terenu različitih kategorija, težine su obrnuto proporcionalne kvadratu srednjih pogrešaka za svaki vlak pa je

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}. \qquad (52)$$

m_0^2 je jedinična empirijska srednja pogreška na 1 km, koja se računa prema formuli

$$m_0 = \eta_{\mathrm{km}\,R} = \sqrt{\frac{[pff]}{n-1}}. \qquad (53)$$

Nesuglasice f računate su iz visina čvornog repera i pojedinih visinskih razlika: $f_1 = H_D - h_1, f_2 = H_D - h_2, f_3 = H_D - h_3$, a n je broj vlakova.

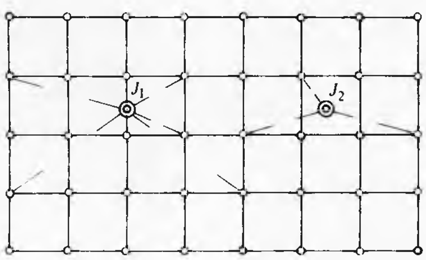
Srednja je pogreška visine čvornog repera

$$M_0 = \pm\sqrt{\frac{m_0}{[p]}}. \qquad (54)$$

Kompliciranije je izjednačenje nivelmanske mreže ako je ona sastavljena od više zatvorenih poligona ili više učvorenih repera. U prvom slučaju ujednačuje se metodom uvjetnih mjerenja, a u drugom metodom posrednih mjerenja. Osnovni je uvjet za izjednačenje metodom uvjetnih mjerenja da suma visinskih razlika u svakom poligonu bude nula ($[h] = 0$).

Zbog pogrešaka u mjerenju taj uvjet neće biti zadovoljen ($[h] \neq 0$), pa je potrebno izračunati korekcije za svaki zatvoreni poligon. Popravci se dobivaju posebnim postupkom računanja (rješavanjem tzv. normalnih jednadžbi) koji zadovoljava uvjet da suma kvadrata odstupanja bude minimalna ($[pvv] = \min$). U posljednje vrijeme takva se računanja izvode elektroničkim računalima.

Nivelman površina. Taj nivelman služi za uređivanje zemljišnog prostora (gradilišta, stadioni, trgovi, aerodromi, premjere gradova). Nivelmanom se određuju visinske razlike niza točaka koje karakteriziraju teren. Pomoću tih točaka na planovima se prikazuje reljef terena slojnicama ili u vertikalnoj projekciji po profilima. Točke plošnog nivelmana odabiru se na mjestima gdje se teren lomi, odnosno na međusobnim razmacima 30···50 m. Osim visinskih kota, za te točke mora se odrediti i njihov horizontalni položaj da bi se mogle ucrtati na planu (karti). Za tu svrhu mogu se upotrijebiti instrumenti manje točnosti ili teodoliti pri mjerenju s horizontalnom vizurom.



Sl. 23. Mreža kvadrata

Ako se zahtijeva veća točnost, površinski se nivelman provodi pomoću mreže kvadrata, pravokutnika ili rasutih točaka (sl. 23). Za nivelman pomoću mreže kvadrata potrebno je iskolčiti kvadratnu mrežu sa stranicama 10···20 m. Uglovi mreže stabiliziraju se drvenim kolcima i postave se točke za stajalište nivelira, tako da se s jednog stajališta može izmjeriti više točaka. S polazne točke treba odrediti ravninu za regulaciju površine. Letva se postavi u promatranoj ravnini i očita se rezultat na letvi, zatim se letva postupno postavlja na sve točke u dometu instrumenta i očitava. Očitavane vrijednosti uspoređuju se sa zadanom ravninom, a razlike pokazuju visinu nasipa ili iskopa.

LIT.: *C. Lallemand,* Lever des plansetnivellement. Paris 1912. — *A. Kostić, N. Svečnikov,* Nivelman. Beograd 1938. — *J. Böhm,* Geometrická nivelace. SNTL, Praha 1960. — *M. Janković,* Inženjerska geodezija, II dio. Tehnička knjiga, Zagreb 1966. — *S. Macarol,* Praktična geodezija. Tehnička knjiga, Zagreb ²1968. — *M. Janković,* Inženjerska geodezija, III dio. Liber, Zagreb 1980.

M. Janković

NOMOGRAFIJA, matematička disciplina za grafičko prikazivanje međusobne ovisnosti dviju ili više promjenljivih veličina i za određivanje vrijednosti neke promjenljive veličine koja je ovisna o jednoj ili više drugih veličina. Te su ovisnosti prikazane nomogramima koji su grafičke predodžbe odnosa definiranih matematičkim relacijama.

Naziv je nomografija prema grč. νόμος nomos *zakon* i γράφειν grafein *pisati;* naziv nomogram prihvaćen je 1890. god. na Međunarodnom kongresu matematičara u Parizu.

Međusobne ovisnosti promjenljivih veličina mogu se prikazati i dijagramima (grč. διάγραμμα diagrama *nacrt*), koji se mogu smatrati posebnim oblikom nomograma, ali se oni mogu upotrijebiti za prikaz odnosa između dviju ili triju veličina. Dijagramski prikaz odnosa među više od tri veličine, međutim, nije pregledan, pa je tada zgodnije upotrijebiti nomogramski prikaz.

Nomografija je svojedobno bila vrlo važna metoda računanja, posebno u tehničkim proračunima. Nomogramima su se rješavali problemi gdje bi za egzaktno rješavanje trebala velika matematička vještina ili mnogo vremena. S pojavom elektroničkih računala nomografija je izgubila tu svoju prednost, nomogrami se znatno rjeđe upotrebljavaju, ali još postoje područja tehničkih primjena gdje se upotrebljavaju zbog očiglednosti i preglednosti računanja.

BROJČANE LJESTVICE

Dužine razdijeljene na dijelove označene crticama (zarezima) s brojčanim naznakama iznad crtica ili pored njih nazivaju se brojčanim ljestvicama. Takve ljestvice nalaze se, npr., na vrpcama za mjerenje duljina, na termometrima za mjerenje temperature i sl. Razmaci među crticama mogu biti međusobno jednaki (jednakomjerna ljestvica) ili različiti (nejednakomjerna ljestvica). Crta na koju se nanose crtice zove se *nosač ljestvice*, a može biti dio pravca ili krivulje.

Zakon raspodjele crtica na nosaču ljestvice može se prikazati izrazom

$$\xi = \mu f(x), \qquad (1)$$

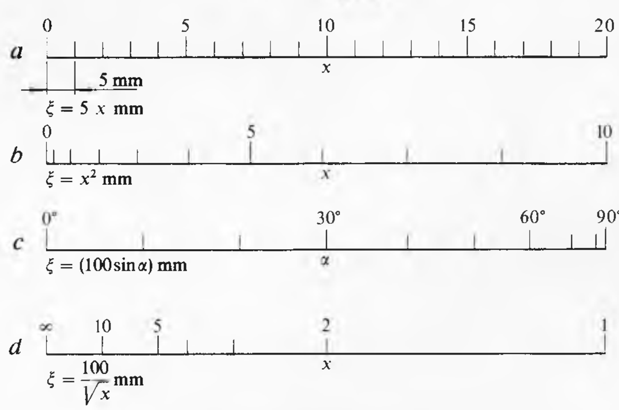
gdje je ξ udaljenost između početne (nulte) točke na ljestvici i crtice koja odgovara brojčanoj vrijednosti veličine x. Duljina ξ mjerena je u nekom mjerilu koje je izraženo *mjerilom* ili *modulom ljestvice* μ, i za promatranu je ljestvicu konstanta. Dimenzija je mjerila ljestvice duljina (mm, cm, ...), a vrijednošću mjerila određena je duljina ljestvice.

Ako ljestvica ne počinje vrijednošću $x = 0$, nego npr. od vrijednosti x_m, zakon raspodjele crtica na ljestvici može se prikazati izrazom

$$\xi_m - \xi_n = \mu f(x_m) - f(x_n). \qquad (2)$$

Kad su poznate vrijednosti $f(x_m)$ i $f(x_n)$, a to su brojčane vrijednosti između početne i posljednje crtice na brojčanoj ljestvici, i kad je poznata udaljenost tih crtica koja je jednaka razlici $\xi_m - \xi_n$, modul ljestvice dobiva se iz izraza

$$\mu = \frac{\xi_m - \xi_n}{f(x_m) - f(x_n)}. \qquad (3)$$



Sl. 1. Primjeri brojčanih ljestvica

Na sl. 1 prikazano je nekoliko primjera brojčanih ljestvica.

