PLANIMETRIJA, dio geometrije koji proučava skupove točaka u euklidskoj ravnini (v. *Geometrija*, TE 6, str. 120). Neki posebni skupovi točaka, kao što su dužina, kut, kružnica i krug, jesu osnovni planimetrijski elementi. Od tih osnovnih elemenata tvore se složeniji, kao što su općenito geometrijske figure (likovi), posebno poligonalne crte i poligoni. Osim proučavanja svojstava planimetrijskih elemenata i njihovih međusobnih odnosa u tehničkoj su primjeni posebno važne metode konstruiranja složenih elemenata od osnovnih, tzv. geometrijskih konstrukcija.

Sva razmatranja i konstrukcije u ovom se članku provode u jednoj ravnini.

OSNOVNI PLANIMETRIJSKI ELEMENTI

Dužina, duljina i udaljenost. *Dužina* $\overline{AB}$ ili $\overline{BA}$ je par što ga tvore dvije različite točke A i B, krajevi te dužine. Za bilo koju točku C koja je između točaka A i B kaže se da je to *unutrašnja* točka dužine $\overline{AB}$, ili kraće točka dužine $\overline{AB}$ (sl. 1).

Sl. 1

Jedinična dužina je po volji izabrana čvrsta dužina $\overline{PQ}$. Svakoj dužini $\overline{AB}$ može se na jedan jedini način pridružiti pozitivan realan broj $d(\overline{AB})$ tako da vrijede ova tri svojstva: *a*) sukladnim dužinama pridružen je isti broj, tj. iz $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ slijedi $d(\overline{AB}) = d(\overline{CD})$, *b*) ako je C točka dužine $\overline{AB}$, tada vrijedi $d(\overline{AB}) = d(\overline{AC}) + d(\overline{CB})$, *c*) jediničnoj dužini $\overline{PQ}$ pridružen je broj 1.

Broj $d(\overline{AB})$ zove se *duljina dužine* $\overline{AB}$. Prema tome *duljina* je funkcija $d\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}^+$ takva da za nju vrijede svojstva *a*) do *c*), gdje je $\mathscr{D}$ skup svih dužina, a $\mathbb{R}^+$ skup svih pozitivnih realnih brojeva.

Vrijedi i obrat svojstva *a*), tj. ako dvije dužine imaju jednake duljine, tada su te dužine sukladne. Takve su dvije dužine *jednake* i označuju se kratko $AB = CD$. Iz svojstva *b*) slijedi odmah nejednakost $d(\overline{AB}) > d(\overline{AC})$ pa je dužina $\overline{AB}$ veća od dužine $\overline{AC}$, ili je dužina $\overline{AC}$ manja od dužine $\overline{AB}$, a označuje se $AB > AC$ ili $AC < AB$. Za relacije *jednako*, *manje* i *veće* među dužinama vrijede uobičajena algebarska pravila. Tako npr. iz $AB < CD$ i $CD < EF$ slijedi $AB < EF$, a iz $AB = CD$ i $CD > EF$ slijedi $AB > EF$. Za svake dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ vrijedi samo jedan od tri odnosa: $AB < CD$, ili $AB = CD$, ili $AB > CD$.

Duljina dužine $\overline{AB}$ zove se još i *udaljenost točaka A* i *B* i označuje se sa $d(A,B)$. *Udaljenost* je funkcija d koja svakom paru točaka pridružuje njihovu udaljenost, pri čemu se uzima da je $d(A,B) = 0$ ako je $A = B$.

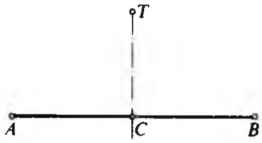
Za udaljenost vrijede ova osnovna svojstva: *α*) jednakost $d(A,B) = 0$ vrijedi samo ako je $A = B$, *β*) za svake dvije točke A i B vrijedi $d(A,B) = d(B,A)$, *γ*) za svake tri točke A, B i C vrijedi tzv. nejednakost trokuta $d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$.

Duljina dužine kao brojčani iznos ovisi očigledno o izboru jedinične dužine $\overline{PQ}$. Izabere li se umjesto prve jedinične dužine $\overline{PQ}$ koja druga jedinična dužina $\overline{P'Q'}$, tada za prvu duljinu $d(\overline{AB})$ i drugu duljinu $d'(\overline{AB})$ bilo koje dužine $\overline{AB}$ vrijedi odnos

$$d'(\overline{AB}) = \frac{d(\overline{AB})}{d(\overline{P'Q'})}. \tag{1}$$

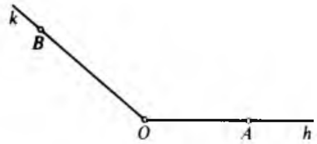
Izbor jedinične dužine nije predmet geometrije, nego se propisuje mjeriteljskim uvjetima (v. *Metrologija, zakonska*, TE 8, str. 496).

Za svaku dužinu $\overline{AB}$ postoji samo jedna točka C te dužine takva da je $AC = BC$. Točka C zove se *polovište* dužine $\overline{AB}$ i vrijedi $d(\overline{AC}) = d(\overline{BC}) = \frac{1}{2} \cdot d(\overline{AB})$. Skup svih točaka T takvih da je $AT = BT$ jest pravac s koji prolazi kroz polovište dužine $\overline{AB}$, a zove se *simetrala* te dužine (sl. 2).

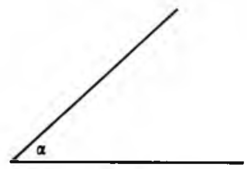


Sl. 2

Kut i mjera kuta. *Kut* $\sphericalangle(h,k)$ ili $\sphericalangle(k,h)$ jest par što ga tvore dva različita polupravca h i k koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se *vrh*, a polupravci h i k *krakovi* promatranog kuta. Ako je A bilo koja točka kraka h, a B bilo koja točka kraka k, tada se promatrani kut označuje još i sa $\sphericalangle AOB$ ili $\sphericalangle BOA$ (sl. 3). Osim toga, kutovi se kratko označuju malim grčkim slovima kao na sl. 4.

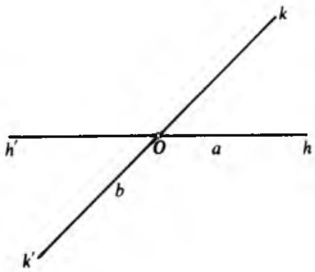


Sl. 3

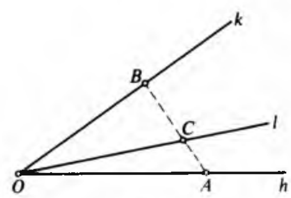


Sl. 4

Ako se pravci a i b sijeku u točki O i ako su h, h' i k, k' polupravci tih pravaca sa zajedničkim početkom O, tada ti polupravci određuju četiri kuta (sl. 5). Dva po dva od tih kutova zovu se ili *sukutovi*, ili *vršni kutovi*. Tako su na sl. 5 npr. $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(h',k)$ sukutovi, a $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(h',k')$ vršni kutovi. Sukutovi su jedan drugome *suplementarni*.



Sl. 5



Sl. 6

Ako polupravac l sadrži neku točku C dužine $\overline{AB}$, tada je l *unutrašnji polupravac* kuta $\sphericalangle AOB$ (sl. 6). Ta definicija ne ovisi o izboru točaka A i B na krakovima promatranog kuta.

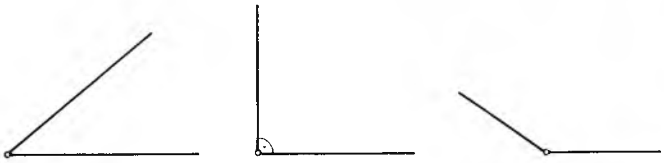
Izabran je jedan čvrst kut $\sphericalangle(p,q)$, koji se zove *jedinični kut*. Svakom kutu $\sphericalangle(h,k)$ može se samo na jedan način pridružiti pozitivan realan broj $m(h,k)$ tako da vrijede ova tri svojstva: *a*) sukladnim kutovima pridružen je isti broj, tj. iz $\sphericalangle(h,k) \equiv \sphericalangle(l,n)$ slijedi $m(h,k) = m(l,n)$, *b*) ako je l unutrašnji polupravac kuta $\sphericalangle(h,k)$, tada vrijedi $m(h,k) = m(h,l) + m(l,k)$ (sl. 6), *c*) jediničnom kutu $\sphericalangle(p,q)$ pridružen je broj 1.

Broj $m(h,k)$ zove se *mjera kuta* $\sphericalangle(h,k)$. Prema tome *mjera na skupu kutova* je funkcija $m\colon \mathscr{K} \to \mathbb{R}^+$ takva da za nju vrijede svojstva *a*) do *c*), gdje je $\mathscr{K}$ skup svih kutova, a $\mathbb{R}^+$ skup svih pozitivnih realnih brojeva.

Vrijedi i obrat svojstva *a*), tj. ako dva kuta imaju jednake mjere, tada su ti kutovi sukladni. Takvi kutovi su *jednaki* i označuju se $\sphericalangle(h,k) = \sphericalangle(l,n)$. Iz svojstva *b*) slijedi nejednakost $m(h,k) > m(h,l)$, pa je tada kut $\sphericalangle(h,k)$ *veći* od kuta $\sphericalangle(h,l)$, ili je kut $\sphericalangle(h,l)$ *manji* od kuta $\sphericalangle(h,k)$, a označuje se $\sphericalangle(h,k) > \sphericalangle(h,l)$ ili $\sphericalangle(h,l) < \sphericalangle(h,k)$. Za relacije $=$, $<$, $>$ među kutovima vrijede uobičajena algebarska pravila.

Zbog kratkoće se i kut i njegova mjera obično nazivaju kutom i označuju istom oznakom, pa na sl. 4 oznaka α označuje i kut i njegovu mjeru.

Kut jednak svojem sukutu zove se *pravi* kut. Svaka dva prava kuta su jednaka. Kut manji od pravog kuta zove se *šiljasti* kut, a kut veći od pravoga kuta zove se *tupi* kut. Na sl. 7 predočeni su redom: *a* šiljasti, *b* pravi i *c* tupi kut. Pravi se kut na slici označuje kao što je to predočeno na sl. 7b.



a b c

Sl. 7

Mjera kuta ovisi o izboru jediničnog kuta $\sphericalangle(p,q)$. Najpoznatije su dvije mogućnosti izbora jediničnog kuta:

1. Izabere li se jedinični kut tako da je pravom kutu pridružena mjera 90, tj. uzme li se za jedinični kut devedeseti dio pravog kuta, tzv. *kutni stupanj*, tada se kutovi mjere stupnjevima. Ako je m mjera kuta α, tada kut α ima m stupnjeva i označuje se $\alpha = m^\circ$. Za finije mjerenje služi još i šezdeseti dio stupnja, tzv. *kutna minuta*, te šezdeseti dio minute, tzv. *kutna sekunda*. Npr. $\alpha = 35^\circ 14' 28{,}5''$ znači da je mjera kuta α jednaka 35 stupnjeva, 14 minuta i 28,5 sekundi. Vrijedi $1^\circ = 60' = 3600''$. Bilo koji kut ima mjeru veću od 0°, a manju od 180°.

2. Izabere li se jedinični kut tako da je pravom kutu pridružena mjera $\pi/2$ (gdje je 2π duljina kružnice polumjera $r = 1$), tada se kutovi mjere *radijanima*. Ako je m mjera kuta α, tada kut α ima m radijana i označuje se kratko $\alpha = m$. Bilo koji kut ima mjeru veću od 0, a manju od π radijana.

