstanta  $h$  povezuje valne i čestične, dakle kontinuirane i diskretne mikropojave ( $h/\lambda = p$  i  $h\nu = E$ ) u jednu neproturječnu cjelinu, nezamislivu u makroskopskim mjerilima. Time je omogućeno povezivanje pojedinačnih i globalnih karakteristika čestica i mnoštva s njihovim spektroskopskim svojstvima, u čemu je zatajila klasična fizika. Matematički je to izraženo u komutacijskim pravilima  $qp - pq = i\hbar$  i relacijama neodređenosti  $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ . Formulirana teorija je linearna, a valna funkcija jednoznačna i konačna u cijelom prostoru.

Valna funkcija, tj. rješenje kvantnomehaničkog problema (uz određene početne i rubne uvjete) općenito, kompleksna je veličina, pa joj se za razliku od klasične staze, električnog i magnetskog polja klasične fizike, ne može pridijeliti isti stupanj realnosti (zornosti). Unatoč tome pomoću valne funkcije može se predvidjeti frekvencija pojedinih rezultata pri mjerenju određenih fizikalnih veličina za to prikladnim uređajima (u

određenom okolišu). Time u kvantnoj mehanici pojava i promatrač postaju nerazdvojno povezani u jednu cjelinu.

Kvantnomehaničke korelacije, tipične za povezivanje izvjesnih svojstava dijelova kvantnomehaničkih sustava, ostaju sačuvane i nakon separacije tih dijelova, svjedočeći o globalnom karakteru valne funkcije.

LIT.: A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1924. i 1939. — E. Schrödinger, *Abhandlungen zur Wellenmechanik*. Verlag von Johan Ambrosius Barth, Leipzig 1927. — M. Born, P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin 1930. — L. de Broglie, *Ondes et corpuscules*. Hermann et C<sup>ie</sup>, Paris 1930. — W. Pauli, *Handbuch der Physik XXIV/1*. Springer-Verlag, Berlin 1933. — W. Heisenberg, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Hirzel, Leipzig 1942. — P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*. Clarendon Press, Oxford 1947. — Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, часть I*. ОГИЗ, Москва 1948. — D. Bohm, *Quantum theory*. Prentice-Hall Inc., New York 1952. — G. Ludwig, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954. — E. U. Condon, G. H. Shortley, *Theory of atomic spectra*. University Press, Cambridge 1957. — N. Bohr, *Atomic physics and human knowledge*. John Wiley, New York 1958. — H. A. Kramers, *Quantum mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1958. — A. Messiah, *Mécanique quantique*, vol. I et II. Dunod, Paris 1958. — D. J. Thouless, *The quantum mechanics of many-body systems*. Academic Press, New York-London 1961. — S. I. Tomonaga, *Quantum mechanics*, vol. I and II. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1962–1966. — M. Born, *Atomic physics*. Blackie and Son Limited, London-Glasgow 1963. — А. С. Давидов, *Квантовая механика*. Гос. издат. физико-математической лит., Москва 1963. — Э. В. Штолский, *Атомная физика I*. Гос. издат. физико-математической лит., Москва 1963. — The Feynman lectures on physics, vol. I, II, III. Addison-Wesley, Palo Alto-London 1963–64. — H. A. Bethe, *Intermediate quantum mechanics*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1964. — N. Bohr, *Atomphysik und menschliche Erkenntnis II*. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1966. — B. L. van der Waerden, *Sources of quantum mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967. — E. H. Wichmann, *Quantum physics*, Berkeley physics course, vol. IV. McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London 1967. — L. I. Schiff, *Quantum mechanics*. McGraw-Hill Book Company, Kōgakusha Company Ltd., New York-Toronto-London 1968. — I. Supek, *Teorijska fizika i struktura materije, I i II dio*. Školska knjiga, Zagreb 1974–1977. — I. Supek, *Filozofija znanosti i humanizam*. Liber, Zagreb 1979.

G. Alaga

**MEHANIKA LETA**, analiza, opis i ispitivanje letenja ili gibanja letjelica u zračnom i gravitacijskom prostoru da bi se odredile matematičke relacije potrebne pri projektiranju letjelica, kako bi se osigurala njihova poželjna svojstva i odredilo njihovo ponašanje u svim fazama leta. U tim relacijama pojavljuju se mase letjelice i raspodjela tih masa, interakcije letjelice i okolice, brzine i ubrzanja, pa je pomoću njih moguće razviti računске postupke za projektiranje novih tipova letjelica s unaprijed definiranim karakteristikama. Interakcija s okolišnim zrakom ovisi o obliku letjelice, a sile se zbog tih interakcija pojavljuju u relacijama mehanike leta. Pomoću tih relacija, prema svojstvima koje treba da ima, mogu se odrediti i parametri vanjskog oblika letjelice.

Interakcija letjelice s okolišnim zrakom proučava se u aerodinamici, a u mehanici leta ona se uzima kao poznato opterećenje zadano glavnim vektorima aerodinamičke sile i momenta.

Mehanika leta može se razvrstati na *kinematiku leta*, *dinamiku leta*, te *upravljanje i stabilnost leta*.

### KINEMATIKA LETA

U kinematici leta definiraju se: referentni koordinatni sustavi, transformacije temeljnih vektora pri prijelazu iz jednog u drugi koordinatni sustav, te transformacije kinematičkih relacija vektora položaja, brzine, ubrzanja, kutnih brzina i kutnih ubrzanja letjelica uopće, a posebno za određene ciljeve letenja kada se radi vođenja određuju potrebne koordinate letjelica.

**Koordinatni sustavi u mehanici leta.** U analizama gibanja letjelica upotrebljavaju se različiti koordinatni sustavi, nekad radi jednostavnijega formalnog opisa, a često zbog toga što su u početku razvoja mehanike leta neki sustavi bili najprikladniji za tadašnje potrebe i mogućnosti proračuna.

Položaj letjelica u prostoru određuje se trima linijskim i trima kutnim koordinatama. Linijske koordinate određuju po-

ložaj težišta letjelice, dok kutne koordinate određuju orijentaciju letjelice.

Sustavi koji su vezani na Zemlju u mehanici leta nazivaju se *geodetskim* koordinatnim sustavima, koji su vezani na težište i tijelo letjelice *dinamičkima*, koji su vezani na težište, brzinu i jednu od ravnina letjelice *aerodinamičkima*, a oni koji su vezani na težište i brzinu letjelice te na zemaljsku okomitu ravninu *kinematičkima*.

*Geodetski koordinatni sustav* pravokutni je i desni sustav vezan na Zemlju, s ishodištem u težištu letjelice prije polijetanja te s koordinatnim osima:  $x_0$  u pravcu i smjeru horizontalne komponente početne brzine;  $y_0$  okomita na  $x_0$ , usmjerena od Zemlje;  $z_0$  okomita na ravninu određenu osima  $x_0$  i  $y_0$ , a usmjerena tako da čini desni sustav.

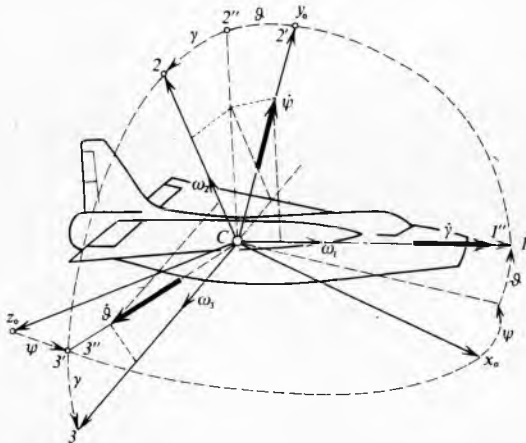
*Dinamički koordinatni sustav* pravokutni je i desni sustav vezan na tijelo letjelice, s ishodištem u njezinu težištu i s koordinatnim osima: 1 uzdužna glavna središnja os inercije usmjerena prema prednjem dijelu letjelice; 2 glavna središnja os inercije koja je pri polijetanju najbliža okomici na os 1 i koja je usmjerena od Zemlje; 3 glavna središnja os inercije koja s osima 1 i 2 tvori desni pravokutni sustav.

*Aerodinamički koordinatni sustav* pravokutni je i desni sustav vezan na brzinu i jednu ravninu simetrije letjelice, s ishodištem u njezinu težištu i s koordinatnim osima:  $x$  u pravcu i smjeru vektora brzine letjelice s obzirom na okolicu;  $y$  okomita na  $x$  u jednoj od ravnina simetrije i usmjerena od Zemlje;  $z$  okomita na ravninu određenu osima  $x$  i  $y$ , a usmjerena da tvori desni sustav.

*Kinematički koordinatni sustav* pravokutni je i desni sustav vezan na brzinu i vertikalnu ravninu, s ishodištem u težištu letjelice i s koordinatnim osima:  $\xi$  u pravcu i smjeru vektora brzine letjelice;  $\eta$  okomita na os  $\xi$  u vertikalnoj ravnini i usmjerena od Zemlje prije polijetanja;  $\zeta$  okomita na ravninu određenu osima  $\xi$  i  $\eta$ , a usmjerena tako da tvori desni sustav.

**Odnosi koordinatnih sustava.** Položaj letjelice u prostoru i promjene položaja mogu se odrediti samo kad se definira sustav kutova pomoću kojih će se mjeriti odnosi jednoga koordinatnog sustava prema drugome ili, općenito, prema zemaljskom sustavu kao referentnom, a nerijetko i inercijskom sustavu kada kretanje Zemlje nema većeg utjecaja na opis gibanja letjelice.

*Geodetski i dinamički sustavi.* Na sl. 1 oznake su kutova koji određuju odnos geodetskog i dinamičkog koordinatnog sustava. Ti se kutovi zovu:  $\psi$  kut skretanja,  $\vartheta$  kut penjanja i  $\gamma$  kut valjanja.



Sl. 1. Međusobni odnos geodetskog i dinamičkog koordinatnog sustava

Iz sl. 1 vidi se da kut skretanja  $\psi$  nastaje rotacijom dinamičkog sustava oko vertikale, kut penjanja  $\vartheta$  okretanjem oko osi 3', dok kut valjanja  $\gamma$  obrtanjem oko uzdužne dinamičke osi 1. Komponente kutnih brzina što odgovaraju opisanim rotacijama određene su pomoću derivacija kutova  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  i  $\dot{\gamma}$ .

Vektori, kao veličine neovisne o izboru koordinatnog sustava, mogu se izraziti komponentama u različitim sustavima.

Stoga je potrebno odrediti postupke transformacija koordinata kada se treba prijeći iz jednog sustava u drugi.

Pri rotaciji sustava za kut skretanja  $\psi$  (prva rotacija), izmijenit će se komponente nekog vektora  $\overline{CP} = \vec{a}$ . Prema oznakama na sl. 2 bit će

$$\vec{a} = a_{x_0} \vec{g}_1 + a_{y_0} \vec{g}_2 + a_{z_0} \vec{g}_3 \quad (1)$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{d}'_1 + a_2 \vec{d}'_2 + a_3 \vec{d}'_3 \quad (2)$$

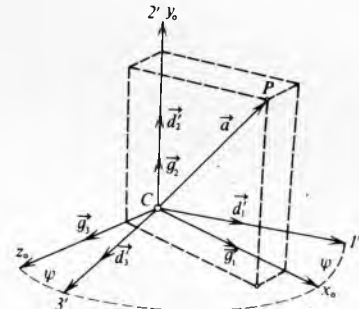
Ortovi geodetskog sustava obilježeni su sa  $\vec{g}_1$ ,  $\vec{g}_2$  i  $\vec{g}_3$ , dok su ortovi dinamičkog sustava  $\vec{d}'_1$ ,  $\vec{d}'_2$  i  $\vec{d}'_3$ , a crtica (') desno gore uz ort označuje da je sustav zakrenut za jedan od triju kutova koji određuju odnos između dva koordinatna sustava (tzv. prva rotacija), dvocrtica (") označuje rotaciju za dva od tih kutova (tzv. druga rotacija), a trocrtica (""') rotaciju za sva tri kuta (tzv. treća rotacija). U matricnom zapisu vektori se pišu pomoću *baznih redaka* i *baznih stupaca*, s komponentama u pripadnom koordinatnom sustavu. Bazni redak je označen crtom ispod slovnog simbola i oznakom T u desnom gornjem kutu, a bazni stupac samo crtom ispod slovnog simbola. Slovo T na mjestu eksponenta slovnog simbola jest oznaka za transpiriranje. Tako se bazni redak geodetskog sustava, odnosno dinamičkog sustava nakon prve rotacije, piše:

$$\underline{g}^T = [\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3], \quad \underline{d}'^T = [\vec{d}'_1 \vec{d}'_2 \vec{d}'_3].$$

Jednakosti (1) i (2) pisane u matricnom obliku, ali za vektor  $\vec{V}$  glase:

$$\vec{V} = \underline{d}'^T \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \underline{g}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdje su  $V_1$ ,  $V_2$  i  $V_3$  komponente brzine u dinamičkom koordinatnom sustavu nakon prve rotacije, a  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$  i  $\dot{z}_0$  komponente brzine u geodetskom koordinatnom sustavu. Komponente uređene u formi stupca zvat će se vektor-stupcem i označivat će se simbolom  $\hat{V}$  iznad slova.



Sl. 2. Rotacija sustava za kut skretanja  $\psi$  (prva rotacija)

Ako se izraz (3) pomnoži slijeva s baznim stupcem istog dinamičkog sustava, dobiva se

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \overline{T}_\psi \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

gdje je  $\hat{V}$  vektor-stupac, a  $\overline{T}_\psi$  je pravokutna matrica transformacije za rotaciju za kut skretanja  $\psi$

$$\overline{T}_\psi = \begin{bmatrix} \vec{d}'_1 \cdot \vec{g}_1 & \vec{d}'_1 \cdot \vec{g}_2 & \vec{d}'_1 \cdot \vec{g}_3 \\ \vec{d}'_2 \cdot \vec{g}_1 & \vec{d}'_2 \cdot \vec{g}_2 & \vec{d}'_2 \cdot \vec{g}_3 \\ \vec{d}'_3 \cdot \vec{g}_1 & \vec{d}'_3 \cdot \vec{g}_2 & \vec{d}'_3 \cdot \vec{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Crta iznad slovnog znaka označuje pravokutnu matricu.