Logaritamska ljestvica određena je jednadžbom

$$\xi = \mu \lg x, \qquad (4)$$

gdje je μ mjerilo ljestvice.

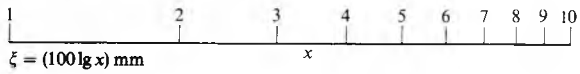
Pomoću podataka iz logaritamskih tablica za lg$x$ i uz pretpostavku da je $\mu = 100$ mm dobivaju se vrijednosti za ξ navedene u tabl. 1. Pomoću tih vrijednosti lako je nacrtati ljestvicu (sl. 2) na kojoj su iznad crtica, koje su od početka ljestvice ($\xi = 0$) udaljene za ξ, označene vrijednosti za x.

Tablica 1

VRIJEDNOSTI DIJELOVA LOGARITAMSKE LJESTVICE

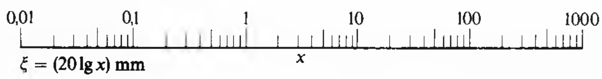
(μ = 100 mm)

x	ξ mm	x	ξ mm
1	0,00	6	77,81
2	30,10	7	84,51
3	47,71	8	90,31
4	60,20	9	95,42
5	69,90	10	100,00



Sl. 2. Logaritamska ljestvica za područje od $x = 1 \cdots 10$

Budući da je $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$ itd., crtica na logaritamskoj ljestvici za vrijednost $x = 100$ bit će dva puta više udaljena od početka ljestvice nego crtica za $x = 10$. To vrijedi i za bilo koju vrijednost x koja je 10 puta veća, jer je $\lg 100x = \lg 100 + \lg x = 2 + \lg x$. Prema tome, ponavljanjem dijela ljestvice za vrijednosti $x = 1$ do $x = 10$ na lijevu i desnu stranu može se dobiti ljestvica za bilo koji raspon vrijednosti od x (sl. 3).



Sl. 3. Logaritamska ljestvica za područje od $x = 0{,}01 \cdots 1000$

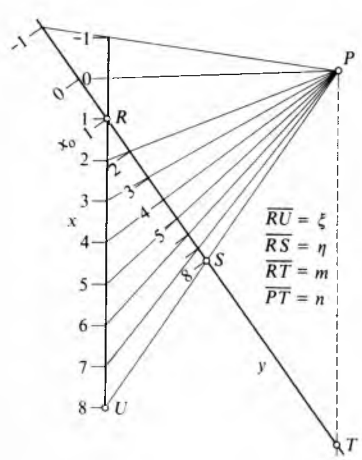
Projektivna ljestvica dobiva se projiciranjem neke ljestvice iz neke točke.

Neka je zadana jednakomjerna ljestvica na pravcu x i točka P iz koje će se projicirati nova ljestvica na pravac y koji siječe pravac x u točki R (sl. 4). Paralela s pravcem x koja prolazi točkom P siječe pravac y u točki T Sjecište R pravaca x i y zajednička je točka obiju ljestvica kojoj je pridružena vrijednost x_0. Tada je jednadžba jednakomjerne ljestvice koju treba projicirati

$$\xi = x - x_0 \tag{5}$$

ako se postavi da je $\mu = 1$. Prema sl. 4 može se za svaku zraku iz točke P postaviti razmjer koji npr. za $\overline{PU}$ glasi

$$\overline{RU} : \overline{PT} = \overline{RS} : \overline{ST}. \tag{6}$$



Sl. 4. Konstrukcija projektivne ljestvice

Ako se postavi da je $\overline{RU} = \xi$, $\overline{PT} = n$, $\overline{RS} = \eta$ i $\overline{RT} = m$, gdje su n i m konstante, a η duljina na projektivnoj ljestvici, dobiva se, jer je $\overline{ST} = m - \eta$,

$$\frac{\xi}{n} = \frac{\eta}{m - \eta}, \tag{7}$$

pa je

$$\eta = \frac{m\xi}{n + \xi}. \tag{8}$$

Ako se u (8) uvrsti vrijednost za ξ iz izraza (5), dobiva se

$$\eta = \frac{mx - mx_0}{x + (n - x_0)}. \tag{9}$$

To je jednadžba ljestvice na pravcu y, a ta je ljestvica nejednakomjerna.

Jednadžba (9) može se napisati u općenitom obliku

$$\eta = \frac{mx + n}{px + q}, \tag{10}$$

gdje su m, n, p i q konstante, pa je to funkcija kojom je određena projektivna funkcija.

Kao što se od jednakomjerne ljestvice prema jednadžbi (5) može odrediti pripadna projektivna ljestvica, može se od bilo kakve ljestvice prema jednadžbi $\xi = f(x)$ odrediti pripadna projektivna ljestvica pomoću izraza

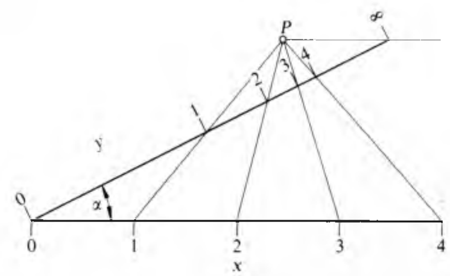
$$\eta = \frac{mf(x) + n}{pf(x) + q}. \tag{11}$$

Da bi se odredila projektivna ljestvica, treba nacrtati ljestvicu $\xi = f(x)$ i prema izrazu (11) izračunati najmanje tri vrijednosti projektivne ljestvice, pa se pomoću tih vrijednosti odredi točka iz koje će se projektirati ostale točke.

Primjer. Treba izraditi projektivnu ljestvicu prema jednadžbi

$$y = \frac{x}{x + 1}. \tag{12}$$

Usporedbom s izrazom (10) vidi se da su $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$ i $q = 1$, te da je $\xi = x$, što znači da je osnovna ljestvica jednakomjerna. Ako se u izraz (12) za x uvrste vrijednosti 0, 1 i ∞, dobit će se za y vrijednosti 0, 1/2 i 1. Najprije se nacrta jednakomjerna ljestvica koja je na sl. 5 vodoravna,



Sl. 5. Primjer projektivne ljestvice za jednadžbu $y = \dfrac{x}{x+1}$

a zatim se nacrta pravac za projektivnu ljestvicu koji s jednakomjernom ljestvicom zatvara kut α i koji siječe jednakomjernu ljestvicu u točki $x = 0$. Duljina projektivne ljestvice može se po volji odabrati. Njezina je duljina jednaka razmaku točaka za $y = 0$ i $y = \infty$. Točka $y = 0$ odgovara sjecištu s jednakomjernom ljestvicom, pa je točka za $y = \infty$ određena čim je odabrana duljina projektivne ljestvice. Točki $y = \infty$ na projektivnoj ljestvici odgovara točka $x = \infty$ na jednakomjernoj ljestvici, pa je pravac koji spaja te dvije točke usporedan s jednakomjernom ljestvicom. Da bi se odredio položaj točke P, treba još uzeti u obzir treći odnos ($x = 1$ i $y = 1/2$), što znači da se točka koja odgovara točki 1 nalazi na polovici razmaka između 0 i ∞. Tim je određen pol P iz kojeg se mogu projicirati sve ostale točke.

NOMOGRAMI ZA JEDNADŽBE S DVIJE I TRI VARIJABLE

Nomogrami s krivuljama i ispružanje krivulja. Funkcija $y = f(x)$ može se u koordinatnom sustavu prikazati krivuljom gdje svakoj točki pripada par vrijednosti x,y. Da bi se nacrtala krivulja sa zadanom funkcijom i da bi se odredio položaj niza točaka u odabranom koordinatnom sustavu, treba izračunati niz vrijednosti y za niz vrijednosti od x. Pri crtanju krivulje mjerilo za apscise može biti različito od mjerila za ordinate.