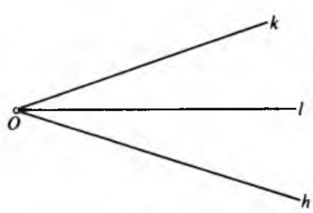
Spomenuta dva jedinična kuta povezana su odnosima

$$1 \text{ radijan} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57^\circ 17' 44{,}81\ldots'',$$

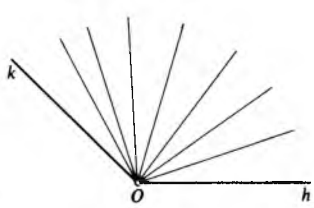
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radijana} = 0{,}0174533\ldots \text{ radijana}.$$

Zbroj mjera dvaju sukutova jednak je 180°, odnosno π radijana, a vršni kutovi su jednaki.

Za svaki kut $\sphericalangle(h,k)$ postoji samo jedan polupravac l toga kuta tako da je $\sphericalangle(h,l) = \sphericalangle(k,l)$. Polupravac l zove se *simetrala* kuta $\sphericalangle(h,k)$ i vrijedi $m(h,l) = m(k,l) = \frac{1}{2} \cdot m(h,k)$ (sl. 8).

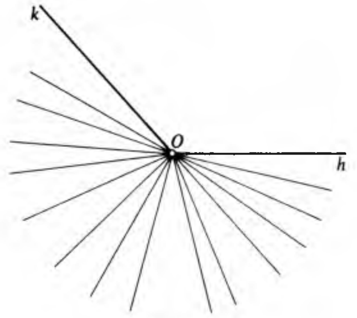


Sl. 8

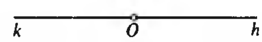


Sl. 9

Kut je definiran kao par njegovih krakova. Međutim, kut se može shvatiti i kao skup svih njegovih unutrašnjih polupravaca. Na slici 9 predočeno je nekoliko takvih polupravaca kuta $\sphericalangle(h,k)$ s vrhom O. Ako je l polupravac s početkom O, koji je različit od h i k i nije unutrašnji polupravac kuta $\sphericalangle(h,k)$, tada je l *vanjski polupravac* tog kuta. Na slici 10 predočeno je nekoliko vanjskih polupravaca kuta $\sphericalangle(h,k)$. Sada se pojam kuta može proširiti tako da se smatra da i skup vanjskih polupravaca kuta $\sphericalangle(h,k)$ tvori *kut u širem smislu*, tzv. *vanjski kut* kuta $\sphericalangle(h,k)$. Kut i njegov vanjski kut jedan su drugome *eksplementarni*. Ako neki kut ima mjeru α, tada se njegovu vanjskom kutu pridružuje mjera $360^\circ - \alpha$ ako se kutovi mjere stupnjevima, a $2\pi - \alpha$ ako se kutovi mjere radijanima. Kut i njegov vanjski kut tvore zajedno tzv. *puni kut*, kojemu se pridružuje mjera 360° ili 2π. Ako su h i k različiti polu-



Sl. 10

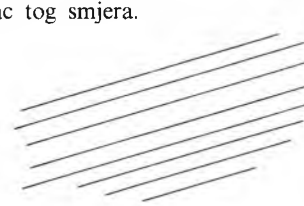


Sl. 11

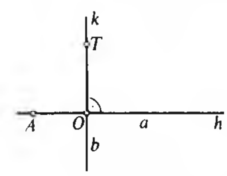
pravci istog pravca s istim početkom O (sl. 11), tada ti polupravci tvore *spruženi kut* $\sphericalangle(h,k)$ s vrhom O. Spruženom kutu pridružuje se mjera 180° ili π. Ako je h bilo koji polupravac, tada se smatra da je i $\sphericalangle(h,h)$ kut, i to kut s mjerom 0° ili 0. I za tako prošireni pojam kuta mjera ima svojstva navedena pod *a*) do *c*).

Dva su kuta jedan drugome *komplementarna* ako je zbroj njihovih mjera jednak mjeri pravog kuta.

Temeljni odnosi točaka i pravaca. Dva različita pravca a i b mogu imati najviše jednu zajedničku točku. Ako imaju zajedničku točku C, tada se ti pravci *sijeku* u toj točki, a točka C zove se *sjecište* pravaca a i b i označuje se $C = a \cap b$. Ako pravci a i b nemaju zajedničku točku, tada su ti pravci *paralelni* i označuju se $a \parallel b$ ili $b \parallel a$. Za svaki pravac a vrijedi $a \parallel a$. Iz $a \parallel b$ i $b \parallel c$ slijedi $a \parallel c$. Skup svih mogućih pravaca sa svojstvom da su svaka dva od tih pravaca paralelna zove se *smjer*, a svi pravci tog skupa *imaju isti smjer* (sl. 12). Kroz bilo koju točku prolazi samo jedan pravac danog smjera. Ako pravac siječe jedan pravac nekog smjera, tada siječe svaki pravac tog smjera.



Sl. 12



Sl. 13

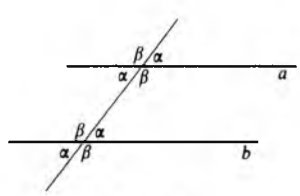
Ako je $\sphericalangle(h,k)$ pravi kut, a a i b pravci kojima pripadaju polupravci h i k, tada su pravci a i b *okomiti* i označuju se $a \perp b$ ili $b \perp a$ (sl. 13). Za bilo koju točku T i bilo koji pravac a postoji samo jedan pravac b koji prolazi kroz točku T i okomit je na pravac a. Pravac b zove se okomica iz točke T na pravac a, a točka $O = a \cap b$ zove se ***nožište*** te okomice ili *ortogonalna projekcija* točke T na pravac a. Ako je A bilo koja točka pravca a različita od točke O, tada je $TO < TA$. Broj $d(T,O)$ zove se *udaljenost točke T od pravca a*.

Iz $a \parallel b$ i $b \perp c$ slijedi $a \perp c$, a iz $a \perp b$ i $b \perp c$ slijedi $a \parallel c$.

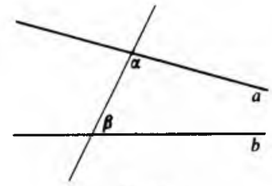
Simetrala dužine $\overline{AB}$ okomita je na pravac AB.

Ako su dva paralelna pravca a i b presječena trećim pravcem i sjecišta određuju polupravce koji definiraju ukupno osam kutova kao na sl. 14, tada su međusobno jednaki svi oni kutovi koji su na toj slici označeni istim slovom. Osim toga $\alpha + \beta = 180^\circ$. Obrnuto, iz jednakosti bilo kojih dvaju kutova koji su na sl. 14 jednako označeni, a nisu vršni kutovi, slijedi da su pravci a i b paralelni.

Ako za kutove α i β na sl. 15 vrijedi $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, tada se pravci a i b sijeku.



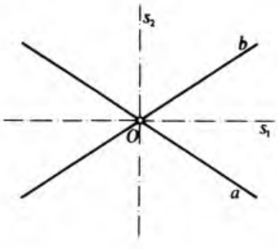
Sl. 14



Sl. 15

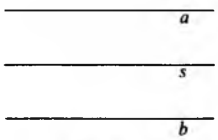
Neka su a i b paralelni pravci. Svaka točka pravca a ima istu udaljenost od pravca b i taj se broj zove *udaljenost paralelnih pravaca a i b*.

Ako se pravci a i b sijeku i nisu okomiti, tada njihovo sjecište O određuje na njima po dva polupravca s početkom O, a ti polupravci određuju četiri kuta od kojih su dva jednaka i šiljasta, a druga dva su jednaka i tupa (sl. 5). *Kutom pravaca a i b* zove se bilo koji od onih dvaju šiljastih kutova. Za paralelne pravce uzima se da tvore kut od 0°. Zato kut dvaju pravaca ima mjeru između 0° i 90° ili 0 i $\pi/2$ (uključujući i te vrijednosti).

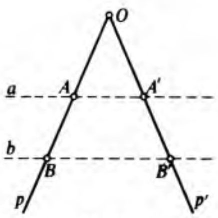


Sl. 16

Neka se pravci a i b sijeku u točki O. Oni tvore četiri kuta od kojih svaki ima svoju simetralu. Po dvije od tih simetrala (za dva vršna kuta) pripadaju jednom pravcu. Dobivena dva pravca s_1 i s_2 na sl. 16 okomita su i zovu se *simetrale* kutova *pravaca a i b*. Bilo koja točka na nekoj simetrali dvaju pravaca ima jednake udaljenosti od tih pravaca. Za dva paralelna pravca a i b postoji samo jedan s njima paralelan pravac s koji je jednako udaljen od svakog od njih. Pravac s smatra se simetralom pravaca a i b (sl. 17).



Sl. 17



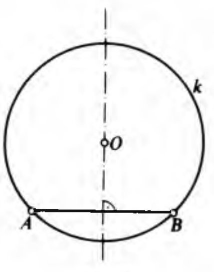
Sl. 18

Ako paralelni pravci a i b sijeku u točkama A, A', B, B', kao na sl. 18, različite pravce p i p' kojima sjecište O ne leži ni na jednom od pravaca a i b, tada vrijede jednakosti

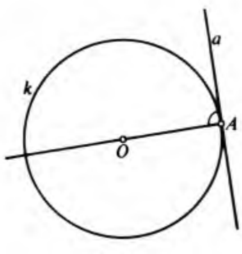
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}. \tag{2}$$

Obrnuto, ako su za točke A, B i A', B' na različitim pravcima p i p' sa sjecištem O jednaka bilo koja dva od triju razlomaka iz relacije (2), tada su pravci AA' i BB' paralelni.

Kružnica, krug, pramen i mreža kružnica. Neka je dana točka O i duljina r ($r > 0$). Skup točaka T takvih da je $d(\overline{OT}) = r$ zove se *kružnica* sa *središtem* O i *polumjerom* r. Polumjerom se naziva i dužina $\overline{OT}$ za bilo koju točku T kružnice. Ako su A, B bilo koje dvije točke kružnice, tada se dužina $\overline{AB}$ zove *tetiva* te kružnice. *Promjer* kružnice je tetiva koja sadrži središte kružnice kao svoju unutrašnju točku. Promjerom se naziva i svaki pravac koji prolazi kroz središte kružnice.



Sl. 19

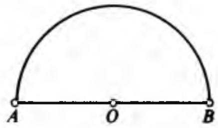


Sl. 20

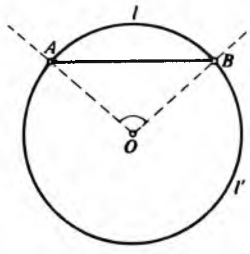
Ako je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k sa središtem O, tada je okomica iz O na pravac AB simetrala te tetive $\overline{AB}$ (sl. 19). Promjer kružnice nije manji od bilo koje njezine tetive.

Neka je A točka kružnice k sa središtem O i a pravac koji prolazi kroz točku A i okomit je na pravac OA (sl. 20), tada je *a tangenta kružnice k u točki A*, a ta je točka *diralište* tangente a i kružnice k. Kružnica i bilo koja njezina tangenta imaju samo jednu zajedničku točku, i to baš njihovo diralište.

Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, tada se skup svih točaka kružnice koje su s iste strane pravca AB zove *polukružnica nad promjerom* $\overline{AB}$ (sl. 21). Za dani promjer kružnice postoje dvije polukružnice nad tim promjerom.