Sličnim postupkom dobivaju se matrice rotacija za kut penjanja  $\vartheta$  i kut valjanja  $\gamma$ :

$$\overline{T}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \overline{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Lako se može dokazati da je totalna rotacija dinamičkog sustava, s obzirom na geodetski sustav, određena matricom transformacije geodetskih u dinamičke koordinate

$$\overline{T}_{gd} = \overline{T}_y \cdot \overline{T}_\beta \cdot \overline{T}_\psi \quad (7)$$

Budući da su sve matrice transformacije ortogonalne, vrijedi i relacija

$$\overline{T}_{dg} = (\overline{T}_{gd})^{-1} = \overline{T}_{gd}^T \quad (8)$$

pa se dinamičke koordinate dobivaju iz geodetskih ako se uzme inverzna ili transponirana matrica transformacije geodetskih u dinamičke koordinate.

*Eulerove relacije kutnih brzina.* Za odnos dinamičkoga i geodetskoga koordinatnog sustava karakteristična je relacija komponenata kutnih brzina za dinamički sustav  $[\omega_1 \omega_2 \omega_3] = \hat{\omega}^T$  i kutnih brzina rotacije dinamičkoga prema geodetskom sustavu  $[\dot{\psi} \dot{\vartheta} \dot{\gamma}]$ . Iz sl. 1 neposredno se izvodi

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & 0 & 1 \\ \cos \vartheta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ili obrnuto

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \gamma / \cos \vartheta & -\sin \gamma / \cos \vartheta \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & -\tan \vartheta \cos \gamma & \tan \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ako se rotacija letjelice mora izraziti za fiksni geodetski sustav, dolazi se do izraza

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_{x_0} \\ \Omega_{y_0} \\ \Omega_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \\ 1 & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & \cos \psi & -\cos \vartheta \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (11)$$

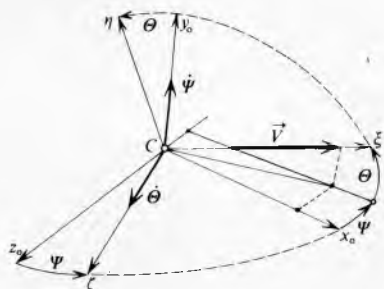
gdje  $\hat{\Omega}$  označuje kutnu brzinu s komponentama s obzirom na geodetski sustav.

*Odnos geodetskog i kinematičkog sustava.* Prema definiciji, os  $y_0$  geodetskog sustava i os  $\eta$  kinematičkog sustava nalaze se u vertikalnoj ravnini, tako da je  $y_0$  još i okomiti pravac sa smjerom od Zemlje. Da bi se od geodetskoga koordinatnog sustava prešlo na kinematički sustav, dovoljne su samo dvije rotacije: prva oko osi  $y_0$  s kutom skretanja  $\Psi$ , i druga oko osi  $\zeta$  s kutom propinjanja  $\Theta$  (sl. 3). Matrica je transformacije kinematičkih u geodetske komponente

$$\overline{T}_{kg} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & -\sin \Theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ -\cos \Theta \sin \Psi & \sin \Theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \quad (12)$$

Budući da je prema definiciji os  $\xi$  u pravcu i smjeru brzine, bit će

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \overline{T}_{kg} \cdot \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$



Sl. 3. Rotacija kinematičkog sustava za kut skretanja  $\Psi$  i kut propinjanja  $\Theta$

*Odnos dinamičkog i aerodinamičkog sustava.* Kutovi rotacije dinamičkog sustava s obzirom na aerodinamički nazivaju se: *napadni kut*  $\alpha$  (kut između projekcije brzine u ravnini simetrije

i uzdužne glavne središnje osi inercije letjelice, tj. osi 1), i *kut klizanja*  $\beta$  (kut između pravca brzine, tj. osi x i projekcije brzine u ravnini simetrije).

Matrica je transformacije aerodinamičkog sustava u dinamički sustav

$$\overline{T}_{ad} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdje indeks a označuje aerodinamički sustav, a indeks d dinamički sustav.

*Odnos kinematičkog i dinamičkog sustava.* Osim za kutove  $\alpha$  i  $\beta$  (tj. napadni kut i kut klizanja), kinematički sustav rotira još i za kut valjanja  $\gamma_c$ , pa je matrica transformacije:

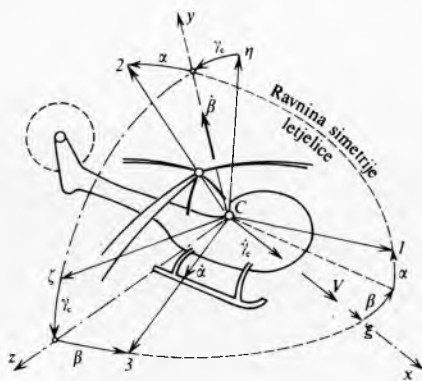
$$\overline{T}_{kd} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \gamma_c \sin \alpha + \sin \alpha \sin \gamma_c & -\cos \gamma_c \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \gamma_c \cos \alpha - \cos \alpha \sin \gamma_c & \cos \alpha \sin \gamma_c + \sin \gamma_c \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & -\sin \gamma_c \cos \beta & \cos \gamma_c \cos \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

gdje indeks k označuje kinematički sustav.

Zbog svojstva ortogonalnosti transformacijskih matrica, vrijedi relacija

$$\overline{T}_{dk} = \overline{T}_{kd}^T = \overline{T}_{kd}^{-1} \quad (16)$$

tj. analogno relaciji (8), dinamičke koordinate dobivaju se iz kinematičkih pomoću transponirane matrice transformacije kinematičkih u dinamičke koordinate.



Sl. 4. Međusobni odnosi kinematičkog, aerodinamičkog i dinamičkog koordinatnog sustava

Sl. 4 prikazuje kinematički koordinatni sustav (osi 1, 2, 3) i dinamički koordinatni sustav (osi x, y, z) s definicijom kutova rotacije  $\gamma_c$ ,  $\beta$  i  $\alpha$ , koji dovode od kinematičkog do dinamičkog sustava. Na sl. 4 posebno je istaknut aerodinamički koordinatni sustav (osi x, y, z) kojega os y leži u ravnini simetrije letjelice.

Matrica je transformacije aerodinamičkog sustava (osi x, y, z) u kinematički koordinatni sustav (osi xi, eta, zeta)

$$\overline{T}_{ak} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_c & -\sin \gamma_c \\ 0 & \sin \gamma_c & \cos \gamma_c \end{bmatrix} \quad (17)$$

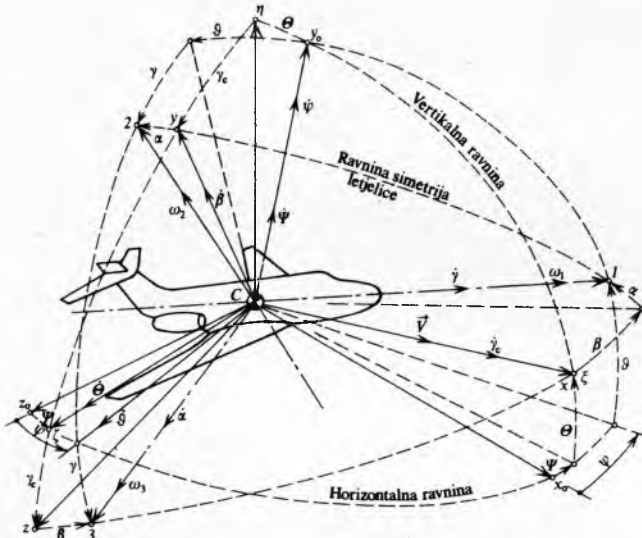
a matrice pojedinačnih rotacija jesu:

$$\begin{aligned} \overline{T}_\alpha &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \overline{T}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \\ \overline{T}_{\gamma_c} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_c & \sin \gamma_c \\ 0 & -\sin \gamma_c & \cos \gamma_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

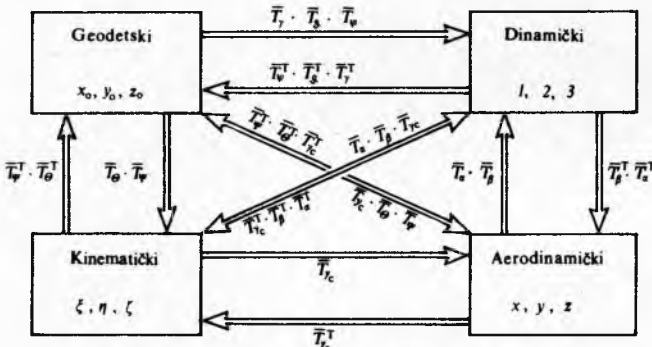
Matrice transformacije mogu se dobiti iz matrica pojedinačnih rotacija ako se ove posljednje množe obrnutim redom od reda rotacija, npr.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kd} &= \bar{T}_\alpha \cdot \bar{T}_\beta \cdot \bar{T}_{\gamma_c}; & \bar{T}_{gd} &= \bar{T}_\gamma \cdot \bar{T}_\beta \cdot \bar{T}_\psi \\ \bar{T}_{ak} &= \bar{T}_{\gamma_c}^T; & \bar{T}_{ka} &= \bar{T}_{ak}^T = \bar{T}_{\gamma_c} \end{aligned}$$

Na sl. 5 vidi se odnos svih četiriju koordinatnih sustava s pripadnim kutovima rotacije, a sl. 6 prikazuje shemu mogućih transformacija tih sustava.



Sl. 5. Međusobni odnosi četiriju koordinatnih sustava s pripadnim kutovima rotacije



Sl. 6. Shema mogućih transformacija koordinatnih sustava

**Dopunske trigonometrijske relacije.** Dosad definirani koordinatni sustavi i njihovi uzajamni odnosi nisu uvijek dovoljni za analize i opis gibanja letjelica. Često je potrebno naći još i pogodnije jednakosti koje povezuju kutove rotacije. Za tu svrhu uzimaju se skalarni umnošci ortova različitih sustava, ali istoga geometrijskog značenja.

Budući da svaki element matrice transformacije predstavlja kosinus kuta između pripadnih osi, mogu se konstruirati mnoge relacije koje u različitim oblicima utvrđuju istu geometrijsku činjenicu. Matrica transformacije dinamičkog u aerodinamički sustav glasi:

$$\bar{T}_{da} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix} [\bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3] = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \cdot \bar{d}_1 & \bar{a}_1 \cdot \bar{d}_2 & \bar{a}_1 \cdot \bar{d}_3 \\ \bar{a}_2 \cdot \bar{d}_1 & \bar{a}_2 \cdot \bar{d}_2 & \bar{a}_2 \cdot \bar{d}_3 \\ \bar{a}_3 \cdot \bar{d}_1 & \bar{a}_3 \cdot \bar{d}_2 & \bar{a}_3 \cdot \bar{d}_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Iz matrice (19) i transponirane matrice (14) proizlazi da prvi redak daje kosinuse osi x aerodinamičkog sustava (s ortom  $\bar{a}_1$ ) i osi 1 dinamičkog sustava (s ortom  $\bar{d}_1$ ), pa se dobiva:

$$\bar{a}_1 = \cos \alpha \cos \beta \bar{d}_1 - \sin \alpha \cos \beta \bar{d}_2 + \sin \beta \bar{d}_3, \quad (20)$$

$$\bar{a}_3 = -\cos \alpha \sin \beta \bar{d}_1 + \sin \alpha \sin \beta \bar{d}_2 + \cos \beta \bar{d}_3. \quad (21)$$

Analogno je za geodetski i dinamički sustav:

$$\bar{g}_2 = \sin \vartheta \bar{d}_1 + \cos \vartheta \cos \gamma \bar{d}_2 - \cos \vartheta \sin \gamma \bar{d}_3, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_3 &= -\sin \psi \cos \vartheta \bar{d}_1 + (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) \bar{d}_2 + \\ &+ (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma) \bar{d}_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Kosinus kuta između osi x aerodinamičkog sustava (s ortom  $\bar{a}_1$ ) i osi  $y_0$  geodetskog sustava (s ortom  $\bar{g}_2$ ) određen je skalarnim umnoškom  $\bar{a}_1 \cdot \bar{g}_2$  i elementom matrice  $(T_{ag})_{21} = \sin \Theta$ , pa je

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \cdot \bar{g}_2 &= \cos(\bar{a}_1, \bar{g}_2) = \sin \Theta = \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \\ &- \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \sin \gamma \sin \beta = \Phi_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Kosinus kuta između osi x aerodinamičkog sustava (s ortom  $\bar{a}_1$ ) i osi  $z_0$  geodetskog sustava (s ortom  $\bar{g}_3$ ) određen je skalarnim umnoškom  $\bar{a}_1 \cdot \bar{g}_3$ , odnosno elementima matrice  $(T_{ga})_{13} = -\cos \Theta \sin \Psi$ , pa je

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \cdot \bar{g}_3 &= -\cos \Theta \sin \Psi = -\sin \psi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \\ &- (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) \sin \alpha \cos \beta + \\ &+ (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma) \sin \beta = -\Phi_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Sličnim rasuđivanjem dobiva se i treća, često upotrebljavana, trigonometrijska relacija u obliku:

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 \cdot \bar{g}_2 &= -\cos \Theta \sin \gamma_c = -\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta + \\ &+ \sin \alpha \sin \beta \cos \vartheta \cos \gamma - \cos \beta \cos \vartheta \sin \gamma = -\Phi_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Relacije (24), (25) i (26) služe kad je zbog primjene matrice transformacija potrebno formirati dopunske uvjete koji povezuju kutove  $\Psi$ ,  $\Theta$  i  $\gamma_c$  s kutovima  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\vartheta$ . Već prema posebnim potrebama nekog problema, mogu se sličnim postupkom formirati i sasvim nove relacije kao dopunski uvjeti. Tako, prema sl. 6, vrijedi općenito:

$$\bar{T}_\gamma \cdot \bar{T}_\beta \cdot \bar{T}_\psi = \bar{T}_\alpha \cdot \bar{T}_\beta \cdot \bar{T}_{\gamma_c} \cdot \bar{T}_\theta \cdot \bar{T}_\psi. \quad (27)$$

Usvojene konvencije i izvedene transformacijske matrice skupa s Eulerovim i trigonometrijskim relacijama često se primjenjuju u mehanici leta kada se opisuje gibanje letjelica.