Kao primjer neka posluži kvadratna funkcija

$$y = x^2. \tag{13}$$

Krivulja koja odgovara funkciji (13) vidi se na sl. 6a. Mjerilo je za y deset puta manje od mjerila za x. Ta se krivulja može prikazati i na drugi način koji se zove ispružanje krivulje. To se može ostvariti ako se upotrijebe nove koordinate ξ i η koje imaju jednakomjernu raspodjelu. Veza između varijabli x i y i novih varijabli određena je izrazima

$$\xi = f(x), \qquad \eta = y, \tag{14}$$

pa se nakon uvrštavanja u (13) dobiva

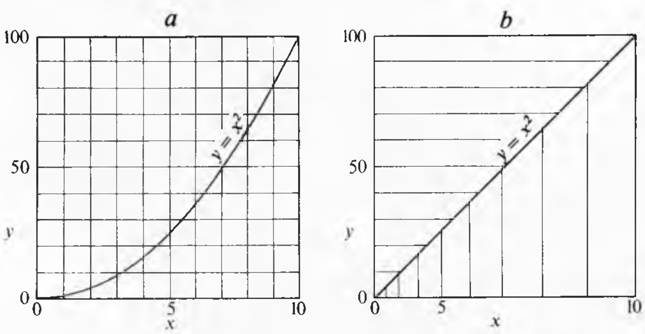
$$\eta = \xi. \tag{15}$$

Izraz (15) predstavlja u koordinatnom sustavu ξ,η pravac kroz ishodište sustava koji je nagnut za kut od 45° prema osi apscisa. Prema tome krivulja je u novom koordinatnom sustavu prikazana pravcem, ali zbog toga raspodjela kojom su označene vrijednosti x nije jednakomjerna. Jednadžbe ljestvice na koordinatnim osima jesu (uz module $\mu_x = \mu_y = 0{,}5$ mm)

$$\xi = \mu_x x^2 = 0{,}5 x^2 \,\text{mm}, \tag{16}$$

$$\eta = \mu_y y = 0{,}5 y^2 \,\text{mm}. \tag{17}$$

Ispružena krivulja prema relaciji (13) vidi se na sl. 6b.



Sl. 6. Grafički prikaz jednadžbe $y = x^2$; *a* krivulja, *b* ispružena krivulja

Prema jednadžbama (16) i (17) modul je za obje ljestvice jednak, pa ispružena krivulja zatvara s osi apscisa kut od 45°. Za različite module ljestvica taj će kut iznositi

$$\alpha = \arctan \frac{\mu_y}{\mu_x}. \tag{18}$$

Da bi se povećala mogućnost točnijeg očitavanja prvog dijela dijagrama na sl. 6b, treba povećati mjerilo za ξ (npr. od $\xi = 0$ do $\xi = 10$), dok će se za ostale vrijednosti zadržati isto mjerilo. Na mjestu promjene mjerila pojavit će se lom pravca (sl. 7). Za prvi dio dijagrama (u navedenom području) odabran je modul $\mu_{x1} = 5$mm tako da jednadžba ljestvice za to područje glasi

$$\xi = \mu_{x1} x^2 = 5x^2 \,\text{mm}. \tag{19}$$

Prema tome, za $\xi = 0 \cdots 10$ vrijedi jednadžba (19), a za $\xi = 10 \cdots 100$ jednadžba (16), odnosno od $0 \cdots 50$ mm vrijedi jednadžba (19), a od $50 \cdots 100$ mm jednadžba (16).

Da bi se dobila ispružena kružnica s polumjerom $r = 1$ i sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava, za koju vrijedi jednadžba

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{20}$$

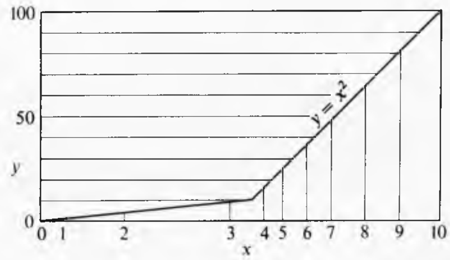
treba koordinate x i y zamijeniti novim koordinatama prema relacijama

$$\xi = x^2, \qquad \eta = y^2. \tag{21}$$

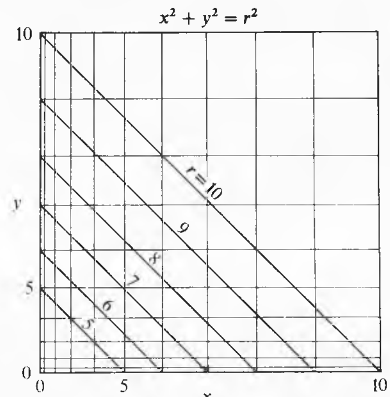
Nakon uvrštavanja u (21) dobiva se

$$\eta = -\xi + 1. \tag{22}$$

To je pravac koji siječe koordinatne osi na udaljenostima jednakim polumjeru kružnice i koji ima negativni koeficijent smjera (-1).



Sl. 7. Ispružena krivulja sa sl. 6a s prvim dijelom nomograma u povećanom mjerilu



Sl. 8. Ispružena krivulja jednadžbe $x^2 + y^2 = 1$

Na sl. 8 prikazan je pravac prema relaciji (22), a za jednadžbe ljestvica, sa $\mu_x = \mu_y = 0{,}5$ mm, vrijede izrazi

$$\xi = \mu_x x^2 = 0{,}5 x^2 \,\text{mm}, \tag{23}$$

$$\eta = \mu_y y^2 = 0{,}5 y^2 \,\text{mm}. \tag{24}$$

Dvostruke ljestvice. Kad se promatraju npr. sl. 6 i 7, može se zapaziti da su od čitavog dijagrama zapravo potrebna samo sjecišta koordinata s krivuljama, te da je za određivanje ovisnosti među varijablama potrebno poznavati koordinate točaka kroz koje prolazi promatrana krivulja. Zbog toga se može ta ovisnost prikazati dvostrukom ljestvicom. Na njoj se s obje strane nosača nalazi po jedna ljestvica, a međusobni položaj ljestvica određen je jednadžbom koja prikazuje dvostruku ljestvicu.

Za jednu od ljestvica može se uzeti bilo kakva funkcija, a najzgodnije je uzeti jednakomjernu ljestvicu. Druga ljestvica, na suprotnoj strani nosača, mora se izračunati točku po točku.

Na primjer za dvostruku ljestvicu prikazat će se brzina v istjecanja vode iz posude prema izrazu

$$v = \sqrt{2gh} \tag{25}$$

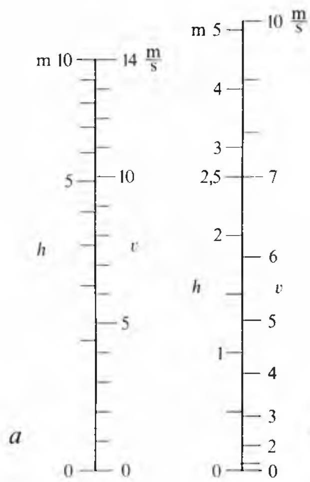
u ovisnosti o visini h razine vode iznad otvora kroz koji istječe voda (g je ubrzanje Zemljine teže). Da bi se izradila dvostruka ljestvica, treba najprije izračunati niz vrijednosti v za niz cjelobrojnih vrijednosti h, te niz vrijednosti h za niz cjelobrojnih vrijednosti v (tabl. 2) prema izrazu

$$h = \frac{v^2}{2g}. \tag{26}$$

Tablica 2
PAROVI VRIJEDNOSTI VISINE I BRZINE ZA CJELOBROJNE VRIJEDNOSTI h I v

h	v	v	h
0	0	0	0
1	4,43	1	0,05
2	6,26	2	0,20
3	7,67	3	0,46
4	8,86	4	0,82
5	9,90	5	1,27
6	10,85	6	1,83
7	11,74	7	2,50
8	12,53	8	3,26
9	13,29	9	4,13
10	14,00	10	5,10

Prema prvom nizu (tabl. 2) može se nacrtati dvostruka ljestvica (sl. 9a) na kojoj su brzine v nanijete na jednakomjernu ljestvicu, dok se crtice koje označuju cjelobrojne vrijednosti visine h određuju prema podacima u tablici u skladu s crticama na jednakomjernoj tablici. Prema drugom nizu (tabl. 2) može se također nacrtati dvostruka ljestvica, ali su tada visine h nanijete na jednakomjernu ljestvicu (sl. 9b). Osim toga, na toj je ljestvici upotrijebljeno veće mjerilo za područje $h = 0 \cdots 2{,}5$ m, a manje mjerilo za područje većih vrijednosti h.