Sl. 21

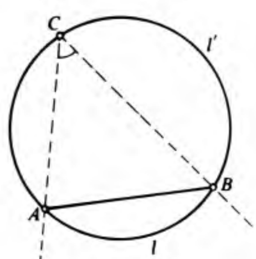


Sl. 22

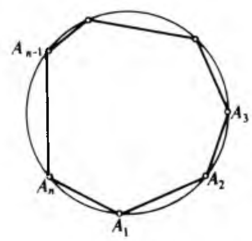
Neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k sa središtem O i nije promjer te kružnice. Skup svih točaka kružnice k koje su s iste strane pravca AB kao i točka O zove se *veći luk* tetive $\overline{AB}$ u kružnici k. Skup ostalih točaka kružnice k, osim točaka A i B, zove se *manji luk* (ili *kraće luk*) tetive $\overline{AB}$ u kružnici k. Na sl. 22 su l i l' manji i veći luk tetive $\overline{AB}$. Pravac AB *dijeli kružnicu k na dva luka l i l'*.

Kut $\sphericalangle AOB$ zove se *centralni kut tetive $\overline{AB}$* i ujedno *centralni kut luka l*, dok je centralni kut većeg luka l' vanjski kut kuta $\sphericalangle AOB$. Centralni kut promjera, odnosno polukružnice, jest spruženi kut.

Neka su l i l' različiti lukovi iste tetive $\overline{AB}$ u kružnici k. Ako je C bilo koja točka luka l', tada se kut $\sphericalangle ACB$ zove *obodni kut luka l* (sl. 23). Ako je pri tome l manji luk tetive $\overline{AB}$, tada se kaže da je *$\sphericalangle ACB$ obodni kut tetive $\overline{AB}$*. Bilo koja dva obodna kuta istog luka su jednaka i obodni kut luka jednak je polovici njegova centralnog kuta. Obodni je kut manjeg luka neke tetive koja nije promjer šiljast, a obodni kut većeg luka je tup, pa su ta dva obodna kuta suplementarna. Posebno vrijedi *Talesov poučak*: Obodni kut promjera je pravi kut. Jednake tetive iste kružnice imaju jednake centralne i jednake obodne kutove, te jednake lukove. Od dviju nejednakih tetiva iste kružnice veća tetiva ima veći centralni i veći obodni kut. Skup svih točaka za koje je kut $\sphericalangle ATB$ stalan, gdje je $\overline{AB}$ dana dužina, jest luk kružnice nad tetivom $\overline{AB}$.



Sl. 23



Sl. 24

Na kružnici k izabrano je na bilo koji način konačno mnogo točaka i te su točke označene sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tako da su točke $A_3, \ldots, A_n$ s iste strane pravca A_1A_2, točke $A_1, A_4, \ldots, A_n$ s iste strane pravca $A_2A_3, \ldots$, točke $A_1, \ldots, A_{n-2}$ s iste strane pravca $A_{n-1}A_n$ i točke $A_2, \ldots, A_{n-1}$ s iste strane pravca A_nA_1 (sl. 24). Neka je

$$d(A_1,A_2,\ldots,A_n) = d(\overline{A_1A_2}) + d(\overline{A_2A_3}) + \ldots + d(\overline{A_{n-1}A_n}) + d(\overline{A_nA_1}). \qquad (3)$$

Tada postoji pozitivan broj d sa svojstvom da je to najmanji broj koji je veći od svakog broja $d(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ za bilo koji izbor točaka $A_1,A_2,\ldots,A_n$ na opisani način. Broj d zove se *duljina kružnice k*. Duljina kružnice s polumjerom r jednaka je

$$d = 2r\pi, \qquad (4)$$

gdje je π neperiodički beskonačni decimalni broj kojemu je približna vrijednost na dvanaest decimala $\pi = 3{,}141592653590$.

Ako je l luk kružnice s polumjerom r kojemu centralni kut ima mjeru α radijana, tada se broj

$$d(l) = r\alpha \qquad (5)$$

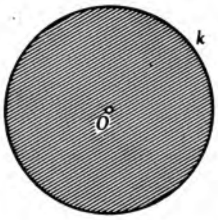
zove *duljina luka l*. Međutim, ako je α mjera centralnog kuta u stupnjevima, tada je

$$d(l) = \frac{\pi r \alpha}{180}. \qquad (6)$$

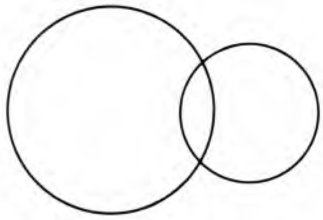
Neka je k kružnica sa središtem O i polumjerom r. Točka T je *unutrašnja točka kružnice k* ako je $d(\overline{OT}) < r$, a *vanjska točka kružnice k* ako je $d(\overline{OT}) > r$. Skup svih unutrašnjih točaka kružnice k zove se *krug s rubom k* (sl. 25). Kaže se da je O *središte*, a r *polumjer* tog *kruga*. Duljina kružnice k zove se još i *opseg kruga* s rubom k.

Kroz točku T prolaze dvije tangente kružnice k ako je T vanjska točka te kružnice, a samo jedna tangenta ako je T točka kružnice k (tada je T diralište te tangente). Ako je T unutrašnja točka kružnice k, tada kroz nju ne prolazi ni jedna tangenta te kružnice.

Neka je k kružnica sa središtem O i polumjerom r, a d udaljenost točke O od danog pravca p. Ako je $d > r$, tada pravac p i kružnica k nemaju zajedničkih točaka. Ako je $d = r$, tada je pravac p tangenta kružnice k. Ako je $d < r$, tada pravac p i kružnica k imaju dvije zajedničke točke, pa je p *sekanta* kružnice k.

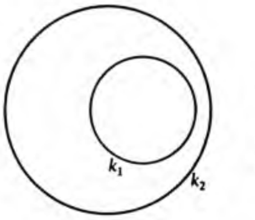


Sl. 25

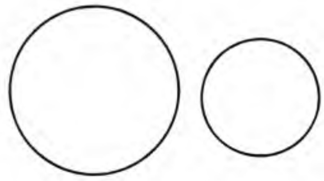


Sl. 26

Dvije ili više kružnica s istim središtem su *koncentrične*. Neka je d udaljenost središta dviju kružnica k_1 i k_2 s polumjerima r_1 i r_2 koje nisu koncentrične. Ako je $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, tada kružnice k_1 i k_2 imaju dvije zajedničke točke (sl. 26). Ako je $d < |r_1 - r_2|$ ili $d > r_1 + r_2$, tada kružnice k_1 i k_2 nemaju zajedničkih točaka. U prvom je slučaju $r_1 \neq r_2$ i ako je npr. $r_1 < r_2$, tada je svaka točka kružnice k_1 unutrašnja točka kružnice k_2, a kružnica k_1 *unutar* kružnice k_2 (sl. 27). U drugom slučaju kružnice se odnose kao na sl. 28. Ako je $d = r_1 + r_2$ ili $d = |r_1 - r_2|$, tada kružnice k_1 i k_2 imaju samo jednu zajedničku točku D i te se kužnice *diraju u točki D*,

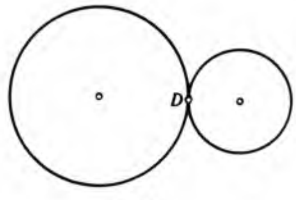


Sl. 27

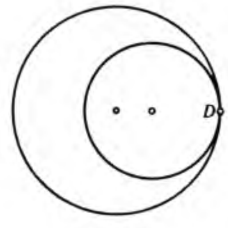


Sl. 28

koja se zove *diralište* tih kružnica. U prvom se slučaju te kružnice *diraju izvana* (sl. 29), a u drugome *iznutra* (sl. 30).



Sl. 29

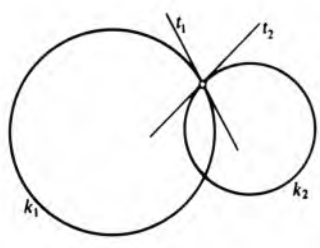


Sl. 30

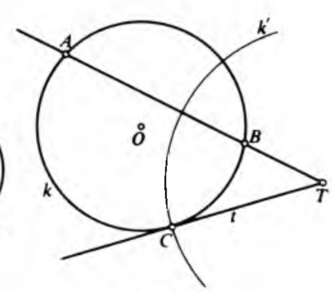
Neka kružnice k_1 i k_2 imaju zajedničku točku i neka su t_1 i t_2 tangente tih kružnica u toj točki (sl. 31). Kut pravaca t_1 i t_2 zove se *kut kružnica* k_1 i k_2. Ako su r_1 i r_2 polumjeri tih kružnica i d udaljenost njihovih središta, tada za njihov kut φ vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{|r_1^2 + r_2^2 - d^2|}{2r_1r_2}. \qquad (7)$$

Kružnice k_1 i k_2 su *ortogonalne* ako je njihov kut pravi. Kružnice k_1 i k_2 se diraju samo ako njihov kut ima mjeru 0.

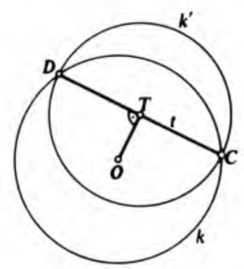


Sl. 31



Sl. 32

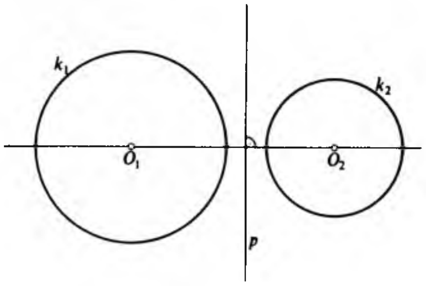
Ako su A i B zajedničke točke kružnice k (sa središtem O i polumjerom r) i bilo koje njezine sekante koja prolazi kroz danu točku T i ne pripada toj kružnici (sl. 32), tada je broj $d(\overline{TA}) \cdot d(\overline{TB})$ neovisan o izboru te sekante. Ako je T vanjska, odnosno unutrašnja točka kružnice k, tada se *potencijom* $p(T,k)$ *točke T s obzirom na kružnicu k* zove broj $d(\overline{TA}) \cdot d(\overline{TB})$, odnosno $-d(\overline{TA}) \cdot d(\overline{TB})$. Ako je T točka kružnice k, tada se uzima da je $p(T,k) = 0$. Uvijek je $p(T,k) = d^2 - r^2$, gdje je $d = d(\overline{OT})$. Ako je T vanjska točka kružnice k, a C diralište jedne tangente kružnice k koja prolazi kroz točku T (sl. 32), tada je $p(T,k) = t^2$, gdje je $t = d(\overline{TC})$. Ako je T unutrašnja točka kružnice k, a C jedno sjecište te kružnice s okomicom iz točke T na pravac OT (sl. 33), tada je $p(T,k) = -t^2$.



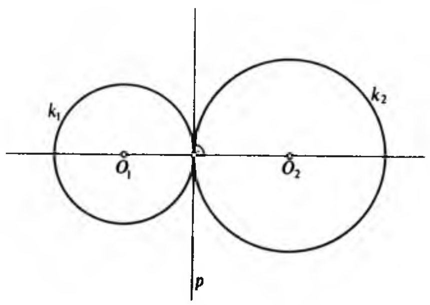
Sl. 33

Neka je $p = p(T,k)$ potencija točke T s obzirom na kružnicu k. Ako je $p > 0$, tada je kružnica k ortogonalna na kružnicu k' sa središtem T i polumjerom $\sqrt{p}$ (sl. 32). Ako je $p < 0$, tada kružnica k i kružnica k' sa središtem T i polumjerom $\sqrt{-p}$ imaju dvije zajedničke točke C i D takve da je $\overline{CD}$ promjer kružnice k' (sl. 33). Tada kužnica k *dijametralno siječe* kružnicu k'.