**Kinematika vođenja.** Vođenje letjelica služi da bi se ostvarili zadaci leta prema nekom unaprijed utvrđenom planu ili zbog nekog zadanog razloga. Razlikuje se vođenje letjelica bez ljudske posade od vođenja letjelica s ljudskom posadom. Kinematika vođenja razvijena je samo za letjelice bez ljudske posade, jer se one pretežno vode radi susreta s nekim pokretnim ciljem.

Letjelice bez ljudske posade vode se po posebno odabranim trajektorijama koje omogućuju dovoljno pouzdan susret s ciljem. Pri tom se uzimaju u obzir sva ograničenja zbog stvarnih svojstava konstrukcije letjelice, odnosno svojstava uređaja u letjelici u kojoj je isključeno upravljanje ljudske posade.

Vođenim letenjem naziva se let letjelice po nekoj familiji trajektorija koje osiguravaju da letjelica ostvari zadani cilj leta. Trajektorije vođenja samo su idealizirane krivulje u prostoru, pa se zovu *željenim* ili *potrebnim trajektorijama*. Stvarna trajektorija, međutim, uvijek će odstupati od potrebne, a zadatak je sustava upravljanja da se smanje greške, tj. da odstupanja stvarne od željene trajektorije budu što manja.

Da se odrede greške položaja letjelice, treba raspolagati potrebnim koordinatama ovisnim o odlukama koje se odnose na ciljeve letenja. Funkcije koje osiguravaju tu relaciju, tj. koje određuju potrebne varijable gibanja prema ciljevima letenja, zovu se *kinematičkim vezama* ili *kinematikom vođenja*.

Kinematika vođenja najviše se primjenjuje na letjelicama bez ljudske posade i vođenim raketama radi susreta s pokretnim ili nepokretnim ciljevima u prostoru.

Funkcija veze, ili kinematika vođenja, zadaje se pretežno intuitivno. Vrlo često se vođena letjelica prvo dovodi u određenu ravninu, a zatim i u pravac, što povećava vjerojatnost susreta. Općenitiji je oblik funkcija veze

$$\varepsilon = E(\varepsilon_c, \beta_c, r_c, \dot{\varepsilon}_c, \dot{\beta}_c, \dot{r}_c \dots) \quad (28)$$

$$\beta = B(\varepsilon_c, \beta_c, r_c, \dot{\varepsilon}_c, \dot{\beta}_c, \dot{r}_c \dots) \quad (29)$$

$$r = R(\varepsilon_c, \beta_c, r_c, \dot{\varepsilon}_c, \dot{\beta}_c, \dot{r}_c \dots) \quad (30)$$

Izrazi (28), (29) i (30) moraju osigurati da se letjelica, nakon određenog vremena kretanja, susretne s ciljem. Pri tom se cilj predstavlja točkom u prostoru sa sljedeća tri podatka koji su funkcije vremena: udaljenost od određene fiksne točke na Zemlji  $r_c(t)$ , elevacija vektora položaja  $\varepsilon_c(t)$  i azimut vektora položaja  $\beta_c(t)$ . Uvjet da se ostvari susret nakon vremena  $t_s$  piše se u obliku

$$\varepsilon = \varepsilon_c(t_s), \quad \beta = \beta_c(t_s), \quad r = r_c(t_s), \quad (31)$$

gdje koordinate bez indeksa označuju potrebnu poziciju vođene letjelice u prostoru.

Zasad nije poznat način da se točno odrede funkcije vođenja, nego se one zadaju kao intuitivne hipoteze, pa se potom provjerava da li zadovoljavaju uvjete susreta. Zbog toga se pod pojmom metode vođenja podrazumijeva zakon približavanja vođene letjelice i cilja. Taj zakon, već prema varijablama relativnog kretanja cilja, određuje potrebne varijable kretanja vođene letjelice, da bi nakon nekog vremena došlo do dovoljno pouzdanog susreta.

Razvijene su sljedeće dvije grupe metoda vođenja: *metode triju točaka*, što uspostavljaju relacije između pozicije vođene letjelice, cilja i komandnog mjesta na tlu ili u zraku, i *metode dviju točaka*, što uspostavljaju relacije između pozicije vođene letjelice i cilja u prostoru. Prva grupa metoda vođenja primjenjuje se u sustavima daljinskog upravljanja letjelicama, dok metode dviju točaka služe u sustavima samovođenja.

**DINAMIKA LETA**

Najvažniji je zadatak dinamike leta da definira, opisuje i određuje letačka svojstva (performanse) letjelica u relevantnim uvjetima leta. Letjelica se kreće u prostoru djelovanjem pogonskih, aerodinamičkih, inercijskih i upravljačkih sila i momenata. Relacije tih sila i momenata izvode se iz drugog Newtonova zakona, odnosno zakona promjene količine gibanja

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \quad (32)$$

i promjene kinetičkog momenta

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}. \quad (33)$$

Količina gibanja jest  $\vec{K} = m\vec{V}$ , gdje je  $m$  masa letjelice, a  $\vec{V}$  brzina njezinog težišta. Kinetički moment  $\vec{H} = \sum \vec{q}_i \times \vec{q}_i m_i$  izražava se kao zbroj momenata količina gibanja čestica  $\vec{q}_i \times \vec{q}_i m_i$  s obzirom na težište, gdje je  $m_i$  masa čestica, a  $\vec{q}_i$  vektor položaja čestica s obzirom na težište letjelice.

**Diferencijalne jednadžbe leta.** Skalarni oblici jednadžbi leta razvijaju se uvođenjem zapisa s baznim retkom. Tako su vektori brzine i položaja:

$$\vec{V} = V_1 \vec{d}_1 + V_2 \vec{d}_2 + V_3 \vec{d}_3 = \underline{d}^T \vec{V} \quad (34)$$

$$\vec{q}_i = q_{i1} \vec{d}_1 + q_{i2} \vec{d}_2 + q_{i3} \vec{d}_3 = \underline{d}^T \vec{q}_i, \quad (35)$$

gdje je:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

vektor-stupac brzine s komponentama u dinamičkom sustavu,

$$\hat{q}_i = \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{bmatrix} \quad (37)$$

vektor-stupac vektora položaja također s komponentama u dinamičkom sustavu, a

$$\underline{d}^T = [\vec{d}_1 \vec{d}_2 \vec{d}_3] \quad (38)$$

bazni vektor-redak s ortovima dinamičkog sustava kao elementima.

Ako se uvede operacija transformacije vektor-stupca u kososimetričnu matricu pomoću simbola  $K$ , a kososimetrična

se matrica označi znakom  $\sim$  iznad slovnog simbola, bit će

$$\hat{\omega}^K = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}^K = \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

pa se ubrzanje dobiva u obliku

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \underline{d}^T (\hat{V} + \hat{\omega} \vec{V}), \quad (39)$$

i kinetički moment za dinamički sustav

$$\vec{H} = \sum_i \underline{d}^T \vec{q}_i \hat{\omega} \vec{q}_i = \underline{d}^T \vec{J} \hat{\omega}, \quad (40)$$

odnosno derivacija kinetičkih momenata

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \underline{d}^T (\vec{J} \hat{\omega} + \hat{\omega} \vec{J} \hat{\omega}), \quad (41)$$

gdje je  $\hat{\omega} = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]^T$  vektor-stupac kutnih brzina, a

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

matrica glavnih središnjih momenata inercije.

Na temelju prethodnih transformacija, diferencijalne jednadžbe leta su u matricnom obliku za dinamički sustav i kad se izostavi bazni redak:

$$m\hat{V} + m\hat{\omega} \vec{V} = \vec{T}_{ad} \cdot \hat{F}_A + \vec{T}_{gd} \cdot \hat{G} + \hat{F}_u + \hat{R}, \quad (43)$$

$$\vec{J} \hat{\omega} + \hat{\omega} \vec{J} \hat{\omega} = \vec{T}_{ad} \cdot \hat{M}_A + \hat{M}_u + \hat{Q}. \quad (44)$$

Komponente aerodinamičkih sila  $F_A$  i momenata  $M_A$  zadane su najčešće u aerodinamičkom sustavu, te ih treba transformirati u dinamički sustav pomoću matrice  $\vec{T}_{ad}$ . Težina  $\hat{G}$  je u geodetskom sustavu, pa se transformira u dinamički pomoću matrice  $\vec{T}_{gd}$ . Sile upravljanja  $\hat{F}_u$  i momenti upravljanja  $\hat{M}_u$  zadani su obično u dinamičkom sustavu pa se, isto kao i reaktivna sila  $\hat{R}$  i reaktivni moment  $\hat{Q}$ , ne transformiraju. Razumije se da u svakom konkretnom slučaju, već prema konstrukciji i namjeni letjelice, treba posebno odrediti transformacije.

Gibanje letjelice najčešće se opisuje pod pretpostavkom da je ona kruto tijelo konstantne mase. Reaktivna sila  $\hat{R}$  je potisak mlaznog motora, ili vučna sila pogonske grupe motor-elisa, ili potisak raketnog motora. Reaktivni moment  $\hat{Q}$  tada se često svodi na okretni moment motora. U svim takvim slučajevima diferencijalne jednadžbe (43) i (44) predstavljaju šest relacija nepoznatih varijabli leta, i to komponenata brzina i kutnih brzina

$$\hat{X} = [V_1 V_2 V_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3]^T. \quad (45)$$

Budući da su opterećenja često zadana prema kutovima aerodinamičkog sustava, a neke sile se vežu za geodetski sustav, dodaju se jednadžbama (43) i (44) još i Eulerove kinematičke relacije (9), te dodatne trigonometrijske relacije (24), (25) i (26). S Eulerovim izrazom (9) za relacije kutnih brzina dobiva se

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = E_{\varphi\omega} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

a s dopunskim trigonometrijskim relacijama (24), (25) i (26)

$$\begin{bmatrix} \sin \Theta \\ \cos \Theta \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \gamma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

gdje je relacija (24) primijenjena u prvom retku matrice, relacija (25) u drugome, a relacija (26) u trećem retku.

Za polijetanje, slijetanje i određivanje trajektorije dodaju se još i relacije

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= V \cos \Theta \cos \Psi \\ \dot{y}_0 &= V \sin \Theta \\ \dot{z}_0 &= V \cos \Theta \sin \Psi, \end{aligned} \quad (48)$$

da bi se završnom integracijom odredile i koordinate težišta letjelice u prostoru kao funkcije vremena.

Prema jednadžbama (28), (44), (46) i (47) poznato je dvanaest relacija za određivanje dvanaest varijabli leta kad su zadani početni uvjeti.

Nepoznate varijable leta, koje se određuju zadanim sustavom jednadžbi, mogu biti brzine  $\dot{V} = [V_1 V_2 V_3]^T$ , kutne brzine  $\dot{\omega} = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]^T$ , kutovi kinematičkog sustava s obzirom na geodetski sustav  $[\Psi \Theta 0]$  i kutovi dinamičkog sustava s obzirom na geodetski sustav  $[\psi \vartheta \gamma]$ , pri čemu su posredno određeni i svi ostali kutovi i koordinate, osobito napadni kut  $\alpha$ , kut klananja  $\beta$  i koordinate trajektorije  $x_0, y_0$  i  $z_0$ .

**Opis leta letjelice promjenljive mase i promjenljivog geometrijskog oblika.** Suvremene letjelice imaju snažne motore s vrlo velikom potrošnjom goriva koja se u dinamičkoj analizi ponekad ne može zanemariti. Osim toga, proturječni zahtjevi, osobito s obzirom na svojstva pri velikim brzinama i malim brzinama pri polijetanju i slijetanju, riješeni su tako da letjelica ima krila promjenljive površine, odnosno promjenljivih geometrijskih svojstava.

U nekim posebnim stanjima leta potrebno je letjelicu smatrati krutim tijelom promjenljive mase i promjenljivog geometrijskog oblika. Najčešće se promjenljivost oblika letjelice tretira samo preko promjenljivosti ograničenog broja parametara. Krilo koje se odvlači i privlači uz tijelo letjelice može se smatrati kao da je samo strijela krila  $\chi$  jedan promjenjlivi parametar. Jasno je da su tada masa i momenti inercije funkcije vremena, pa se na to mora paziti već pri izvođenju diferencijalnih jednadžbi gibanja da bi se obuhvatili svi učinci tih složenih zbivanja.