Sl. 9. Primjeri dvostrukih ljestvica za funkciju $h = \frac{v^2}{2g}$; a jednakomjerna ljestvica za v, b jednakomjerna ljestvica za h (za $h = 2{,}5$ puta veće mjerilo)

Nomogrami za jednadžbe sa tri varijable. Da bi se odredio nomogram funkcije

$$z = f(x, y), \tag{27}$$

postupa se tako da se jednoj od varijabli prida neka određena vrijednost koja se tada smatra parametrom. Tako u jednadžbi ostaju samo dvije varijable, pa se pripadna krivulja može nacrtati u koordinatnom sustavu. Ako se mijenja vrijednost parametra, dobiva se skup krivulja koji prikazuje promatranu funkciju, a svakoj točki pripadaju tri vrijednosti: vrijednost apscise, vrijednost ordinate i vrijednost parametra.

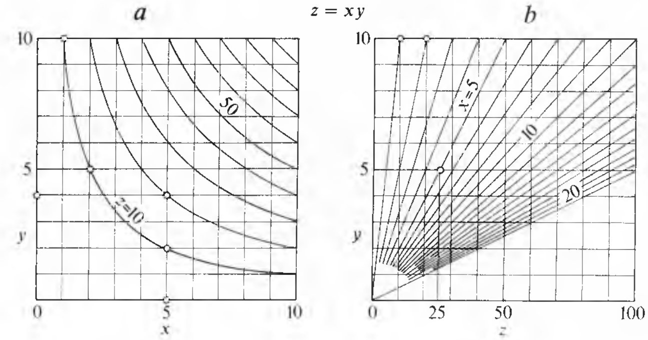
Tablica 3
PAROVI VRIJEDNOSTI ZA FUNKCIJU $z = xy$

z \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$x(y)$									
10	10	5	3,33	2,5	2	1,67	1,43	1,25	1,11	1
20	20	10	6,67	5,0	4	3,33	2,86	2,50	2,22	2
30	30	15	10,00	7,5	6	5,00	4,29	3,75	3,33	3
40	40	20	13,33	10,0	8	6,67	5,71	5,00	4,44	4
50	50	25	16,67	12,50	10	8,33	7,14	6,25	5,55	5
60	60	30	20,00	15,00	12	10,00	8,57	7,50	6,66	6
70	70	35	23,33	17,50	14	11,67	10,00	8,75	7,78	7
80	80	40	26,67	20,00	16	13,33	11,43	10,00	8,89	8
90	90	45	30,00	22,50	18	15,00	12,86	11,25	10,00	9
100	100	50	33,33	25,00	20	16,67	14,29	12,50	11,11	10

Kao primjer prikazat će se nekoliko vrsta nomograma za jednadžbu

$$z = xy. \tag{28}$$

Prvo se izračunava vrijednost y za zadane vrijednosti z i x (tabl. 3). Pomoću tih podataka može se nacrtati skup krivulja s veličinom z kao parametrom (sl. 10a). Također pomoću podataka u tabl. 3 može se nacrtati nomogram u koordinatnom sustavu z,y (sl. 10b). Tada je varijabla x parametar. Ako se umjesto x u jednadžbu (28) uvrsti konstantna vrijednost parametra c_x, dobiva se jednadžba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Druga se točka svakog od pravaca može odrediti pomoću izraza (28) ako se umjesto x uvrsti parametar c_x.



Sl. 10. Grafički prikaz funkcije $z = xy$; a u koordinatnom sustavu x,y sa z kao parametrom, b u koordinatnom sustavu y,z sa x kao parametrom.

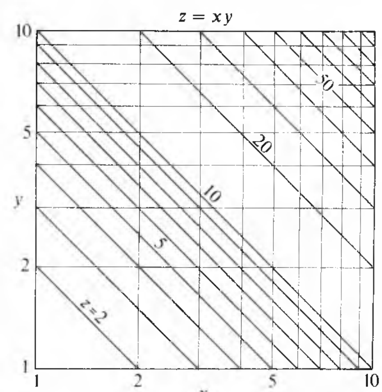
Nomogram za funkcije (28) može se nacrtati ako se ta jednadžba logaritmira i ako se postavi da je

$$\lg z = \zeta, \qquad \lg x = \xi, \qquad \lg y = \eta. \tag{29}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (28) dobiva se

$$\eta = -\xi + \zeta. \tag{30}$$

Ako se veličina ζ smatra parametrom, jednadžba (30) predstavlja skup pravaca u koordinatnom sustavu ξ,η s logaritamskom podjelom na apscisi i ordinati (sl. 11).



Sl. 11. Grafički prikaz funkcije $z = xy$ u koordinatnom sustavu x,y s logaritamskom podjelom na apscisi i ordinati

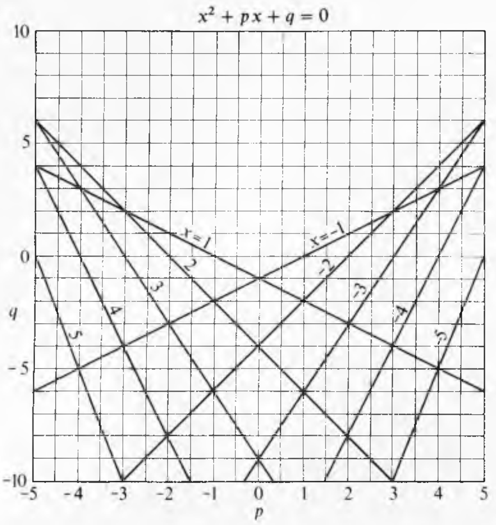
Nomogram za rješavanje kvadratnih jednadžba. Općenit je oblik kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + q = 0, \tag{31}$$

gdje su p i q konstante. Ako se na apscisu nanesu vrijednosti za p, a na ordinatu vrijednosti za q, i to na jednakomjernim ljestvicama, te ako se nepoznanica x smatra parametrom, dobiva se nakon uvrštavanja parametra c_x u jednadžbu (31) jednadžba pravca u koordinatnom sustavu p,q, koja ima oblik

$$q = -c_x^2 - c_x p. \tag{32}$$

Uvrštavanjem niza vrijednosti za c_x dobivaju se dva skupa pravaca, i to jedan za $c_x > 0$ i drugi za $c_x < 0$ (sl. 12). Da



Sl. 12. Nomogrami funkcije $x^2 + px + q = 0$ u koordinatnom sustavu p,q sa x kao parametrom

bi se odredili skupovi pravaca, treba odrediti za svaki pravac dvije točke.

Ako se npr. postavi $c_x = 2$, jednadžba (22) prelazi u oblik $q = -4 - 2p$, pa se za $p = 2$ dobiva $q = -8$, a za $p = -2$ iznosi $q = 0$. Tim je određen pravac s naznakom 2 (sl. 12). Za $c_x = -2$ dobiva se za iste vrijednosti p da je $q = 0$, odnosno $q = -8$, pa je tako određen pravac s naznakom -2.

Kad je nacrtan nomogram, mogu se za svaki par vrijednosti p,q očitati rješenja kvadratne jednadžbe.