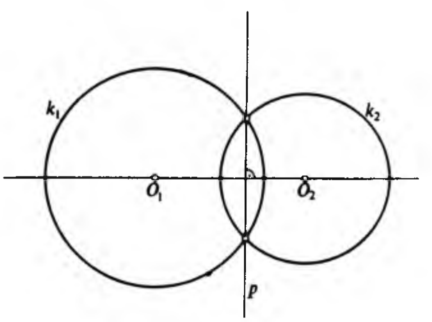
Ako su k_1 i k_2 dvije kružnice s različitim središtima O_1 i O_2, tada je skup točaka T takvih da vrijedi $p(T,k_1) = p(T,k_2)$ pravac p okomit na pravac O_1O_2, koji se zove *potencijala* kružnica k_1 i k_2 (sl. 34). Ako kružnice k_1 i k_2 imaju zajedničke točke (jednu ili dvije), tada potencijala p prolazi kroz te točke (sl. 35 i sl. 36). Točka T leži na potencijali dviju kružnica k_1 i k_2 samo ako postoji kružnica (koja je tada jedinstvena) sa središtem T koja je ortogonalna na kružnice k_1 i k_2 ili ju one dijametralno sijeku.



Sl. 34

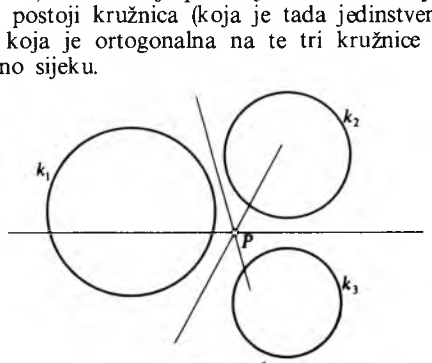


Sl. 35



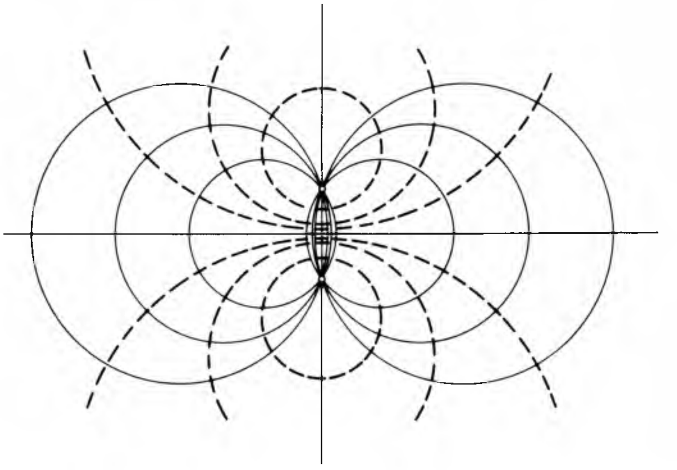
Sl. 36

Ako su k_1, k_2, k_3 kružnice kojima središta ne leže na jednom pravcu, tada tri potencijale triju parova tih triju kružnica imaju zajedničku točku P takvu da vrijedi $p(P,k_1) = p(P,k_2) = p(P,k_3)$. Ta se točka zove *potencijalno središte kružnica* k_1, k_2 i k_3 (sl. 37). Točka P je potencijalno središte triju kružnica samo ako postoji kružnica (koja je tada jedinstvena) sa središtem P koja je ortogonalna na te tri kružnice ili ju one dijametralno sijeku.



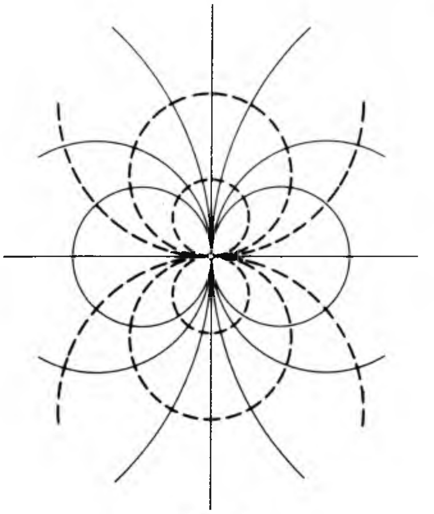
Sl. 37

Pramen kružnica s potencijalom p je skup svih kružnica sa svojstvom da bilo koje dvije od njih imaju za potencijalu dani pravac p. Središta svih kružnica pramena leže na jednom pravcu okomitom na potencijalu, koji se zove *centrala* tog *pramena*. Skup svih kružnica ortogonalnih na svaku kružnicu jednog pramena tvore opet jedan pramen. Takva su dva pramena kružnica *ortogonalna*. Potencijala jednoga od njih je centrala drugoga i obrnuto. Svake dvije kružnice koje nisu koncentrične pripadaju samo jednom pramenu. Postoje tri vrste pramenova: *a*) sve kružnice pramena imaju dvije zajedničke točke na potencijali, tzv. *temeljne točke pramena*, a pramen je *eliptički*, *b*) sve kružnice pramena diraju potencijalu u istoj točki, tzv. *vrhu pramena*, a pramen je *parabolički*, *c*) kružnice pramena nemaju zajedničkih točaka ni s potencijalom ni međusobno, a pramen je *hiperbolički*.



Sl. 38

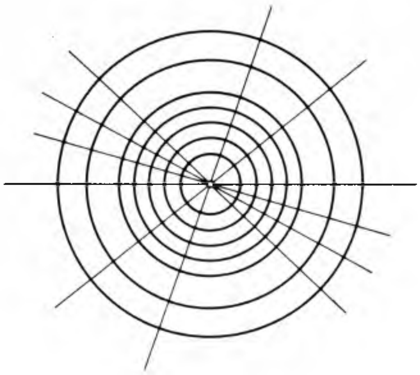
Ako je jedan od dva ortogonalna pramena eliptički, tada je drugi hiperbolički, i obrnuto. Na sl. 38 punim crtama predočeno je nekoliko kružnica jednoga eliptičkog pramena, a crtkano je predočeno nekoliko kružnica njemu ortogonalnoga hiperboličkog pramena. Temeljne točke prvog pramena zovu se *granične točke* drugoga (hiperboličkog) *pramena*. Ako je jedan od dva ortogonalna pramena parabolički, tada je i drugi parabolički, a oba pramena imaju isti vrh. Na sl. 39 predočeno je po nekoliko kružnica dvaju ortogonalnih paraboličkih pramenova.



Sl. 39

Često je zgodno smatrati i pravac kružnicom s beskonačno dalekim središtem i beskonačno velikim polumjerom, pri čemu se uzima da postoji jedna jedina beskonačno daleka točka i da svaki pravac prolazi kroz tu točku. Tada je i pramen pravaca s vrhom O (skup svih pravaca koji prolaze kroz točku O) eliptički pramen kružnica kojima su temeljne točke: točka O i beskonačno daleka točka. Skup svih koncentričnih kružnica sa središtem O smatra se hiperboličkim pramenom, kojemu su granične točke točka O i beskonačno daleka točka. Na sl. 40

predočeno je nekoliko kružnica pramena koncentričnih kružnica i nekolika pravaca njemu ortogonalnog pramena pravaca. Pri tom se smatra da je kružnica ortogonalna na svaki svoj promjer. Skup svih pravaca istog smjera smatra se paraboličkim pramenom s vrhom u beskonačno dalekoj točki. Uzima se da potencijala pramena također pripada tom pramenu.



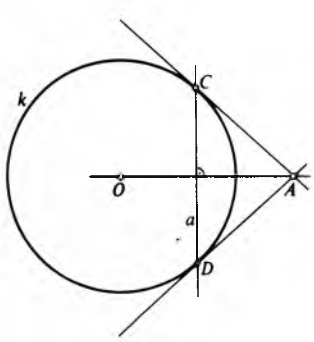
Sl. 40

Neka su A i B različite točke, k pozitivan realan broj. Skup svih točaka T takvih da je $\dfrac{d(A,T)}{d(B,T)} = k$ jest kružnica, tzv. *Apolonijeva kružnica točaka A i B s omjerom k.* Skup svih Apolonijevih kružnica danih točaka A i B (za različite omjere k) jest hiperbolički pramen kružnica s graničnim točkama A i B.

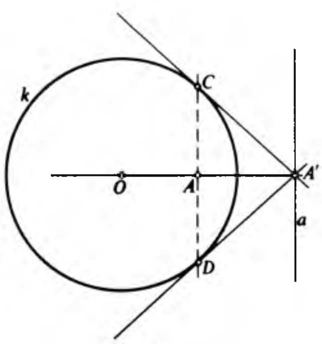
Mreža kružnica sa središtem P je skup svih kružnica sa svojstvom da bilo koje tri od njih imaju za potencijalno središte danu točku P, tj. točka P ima jednake potencije p s obzirom na sve kružnice mreže. Postoje tri vrste mreža kružnica: *a*) ako je $p < 0$, tada je mreža *eliptička* i postoji kružnica sa središtem P koju svaka kružnica mreže dijametralno siječe, *b*) ako je $p = 0$, tada je mreža *parabolička*, a sve njezine kružnice sadrže točku P, *c*) ako je $p > 0$, tada je mreža hiperbolička i postoji kružnica sa središtem P koja je ortogonalna na svaku kružnicu mreže.

U svima trima primjerima smatra se da i pravci kroz središte P pripadaju mreži.

Neka je k kružnica sa središtem O. Bilo kojoj točki A, različitoj od točke O, pridružuje se pravac a, tzv. *polara točke A s obzirom na kružnicu k*, na ovaj način: ako je A točka kružnice k, tada je a tangenta kružnice k u točki A (sl. 20); ako je A vanjska točka kružnice k, a C i D su dirališta kružnice k s tangentama koje prolaze kroz točku A, tada je a pravac CD (sl. 41); ako je A unutrašnja točka kružnice k i ako okomica iz točke A na pravac OA ima s kružnicom k zajedničke točke C i D, pa ako je A' sjecište tangenata kružnice k u točkama C i D, tada je a okomica iz točke A' na pravac OA' (sl. 42).

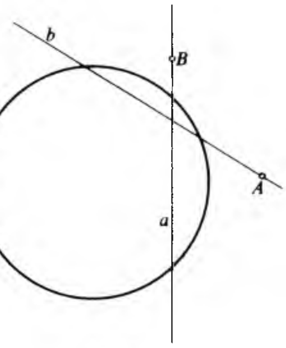


Sl. 41



Sl. 42

Ako je a polara točke A s obzirom na kružnicu k, tada se kaže da je *A pol pravca a s obzirom na kružnicu k.* Polara a je uvijek okomita na pravac OA. Pridruživanje koje pridružuje bilo kojoj točki (različitoj od središta kružnice k) njezinu polaru, odnosno bilo kojem pravcu (koji ne prolazi kroz središte kružnice k) njegov pol s obzirom na kružnicu k, zove se *polaritet s obzirom na kružnicu k.* Polaritet s obzirom na danu kružnicu k ima svojstvo da točka A leži na polari b točke B samo ako točka B leži na polari a točke A (sl. 43).