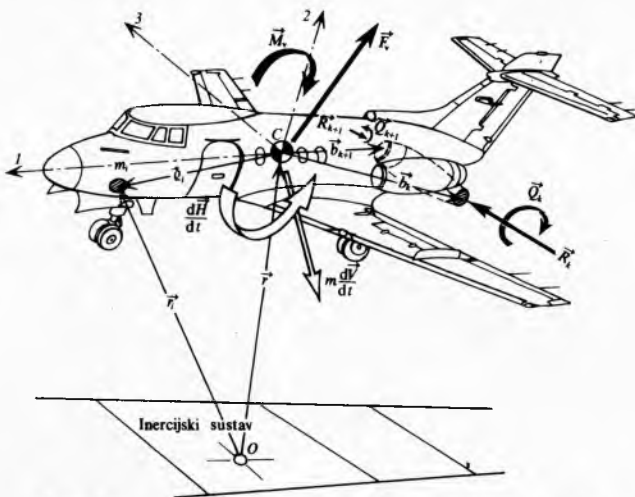
Kad letjelica ima promjenjivu masu i jedan parametar promjenljivog geometrijskog oblika, kojim se mijenja pravac vektora potiska, u diferencijalnim jednadžbama (43) i (44) reaktivna opterećenja imaju oblik

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n (\vec{P}_k + 2\dot{m}_k \vec{b}_k + \ddot{m}_k \vec{b}_k), \quad (49)$$

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n (\vec{M}_{mk} + \vec{b}_k \times (\vec{P}_k + \dot{m}_k \vec{b}_k) - d^T J \dot{\omega}). \quad (50)$$

gdje je  $k$  redni broj mlaznice ili usisnika,  $m_k$  potrošak goriva ako se radi o mlaznici, odnosno dobava zraka ako je usisnik, a  $\vec{b}_k$  vektor položaja što spaja težište letjelice sa središtem izlaznog presjeka mlaznice ili usisnika (sl. 7). Konvencionalni potisak  $\vec{P}_k$  sastavljen je od dinamičke i aerostatičke komponente, dok je  $M_{mk}$  spreg neravnomjerne raspodjele tlakova u mlaznici, odnosno usisniku, a obično je dovoljno malen da se može zanemariti.

Momenti inercije su promjenljivi zbog istjecanja plinova ili usisavanja zraka, ali se mogu mijenjati i zbog uvlačenja stajnih organa, krila i drugih dijelova koji mijenjaju geometrijski oblik letjelice. Promjena oblika redovno utječe i na interakciju između



Sl. 7. Raspored sila i momenata na letjelici s mlaznim pogonom

zračnog okoliša i letjelice, pa se zato ti faktori moraju također uzeti u obzir pri opisu gibanja letjelice.

Kad se, dakle, svi spomenuti faktori uzmu u obzir, dobiva se sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi leta

$$m\dot{V} + m\dot{\omega}\dot{V} = \vec{F}_v + \vec{R}, \quad (51)$$

$$\vec{J}\dot{\omega} + \dot{\omega}\vec{J}\dot{\omega} = \vec{M}_v + \vec{Q}, \quad (52)$$

gdje su vanjska opterećenja označena sa  $\vec{F}_v$  i  $\vec{M}_v$ , a reaktivna opterećenja  $\vec{R}$  i  $\vec{Q}$  zadana su izrazima

$$\vec{R} = \vec{P} + 2\dot{m}(\dot{\vec{b}} + \dot{\omega}\vec{b}) + \ddot{m}\vec{b}, \quad (53)$$

$$\vec{Q} = \vec{b}(\dot{P} + \dot{m}\dot{\omega}\vec{b}) - \dot{J}\dot{\omega}, \quad (54)$$

što je u razvijenom obliku za dinamički sustav:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \end{bmatrix} + 2\dot{m} \left( \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) + \ddot{m} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

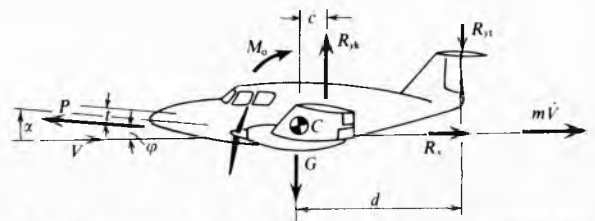
$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \end{bmatrix} + \dot{m} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

gdje su  $\dot{m}$  i  $\ddot{m}$  prva i druga derivacija mase letjelice po vremenu, a  $b_i$  derivacija komponenta vektora položaja središta izlaznog presjeka mlaznice, odnosno usisnika.

Izrazi (55) i (56) ujedno tumače prihvaćeno označavanje u jednadžbama (53) i (54) te predstavljaju reaktivnu silu i reaktivni moment samo jedne pokretne mlaznice. Promjenljivost momenta inercije tijela letjelice izražava se još i posljednjim članom u jednadžbi (54) u obliku derivacije matrice glavnih momenata inercije  $\vec{J}$  pomnožene sa stupcem kutnih brzina za dinamički sustav  $\dot{\omega}$ .

**Horizontalni let.** Let zrakoplova je horizontalan kad letjelica leti na stalno istoj visini od Zemlje. Veliko praktično i teorijsko značenje ima najjednostavniji slučaj kad se za mali interval vremena razmatra pravolinijski let na istoj visini.

Pri pravolinijskom horizontalnom gibanju sve sile i momenti koji djeluju na zrakoplov nalaze se u ravnoteži (sl. 8). Ne postoji rotacijsko gibanje zrakoplova, jer su momenti koji ga pobuđuju u statičkoj ravnoteži. Budući da zrakoplov leti stalno na istoj visini, suma je vertikalnih sila jednaka nuli, tj. i one su u ravnoteži. U pravcu horizontale moguće je ubrzano gibanje, odnosno dinamička ravnoteža potiska  $P$ , otpora  $R_x$  i inercijskih sila  $m\dot{V}$ .



Sl. 8. Sile i momenti koji djeluju na zrakoplov u horizontalnom letu

Vlastita težina zrakoplova  $G$  uravnotežena je uzgonom krila  $R_{yk}$  i uzgonom repa  $R_{yt}$ , kao što je prikazano na sl. 8. Rezultirajući je uzgon  $R_y = R_{yk} - R_{yt}$ , pa je

$$R_y - G + P \sin \varphi = 0, \quad (57)$$

gdje je  $\varphi$  kut između osi motora i referentnoga horizontalnog pravca.

Ravnoteža horizontalnih sila, tj. horizontalne komponente vučne sile (odnosno potiska)  $P$ , otpora  $R_x$  i inercijske sile  $m\dot{V}$

određena je izrazom

$$P \cos \varphi - R_x - m \dot{V} = 0. \quad (58)$$

Moment uzgona  $R_{y_k} c - R_{y_l} d$  u ravnoteži je s momentom vučne sile  $Pt$  i aerodinamičkim momentom  $M_0$  (momentom nultog uzgona letjelice), pa je

$$-R_{y_k} c + R_{y_l} d + M_0 + Pt = 0. \quad (59)$$

Kut pod kojim je krilo pričvršćeno na trup zrakoplova (smještajni kut) može biti različit za desno i za lijevo krilo, zbog čega nastaje razlika između aerodinamičkih sila na lijevom i desnom krilu. Ta razlika sila stvara aerodinamički moment koji uravnotežuje obrtni moment motora  $Q$ . Ako su smještajni kutovi za oba krila jednaki, ravnoteža obrtnog momenta motora  $Q$  postiže se nekim drugim sredstvima. Radi jednostavnosti pretpostavit će se ravnoteža obrtnog momenta motora i obrtnog momenta elise, a zanemarit će se svi sekundarni faktori koji izravno ne utječu na svojstva letjelice u horizontalnom letu.

Za male kutove  $\varphi$  osi motora s obzirom na referentni horizontalni pravac, jednadžba (57) može se pojednostavniti tako da izražava samo jednakost uzgona letjelice i njezine vlastite težine:

$$R_y = G. \quad (60)$$

Isto tako, za male iznose kuta  $\varphi$  i jednoliku brzinu  $V$  letjelice jednadžba (58) izražava samo jednakost vučne sile (ili potiska)  $P$  s aerodinamičkim otporom  $R_x$ :

$$P = R_x. \quad (61)$$

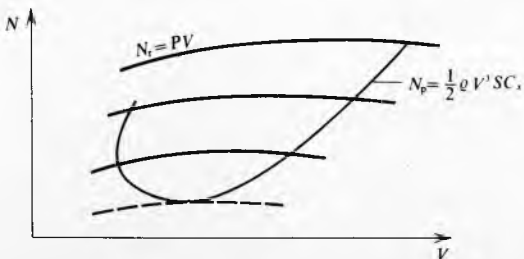
Ako je gibanje ustaljeno, bez ubrzanja, tada jednadžba (59) više nije važna, jer se pretpostavlja da upravljanje idealno funkcionira i osigurava stalnu ravnotežu momenata, koja je uvjet za horizontalni let. Ravnoteža aerodinamičkih momenata elise  $M_p$  i okretnog momenta motora  $Q$  određena je jednadžbom:

$$-Q = M_p. \quad (62)$$

Tako definirane relacije (60), (61) i (62) još uvijek su vrlo složene za analizu, jer su za zadana geometrijska svojstva letjelice njena aerodinamička opterećenja zavisna od njenih aerodinamičkih karakteristika, visine leta i kvadrata brzine leta. Potisak ili vučna sila ovisi o karakteristikama elise i o brzini vrtnje motora na određenoj visini. To isto vrijedi i za jednakost okretnog momenta motora s aerodinamičkim momentom elise. Za rješavanje problema horizontalnog leta najpoznatija je metoda potrebne i raspoložive snage. Ako se jednadžba ravnoteže potiska  $P$  i otpora  $R_x$  napiše u obliku:

$$PV = \frac{1}{2} \rho V^3 SC_x, \quad (63)$$

gdje je  $\rho$  gustoća zraka na visini leta,  $V$  brzina leta,  $C_x$  koeficijent aerodinamičkog otpora, a  $S$  neka uvjetno prihvaćena površina (npr. površina uzgonskih ploha na letjelici). Lijeva strana jednadžbe (63) raspoloživa je snaga koju razvija pogonska grupa motor—elisa, dok je desna strana potrebna snaga koja ovisi o svojstvima letjelice i njezinu stanju gibanja. Ako se raspoloživa snaga  $N_r = PV$  nacrtu u dijagramu snage i brzine odvojeno od potrebne snage  $N_p = \frac{1}{2} \rho V^3 SC_x$ , dobit će se dvije krivulje koje se sijeku u karakterističnim točkama, a predstavljaju režime horizontalnog leta (sl. 9).



Sl. 9. Dijagram brzina—snaga s krivuljama raspoložive snage ( $N_r$ ) i krivuljom potrebne snage ( $N_p$ )

Raspoloživa snaga može se dobiti množenjem jednadžbe (62) s brzinom vrtnje, jer ona tada izražava jednakost snage koju apsorbira elisa i raspoložive snage motora. Ako je  $\eta$  stupanj iskoristivosti elise, a  $N$  snaga motora pri zadanoj brzini vrtnje, bit će:

$$\eta N = PV, \quad (64)$$

što prikazuje jednakost apsorbirane snage pogonske grupe  $\eta N$  i snage koju troši letjelica  $PV$ .

Ukratko, metoda potrebne i raspoložive snage svodi se na konstruiranje krivulja raspoložive snage  $N_r(V)$  zajedno s krivuljom potrebne snage  $N_p(V)$ . Prema jednadžbama (63) i (64) potrebna se snaga može pisati i u obliku

$$N_p = \eta N = \frac{1}{2} \rho V^3 SC_x. \quad (65)$$

Jednakost težine letjelice  $G$  i sile uzgona  $R_y$  može se izraziti i na sljedeći način:

$$G = \frac{1}{2} \rho V^2 SC_y, \quad (66)$$

gdje je  $C_y$  koeficijent uzgona. Ako se jednadžbe (65) i (66) podijele, bit će

$$\eta \frac{N}{G} = \frac{C_x}{C_y} V. \quad (67)$$

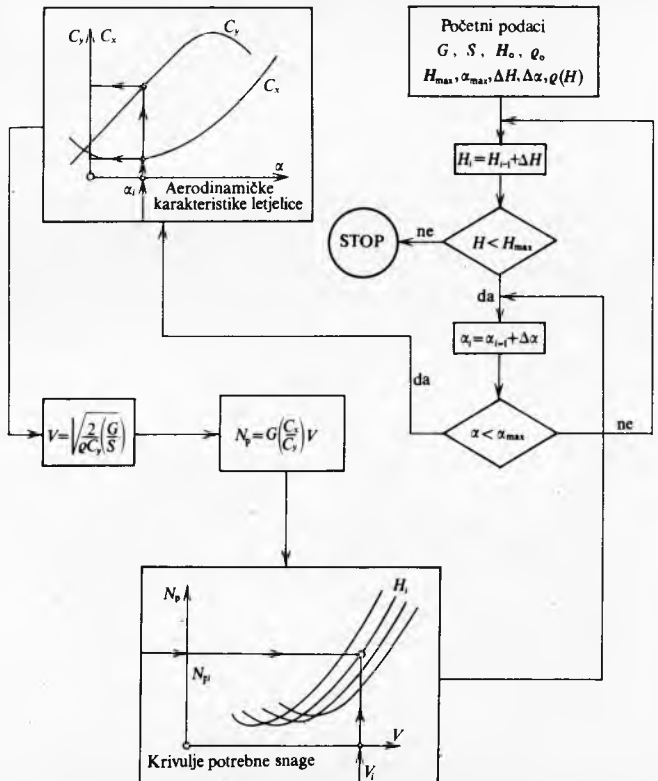
Iz jednadžbe (66) slijedi da je brzina:

$$V = \sqrt{\frac{2G}{\rho C_y S}}, \quad (68)$$

što uvršteno u (67) daje

$$\eta \frac{N}{G} = \frac{C_x}{C_y^{3/2}} \sqrt{\frac{2G}{\rho S}}. \quad (69)$$