Nomogram sa tri ravne paralelne ljestvice. Paralelni pravci x, y i z na sl. 13 neka predstavljaju tri paralelne ljestvice s počecima u točkama A, B i C. Jednadžbe tih ljestvica jesu

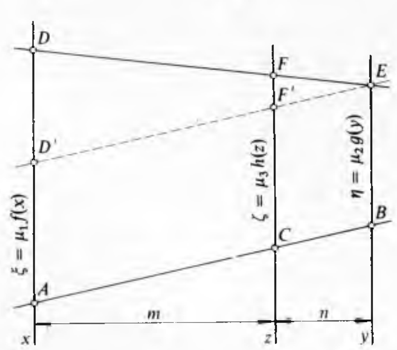
$$\xi = \mu_x f(x), \qquad \eta = \mu_y g(y), \qquad \zeta = \mu_z h(z). \tag{33}$$

Veličine ξ, η i ζ znače udaljenosti točke na ljestvici od početka ljestvice. Ako se sve tri ljestvice presijeku pravcem kroz točke D, E i F, te ako se dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ označe sa ξ, η i ζ, vrijedi razmjer $\overline{FF'}:\overline{DD'} = n:(m+n)$, jer je pramen pravaca presječen paralelnim pravcima. Taj se razmjer može napisati u obliku

$$\frac{\zeta - \eta}{\xi - \eta} = \frac{n}{m+n}, \tag{34}$$

a odatle slijedi

$$(m+n)\zeta = n\xi + m\eta. \tag{35}$$



Sl. 13. Konstrukcije nomograma sa tri ravne paralelne ljestvice

Uvrštavanjem vrijednosti za ξ, η i ζ (33) dobiva se

$$(m+n)\mu_z h(z) = n\mu_x f(x) + m\mu_y g(y). \tag{36}$$

Ako se pretpostavi da je

$$(m+n)\mu_z = n\mu_x = m\mu_y, \tag{37}$$

dobiva se

$$h(z) = f(x) + g(y), \tag{38}$$

odnosno u općenitom obliku

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) = 0. \tag{39}$$

To je jednadžba koja se grafički može prikazati sa tri ravne paralelne ljestvice. Konstantni član, koji bi se mogao pojaviti, treba obuhvatiti jednom od triju funkcija.

Konstrukcija se nomograma temelji na sljedećem razmatranju: Iz jednakosti (37) slijedi

$$\frac{n}{m} = \frac{\mu_y}{\mu_x}, \tag{40}$$

što znači da je izborom modula μ_x i μ_y na ljestvicama za ξ i η određen i položaj treće ljestvice koji je definiran omjerom n/m, uz uvjet da se jedna od tih vrijednosti može po volji odabrati. Jednakošću (37) određen je i modul treće ljestvice, pa je

$$\mu_z = \frac{n}{m+n}\mu_x = \frac{m}{m+n}\mu_y, \tag{41}$$

a ako se uzme u obzir izraz (40), dobiva se nakon sređivanja da je

$$\mu_z = \frac{\mu_x \mu_y}{\mu_x + \mu_y}. \tag{42}$$

Da bi se za funkciju (28) konstruirao nomogram sa tri paralelne ravne ljestvice, treba tu funkciju prikazati u obliku (38) ili (39), što se postiže logaritmiranjem, pa je

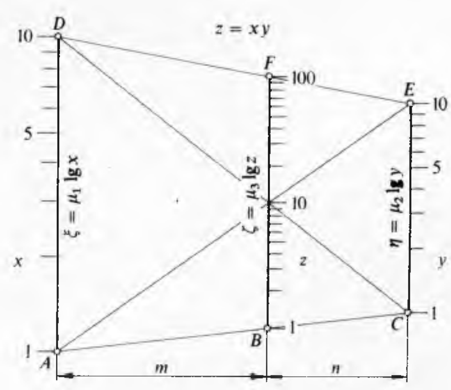
$$\lg z = \lg x + \lg y. \tag{43}$$

Svaki se član može pomnožiti s koeficijentima kao u izrazu (36), jer se, zbog toga što vrijede jednakosti (37), u jednadžbi ništa ne mijenja. Tada se dobiva

$$(m+n)\mu_z \lg z = n\mu_x \lg x + m\mu_y \lg y. \tag{44}$$

Ako se pretpostavi da moduli ljestvica za x i y iznose: $\mu_x = 90$ mm i $\mu_y = 60$ mm, te da je razmak među tim ljestvicama $m + n = 100$ mm, moguće je odrediti omjer razmaka između krajnjih i srednje ljestvice prema (40), pa je $n/m = \mu_y/\mu_x = 2/3$, a odatle se dobiva, jer je $m + n = 100$, da je $m = 60$ mm, a $n = 40$ mm. Modul je treće ljestvice, prema (42), $\mu_z = \dfrac{60 \cdot 90}{60 + 90} = 36$ mm. Crtice na ljestvicama određuju se iz relacija

$$\begin{aligned} \xi &= \mu_x \lg x = 90 \lg x, \\ \eta &= \mu_y \lg y = 60 \lg y, \\ \zeta &= \mu_z \lg z = 36 \lg z. \end{aligned} \tag{45}$$



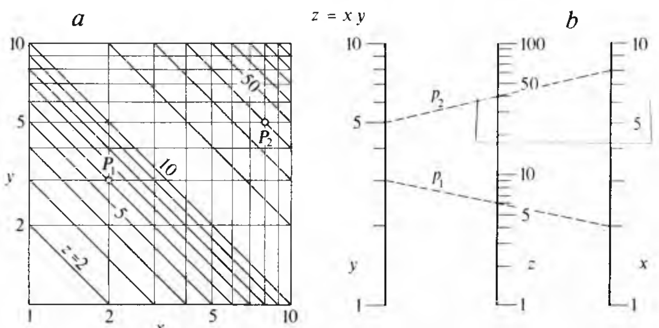
Sl. 14. Nomogram sa tri ravne paralelne ljestvice za funkciju $z = xy$

Nomogram je prikazan na sl. 14. Položaj crtica na srednjoj ljestvici može se odrediti prema jednadžbi (45) za ζ, ili projekcijom kad je već određen položaj crtica na ljestvicama za x i y.

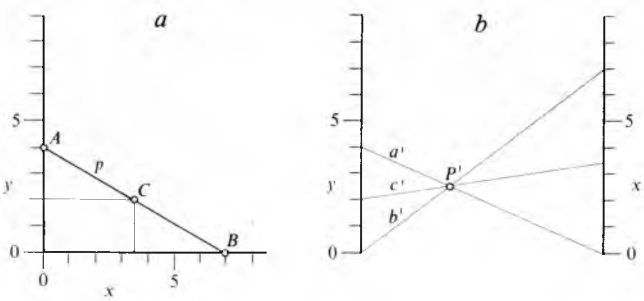
TRANSFORMACIJA NOMOGRAMA

Transformacija nomograma u pravokutnom koordinatnom sustavu u nomogram s ljestvicama. Na sl. 15a vidi se nomogram funkcije $z = xy$ prikazane u pravokutnom koordinatnom sustavu s vrijednostima z kao parametrom, a na sl. 15b nomogram sa tri ravne paralelne ljestvice za istu funkciju. U prvom se nomogramu apscisa i ordinata sijeku, a u drugomu su paralelne. Ljestvice na koordinatnim osima jednake su ljestvicama na paralelnim pravcima x i y. Treća varijabla z prikazana je u lijevom nomogramu paralelnim pravcima, a u desnom točkama na srednjem pravcu. Svakoj točki na lijevom nomogramu pripadaju tri vrijednosti: vrijednost apscise x, vrijednost ordinate y i vrijednost parametra z. Prema tome, u svakoj točki lijevog nomograma sijeku se tri pravca (x, y i z) kojih vrijednosti zadovoljavaju promatranu jednadžbu. Nasuprot tome, u lijevom nomogramu svaki pravac siječe ljestvice u trima točkama kojih vrijednosti također zadovoljavaju promatranu jednadžbu. Tako točke $P_1(2,3,6)$ i $P_2(8,5,40)$ na lijevom nomogramu odgovaraju pravcima p_1' i p_2' na desnom nomogramu.

Svaki nomogram može se iz pravokutnog koordinatnog sustava transformirati u nomogram s ljestvicama.