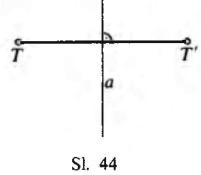
Sl. 43

GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

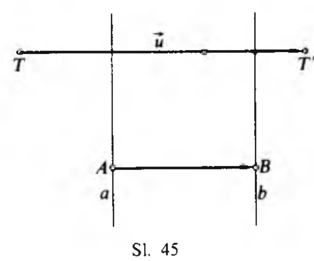
Izometrija ravnine je svaka transformacija (v. *Geometrija, Erlangenski program*, TE 6, str. 122) te ravnine koja čuva udaljenost, tj. takva transformacija f da za bilo koje dvije točke A i B vrijedi $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$. Sve izometrije tvore grupu transformacija, tzv. *grupu izometrija.* Izometrija preslikava pravce u pravce, kutove u kutove te čuva mjeru kuta i poredak, tj. ako je točka C između točaka A i B a f izometrija, tada je i točka $f(C)$ između točaka $f(A)$ i $f(B)$. Za dvije figure kaže se da su *sukladne* ako postoji izometrija koja preslikava jednu figuru na drugu. Za bilo koja dva sukladna trokuta postoji samo jedna izometrija koja jednoga od njih preslikava na drugi.

Za svaki pravac a postoji izometrija, različita od identiteta, koja svaku točku pravca a preslikava na sebe. To je tzv. *osna simetrija s obzirom na pravac a*, koji se zove *os* te osne simetrije. Ako je T bilo koja točka koja ne leži na pravcu a, a T' njezina slika pri simetriji s obzirom na taj pravac, tada je a simetrala dužine $\overline{TT'}$ (sl. 44).

Svaka izometrija može se predočiti kao *kompozicija* od najviše tri osne simetrije. Kompozicija od parnog broja osnih simetrija ne može biti jednaka kompoziciji od neparnog broja osnih simetrija. Zato se skup svih izometrija raspada u dva podskupa bez zajedničkih elemenata. Izometrija koja se može predočiti kao kompozicija od parnog broja osnih simetrija zove se *direktna izometrija* ili *gibanje*, a izometrija koja se može predočiti kao kompozicija od neparnog broja osnih simetrija zove se *indirektna izometrija.* Sva gibanja tvore grupu transformacija, tzv. *grupu gibanja.*



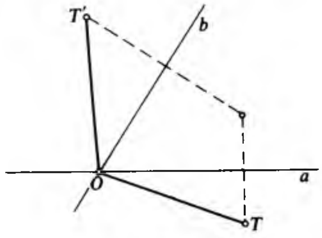
Sl. 44



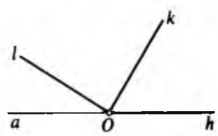
Sl. 45

Ako su a i b paralelni pravci, tada se kompozicija osnih simetrija s obzirom na te pravce zove translacija. Ako su A i B bilo koje točke na pravcima a i b takve da su ti pravci okomiti na pravac AB, tada za bilo koju točku T i njezinu sliku T' pri promatranoj translaciji vrijedi $\overrightarrow{TT'} = 2\overrightarrow{AB}$ (sl. 45). Zato se za tu translaciju kaže da je to *translacija za vektor* $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$. Identitet je translacija za nulvektor. Sve translacije tvore grupu transformacija, tzv. *grupu translacija.* Komponiranje translacija odgovara zbrajanju vektora, tj. ako su f i g translacije za vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tada je fg translacija za vektor $\vec{u} + \vec{v}$, a f^{-1} je translacija za vektor $-\vec{u}$. Za bilo koje dvije translacije f i g vrijedi $fg = gf$. Ako je f translacija za vektor $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$), tada za bilo koju točku T vrijedi $f(T) \neq T$. Za bilo koje dvije točke A i B postoji samo jedna translacija koja preslikava točku A u točku B. Translacija preslikava svaki pravac u pravac koji je s njime paralelan.

Ako se pravci a i b sijeku u točki O, tada se kompozicija osnih simetrija s obzirom na te pravce zove *rotacija oko točke O*, a točka O zove se *središte* te rotacije. Ako je T bilo koja točka različita od točke O, a T' njezina slika pri promatranoj rotaciji, tada je $\sphericalangle TOT' = \varphi$, gdje je φ kut jednak dvostrukom kutu pravaca a i b (sl. 46). Zato se za tu rotaciju kaže da je to *rotacija za kut φ oko točke O*. Identitet je rotacija za kut 0 oko bilo koje točke. Sve rotacije oko dane točke O tvore grupu transformacija, tzv. *grupu rotacija oko točke O*. Za bilo koje dvije rotacije f i g oko točke O vrijedi $fg = gf$. Ako je f rotacija za kut $\varphi \neq 0$ oko točke O, tada je $f(O) = O$, a za bilo koju točku T različitu od točke O vrijedi $f(T) \neq T$. Za bilo koja dva polupravca h i k sa zajedničkim početkom O postoji jedna jedina rotacija oko točke O koja preslikava polupravac h na polupravac k.

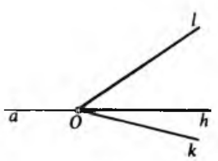


Sl. 46

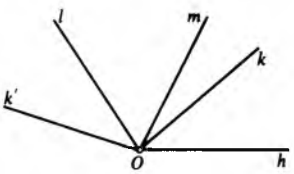


Sl. 47

Za kut se kaže da je *orijentiran* ako se za njegova dva kraka istakne koji je prvi, a koji drugi. Orijentirani kutovi $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(h,l)$ sa zajedničkim vrhom O imaju *istu orijentaciju* ako su polupravci k *i* l *s iste strane pravca a* koji sadrži polupravac h, tj. pripadaju istoj poluravnini s rubom a (sl. 47), a *suprotnu orijentaciju* ako su polupravci k *i* l *s različitih strana pravca a*, tj. pripadaju različitim poluravninama s rubom a (sl. 48). Dva orijentirana kuta $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(l,m)$ sa zajedničkim vrhom O imaju istu orijentaciju ili suprotnu orijentaciju ako istu orijentaciju ili suprotnu orijentaciju imaju orijentirani kutovi $\sphericalangle(l,k')$ i $\sphericalangle(l,m)$, gdje je k' slika polupravca k pri rotaciji oko točke O koja polupravac h preslikava na polupravac l. Npr. na sl. 49 predočeni su kutovi $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(l,m)$ koji imaju različite orijentacije.

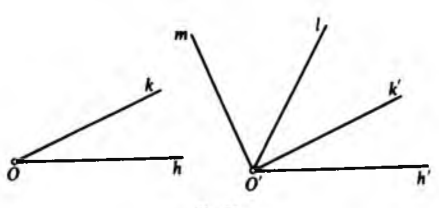


Sl. 48



Sl. 49

Bilo koja dva orijentirana kuta $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(l,m)$ s vrhovima O i O' imaju istu orijentaciju ili suprotnu orijentaciju ako istu orijentaciju ili suprotnu orijentaciju imaju orijentirani kutovi $\sphericalangle(h',k')$ i $\sphericalangle(l,m)$, gdje je kut $\sphericalangle(h',k')$ slika kuta $\sphericalangle(h,k)$ pri translaciji koja točku O preslikava u točki O'. Npr. na sl. 50 predočeni su kutovi $\sphericalangle(h,k)$ i $\sphericalangle(l,m)$ koji imaju istu orijentaciju. Skup svih orijentiranih kutova raspada se u dva podskupa sa svojstvom da svaka dva orijentirana kuta iz istog podskupa imaju istu orijentaciju, a svaka dva orijentirana kuta iz različitih podskupova imaju suprotne orijentacije. Ta dva podskupa zovu se *orijentacije kutova*. Za jednu orijentaciju kaže



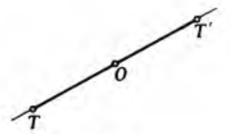
Sl. 50

se da je *pozitivna*, a za drugu da je *negativna*. Ako orijentirani kut pripada pozitivnoj orijentaciji, tada je taj orijentirani kut *pozitivan*, a ako pripada negativnoj orijentaciji, tada je *negativan*. Obično se orijentacije biraju tako da je na sl. 50 orijentirani kut $\sphericalangle(h,k)$ pozitivan, a orijentirani kut $\sphericalangle(k,h)$ negativan.

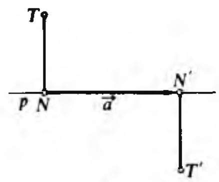
Ako je φ mjera kuta $\sphericalangle(h,k)$, tada se *mjerom orijentiranog kuta* $\sphericalangle(h,k)$ zove broj φ ako je $\sphericalangle(h,k)$ pozitivan, a broj $2\pi - \varphi$, odnosno $360^\circ - \varphi$, ako je $\sphericalangle(h,k)$ negativan orijentirani kut. Ako je orijentirani kut α' slika orijentiranog kuta α pri izometriji f, tada orijentirani kutovi α i α' imaju istu ili suprotne orijentacije, već prema tome da li je f direktna ili indirektna izometrija.

Neka je f rotacija oko točke O. Ako je h bilo koji polupravac s početkom O, a h' njegova slika pri rotaciji f, tada orijentirani kut $\sphericalangle(h,h')$ ima stalnu mjeru φ, a rotacija f je rotacija oko točke O za kut φ. Za bilo koju točku O i bilo koji realan broj φ između 0 i 2π postoji jedna jedina rotacija oko točke O za kut φ (mjera kuta je u radijanima). Komponiranju rotacija oko iste točke odgovara zbrajanje orijentiranih kutova, tj. ako su f i g rotacije oko točke O za kutove α i β (mjerene u radijanima), tada je fg rotacija oko točke O za kut $\alpha + \beta$ ako je $\alpha + \beta < 2\pi$, ili za kut $\alpha + \beta - 2\pi$ ako je $\alpha + \beta \geqq 2\pi$, a f^{-1} je rotacija oko točke O za kut $2\pi - \alpha$ ako je $\alpha \neq 0$, ili za kut 0 ako je $\alpha = 0$.

Svako gibanje koje nije identitet ili je translacija ili rotacija. Rotacija oko točke O za kut π zove se još i *centralna simetrija s obzirom na točku O*, koja se zove središte te centralne simetrije. Ako je T bilo koja točka različita od točke O i ako je T' njezina slika pri centralnoj simetriji s obzirom na tačku O, tada je O polovište dužine $\overline{TT'}$ (sl. 51).



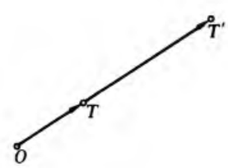
Sl. 51



Sl. 52

Klizna simetrija uzduž pravca p za vektor $\vec{a}$ je izometrija koja bilo koju točku N pravca p preslikava u točku N' tog pravca tako da je $\overrightarrow{NN'} = \vec{a}$, a bilo koju točku T koja ne leži na pravcu p preslikava u točku T' takvu da su točke T i T' s različitih strana pravca p i imaju jednake udaljenosti od tog pravca, a za ortogonalne projekcije N i N' tih točaka na pravac p vrijedi jednakost $\overrightarrow{NN'} = \vec{a}$ (sl. 52). Posebno, osna je simetrija s obzirom na pravac p klizna simetrija uzduž tog pravca za nulvektor. Svaka je indirektna izometrija klizna simetrija.

Homotetija sa središtem O i koeficijentom k (k je bilo koji realan broj različit od 0) je transformacija koja bilo kojoj točki T pridružuje točku T' takvu da vrijedi $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$ (na sl. 53 je $k = 3$). Posebno, ako je $k = 1$, postoji identitet, a ako je $k = -1$, centralna simetrija s obzirom na točku O. Homotetija preslikava svaki pravac u pravac koji je s njime paralelan. Sve homotetije sa središtem O tvore grupu transformacija, tzv. *grupu homotetija sa središtem O*. Isto tako sve translacije i sve homotetije tvore jednu grupu transformacija.