Proračun potrebne snage izvodi se prema shemi na sl. 10, polazeći od napadnog kuta  $\alpha$  kao nezavisne varijable. Dakle, za zadani napadni kut  $\alpha$ , iz polare letjelice dobiva se koeficijent otpora  $C_x$  i koeficijent uzgona  $C_y$ . Računa se s konstantnim iznosima zadane težine letjelice  $G$  i uvjetno prihvaćene povr-

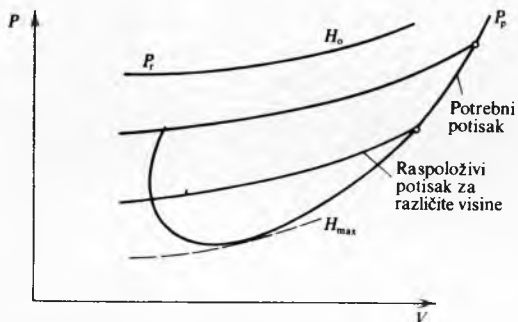


Sl. 10. Shema toka za proračun potrebne snage letjelice

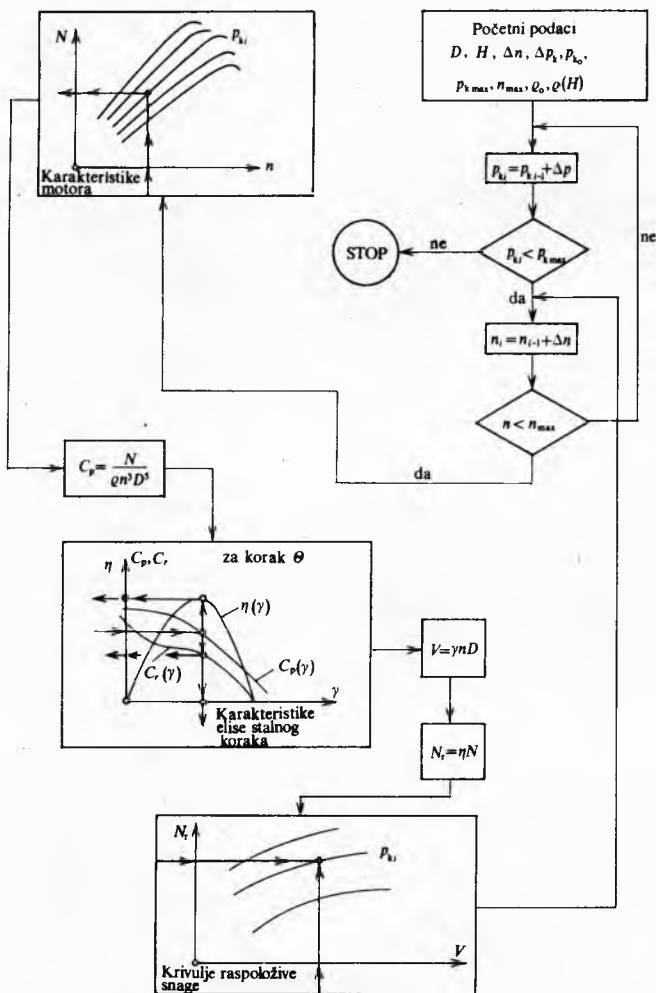
šine  $S$ , a s različitim iznosima visine leta  $H_i$  i različitim napadnim kutovima  $\alpha_i$ , te njihovim proračunskim prirastima  $\Delta H_i$  i  $\Delta \alpha_i$ .

Krivulje raspoložive snage proračunavaju se počevši s definiranim karakteristikama motora i elise. Iz krivulja snage motora  $N(n, p_k)$ , za zadanu brzinu vrtnje  $n$  i prihvaćeni tlak punjenja  $p_k$ , odnosno otvor usisnog sustava, određuje se snaga motora  $N$ , zatim koeficijent snage  $C_p = N/(\rho n^3 D^5)$ , gdje je  $D$  promjer elise. Iz aerodinamičkih karakteristika elise konstantnog koraka za poznati  $C_p$  dobiva se koeficijent rada elise  $\gamma = V/(nD)$  i njen stupanj iskoristivosti  $\eta$ . Iz tih podataka lako se odredi raspoloživa snaga  $N_r(V)$  za različite tlakove punjenja i konstantnu visinu leta.

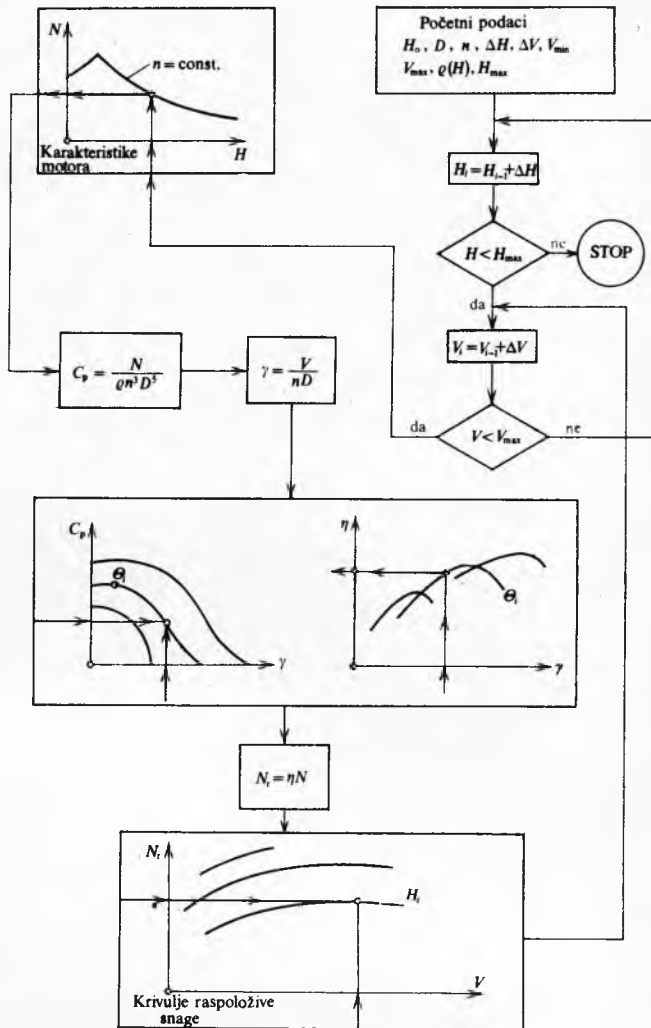
Sličnim se postupkom određuje raspoloživi potisak kad se radi o mlaznom motoru; tada se metoda modificira tako da se računa s krivuljama potrebnog i raspoloživog potiska (sl. 11).



Sl. 11. Dijagram brzina—potisak s krivuljama raspoloživog potiska ( $P_r$ ) i krivuljom potrebnog potiska ( $P_p$ )



Sl. 12. Shema toka za proračun raspoložive snage letjelice s elisom stalnog koraka



Sl. 13. Shema toka za proračun raspoložive snage letjelice s elisom promjenljivog koraka

Na sl. 12 prikazan je tok proračuna raspoložive snage letjelice s elisom stalnog koraka i promjera  $D$ , za visinu  $H$  i za različite brzine leta  $V$ . Na sl. 13 prikazan je isti proračun, ali s elisom promjenljivog koraka i s konstantnom brzinom vrtnje.

Metode potrebne i raspoložive snage ili potrebnog i raspoloživog potiska služe za izračunavanje performansi letjelica. U točkama gdje se krivulje potrebne i raspoložive snage, odnosno potiska, sijeku definiran je horizontalni let (sl. 9 i sl. 11). Vidi se da postoje dva rješenja: horizontalni let u režimu malih brzina i horizontalni let velikih brzina. Pozitivna razlika između raspoložive i potrebne snage može se iskoristiti za penjanje letjelice. Ako se izjednači snaga penjanja s razlikom raspoložive i potrebne snage, dobiva se

$$Gw = N_r - N_p, \tag{70}$$

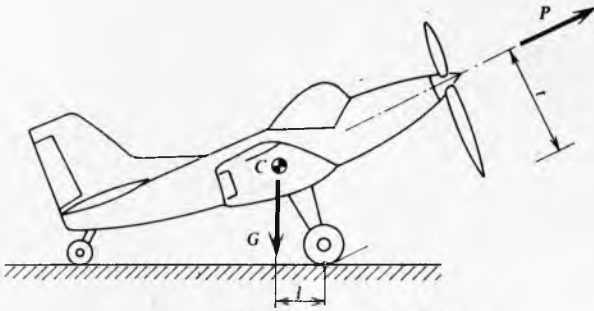
pa je vertikalna brzina penjanja

$$w = \frac{N_r - N_p}{G}. \tag{71}$$

Osim toga, krivulje potrebnih i raspoloživih snaga, odnosno potisaka, mogu korisno poslužiti da se izvedu mnogi zaključci o tehnici pilotiranja i o svojstvima zrakoplova pri promjeni pojedinih faktora koji utječu na let.

**Polijetanje i slijetanje.** Polijetanje letjelice počinje s vrlo kratkim periodom zaleta kada se repni točak (ako postoji) podiže zbog momenta vučne sile s obzirom na točku oslonca prednjih stajnih organa (sl. 14). U početku zaleta vučna sila elise relativno je malena i moment  $Pt$  polako preteže moment  $Gl$ .





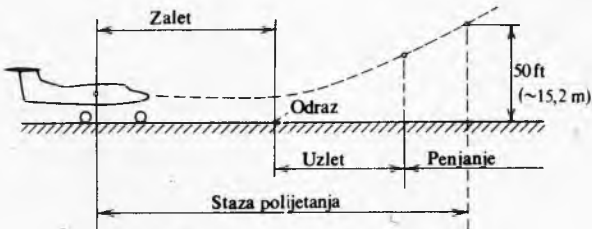
Sl. 14. Sile na početku zaleta letjelice

Kad se rep letjelice odvoji od tla, započinje zalet pod punim otvorom usisnog sustava da bi se dosegla brzina poleta (odraza). Letjelice s prednjim (nosnim) točkom počinju zalet odmah, bez faze podizanja repa. Dinamički uvjeti zaleta određeni su ravnotežom inercijskih sila, vučne sile, reakcije stajnih organa, vlastite težine i aerodinamičkog opterećenja.

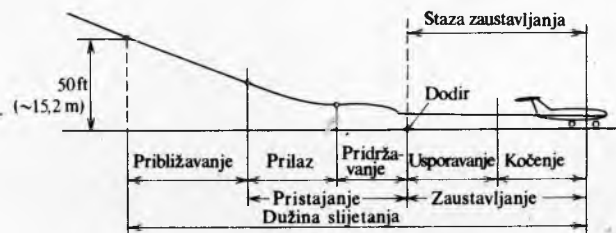
Diferencijalna je jednadžba zaleta

$$m \frac{dV}{dt} = P(V) - \mu(G - R_y) - R_{xx} \quad (72)$$

gdje je vučna sila  $P$  funkcija brzine, jer pri punom otvoru usisnog sustava i konstantnoj brzini vrtnje ovisi o koeficijentu rada elise  $\gamma = V/(nD)$ , a  $\mu$  je koeficijent trenja između točkova letjelice i poletno-sletne staze. Težina  $G$  se relativno malo smanjuje zbog potrošnje goriva, a aerodinamički koeficijenti ostaju praktički konstantni. Diferencijalna jednadžba zaleta je nelinearna, ali se lako rješava numeričkim metodama programiranim za digitalno računalo. Rješenje daje trajektoriju zaleta i promjene ubrzanja i brzina do faze uzleta (sl. 15). Brzina polijetanja ili odvajanja od tla mora biti najmanje 10% veća od minimalne brzine leta, radi rezerve pri prijelazu iz zaleta u trajektoriju uzleta.



Sl. 15. Zalet i polijetanje letjelice



Sl. 16. Slijetanje, pristajanje i zaustavljanje letjelice

Proces slijetanja ima tri karakteristične faze (sl. 16). U prvoj fazi, ili fazi približavanja, letjelica se spušta k poletno-sletnoj stazi s konstantnim kutom planiranja i s vrlo velikim napadnim kutom  $\alpha$ , upotrebljavajući uređaje za hiperpotisak i zračno kočenje. Budući da je to režim malih brzina, reakcije letjelice na komande su obrnute nego u normalnom letu; smanjivanjem napadnog kuta  $\alpha$  letjelica se penje, a povećavanjem se spušta. Međutim, zbog rezerve sigurnosti od kovita, pri slijetanju se ne smije povećavati napadni kut iznad neke zadane granice. Stoga se letjelicom upravlja mijenjanjem snage motora pri stalnom

napadnom kutu, što omogućuje korekture procijenjene trajektorije.

Druga faza slijetanja je krivolinijska i zove se faza pristajanja. U prvom dijelu te faze, ili prilazu, trajektorija letjelice podešava se tako da tangira stazu slijetanja. Prilaz započinje na vrlo malim visinama, od tri do jednog metra iznad tla. Nakon toga dolazi kratka faza pridržavanja, koja traje do dodira s tlom.

Od trenutka kad točkovi dodirnu sletnu stazu počinje treća faza, ili faza zaustavljanja, koja se sastoji od usporavanja i kočenja sve do brzine rulanja. Svaka od tih faza posebno se ispituje, a dužina i trajanje svih faza određuje dužinu i trajanje slijetanja.