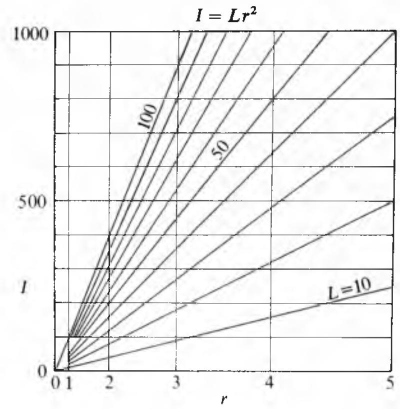
Sl. 15. Usporedba nomograma funkcije $z = xy$. *a* nomogram u pravokutnom koordinatnom sustavu x,y; *b* nomogram sa tri ravne paralelne ljestvice



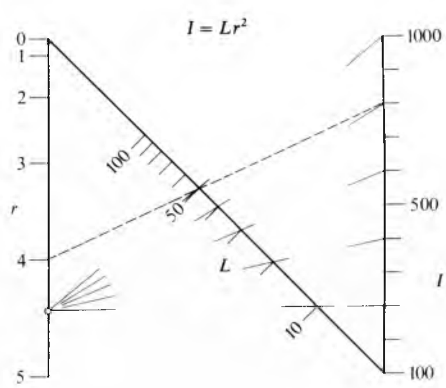
Sl. 16. Prikaz transformacije nomograma u koordinatnom sustavu (*a*) u nomogramu sa tri ljestvice (*b*)

Na sl. 16a prikazan je pravac p na kojemu su tri točke $A(0,4)$, $B(7,0)$ i $C(3{,}5, 2)$. Da bi se te točke prenijele u sustav s paralelnim ljestvicama, treba apscise točaka prenijeti na ljestvicu x, a ordinate točaka na ljestvicu y (sl. 16b). Ako se pripadne točke na ljestvicama x i y spoje pravcima (a', b', c') koji predstavljaju točke u pravokutnom koordinatnom sustavu, može se konstatirati da se svi pravci sijeku u točki P' (sl. 16b) koja odgovara pravcu p na sl. 16a. Kad bi se taj postupak ponovio za drugi pravac u pravokutnom koordinatnom sustavu koji je paralelan s pravcem p, dobilo bi se novo sjecište pravaca na sl. 16b. Oba sjecišta pravaca leže na pravcu koji je paralelan s ljestvicama x i y. Iz toga se može zaključiti da se svaki nomogram prikazan paralelnim pravcima u pravokutnom koordinatnom sustavu može transformirati u nomogram s trima ravnim paralelnim ljestvicama.

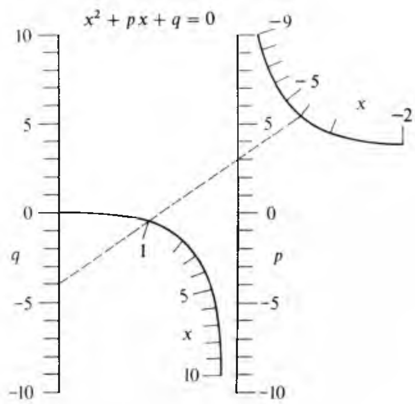
Ako su, međutim, odnosi među varijablama u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazani pravcima koji se sijeku u jednoj točki, tada će treća ljestvica na koju se nanose vrijednosti parametra ležati na pravcu koji siječe obje paralelne ljestvice. Primjer za takve nomograme vidi se na sl. 17 i 18. Na sl. 17 prikazan je nomogram u pravokutnom koordinatnom sustavu za funkciju $I = Lr^2$, a na sl. 18 nomogram za istu funkciju na ljestvicama.



Sl. 17. Nomogram funkcije $I = Lr^2$ u pravokutnom koordinatnom sustavu I,r



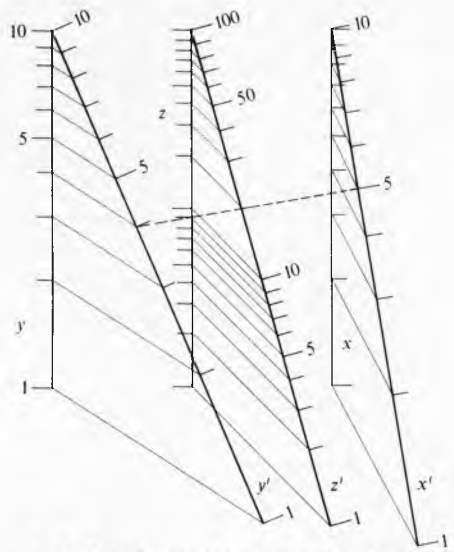
Sl. 18. Nomogram s dvije ravne paralelne ljestvice i ravnom ljestvicom koja siječe paralelne ljestvice za funkciju $I = Lr^2$ koja je na sl. 17 prikazana u koordinatnom sustavu I,r



Sl. 19. Nomogram s dvije ravne paralelne ljestvice i krivocrtnim ljestvicama za funkciju $x^2 + px + q = 0$ koja je u koordinatnom sustavu p,q prikazana na sl. 12. Dvije su krivocrtne ljestvice potrebne jer postoje dva skupa pravaca na sl. 12

Ako pravci u pravokutnom koordinatnom sustavu nisu ni paralelni, a niti se sijeku u jednoj točki (sl. 12), nosač treće ljestvice bit će neka krivulja (sl. 19). Na sl. 19 postoje dvije krivulje jer se u nomogramu na sl. 12 pojavljuju dva skupa pravaca.

Perspektivna slika nomograma ne utječe na njegovu upotrebljivost, jer pravac koji spaja tri pripadne vrijednosti ostaje



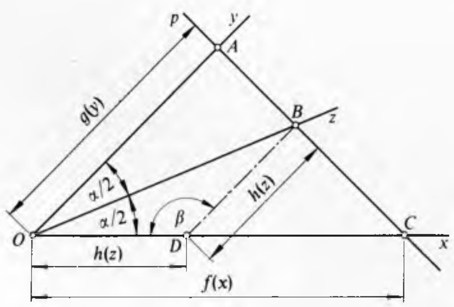
Sl. 20. Perspektivna slika nomograma sa sl. 15b

pravac u perspektivnoj slici. Nomogram na sl. 20 dobiven je središnjom projekcijom nomograma na sl. 15b. Točka iz koje se projicira može se po volji odabrati. Projiciranjem ljestvica postiže se povećanje mjerila, pa se povećava točnost očitavanja.

OSTALE VRSTE NOMOGRAMA

Nomogrami sa tri ravne ljestvice koje se sijeku u jednoj točki. Obje vanjske ljestvice smatraju se osima kosokutnog koordinatnog sustava (x i y na sl. 21), dok je srednja ljestvica (z na sl. 21) položena raspolovnicom kuta α koji zatvaraju vanjske ljestvice. Položaj triju ljestvica u koordinatnom sustavu x,y određen je sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \xi &= f(x), & \eta &= 0, \\ \xi &= 0, & \eta &= g(y), \\ \xi &= h(z), & \eta &= h(z). \end{aligned} \tag{46}$$



Sl. 21. Konstrukcija nomograma sa tri ravne ljestvice koje se sijeku u jednoj točki

Pravac za očitanje p (sl. 21) siječe tri ljestvice u točkama A, B i C. Iz sličnosti trokuta OAC i DBC dobiva se razmjer

$$\frac{f(x)-h(z)}{h(z)}=\frac{f(x)}{g(y)}, \tag{47}$$

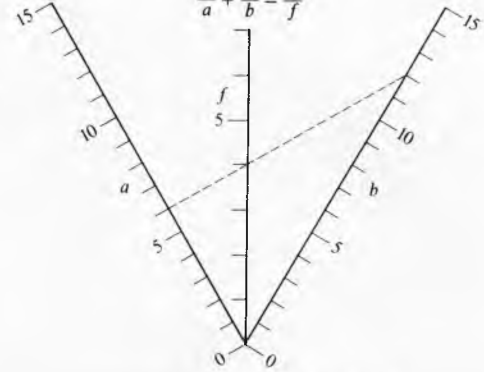
koji se nakon sređivanja može prikazati u obliku

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(y)}=\frac{1}{h(z)}. \tag{48}$$

To znači da se sve jednadžbe koje imaju oblik kao jednadžba (48) mogu prikazati sa tri ljestvice na pravcima koji se sijeku u jednoj točki.