Sl. 53

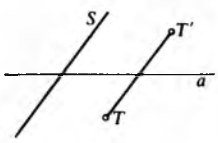
Ekviformna transformacija je bilo koja kompozicija od konačno mnogo izometrija i homotetija. Svaka se ekviformna transformacija može predočiti u obliku kompozicije jednog gibanja i jedne homotetije. To predočenje nije jedinstveno, ali pri svakom takvu predočenju homotetija ima uvijek isti koeficijent. Ako je k taj koeficijent, tada je promatrana ekviformna transformacija *ekviformna transformacija s koeficijentom k*. Već prema tome da li je $k > 0$ ili $k < 0$, ekviformna transformacija se zove *direktna*, odnosno *indirektna*. Posebno, za $k = 1$ ili $k = -1$ imamo direktne, odnosno indirektne izometrije. Ako je f ekviformna transformacija s koeficijentom k, a A i B bilo koje točke, tada vrijedi jednakost

$$d(f(A), f(B)) = |k| \cdot d(A,B). \tag{8}$$

Ako su f i g ekviformne transformacije s koeficijentima k i k', tada je fg ekviformna transformacija s koeficijentom kk' a f^{-1} je ekviformna transformacija s koeficijentom $1/k$. Sve ekviformne transformacije tvore grupu transformacija, tzv. *ekviformnu grupu*, a isto tako i sve direktne ekviformne transformacije tvore jednu grupu transformacija. Svaka ekviformna transformacija preslikava pravce na pravce, kutove na kutove te čuva mjeru kuta i poredak.

Za dvije figure kaže se da su *slične* (*direktno* ili *indirektno*) ako postoji ekviformna transformacija (direktna ili indirektna) koja preslikava jednu figuru na drugu. Za svaka dva slična trokuta postoji jedna jedina ekviformna transformacija koja jedan od njih preslikava na drugi.

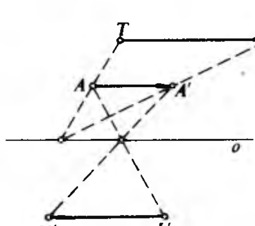
Afina osna simetrija u smjeru S s obzirom na pravac a (smjer S različit od smjera pravca a), koji se zove *os*, jest transformacija koja bilo koju točku pravca a preslikava u nju samu, a bilo koju točku T koja ne leži na pravcu a preslikava u točku T' takvu da pravac TT' ima smjer S, a polovište dužine $\overline{TT'}$ leži na pravcu a (sl. 54). Afina osna simetrija jednoznačno je određena svojim smjerom i svojom osi.



Sl. 54

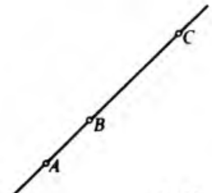
Ekviafinitet je bilo koja kompozicija od konačno mnogo afinih osnih simetrija. Svi ekviafiniteti tvore grupu transformacija, tzv. *ekviafinu grupu*. Svaki ekviafinitet može se predočiti kao kompozicija od najviše tri afine osne simetrije. Kompozicija od parnog broja afinih osnih simetrija ne može biti jednaka kompoziciji od neparnog broja afinih osnih simetrija. Zato se skup svih ekviafiniteta raspada u dva podskupa bez zajedničkih elemenata. Ekviafinitet koji se može predočiti kao kompozicija od parnoga ili neparnog broja afinih osnih simetrija zove se *direktni*, odnosno *indirektni* ekviafinitet. Svi direktni ekviafiniteti tvore grupu transformacija.

Smicanje. Neka je dan pravac o i točke A i A' koje ne leže na tom pravcu, ali su takve da je $AA' \| o$ (sl. 55). *Smicanje uzduž osi o*, određeno točkama A i A', jest transformacija koja bilo koju točku T preslikava u točku T' tako da vrijedi $\overrightarrow{TT'} = t \cdot \overrightarrow{AA'}$, gdje je $t = \frac{d(T,o)}{d(A,o)}$ ako su točke T i A s iste strane pravca o, a $t = -\frac{d(T,o)}{d(A,o)}$ ako su točke T i A s različitih strana pravca o, pri čemu je npr. $d(T,o)$ oznaka za udaljenost točke T od pravca o. Ako točka T leži na pravcu o, tada je očigledno $T' = T$. Smicanje je direktni ekviafinitet.

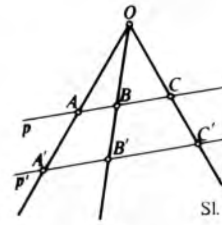


Sl. 55

Djelišni omjer. Neka su A i B različite točke, a C bilo koja točka pravca AB različita od točke B. Točki C pridružuje se broj $-\frac{d(A,C)}{d(B,C)}$ ako je C točka dužine $\overline{AB}$, a inače broj $\frac{d(A,C)}{d(B,C)}$. Taj se broj zove *djelišni omjer točaka A, B i C* i označuje se sa (ABC). *Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru* $k = (ABC)$. Očigledno je $(ABA) = 0$, a $(ABC) = -1$ vrijedi samo ako je C polovište dužine $\overline{AB}$. Na sl. 56 je npr. $(ABC) = -\frac{1}{2}$. Jednakost $(ABC) = k$ ekvivalentna je s vektorskom jednakošću $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Za svaki realan broj k, različit od 1, postoji jedna jedina točka C pravca AB takva da vrijedi $(ABC) = k$. Uzima se da je $(ABB) = \infty$, a da za beskonačno daleku točku N pravca AB vrijedi $(ABN) = 1$. Ako su a i b različiti pravci, a c bilo koji pravac kroz točku O, i ako paralelni pravci p i p' koji ne prolaze kroz točku O sijeku pravce a, b i c redom u točkama A, B, C i A', B', C' (sl. 57), tada vrijedi jednakost $(ABC) = (A'B'C')$. Ako je f homotetija sa središtem O i koeficijentom k ($k \neq 1$), a T bilo koja točka različita od točke O, te $T' = f(T)$, tada vrijedi jednakost $(T'TO) = k$.



Sl. 56

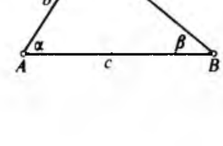


Sl. 57

Afinitet je bilo koja transformacija ravnine koja preslikava pravce na pravce i čuva paralelnost pravaca, tj. ako je f afinitet, tada su bilo koja dva pravca a i b paralelni samo ako su paralelne i njihove slike $f(a)$ i $f(b)$. Za svaka dva trokuta postoji jedan jedini afinitet koji preslikava jedan trokut na drugi. Ekviformne transformacije i ekviafiniteti su afiniteti. Afinitet čuva poredak i djelišni omjer, tj. ako su A i B različite točke, C bilo koja točka pravca AB i f afinitet, te A', B', C' slike točaka A, B, C pri tom afinitetu, tada je $(ABC) = (A'B'C')$. Skup svih afiniteta tvori grupu transformacija, tzv. *grupu afiniteta* ili *afinu grupu*.

Svaki afinitet može se predočiti kao kompozicija nekog direktnog ekviafiniteta i neke homotetije. To predočenje nije jedinstveno, ali pri svakom takvu predočenju homotetija ima uvijek isti koeficijent. Ako je k taj koeficijent, tada se za promatrani afinitet kaže da je to *afinitet s koeficijentom k*. Već prema tome da li je $k > 0$ ili $k < 0$, afinitet je *direktan*, odnosno *indirektan*. Posebno, za $k = 1$ ili $k = -1$ postoje direktni, odnosno indirektni ekviafiniteti. Ako su f i g afiniteti s koeficijentima k i k', tada je fg afinitet s koeficijentom kk', a f^{-1} je afinitet s koeficijentom $1/k$. Ti direktni afiniteti tvore grupu transformacija.

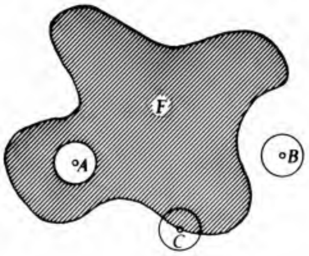
Trokut je *orijentiran* ako se za njegova tri vrha istakne kojim poretkom dolaze, tj. koji je prvi, koji drugi, a koji treći. Dva orijentirana trokuta imaju *istu orijentaciju* ili *suprotne orijentacije*, već prema tome da li je afinitet koji preslikava jedan trokut na drugi direktan ili indirektan. Skup svih orijentiranih trokuta raspada se u dva podskupa sa svojstvom da svaka dva orijentirana trokuta iz istog podskupa imaju istu orijentaciju, a svaka dva orijentirana trokuta iz različitih podskupova imaju suprotne orijentacije. Ta dva podskupa zovu se *orijentacije na skupu trokuta*. Za jednu orijentaciju kaže se da je *pozitivna*, a za drugu da je *negativna*. Ako orijentirani trokut pripada pozitivnoj ili negativnoj orijentaciji, tada je on *pozitivno*, odnosno *negativno orijentiran*. Obično se orijentacije biraju tako da je na sl. 58 orijentirani trokut ABC pozitivno orijentiran, a tada je npr. orijentirani trokut ACB negativno orijentiran.



Sl. 58

FIGURE

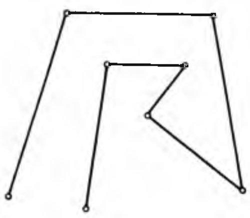
Otvorene i zatvorene figure. Figura F je bilo koji skup točaka. Točka T figure F *unutrašnja je točka* te figure ako postoji krug sa središtem T koji je sadržan u figuri F. Skup svih unutrašnjih točaka figure F zove se *unutrašnje područje* ili *nutrina* te figure i očigledno je sadržana u figuri F. T je *vanjska točka figure* F ako postoji krug sa središtem T koji nema ni jednu zajedničku točku s figurom F. Skup svih vanjskih točaka figure F zove se *vanjsko područje* te figure i nema s njome zajedničkih točaka. T je *rubna točka* figure F ako svaki krug sa središtem T ima zajedničkih točaka s figurom F, ali sadrži i točke koje ne pripadaju toj figuri. Rubna točka figure može, ali ne mora, pripadati toj figuri. Skup svih rubnih točaka figure F zove se *rub* te figure. Na sl. 59 A je unutrašnja, B vanjska, a C rubna točka figure F. Skup svih unutrašnjih i rubnih točaka figure zove se *zatvorenje* te figure. Figura F je *zbroj* figura F_1 i F_2 ako svaka točka figure F_1 i svaka točka figure F_2 pripadaju figuri F, a svaka točka figure F pripada bar jednoj od figura F_1 i F_2 koje nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka.

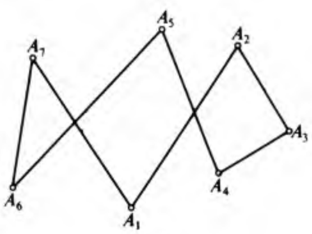


Sl. 59

Figura F je *otvorena* ako joj je svaka točka unutrašnja točka, tj. ako ne sadrži ni jednu svoju rubnu točku. Figura F je *zatvorena* ako sadrži sve svoje točke, tj. ako je jednaka svojem zatvorenju. Figura F je *omeđena* ako postoji krug u kojemu je sadržana figura F. U protivnome figura F je *neomeđena*.

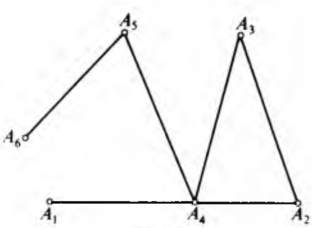
Poligonalne crte. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ bilo koje točke, tada se skup svih tih točaka i svih točaka pojedinih dužina $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_{n+1}}$ zove *poligonalna crta* s *vrhovima* $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, krajevima A_1 i A_{n+1} i stranicama $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_{n+1}}$. Ta poligonalna crta označuje se sa $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$. Na sl. 60 predočena je jedna poligonalna crta.