Posebno je važno da se odredi staza zaustavljanja. U toku zaustavljanja na letjelicu djeluju otpor zraka i otpor trenja između točkova i sletne staze. Ti se otpori stalno mijenjaju zbog upotrebe kočnica, a na većim i bržim suvremenim zrakoplovima mijenjaju se i zbog obratnog potiska na kraju faze zaustavljanja. Sve se to može opisati diferencijalnom jednadžbom zaustavljanja

$$m \frac{dV}{dt} = P_z - \mu(G - R_y) - R_{xx} \quad (73)$$

gdje je  $P_z$  potisak pri zaustavljanju. Potisak zaustavljanja je funkcija vremena i iznosi

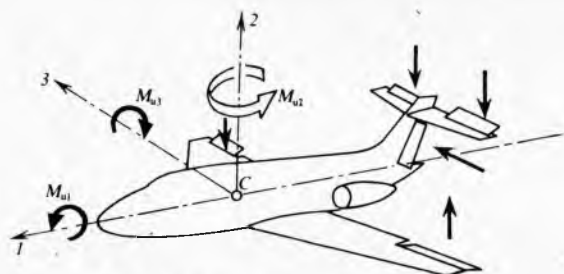
$$P_z = \begin{cases} 0 & \text{za } t_k \geq t \geq 0 \\ -P_k(t) & \text{za } t_R \geq t > t_k \end{cases} \quad (74)$$

gdje je  $P_k$  obratni potisak,  $t_k$  trenutak kad se uključi obratni potisak,  $t_R$  trenutak kad se dostigne brzina rulanja. Koeficijent trenja  $\mu$  također je zadana funkcija vremena, ovisna o tehnici zaustavljanja.

Diferencijalna jednadžba zaustavljanja (73) je nelinearna, a osim toga uključuje i zadane empirijske funkcije za vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata i koeficijenata trenja, pa se zato rješava numeričkim metodama pomoću digitalnog elektroničkog računala.

UPRAVLJANJE LETOM I STABILNOST

Kad se rješava neki zadatak vezan za varijable gibanja letjelice, obično se prvo pišu jednadžbe gibanja težišta letjelice i obrtnog gibanja oko težišta, pa se tek potom analiziraju i ograničenja s dopunskim obavijestima o zadatku. Na primjer, polazi se od jednadžbi težišta u kinematičkom koordinatnom sustavu i jednadžbi obrtnog gibanja u dinamičkom sustavu.



Sl. 17. Sile i momenti upravljanja letjelicom

Opterećenja su zadana za različite baze; potisak ili vučna sila s obzirom na dinamičku bazu, težina za geodetsku, a aerodinamičko opterećenje za aerodinamičku bazu. Upravljačke sile i momenti nekad su posljedica djelovanja komponenata potiska, a nekad nastaju kao dodatne aerodinamičke sile i momenti. U oba ta slučaja komponente sila i momenata upravljanja poznate su s obzirom na dinamički sustav, jer su posljedica djelovanja upravljačkih organa koji pripadaju konstrukciji letjelice (sl. 17).

**Varijable leta i vektor stanja.** Iz diferencijalnih jednadžbi gibanja letjelice izdvajaju se sljedeće grupe varijabli leta uređenih u matricnom obliku:

$$\begin{aligned} \text{varijable brzine} & \quad \dot{X}_v = [V_1 \ V_2 \ V_3]^T \\ \text{varijable kutne brzine} & \quad \dot{X}_\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T \end{aligned}$$

varijable kutova dinamičke baze  $\hat{X}_\psi = [\psi \vartheta \gamma]^T$ ,  
 varijable kutova kinematičke baze  $\hat{X}_\theta = [\Psi \Theta 0]^T$ ,  
 varijable kutova aerodinamičke baze  $\hat{X}_\alpha = [\alpha \beta \gamma]^T$ .

To je pet vektorskih ili četrnaest skalarnih varijabli koje se mogu podvrgnuti upravljačkom djelovanju. Ima šest diferencijalnih jednadžbi, a njima se moraju pridružiti još i tri Eulerove relacije i tri trigonometrijske relacije. Eulerove relacije kutnih brzina jesu:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \bar{E}_{\psi\omega} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{ili kraće} \quad \hat{X}_\omega = \bar{E}_{\psi\omega} \cdot \hat{X}_\psi. \quad (75)$$

Trigonometrijske relacije jesu tri kinematičke relacije između kutova  $[\alpha \beta \gamma_c]$ ,  $[\Psi \Theta 0]$  i  $[\psi \vartheta \gamma]$  što se dobivaju iz transformacijskih matrica (19) kao trigonometrijske relacije u obliku izraza (24), (25) i (26) ili, kraće, u obliku matrice (47).

Time je problem formuliran pomoću šest diferencijalnih jednadžbi gibanja, tri diferencijalne Eulerove relacije i tri trigonometrijske relacije. To je dvanaest analitičkih, uzajamno neovisnih relacija gibanja, koje određuju dvanaest varijabli leta u funkciji vremena. U vektorskom obliku te su varijable

$$\begin{bmatrix} V(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \vartheta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Psi(t) \\ \Theta(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma_c(t) \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Umjesto  $[V00]^T$  i  $[\Psi \Theta 0]^T$  može se uzeti samo jedan vektor-stupac s trima komponentama brzine za dinamičku bazu  $[V_1 V_2 V_3]^T$ .

Ako je potrebno odrediti još i koordinate trajektorija, pisat će se

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \bar{T}_{kg} \cdot \hat{X}_V = \begin{bmatrix} V \cos \Theta \cos \Psi \\ V \sin \Theta \\ -V \cos \Theta \sin \Psi \end{bmatrix}, \quad (77)$$

što nakon integriranja daje varijable položaja letjelice u prostoru  $[x_0 y_0 z_0]^T = \hat{X}_0$ . Tri nove varijable uvjetovale su i uvođenje triju novih relacija s varijablama  $\hat{X}_u$  i  $\hat{X}_\theta$ .

Da se riješi problem gibanja, potrebno je još znati i početne uvjete, a to se svodi na poznavanje dvanaest vrijednosti nepoznatih funkcija za početni trenutak  $t = t_0$ .

**Aerodinamičko opterećenje u jednadžbama gibanja.** Aerodinamičke sile i momenti poznati su tek nakon ispitivanja modela i prototipa letjelice. Aerodinamičke karakteristike moraju se prikazati u obliku prikladnom za jednadžbe koje se žele primijeniti, te se uglavnom zadaju prema varijablama leta, Reynoldsovu broju  $Re$  i Machovu broju  $Ma$ . Kad se izračunaju trajektorije ili sposobnosti letjelice u manevarskom letu, dovoljno je ako se koeficijenti aerodinamičkog momenta  $C_m$  i aerodinamičke sile  $C_R$  zadaju kao funkcije napadnog kuta i Machova, odnosno Reynoldsova broja. Aerodinamička sila je definirana relacijom

$$R_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_R, \quad (78)$$

gdje je  $C_R(\alpha, \beta, Ma, Re)$ , a  $S$  neka uvjetna površina, dok je aerodinamički moment:

$$M_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_m, \quad (79)$$

gdje je  $C_m(\alpha, \beta, \gamma, Ma, Re)$ , a  $l$  neka uvjetna duljina (npr. tetiva krila).

Međutim, kad se analiziraju procesi upravljanja ili stabilizacije letjelice, aerodinamičko opterećenje mora se izraziti prema varijablama koje se namjeravaju kontrolirati sustavom upravljanja. Tako se aerodinamičke sile  $\hat{R}_A$  i momenti  $\hat{M}_A$  mogu prikazati kao funkcije varijabli leta, njihove derivacije po vremenu i Machova broja, odnosno Reynoldsova broja, već prema tome da li je režim leta supersoničan, kad je mjerodavan Machov broj, ili je supsoničan s relativno malim brzinama, kad je mjerodavan jedino Reynoldsov broj, pa je

$$\hat{R}_A = \hat{R}_A(\hat{X}, \hat{X}, Ma, Re) \quad (80)$$

$$\hat{M}_A = \hat{M}_A(\hat{X}, \hat{X}, Ma, Re). \quad (81)$$

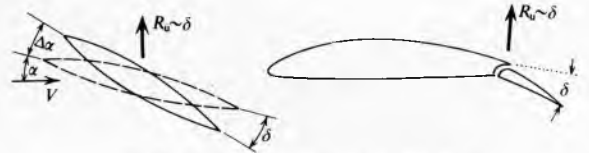
Vektor varijabli leta  $\hat{X} = [V_1 V_2 V_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3]^T$  sadrži samo šest samostalnih komponenata u bilo kojoj kombinaciji.

**Varijable upravljanja.** Sile ili momenti upravljanja mogu biti aerodinamičke naravi ako ih stvaraju pokretna krilca, ili reaktivne naravi ako se uređaji za upravljanje sastoje od pokretnih mlaznica ili dodatnih uređaja za promjenu smjera vektora potiska, odnosno vučne sile. Otkloni cijelih krila ili otkloni samo dodatnih aerotijela stvaraju dodatne aerodinamičke sile upravljanja  $R_u$  koje, ako su dovoljno udaljene od težišta, mogu ostvariti zadovoljavajuće momente upravljanja (sl. 17).

Dodatne sile upravljanja proporcionalne su otklonu  $\delta$  krilaca (sl. 18) ili mlaznica ako su ostali uvjeti nepromijenjeni, a definirane su izrazom

$$R_u = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_u^\delta \delta, \quad (82)$$

gdje je  $C_u^\delta$  gradijent sile upravljanja. Izraz (82) pokazuje da je sila upravljanja  $R_u$  proporcionalna otklonu  $\delta$  za zadanu geometrijska i aerodinamička svojstva organa upravljanja  $S C_u^\delta$ , te za zadanu visinu leta određenu gustoćom zraka  $\rho$  i brzinu leta  $V$ .



Sl. 18. Dodatne sile upravljanja letjelicom

Otklon uređaja za upravljanje  $\delta$  ima indeks prema momentu upravljanja koji se tim otklonom ostvaruje. Za letjelice su prihvaćeni sljedeći nazivi:  $\delta$ , otklon krmila (elerona) koji pobuđuje valjanje ili rotaciju oko uzdužne osi 1;  $\delta_s$  otklon krmila (vertikalnog repa) koji pobuđuje skretanje oko poprečne osi 2;  $\delta_p$  otklon krmila (stabilizatora visine) koji pobuđuje propinjanje oko poprečne osi 3.

Termin *otklon* treba nekad shvatiti i u prenesenom smislu, npr. kad se ne radi o običnom krilcu ili krilu koje se stvarno pomiče ili otklanja za kut  $\delta$ , nego kad se upravlja letjelicom pomoću promjene nekog od parametara koji nisu izravno vezani s uređajima za upravljanje. Tako je, npr., s komandama motora, gdje se sa  $\delta_M$  označuje otklon krmila motora, koji pobuđuje promjene snage ili sile potiska, odnosno vučne sile motora.

**Letjelica kao objekt upravljanja.** Kad su zadani početni uvjeti, diferencijalne jednadžbe gibanja, uz dodatne kinematičke relacije, predstavljaju sustav od dvanaest jednadžbi za određivanje dvanaest nepoznatih varijabli. Uz dosta teškoća taj se sustav može integrirati numeričkim metodama pomoću digitalnog elektroničkog računala. Numerička rješenja korisna su obavještenja o općim sposobnostima letjelice u manevarskom letu, a kompjutorski programi često služe za istraživanja najboljih dinamičkih i konstrukcijskih rješenja letjelice. Često se uz pomoć jednadžbi gibanja analiziraju samo specijalni slučajevi leta, kao što su polijetanje, slijetanje, zaokret, horizontalni let itd. Međutim, procesi upravljanja i stabilizacije letjelice ne mogu se istraživati pomoću jednadžbi u prvobitnom obliku. Upravljanje nekom letjelicom zahtijeva dogovor o željenoj trajektoriji, izbor varijabli leta i upravljanja, odnosno dogovor o tome što će se smatrati poremećajima, a što će se prepustiti da se spontano ponaša bez upravljanja. Drugim riječima, odabrat će se varijable koje će se korigirati djelovanjem pilota, za razliku od varijabli koje se mijenjaju spontano.

Kad se priprema opis letjelice kao objekta upravljanja, prije svega treba prihvatiti skup varijabli na koje će se djelovati sustavom upravljanja. Nakon toga odrede se željene varijable leta za neke posebne slučajeve, npr. za vođeno slijetanje. Zakoni koji zadovoljavaju postavljene zahtjeve upravljanja dobivaju se na različite načine, već prema potrebama vođenja letjelice.

Zbog toga stvarno stanje varijabli leta razlaže se na dva dijela: nominalno i poremećajno stanje, i to samo za one varijable koje će se kontrolirati. Sve ostalo se tretira kao spontane funkcije istih potrebnih i stvarnih vrijednosti, dakle, koje se ne kontroliraju, nego se samom konstrukcijom letjelice postiže da zakon promjene tih spontanijih funkcija zadovoljava unaprijed postavljene zahtjeve.

Ako je  $X$  vektor-stupac kojemu su elementi varijable leta, onda je stvarno stanje varijabli leta zbroj nominalnog (željenog) i poremećajnog dijela:

$$\hat{X}_{\text{stvarno}} = \hat{X}_{\text{željeno}} + \delta \hat{X}. \quad (83)$$

Poremećajni dio  $\delta \hat{X}$  obilježava se u nelinearnim sustavima s malim slovom  $\hat{x}$  i zove se vektorom stanja. Treba znati da se u linearnim sustavima vektor stanja ne razlikuje od varijabli gibanja ili leta. Međutim, opis je gibanja letjelice nelinearan i prema jednadžbama (43) i (44) zadan je relacijama

$$m \dot{V} + m \tilde{\omega} \hat{V} = \hat{R} + \hat{R}_u, \quad (84)$$

$$\bar{J} \dot{\omega} + \tilde{\omega} \bar{J} \omega = \hat{M} + \hat{M}_u, \quad (85)$$

gdje je  $\hat{R}$  vanjska sila,  $\hat{M}$  vanjski moment,  $\hat{R}_u$  sila upravljanja, a  $\hat{M}_u$  moment upravljanja.