Na sl. 22 prikazan je nomogram jednadžbe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \tag{49}$$



Sl. 22. Primjer nomograma sa tri ravne ljestvice koje se sijeku u jednoj točki za funkciju $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$

Sve tri ljestvice imaju jednakomjernu podjelu. Iz trokuta OBD na sl. 21 može se odrediti modul srednje ljestvice (μ_z) ako su odabrani moduli vanjskih ljestvica (μ_x i μ_y). Prema kosinusovu poučku vrijedi

$$\mu_z^2=\mu_x^2+\mu_y^2-2\mu_x\mu_y\cos\beta, \tag{50}$$

gdje je β kut nasuprot stranice OB jednak $180°-\alpha$, jer je trokut ODB istokračan. Ako se još uzme u obzir da je $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$, dobiva se

$$\mu_z=\sqrt{(\mu_x-\mu_y)^2+4\mu_x\mu_y\cos^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{51}$$

Ako su moduli vanjskih ljestvica međusobno jednaki ($\mu=\mu_x=\mu_y$), modul treće ljestvice iznosi

$$\mu_z=2\mu\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{52}$$

Nomogrami s dvije paralelne ljestvice koje siječe treća ravna ljestvica. Jedna od paralelnih ljestvica smatra se jednom od osi kosokutnog koordinatnog sustava (y na sl. 23), dok je druga os koordinatnog sustava (x) ljestvica koja siječe paralelne ljestvice. Položaj ljestvica određen je sljedećim jednadžbama

$$\begin{aligned} \xi &= 0, & \eta &= f(x), \\ \xi &= g'(x), & \eta &= 0, \\ \xi &= a, & \eta &= -h(z). \end{aligned} \tag{53}$$

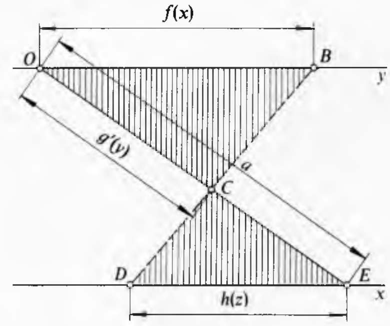
Iz sličnosti trokuta OCB i DCE na sl. 23 slijedi razmjer

$$\frac{h(z)}{f(x)}=\frac{a-g'(y)}{g'(y)}. \tag{54}$$

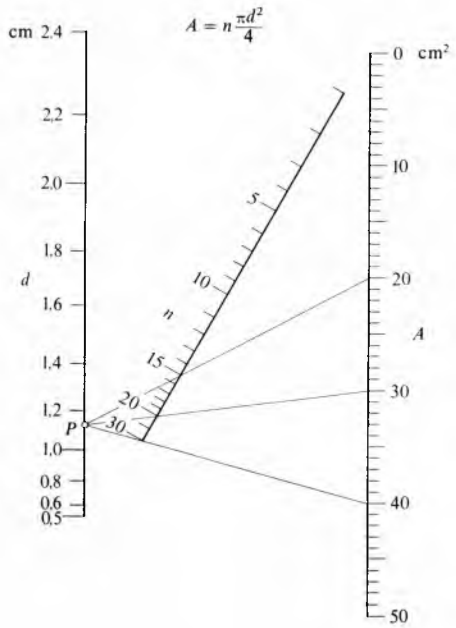
Ako se desna strana zamijeni funkcijom $g(y)$, dobiva se

$$h(z)=f(x)g(y). \tag{55}$$

Svaka jednadžba koja ima oblik kao jednadžba (55) može se prikazati nomogramom s dvije paralelne ljestvice i trećom ravnom ljestvicom koja siječe paralelne ljestvice.



Sl. 23. Konstrukcija nomograma s dvije ravne paralelne ljestvice koje siječe treća ravna ljestvica



Sl. 24. Primjer nomograma s dvije ravne paralelne ljestvice koje siječe treća ravna ljestvica za funkciju $A = n\frac{\pi d^2}{4}$

Primjer takva nomograma vidi se na sl. 24 i vrijedi za jednadžbu

$$A = n\frac{\pi d^2}{4}. \tag{56}$$

Nomogrami s dvije paralelne ravne ljestvice i trećom krivocrtnom ljestvicom. Ljestvice se smještaju u pravokutni koordinatni sustav tako da je ljestvica funkcije x na ordinatnoj osi, a početak ljestvice u ishodištu koordinatnog sustava. Položaj ljestvica određen je sa tri para jednadžbi

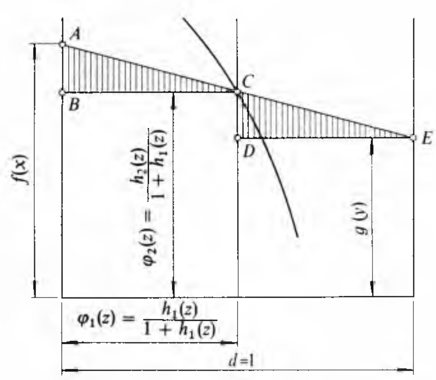
$$\begin{aligned} \xi &= 0, & \eta &= f(x), \\ \xi &= d, & \eta &= g(y), \\ \xi &= \varphi_1(z), & \eta &= \varphi_2(z). \end{aligned} \tag{57}$$

Krivocrtna ljestvica za varijablu z određena je parametrima $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$, tj. svaka je točka ljestvice određena parom koordinata ξ, η. Iz sličnosti trokutâ ABC i CDE na sl. 25 slijedi razmjer

$$\frac{f(x) - \varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{\varphi_2(z) - g(y)}{1 - \varphi_1(z)}. \tag{58}$$

Njegovim preuređenjem dobiva se

$$f(x) + g(y)\frac{\varphi_1(z)}{1 - \varphi_1(z)} - \frac{\varphi_2(z)}{1 - \varphi_1(z)} = 0. \tag{59}$$



Sl. 25. Konstrukcija nomograma s dvije ravne paralelne ljestvice i krivocrtnom ljestvicom

Ako se postave nove funkcije varijable z

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{\varphi_1(z)}{1 - \varphi_1(z)}, \\ h_2(z) &= -\frac{\varphi_2(z)}{1 - \varphi_1(z)}, \end{aligned} \tag{60}$$

dobiva se općenit oblik

$$f(x) + g(y)h_1(z) + h_2(z) = 0. \tag{61}$$

Svaka jednadžba koja ima oblik kao jednadžba (61) može se prikazati nomogramom s dvije paralelne ravne ljestvice i trećom krivocrtnom ljestvicom.

Primjer za takav nomogram vidi se na sl. 19 koja prikazuje jednadžbu (31) gdje je $h_1(z) = x$, $h_2(z) = x^2$, $f(x) = q$ i $g(y) = p$.

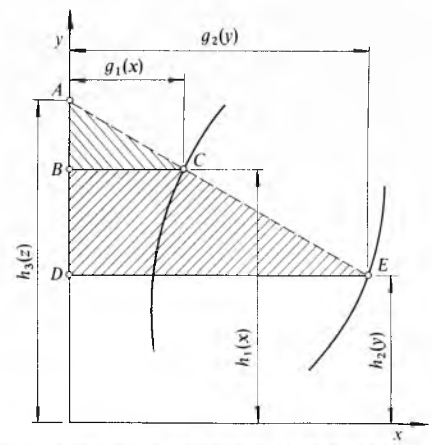
Nomogrami s jednom ravnom i dvije krivocrtne ljestvice. Ravna se ljestvica položi u os y koordinatnog sustava (sl. 26), a početak je ljestvice u njegovu ishodištu. Iz sličnosti trokuta ABC i ADE slijedi razmjer

$$\frac{h_3(z) - h_1(x)}{g_1(z)} = \frac{h_3(z) - h_2(y)}{g_2(y)}, \tag{62}$$

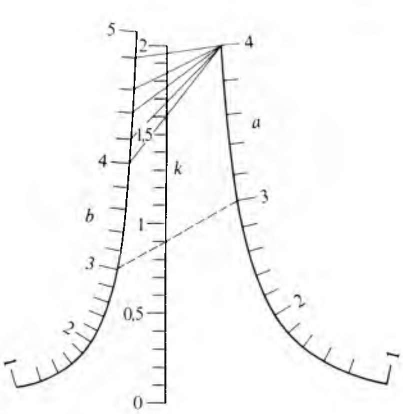
koji se sređen može napisati u obliku

$$h_3(z) = \frac{\dfrac{h_1(x)}{g_1(x)} - \dfrac{h_2(y)}{g_2(y)}}{\dfrac{1}{g_1(x)} - \dfrac{1}{g_2(y)}}. \tag{63}$$

U brojniku i nazivniku nalaze se po dvije različite funkcije varijabli x i y, pa se dobiva općenit oblik



Sl. 26. Konstrukcija nomograma s jednom ravnom i dvije krivocrtne ljestvice



Sl. 27. Primjer nomograma s jednom ravnom i dvije krivocrtne ljestvice za funkciju $k = \frac{a^2 + b^2}{8a + 12b}$

$$h_3(z) = \frac{\varphi_1(x) - \psi_1(y)}{\varphi_2(x) - \psi_2(y)}. \tag{64}$$

To je općenit oblik jednadžbe koja se može prikazati nomogramom s jednom ravnom i dvije krivocrtne ljestvice.