Sl. 60

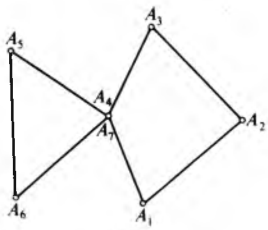


Sl. 61

Poligonalna crta $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ je *zatvorena* ako je $A_{n+1} = A_1$ (sl. 61) i tada se označuje sa $A_1A_2 \ldots A_n$. Poligonalna crta je *jednostavna* ako svaka točka neke njezine stranice pripada samo toj stranici, a svaki njezin vrh je kraj najviše dviju stranica i ne pripada više ni jednoj stranici. Na sl. 61, 62 i 63 predočene su poligonalne crte koje nisu jednostavne, dok je poligonalna crta na sl. 60 jednostavna. Broj $d(\overline{A_1A_2}) + d(\overline{A_2A_3}) + \ldots + d(\overline{A_nA_{n+1}})$ zove se *duljina poligonalne crte* $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$. Ona je veća od udaljenosti $d(A_1, A_{n+1})$.



Sl. 62



Sl. 63

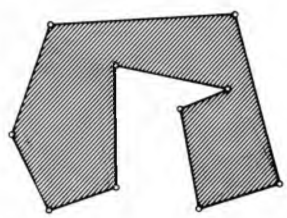
Bilo koja figura F *dijeli ravninu na dva dijela* F_1 i F_2 ako vrijede ova svojstva: *a*) svaka točka ravnine pripada samo jednoj od triju figura F, F_1 i F_2, *b*) za bilo koje dvije točke figure F_1 (odnosno F_2) postoji poligonalna crta kojoj su te točke krajevi, a svaka točka te poligonalne crte pripada figuri F_1 (odnosno F_2), *c*) za svaku poligonalnu crtu kojoj je jedan kraj sadržan u figuri F_1, a drugi u figuri F_2, figura F sadrži bar jednu točku te poligonalne crte.

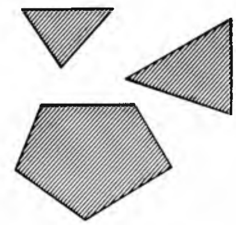

Sl. 64

Svaki pravac p dijeli ravninu na dvije figure koje se zovu *poluravnine s rubom p*. Na sl. 64 predočena je jedna poluravnina s rubom p.

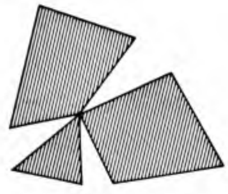
Poligoni

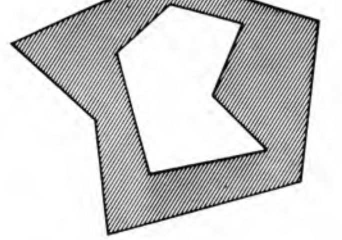
Svaka zatvorena jednostavna poligonalna crta dijeli ravninu na dva dijela, od kojih je jedan omeđen, a drugi neomeđen. Skup svih točaka prvog dijela i svih točaka te poligonalne crte zove se *jednostavni poligon*, kojemu je taj omeđeni dio nutrina, a promatrana poligonalna crta rub (sl. 65). Vrhovi i stranice poligonalne crte zovu se tada *vrhovi* i *stranice* toga poligona. Jednostavni poligon koji ima n vrhova zove se još i *n-terokut*. *Opseg* je jednostavnog poligona duljina poligonalne crte koja je rub toga jednostavnog poligona.


Sl. 65

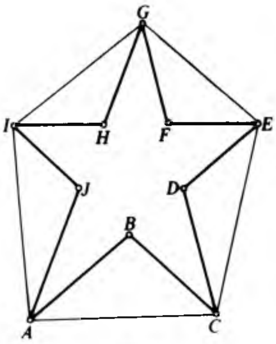

Sl. 66

Svaka figura koja je zbroj od konačno mnogo jednostavnih poligona zove se *poligon*. Očigledno je svaki jednostavni poligon zaista poligon, ali obrnuto ne vrijedi. Tako su na sl. 66 do 68 predočeni poligoni koji nisu jednostavni. Svaki poligon može se predočiti kao zbroj od konačno mnogo trokuta.

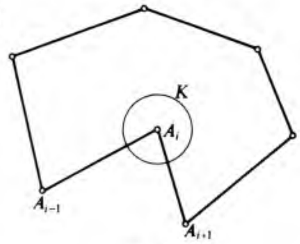

Sl. 67


Sl. 68

Za figuru F kaže se da je *konveksna* ako zajedno s bilo koje svoje dvije različite točke A i B sadrži i svaku točku dužine $\overline{AB}$. Presjek konveksnih figura je konveksna figura. Poluravnina je konveksna figura. Svaka je konveksna figura presjek poluravnina. Za svaku figuru F postoji najmanja konveksna figura koja sadrži figuru F. To je presjek svih konveksnih figura koje sadrže figuru F. Najmanja konveksna figura koja sadrži dani konačan skup točaka konveksni je poligon. Svaki je konveksni poligon jednostavan. Na sl. 69 peterokut $ACEGI$ najmanja je konveksna figura koja sadrži danu petokraku zvijezdu $ABCDEFGHIJ$.



Sl. 69



Sl. 70

Neka je $A_1A_2...A_n$ jednostavan poligon. Za svaki vrh A_i tog poligona postoji krug sa središtem A_i koji sadrži točke stranica $A_{i-1}A_i$ i A_iA_{i+1}, ali ne sadrži točke ni jedne od preostalih stranica poligona (sl. 70). Od dva eksplementarna kuta s vrhom A_i (kut $\sphericalangle A_{i-1},A_i,A_{i+1}$ i njegov vanjski kut) jedan sadrži točke koje pripadaju promatranom krugu i unutašnje su točke promatranoga jednostavnog poligona. Taj se kut zove *unutrašnji kut* (ili kraće *kut*) promatranog poligona kod vrha A_i. Zbroj kutova n-terokuta jednak je $(n-2)\cdot 180°$, odnosno $(n-2)\pi$ radijana.

Pravilan poligon je jednostavan poligon koji ima sve stranice i sve kutove jednake. Kutovi pravilnog n-terokuta jednaki su $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$, odnosno $\frac{n-2}{n}\pi$. Svi pravilni n-terokuti (za isti broj n) međusobno su slični. Simetrale stranica i simetrale kutova pravilnog poligona imaju zajedničku točku O. Ona je jednako udaljena od svih njegovih vrhova i istodobno je jednako udaljena od svih pravaca koji sadrže njegove stranice. Točka O zove se središte promatranoga pravilnog poligona i središte je tzv. *opisane kružnice* koja prolazi kroz sve vrhove, a ujedno je središte i tzv. *upisane kružnice* koja dira sve pravce što sadrže stranice poligona. Ako je a_n duljina stranice pravilnog n-terokuta kojemu je opisana kružnica polumjera r, tada je općenito duljina stranice kao funkcija od n i r

$$a_n = 2r\sin\frac{\pi}{n}. \tag{9}$$

Približne vrijednosti duljine stranice za neke vrijednosti n dane su u tabl. 1.

Tablica 1
PRIBLIŽNE VRIJEDNOSTI DULJINE STRANICE NEKIH PRAVILNIH POLIGONA

Broj stranica n	*Duljina stranice dana polumjerom* r *opisane kružnice*
3	$r\sqrt{3} \approx 1{,}732r$
4	$r\sqrt{2} \approx 1{,}414r$
5	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 1{,}176r$
6	r
7	$\approx 0{,}868r$
8	$r\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}765r$
9	$\approx 0{,}684r$
10	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618r$
11	$\approx 0{,}563r$
12	$\frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \approx 0{,}518r$

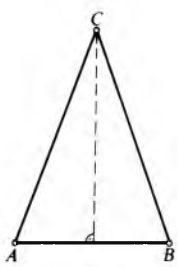
Trokut. *Trokut* je jednostavan poligon sa tri vrha i uvijek je konveksan. Za trokut ABC s vrhovima A, B, C uobičajeno je da se duljine stranica (zbog kratkoće i te se duljine zovu stranicama) označuju sa $a = d(\overline{BC})$, $b = d(\overline{CA})$, $c = d(\overline{AB})$, kutovi trokuta ABC (sl. 58) $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$, a njihove mjere α, β i γ. Označivanje je takvo da su vrh A i kut α nasuprot stranici a, odnosno da je kut α između stranica b i c. Zbroj kutova trokuta jednak je 180°, odnosno π radijana. Bilo koja stranica trokuta manja je od zbroja, a veća od razlike preostalih dviju stranica.

Ako su dvije stranice trokuta jednake, tada su i njima suprotni kutovi jednaki, i obrnuto, tj. iz $a = b$ slijedi $\alpha = \beta$, a iz $\alpha = \beta$ slijedi $a = b$. Takav trokut ABC je *jednakokračan*, stranica $\overline{AB}$ je *osnovica*, a stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su *krakovi* (sl. 71). Jednakokračnom trokutu simetrala osnovice prolazi kroz suprotni vrh.

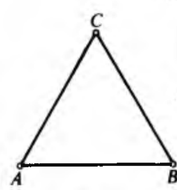
Ako su sve tri stranice trokuta jednake, tada je to pravilan ili tzv. *jednakostraničan* trokut (sl. 72). U njega je $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Ako su dvije stranice trokuta različite, tada većoj od tih stranica odgovara i veći suprotan kut, te obrnuto, većem kutu odgovara i veća suprotna stranica.

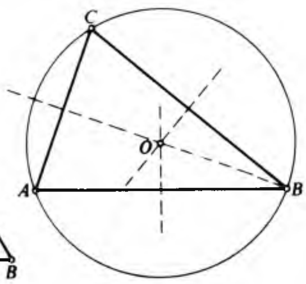
Simetrale stranica trokuta ABC imaju zajedničku točku O. Ona je jednako udaljena od svih triju vrhova tog trokuta. Točka O je središte tzv. *opisane kružnice* trokuta koja prolazi kroz vrhove A, B i C (sl. 73). Ako je r polumjer opisane kružnice, a S ploština (površina) trokuta sa stranicama a, b c i kutovima α, β, γ, tada vrijede jednakosti $4Sr = abc$, $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.