Imajući u vidu oznaku  $\tilde{\omega} = \hat{\omega}^K$ , gdje  $K$  preslikava vektor  $\hat{\omega}$  u kososimetričnu matricu  $\tilde{\omega}$ , mogu se jednadžbe (84) i (85) transformirati u oblik

$$\begin{bmatrix} \bar{m} & 0 \\ -\bar{M}_v & \bar{J} \\ 0 & \bar{J} \end{bmatrix} \dot{\hat{X}} + \begin{bmatrix} \hat{X}_\omega^K m & 0 \\ 0 & \hat{X}_\omega^K \bar{J} \end{bmatrix} \hat{X} = \hat{F}(\hat{X}, \hat{X}) + \bar{K} \cdot \bar{U}(t), \quad (86)$$

gdje je još uzeto da su vektor upravljanja  $\hat{U} = [\delta_r \delta_s \delta_p \delta_M]^T$  i vanjsko opterećenje  $\hat{F} = [\hat{R}^T \hat{M}^T]^T$  funkcije varijable gibanja  $X$  i njezine derivacije  $\dot{X}$ , dok je  $K$  pravokutna matrica uz sile i momente upravljanja. Lijeva strana jednadžbe (86) očito je nelinearna, a budući da je aerodinamičko opterećenje neodređeno, ta je jednadžba vrlo nepovoljna za analize upravljanja i vođenja. Teškoća se može svladati linearizacijom jednadžbe, te ako se promatraju samo poremećaji s obzirom na dogovoreno potrebno stanje.

Treba napomenuti da uređaji za upravljanje mijenjaju uvjete interakcije letjelice i zračne okolice, a ti izmijenjeni uvjeti stvaraju opterećenja koja mijenjaju trajektoriju letjelice.

U mehanici leta ispituju se sposobnosti uređaja za upravljanje da obave određene zadatke, te je dovoljno ako se rad organa upravljanja odredi za uvjete kad su razlike između stvarnih i potrebnih vrijednosti varijabli leta jednake nuli.

Za analizu sustava upravljanja treba poznavati veze između poremećaja varijabli leta i korekcijskih aktivnosti organa upravljanja. Rad uređaja za upravljanje daje uzročne poremećaje, dok su poremećaji varijabli leta posljedični poremećaji za sustav upravljanja letjelicom. Pri uspostavljanju veze između uzročnih (ili ulaznih) poremećaja i posljedičnih (ili izlaznih) poremećaja koji uvjetuju aktivnost sustava upravljanja, pretpostavlja se da su poremećaji male veličine s obzirom na polazne vrijednosti varijabli. Zbog toga se poremećaji tretiraju kao varijacije varijabli leta, odnosno upravljanja. Stvarne veze između jednih i drugih varijacija dobivaju se iz sustava diferencijalnih jednadžbi gibanja uz dodatne Eulerove kinematičke relacije i trigonometrijske relacije.

Primjenjujući operator varijacije na inercijska i vanjska opterećenja dobiva se jednadžba stanja u obliku

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A} \hat{x} + \bar{B} \hat{u}, \quad (87)$$

gdje je  $\hat{x} = [\delta \hat{V}^T \delta \hat{\omega}^T]^T$  odziv letjelice,  $\hat{u} = \delta \hat{U} = [u_1 u_2 u_3 u_4]^T$  vektor upravljanja, a matrice su u jednadžbi stanja (87)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{m} - \bar{S}_v & -\bar{S}_\omega \\ -\bar{M}_v & \bar{J} - \bar{M}_\omega \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{S}_v - m \tilde{\omega} & \bar{S}_\omega + m \tilde{V} \\ \bar{M}_v & \bar{M}_\omega - [\tilde{\omega} \bar{J} - (\bar{J} \tilde{\omega})^K] \end{bmatrix}, \quad (88)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{m} - \bar{S}_v & -\bar{S}_\omega \\ -\bar{M}_v & \bar{J} - \bar{M}_\omega \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{R}_u \\ \bar{M}_u \end{bmatrix}, \quad (89)$$

Budući da su vektori vanjskog opterećenja  $\bar{S}$  i  $\bar{M}$ , submatrice u matricama (88) i (89) imaju sljedeći oblik:

$$\bar{M}_\omega = \frac{\partial \bar{M}}{\partial \tilde{\omega}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \omega_1} & \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} & \frac{\partial M_1}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial M_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial M_2}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial M_3}{\partial \omega_1} & \frac{\partial M_3}{\partial \omega_2} & \frac{\partial M_3}{\partial \omega_3} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

dok je submatrica za upravljanje

$$\bar{R}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{u1}}{\partial \delta_r} & \frac{\partial R_{u1}}{\partial \delta_s} & \frac{\partial R_{u1}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial R_{u1}}{\partial \delta_M} \\ \frac{\partial R_{u2}}{\partial \delta_r} & \frac{\partial R_{u2}}{\partial \delta_s} & \frac{\partial R_{u2}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial R_{u2}}{\partial \delta_M} \\ \frac{\partial R_{u3}}{\partial \delta_r} & \frac{\partial R_{u3}}{\partial \delta_s} & \frac{\partial R_{u3}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial R_{u3}}{\partial \delta_M} \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Uz jednadžbu stanja treba poznavati i linearizirane Eulerove relacije

$$\begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_3 \end{bmatrix} = \bar{E}_{\psi \omega} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \beta \\ \delta \gamma \end{bmatrix} + \bar{E}_0 \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \beta \\ \delta \gamma \end{bmatrix}, \quad (92)$$

gdje je

$$\bar{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \psi \cos \vartheta & 0 \\ 0 & -\psi \sin \vartheta \cos \gamma & \vartheta \cos \gamma - \psi \cos \vartheta \sin \gamma \\ 0 & -\psi \cos \vartheta \sin \gamma & -\vartheta \sin \gamma - \psi \sin \vartheta \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Varijacija trigonometrijskih relacija dovodi do linearne jednadžbe

$$\bar{\Gamma}_\theta \cdot \hat{x}_\theta + \bar{\Gamma}_x \cdot \hat{x}_x + \bar{\Gamma}_\psi \cdot \hat{x}_\psi = 0, \quad (94)$$

u kojoj su matrice

$$\bar{\Gamma}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi \\ 0 & -\sin \theta \sin \gamma_c \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_\theta = \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \theta \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$\bar{\Gamma}_x = \begin{bmatrix} \Phi_1^x & \Phi_2^x & 0 \\ \Phi_2^x & \Phi_3^x & 0 \\ \Phi_3^x & \Phi_3^x & -\cos \theta \cos \gamma_c \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_x = \begin{bmatrix} \delta \alpha \\ \delta \beta \\ \delta \gamma_c \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$\bar{\Gamma}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^\psi & \Phi_1^\psi \\ -\Phi_2^\psi & \Phi_2^\psi & \Phi_2^\psi \\ 0 & \Phi_3^\psi & \Phi_3^\psi \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_\psi = \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \delta \beta \\ \delta \gamma \end{bmatrix}. \quad (97)$$

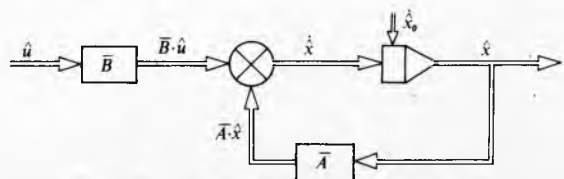
U matricama (95), (96) i (97) oznake funkcija s gornjim i donjim indeksom znače derivacije tih funkcija po gornjem indeksu, pa je npr.

$$\Phi_2^x = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} = -\sin \psi \cos \vartheta \cos \beta \sin \alpha + (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) \cos \alpha \cos \beta, \quad (98)$$

gdje je funkcija  $\Phi_2$  definirana jednadžbom (25).

Dakle, za analizu i sintezu sustava upravljanja i stabilizacije letjelice mogu poslužiti relacije (87), (92) te (95) do (97), ili matematički model letjelice kao objekta upravljanja.

Uobičajena analogna shema jednadžbe stanja letjelice (87) prikazana je na sl. 19. Takva analogna shema često se upotrebljava u sustavima automatskog upravljanja letjelicama kao model letjelice u kojem je za zadani ulaz vektora upravljanja  $\hat{u}$  određen odziv letjelice  $\hat{x}$ .



Sl. 19. Analogna shema linearnog modela letjelice

**Jednadžba stanja za krivolinijski let u vertikalnoj ravnini.** Specijalni slučaj gibanja letjelice u vertikalnoj ravnini redovno služi za analizu sposobnosti propinjanja letjelice i preopterećenja njezinih uzgonskih elemenata. Gibanje se promatra za uvjet da je skretanje letjelice izvan vertikalne ravnine stalno unutar dopuštenih uskih granica, tj. ako je željeni azimut  $\Psi(t) = 0$ , mora i stvarni azimut biti  $\Psi_s(t) = 0$ , pri čemu se stvarni azimut izjednačuje s mjerenim vrijednostima.

Diferencijalne jednadžbe gibanja za manevar u vertikalnoj ravnini jesu:

$$m\dot{V} = P \cos \alpha - G \sin \Theta - R_x, \quad (99)$$

$$mV\dot{\Theta} = P \sin \alpha + R_y - G \cos \Theta + R_{uy}, \quad (100)$$

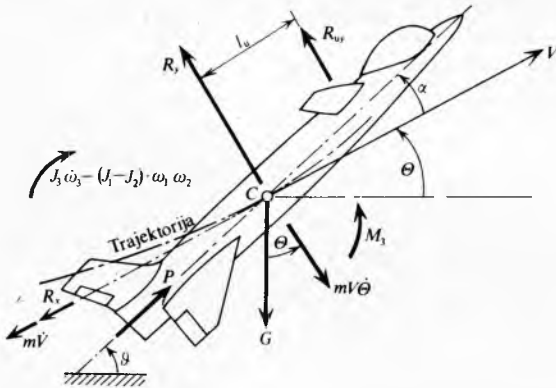
$$J_3 \dot{\omega}_3 = M_3 + R_{uy} l_u, \quad (101)$$

$$\dot{x}_0 = V \cos \Theta; \quad \dot{\vartheta} = \Theta + \alpha, \quad (102)$$

$$\dot{y}_0 = V \sin \Theta; \quad \dot{\omega}_3 = \dot{\vartheta}. \quad (103)$$

Značenje oznaka u jednadžbama (99)–(103) vidi se na sl. 20.

Budući da se pretpostavlja idealno upravljanje, dakle nema nikakvih poremećaja, to se za proračun trajektorije letjelice može uzeti da su aerodinamičke sile i momenti funkcije jedino napadnog kuta  $\alpha$  i Machova broja.



Sl. 20. Sile, momenti i kutovi za određivanje jednadžbe gibanja letjelice u vertikalnoj ravnini

Varijacije jednadžbi gibanja izvode se za sljedeće tri varijable: brzinu  $V$ , napadni kut  $\alpha$  i kutnu brzinu propinjanja  $\dot{\vartheta}$ , pa se dobiva sustav od triju linearnih jednadžbi:

$$m\delta V = \delta P + mg \cos(\vartheta - \alpha) \delta \alpha - R_x, \quad (104)$$

$$m\delta V(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha}) + mV(\delta \dot{\vartheta} - \delta \dot{\alpha}) = \delta P \cdot \alpha + P \cdot \delta \alpha + \delta R_y - mg \sin(\vartheta - \alpha) \delta \alpha + R_{uy}, \quad (105)$$

$$J_3 \delta \dot{\vartheta} = \delta M_z + l_u \delta R_{uy}. \quad (106)$$

Varijacijom potiska i aerodinamičkog opterećenja dobiva se jednadžba stanja (87), u kojoj su  $\dot{u} = [u, 0, u_3]^T$  vektor upravljanja,  $\hat{x} = [\delta V \delta \alpha \delta \dot{\vartheta}]^T$  vektor stanja letjelice, a matrice

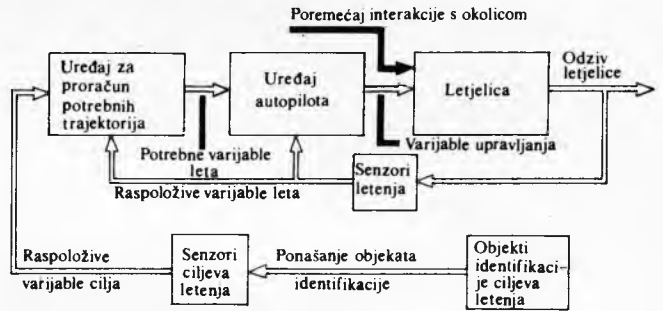
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} C_x^v & C_x^a & C_x^{\dot{\vartheta}} \\ -C_y^v & -\frac{mV}{qS} - C_y^a & C_y^{\dot{\vartheta}} \\ -C_{mz}^v & -C_{mz}^a & -C_{mz}^{\dot{\vartheta}} + \frac{J_3}{aSI} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{V} C_x + \frac{1}{a} C_x^{M_1} & C_x^a + \frac{G}{qS}(\vartheta - \alpha) & C_x^{\dot{\vartheta}} \\ \frac{2}{V} C_y + \frac{1}{a} C_y^{M_1} + \frac{m(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha})}{qS} - \frac{2}{V} C_{uy}^{\delta r} & C_y^a + \frac{P + G \sin(\vartheta - \alpha)}{qS} & C_y^{\dot{\vartheta}} \\ \frac{2}{V} C_{mz} + \frac{1}{a} C_{mz}^{M_1} & C_{mz}^a & C_{mz}^{\dot{\vartheta}} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} C_x^f & C_x^a & C_x^{\dot{\vartheta}} \\ -C_y^f & -\frac{mV}{qS} - C_y^a & C_y^{\dot{\vartheta}} \\ -C_{mz}^f & -C_{mz}^a & -C_{mz}^{\dot{\vartheta}} + \frac{J_3}{aSI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{P^{\delta r}}{qS} & 0 & 0 \\ \frac{P^{\delta r} \alpha}{qS} & 0 & C_{uy}^{\delta p} \\ 0 & 0 & \frac{l_u}{l} C_{uy}^{\delta p} \end{bmatrix} \quad (108)$$

Kao što se vidi iz oznaka, članovi matrice  $\bar{A}$  većinom su derivacije aerodinamičkih koeficijenata.