Na sl. 27 prikazan je primjer takva nomograma koji vrijedi za jednadžbu

$$k = \frac{a^2 + b^2}{8a + 12b}. \tag{65}$$

Nomogrami s četiri i više varijabli. Jednadžba s četiri varijable

$$v = \frac{xy}{z} \tag{66}$$

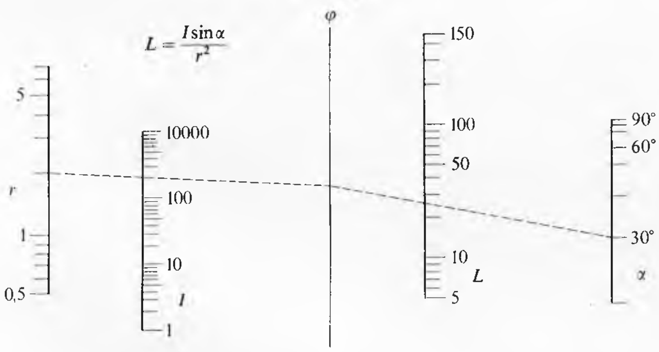
može se uvođenjem pomoćne varijable φ rastaviti u dvije jednadžbe

$$xy = \varphi, \qquad zv = \varphi. \tag{67}$$

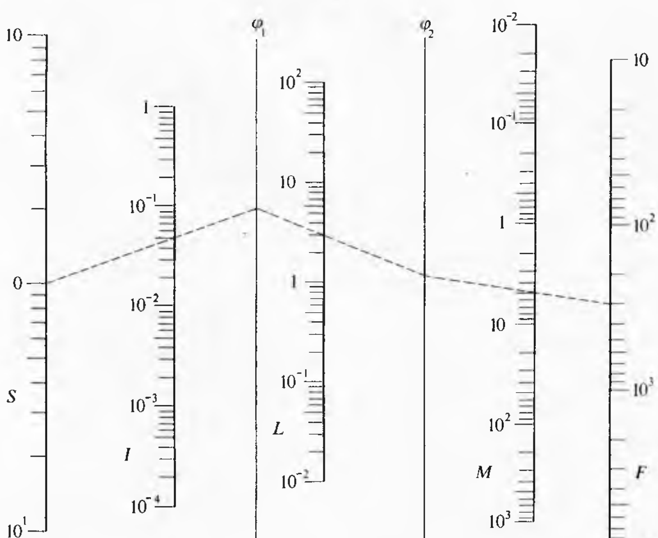
Svaka od tih dviju jednadžbi može se prikazati sa tri ravne paralelne ljestvice (npr. kao na sl. 14), uz uvjet da je ljestvica pomoćne varijable φ zajednička za obje jednadžbe. Ta ljestvica služi samo za prijelaz s jednog dijela nomograma u drugi, a nije ni potrebno očitavati njezinu vrijednost, pa zbog toga na njoj nisu ni potrebne oznake vrijednosti. Ona, međutim, mora imati isti modul, isti početak i isti smjer za oba dijela nomograma.

Na sl. 28 prikazan je nomogram za jednadžbu

$$L = \frac{I \sin\alpha}{r^2}, \tag{68}$$



Sl. 28. Nomogram s ravnim paralelnim ljestvicama za funkciju s četiri varijable $L = \frac{I \sin\alpha}{r^2}$



Sl. 29. Nomogram s ravnim paralelnim ljestvicama za funkciju sa pet varijabli $F = \frac{MS}{IL}$

koji je nacrtan uvođenjem pomoćne varijable φ, pa je

$$I = \varphi r^2, \qquad \varphi = \frac{L}{\sin\alpha}. \tag{69}$$

Ako postoji pet varijabli, treba uvesti dvije pomoćne vavarijable. Tako se npr. za jednadžbu

$$F = \frac{MS}{IL}, \tag{70}$$

za koju je nomogram prikazan na sl. 29, mogu postaviti jednadžbe s pomoćnim varijablama φ_1 i φ_2:

$$S = I\varphi_1, \qquad L\varphi_1 = \varphi_2, \qquad M\varphi_2 = F. \tag{71}$$

Da bi se odredio prikazani nomogram, bilo je potrebno logaritmirati sve tri jednadžbe (71), jer u nomogramu sve ljestvice imaju logaritamsku raspodjelu.

Analogno se konstruiraju nomogrami sa šest i više varijabli.

LIT.: *R. Mehmke*, Numerisches Rechnen; Leitfaden zum graphischen Rechnen. Enzyklopädie der matematischen Wissenschaften, Band I F; Leipzig 1917. — *M. D'Ocagne*, Traité de nomographie. Paris ²1921. — *M. Pirani, I. Runge*, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Berlin 1931. — *P. Luckey*, Nomographie. Teubner Verlag, Leipzig 1954. — *S. Muftić*, Nomogram za dimenzioniranje armiranih betonskih nosača. Građevinar, god. VI, br. 3, Zagreb 1954. — *S. Elazar*, Nomografija. Tehnička knjiga, Zagreb 1965. — *O. Muftić*, Nomografija. Školska knjiga, Zagreb 1967.

O. Muftić

NORMIRANJE U GRAĐEVINARSTVU, postupak mjerenja utroška radnog vremena posebno radnika i posebno stroja, radnika i stroja zajedno, te materijala za jedinicu proizvoda.

Radna norma je učinak koji treba da postigne radnik ili grupa radnika uz određenu kakvoću proizvoda i uz određene organizacijske i tehničke uvjete rada. Norme su rezultat mjerenja utroška radnog vremena radnika i strojeva, utroška materijala i energije, i dr. Normativi su mjerila koja se određuju proučavanjem i analizom radnih procesa i načina rada uz određene uvjete, a uzimajući pri tom u obzir i dodatno vrijeme kad uvjeti rada nisu normalni.

Na temelju norma proračunavaju se potrebna sredstva za proizvodnju, radna snaga, strojevi i materijal, usklađuju se mogućnosti različitih radnih postupaka, proračunava se vrijednost radne snage, strojeva i materijala za jedinicu proizvoda (analiza cijena), određuje se stupanj produktivnosti i ekonomičnosti, analizira se rentabilnost upotrebe novih sredstava i metoda rada, određuju se radni zadaci i vrijednost rada u radnim nalozima, planira se dinamika radova. Norme su osnova i za nagrađivanje. S razvojem sredstava za proizvodnju i tehnologije, te upotrebom novih materijala potrebno je utvrđivati i nove norme, odnosno korigirati postojeće.

Oblici norma. Norme mogu biti elementarne i kompleksne. *Elementarne* se norme odnose na pojedine radne operacije (npr. čišćenje, sječenje, vezivanje i montažu betonskog željeza). *Kompleksne* norme dobivaju se sintezom elementarnih norma (npr. priprema i postavljanje betonskog željeza).

Osim toga, postoje norme vremena i norme učinka. *Norma* je *vremena* utrošak vremena za jedinicu proizvoda dobre kvalitete uz pravilnu i svrsishodnu organizaciju. Norma vremena N_V određuje se pomoću izraza

$$N_V = \frac{V}{Q}, \tag{1}$$

gdje je V utrošeno vrijeme, a Q količina proizvoda. Norma vremena, npr., za postavljanje i vezivanje 1 tone savijenog betonskog željeza promjera 4···12 mm iznosi 26,25 sati. *Norma učinka* daje podatak o učinku ili proizvodnji u jedinici vremena (sat, dan). Tako npr. norma učinka bagera kašikara iznosi iskop 60 m³ zemlje III kategorije za jedan sat. Normom vremena obično se normira utrošak vremena radnika, a normom učinka rad strojeva.