**Automatsko upravljanje letjelicom.** Autopiloti, koji se redovno upotrebljavaju u zrakoplovstvu, grade se na temelju jednadžbe stanja leta letjelice. Na sl. 21 prikazana je blok shema automatskog upravljanja letjelicom.



Sl. 21. Funkcionalna shema automatskog upravljanja letjelicom

Pomoću senzora mjere se varijable leta letjelice, koje se zovu raspoloživim varijablama, jer se zbog grešaka mjerenja razlikuju od stvarnih varijabli. Ako je cilj leta također neki pokretni objekt (npr. treba susresti ili presresti neku drugu letjelicu, brod u plovidbi itd.), senzori mjere ponašanje tog objekta i određuju raspoložive varijable gibanja cilja. Na temelju ponašanja cilja i letjelice, a s unaprijed definiranom metodom, izračunavaju se potrebne trajektorije ili potrebne varijable leta u promatranom trenutku. Uspoređivanjem potrebnih i raspoloživih varijabli leta, uređaj autopilota određuje potrebne aktivnosti uređaja za upravljanje, ili varijabli upravljanja, da bi se razlika između potrebnih i raspoloživih varijabli leta svela na što je moguće manji iznos i time ostvarili ciljevi leta.

Mehanika leta bavi se određivanjem kinematičkih uvjeta za proračun potrebnih trajektorija i modeliranjem ponašanja letjelice pomoću jednadžbi stanja, što je u shemi na sl. 21 sadržano u bloku uređaja autopilota.

**Stabilnost letjelice.** Osnovni zadatak ispitivanja stabilnosti letjelice sastoji se u proračunu svojstava poremećajnog gibanja opisanog jednadžbom stanja (87). Ako se po prestanku djelovanja poremećajnih faktora poremećaji varijabli leta (varijable stanja) smanjuju, odnosno ako vrijednosti amplituda postaju sve manje, tada je stanje gibanja ili stanje leta stabilno. Ako varijacije varijabli leta stalno rastu ili pak teže nekoj granici koja je izvan prihvatljive vrijednosti, tada je stanje leta nestabilno.

Jednadžba stanja je, zapravo, sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi kojega je rješenje

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \exp \bar{A}(t - t_0), \quad (109)$$

gdje je  $t$  vrijeme. Da bi rješenje bilo stabilno, moraju biti zadovoljeni određeni uvjeti, pa se zato moraju ispitati korijeni karakteristične jednadžbe

$$\det |\bar{A} - \lambda I| \equiv 0, \quad (110)$$

gdje je  $A$  matrica uz poremećajnu varijablu  $\hat{x}$  u jednadžbi stanja,  $I$  je jedinična matrica, a  $\lambda$  su korijeni karakteristične jednadžbe.

Letjelica je stabilna ako su u izrazu (110) negativni svi realni korijeni  $\lambda_i$  i svi realni dijelovi kompleksnih korijenja. Neutralno kritično stanje nastaje ako se samo jedan realni korijen svede na nulu, ili ako se samo jedan realni dio kompleksnog korijenja svede na nulu, a svi ostali su negativni.

Neko je zadano stanje ravnoteže ili stanje ustaljenog gibanja stabilno ako utjecaj ili odziv, zbog nametnutog poremećajnog impulsa ili opterećenja koje djeluje u konačnom intervalu vremena, postaje definitivno zanemariv. Stoga je stabilnost svojstvo ustaljenog gibanja nakon što prestanu djelovati poremećajna opterećenja. Pri tom se mora imati u vidu i to da je stabilnost pojam vezan ili uvjetovan konačnim posljedicama nastalim djelovanjem malog i kratkotrajnog poremećaja na tijelo u gibanju. To, međutim, vrijedi za letjelicu bez uređaja za upravljanje i stabilizaciju. Ako se letjelica promatra zajedno s uređajima autopilota, onda se govori o *sintetičkoj stabilnosti*.

Mehanika leta daje samo potrebne podatke i modele ponašanja letjelice, da bi se ona s uređajima i pilotom, dakle kao cjelina, mogla tretirati na sintetički način metodama teorije sustava i automatskog upravljanja, odnosno stabilizacije.

LIT.: W. J. Duncan, Control and stability of aircraft. University Press, Cambridge 1952. — C. A. Горбатенко, Механика полета. Машинное роение, Москва 1969. — M. Momirski, Raketodinamika i konstrukcija vođenih projektila. Tehnički školski centar JNA, Zagreb 1971. — E. Roberson, Lectures on rotational dynamics of orbiting gyrostats. International Centre for Mechanical Sciences Udine, Dubrovnik 1971. — M. Nenadović, Stabilnost i upravljivost letjelica. Mašinski fakultet Univerziteta Beograd, Beograd 1972. — M. Momirski, Opšte jednačine kretanja rakete s jednim parametrom promjenjive geometrije. Radovi Tehničke vojne akademije br. 9, Zagreb 1976. — M. Vukobratović, Dinamika robota. Institut Mihailo Pupin, Beograd 1977. — A. M. Мхитарян, Динамика полета. Машиностроение, Москва 1978.

M. Momirski

**MEHANIKA TLA**, grana mehanike koja proučava ponašanje diskontinuiranog materijala, sastavljenog od dijelova raspadnutih stijena (u slučajnom rasporedu koji se među sobom dodiruju, ali nisu vezani), od vode i plinova između tih dijelova, pri djelovanju sila na obodu ili unutar toga materijala. Primjenjuje se za određivanje granične otpornosti i deformacije tla opterećenog temeljima građevina, sila što djeluju na potporne konstrukcije, te graničnog i stabilnog nagiba prirodnih kosina, kosina nasipa i brana.

Graditelji starih epoha rješavali su zadatke koje je nametalo tlo kao prirodna podloga. Njihove metode vrednovanja tla i povratne veze između građevine i tla danas nisu poznate, ali ostaci građevina govore da se tražilo pogodno tlo. Vjerojatno je da su tradicija ceha i osobno iskustvo bili osnova. Stari spomenici koji još traju svjedoče o mnogim uspješnim rješenjima. Ima i nekoliko primjera neuspjeha (Pisa, 1180, sl. 1 i 2), ali je većina neuspjeha, jer su građevine propale zbog slabih temelja, nestala u zaboravu prošlosti.

Racionalna mehanika tla počinje 1773. god. kad je Ch. A. Coulomb (1736—1809), francuski vojni inženjer, objavio Esej o primjeni teorije maksimuma i minimuma na neke probleme u arhitekturi. U tom je radu riješen problem aktivnog tlaka i pasivnog otpora. Istodobno je eksperimentirao s uzorcima tla i postavio zakon otpornosti tla na smicanje, koji je i danas jedan od osnovnih zakona mehanike tla. W. J. Rankine (1820—1872) analitički je riješio problem graničnih stanja ravnoteže mase bez kohezije u neizmjernom poluprostoru pri vodoravnom rastezanju ili zbijanju i odredio orijentaciju ploha sloma (to se naziva aktivno, odnosno pasivno Rankineovo stanje). J. Resal je kasnije (1910) analitički riješio taj zadatak za masu s kohezijom s vodoravnom i nagnutom površinom. K. E. Pettersson i S. Hultin prvi su analizirali (1916) stabilnost tenorskog skoka s pretpostavljenom kružnom plohom sloma, što je dalje razradio W. Fellenius (1927).

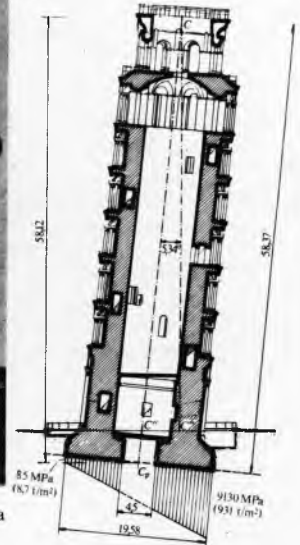
Do prvih desetljeća XX stoljeća prevladavaju u graditeljskoj praksi analitičke analize tlaka na potporne konstrukcije prema veoma jednostavnom fizičkom modelu zrnastog tla i Coulombovu zakonu linearne zavisnosti  $\tau_f = c + \sigma_v \tan \phi$ . Smatralo se da su  $c$  i  $\phi$  konstante svake vrste tla. Nije bilo teorije za proračun kritičnog opterećenja tla pod temeljima. To je područje ostalo u empirijskoj procjeni dopuštenog opterećenja na temelju prijašnjeg iskustva s veoma ograničenim podacima o svojstvima nevezanih i vezanih vrsta tla.

Teorijsku osnovu za proračun deformacija opterećenog prostora postavio je 1865. J. Boussinesq analitičkim rješenjem raspodjele naprezanja unutar elastičnoga, homogenoga, izotropnoga poluprostora opterećenog koncentriranom silom na površini. Iako je taj fizički model neprikladan za tlo koje nije ni elastično ni homogeno, a većinom ni izotropno, primjena je tog rješenja bila

ograničena još i činjenicom da dugo nije postojala metoda ispitivanja kojom bi se mogli ustanoviti *elastični parametri* tla. Kao palijativ služilo je probno opterećenje tla, koje iz mnogo razloga ne može biti model za prototip opterećenja građevinom. Tek su eksperimentalni i teorijski radovi K. Terzaghija dvadesetih godina našeg stoljeća dali nove fizičke konkretne osnove za pouzdaniju spoznaju o ponašanju tla pod građevinama i tla kao građevnog materijala.



Sl. 1. Kosi toranj u Pisi — posljedica pogrešne procjene svojstava tla



Sl. 2. Presjek kroz kosi toranj u Pisi s dijagramom naprezanja u tlu

U djelu Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage (1925) K. Terzaghi je postavio osnove nove znanstvene grane — *mehanika tla*. To je otvorilo nov put rješavanju složenih zadataka građenja na tlu i u tlu u doba kad je razvitak mehaničkih pomagala omogućivao izvođenje sve većih i složenijih zahvata u tlu. Tako se nova znanstvena grana brzo proširila, a danas je predmet temeljnog obrazovanja svakog graditelja.

*Klasična mehanika tla* (tako se nazivaju teorijska rješenja iz XIX stoljeća) osniva se na dvije idealizacije realnog tla: a) pretpostavlja se da je tlo kruto plastično tijelo kad se razmatra problem sloma, odnosno graničnog opterećenja, b) pretpostavlja se da je tlo elastično tijelo kad se razmatra problem deformacija. Ta su dva modela u određenim granicama prikladna za analitičko rješenje više tipičnih zadataka, jer se karakteristike materijala određuju jednostavnim eksperimentima na uzorcima tla u laboratoriju. Baš su ti eksperimenti i teorijska razrada rezultata osnova za napredak mehanike tla. Realno tlo, naime, ne odgovara ni jednome od dva modela, jer je to diskontinuirani nelinearno elastični materijal s malim povratnim deformacijama pri rasterećenju i s viskoznom deformacijama.

Eksperimentalno proučavanje odnosa između naprezanja i deformacija uzoraka tla omogućilo je definiranje veza između stanja tla, promjena naprezanja, deformacija i vremena koje znatno vjernije opisuju njegova svojstva. Rezultati eksperimentalnih radova ne bi međutim imali većeg značenja za inženjersku praksu bez suvremenog razvika numeričkog računala i elektroničkih računala. Rješenja više nisu ograničena mogućnostima analitičkog računala, pa se mogu primijeniti modeli nelinearno elastičnog materijala s viskoznom elementima koji traže znatno složenije proračune. S tim se postupcima može proučavati ponašanje tla, i to od malih dodatnih opterećenja, kad se ono ponaša približno kao elastično tijelo, pa do opterećenja koja uzrokuju veliki prirast deformacija uz mali prirast naprezanja, kad se ono ponaša približno kao plastično tijelo. Osnovna proturječnost da se u matematičkim modelima diskontinuirani materijal zamjenjuje kontinuomom s pogodnim konstitutivnim vezama nije još prevladana. Ona ima manje posljedice kad se promatra ponašanje sitnozrnatog tla s veoma mnogo vrlo sitnih čestica u jedinici volumena. Kad se proučava materijal krupnih zrna (krupan šljunak, kameni nasipi, stijenske mase) model kontinuuma sve nepotpunije opisuje svojstva i ponašanje materijala što su fragmenti veći. R. J. Marsal (1977) je sa uspjehom uveo stohastičke i statističke metode da bi dobio prikladniji model za diskontinuirani materijal sastavljen od krupnih fragmenata.

Suvremena teorija mehanike tla omogućuje da se i praktični zadaci rješavaju potpunije i pouzdanije nego što je to bilo moguće klasičnim dualističkim pristupom. Detaljnije istraživanje na terenu, složenije ispitivanje uzoraka u laboratoriju i primjena kompleksnih programa za elektronička računala uvjeti su za uspješnija rješenja.

Primjena tih kompleksnih metoda potrebna je za sigurno projektiranje velikih, složenih i osjetljivih građevina. Ostaje otvoreno pitanje do kojeg stupnja treba u praksi primjenjivati produbljenju teoriju na materijal koji je po svom postanku veoma heterogen, puno više nego što se u razumnim granicama može obuhvatiti računskim modelima.

Sigurno je da će se klasična rješenja na dualističkoj koncepciji svojstava materijala još dugo primjenjivati za rješavanje standardnih zadataka.

Zbog toga će se izložiti ta rješenja, a samo će se skicirati nove mogućnosti koje su upravo počele davati rezultate.