Sl. 71



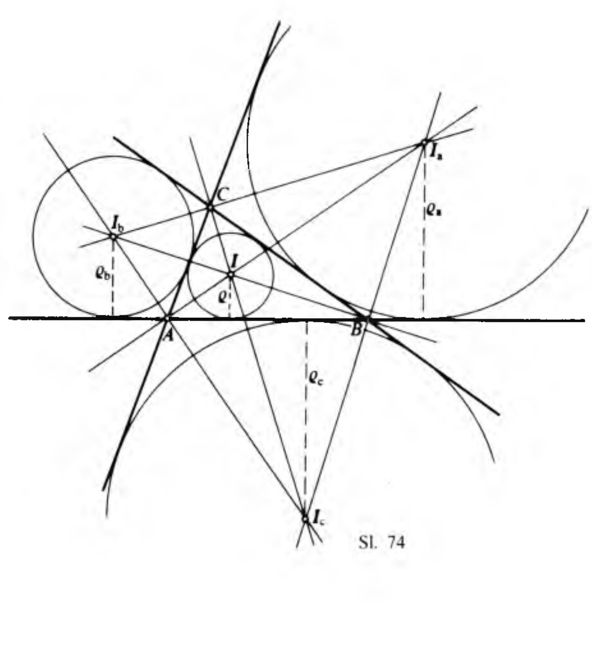
Sl. 72



Sl. 73

Simetrale kutova trokuta ABC imaju zajedničku točku I. Ona je jednako udaljena od svih triju pravaca BC, CA, AB. Točka I je središte tzv. *upisane kružnice* trokuta koja dira pravce BC, CA, AB (sl. 74). Ako je ϱ polumjer upisane kružnice trokuta, a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg trokuta sa stranicama a, b, c, tada vrijede jednakosti $\varrho s = S$, $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

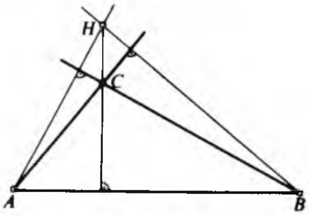
Simetrala kuta α i simetrale sukutova kutova β i γ trokuta ABC imaju zajedničku točku I_a koja je jednako udaljena od pravaca BC, CA, AB. Točka I_a je središte tzv. *pripisane kružnice* trokuta (pripisane uz stranicu a) koja dira pravce BC, CA, AB (sl. 74). Ako je ϱ_a polumjer te kružnice, tada uz ranije



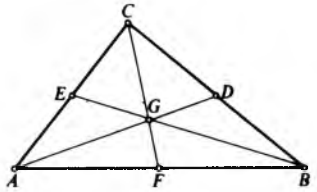
Sl. 74

oznake vrijede jednakosti $\varrho_a(s-a) = S$, $\varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$. Analogno postoje još dvije pripisane kružnice trokuta (pripisane uz stranice b i c; sl. 74).

Okomica iz vrha A na pravac BC zove se *visina* trokuta ABC iz vrha A. Sve tri visine trokuta imaju zajedničku točku, tzv. *ortocentar* trokuta (sl. 75). Visina iz vrha A trokuta ABC zove se i dužina $\overline{AA'}$, gdje je A' ortogonalna projekcija točke A na pravac BC, a isto tako se visinom naziva i duljina $v_a = d(\overline{AA'})$ te dužine. Ako je S ploština trokuta, tada je $S = av_a = bv_b = cv_c$. Visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom a jest $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, a ploština mu je $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.



Sl. 75

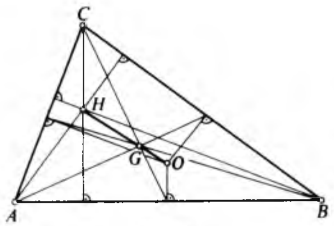


Sl. 76

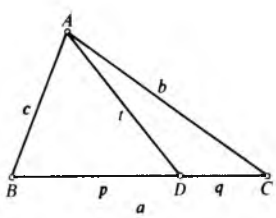
Ako su D, E, F polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, tada se dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, a ujedno i pravci AD, BE, CF, zovu *težišnice* trokuta ABC. Težišnice trokuta imaju zajedničku točku G, tzv. *težište* trokuta (sl. 76). Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru -2. Duljina težišnice $t_a = d(\overline{AD})$ dana je pomoću stranica trokuta formulom $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, a slično vrijedi za ostale dvije težišnice.

Ako je G težište, H ortocentar, a O središte opisane kružnice trokuta, tada točke G, H, O leže na jednom pravcu, tzv. *Eulerovu pravcu* trokuta, a točka G dijeli dužinu $\overline{HO}$ u omjeru -2 (sl. 77).

Neka je dan trokut ABC i točke D, E, F na pravcima BC, CA, AB. Neka su $u = (BCD)$, $v = (CAE)$, $w = (ABF)$ omjeri u kojima točke D, E, F dijele stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Točke D, E, F leže na jednom pravcu samo ako je $uvw = 1$ (*Menelajev poučak*), a pravci AD, BE, CF imaju zajedničku točku (ili su paralelni) samo ako je $uvw = -1$ (*Cevin poučak*).



Sl. 77

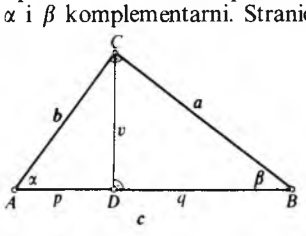


Sl. 78

Ako je D točka stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC sa stranicama a, b, c, a $t = d(\overline{AD})$, $p = d(\overline{BD})$, $q = d(\overline{CD})$ (sl. 78), tada prema *Stewartovu poučku* vrijedi jednakost $at^2 = b^2p + c^2q - apq$.

Trokut može imati najviše jedan pravi ili tupi kut. Zato se trokut zove *pravokutan* ili *tupokutan* ako ima jedan pravi ili tupi kut, a *šiljastokutan* ako su mu sva tri kuta šiljasta.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom γ (sl. 79). Tada su kutovi α i β komplementarni. Stranice a i b zovu se



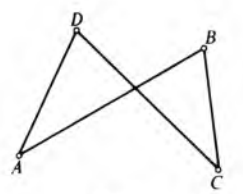
Sl. 79

katete, a c je *hipotenuza* pravokutnog trokuta. Prema *Pitagorinu poučku* za pravokutan trokut vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$. Obrnuto, ako u trokutu ABC vrijedi ta jednakost, tada je taj trokut pravokutan s pravim kutom γ. Ako je $\overline{CD}$ visina iz vrha C pravokutnog trokuta ABC i $v = d(\overline{CD})$, $p = d(\overline{AD})$, $q = (\overline{BD})$ (sl. 79), tada vrijede i jednakosti $v^2 = pq$, $a^2 = cq$, $b^2 = cp$. Ortocentar pravokutnog trokuta je vrh C, središte opisane kružnice mu je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Ploština je tog trokuta $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cv$.

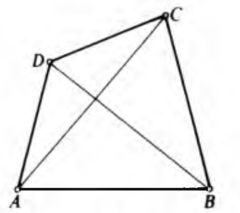
Dva su trokuta sukladna, tj. postoji izometrija koja preslikava jedan trokut na drugi, ako su im jednake odgovarajuće stranice. Dovoljan uvjet za sukladnost dvaju trokuta jest i jednakost dvaju parova odgovarajućih stranica i kutova između njih, ili kutova suprotnih većim stranicama, te jednakost jednog para odgovarajućih stranica i dvaju parova odgovarajućih kutova. To su tzv. *poučci o sukladnosti trokuta*.

Dva su trokuta slična, tj. postoji ekviformna transformacija koja preslikava jedan trokut na drugi, ako su im jednaki odgovarajući kutovi. Dovoljan uvjet za sličnost dvaju trokuta jest i proporcionalnost njihovih odgovarajućih stranica, a dovoljno je i da su proporcionalna dva para odgovarajućih stranica ako su kutovi između tih stranica međusobno jednaki. To su tzv. *poučci o sličnosti trokuta*.

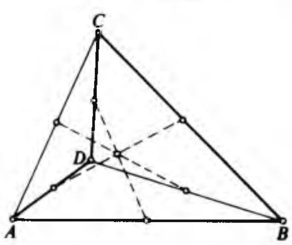
Četverokut. *Četverokut* je poligon sa četiri vrha (sl. 80). Ako je $ABCD$ četverokut, tada su A i C, a isto tako B i D, međusobno *suprotni vrhovi*, a dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ zovu se *dijagonale* četverokuta. Isto tako su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, te $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ međusobno *suprotne stranice*. Četverokut je konveksan samo ako njegove dijagonale imaju zajedničku točku (sl. 81). Zbroj je kutova jednostavnog četverokuta 360°. Dužine kojima su krajevi polovišta suprotnih stranica četverokuta, odnosno polovišta dviju dijagonala, imaju zajedničko polovište (sl. 82), koje se zove *težište* četverokuta.



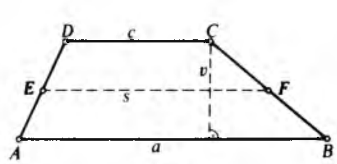
Sl. 80



Sl. 81



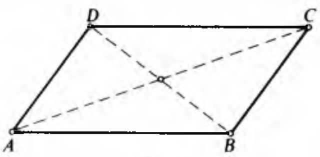
Sl. 82



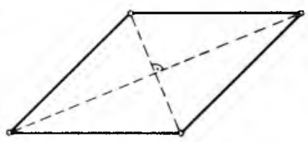
Sl. 83

Trapez je četverokut kojemu dvije suprotne stranice pripadaju paralelnim pravcima. Ako u trapezu $ABCD$ vrijedi $AB \| CD$ (sl. 83), tada se stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zovu *osnovice*, a stranice $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ su *krakovi*. Ako su krakovi jednaki, trapez je *jednakokračan*. Ako su E i F polovišta krakova trapeza, tada se dužina $\overline{EF}$ zove *srednjica* trapeza, a duljina joj je $s = \frac{1}{2}(a + c)$, gdje su a i c duljine osnovica. Udaljenost pravaca kojima pripadaju osnovice trapeza zove se *visina* tog trapeza. Ako je v visina, a s duljina srednjice trapeza, tada je njegova ploština $S = sv$. Kutovi trapeza uz isti krak međusobno su suplementarni.

Paralelogram je četverokut kojemu oba para suprotnih stranica pripadaju međusobno paralelnim pravcima (sl. 84). Suprotne su stranice paralelograma jednake, a isto su tako i suprotni kutovi (kutovi uz suprotne vrhove) jednaki. Dijagonale paralelograma imaju zajedničko polovište (sl. 84). Paralelogram je jednostavan i konveksan četverokut. Ako su dvije suprotne stranice četverokuta jednake i pripadaju paralelnim pravcima, tada je taj četverokut nužno paralelogram. Udaljenost pravaca kojima pripadaju dvije suprotne stranice paralelograma zove se visina tog paralelograma pridružena tim dvjema stranicama. Ploština paralelograma jednaka je umnošku duljine bilo koje stranice s pridruženom visinom. Kutovi su paralelograma uz bilo koju stranicu suplementarni.

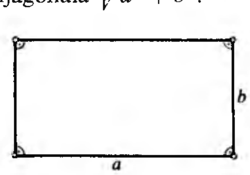


Sl. 84

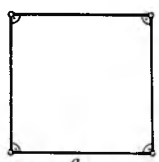

Sl. 85

Romb je paralelogram kojemu su sve stranice jednake (sl. 85). Dijagonale romba pripadaju okomitim pravcima.

Pravokutnik je četverokut kojemu su sva četiri kuta prava (sl. 86). Pravokutnik je paralelogram. Ako paralelogram ima jedan pravi kut, tada je to nužno pravokutnik. Dijagonale pravokutnika su jednake. Ako su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika, tada je njegova ploština $S = ab$, a duljina dijagonala $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Sl. 86



Sl. 87

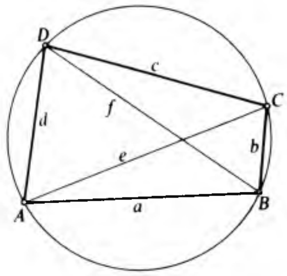
Kvadrat je četverokut kojemu su sve četiri stranice jednake i sva četiri kuta prava (sl. 87). Prema tome je kvadrat istodobno i pravokutnik i romb. Dijagonale kvadrata su jednake i pripadaju okomitim pravcima. Ako je a duljina stranice kvadrata, tada je duljina dijagonale $a\sqrt{2}$, a ploština kvadrata je $S = a^2$.

Tetivni je *četverokut* onaj kojemu vrhovi pripadaju jednoj kružnici, tzv. *opisanoj kružnici* tog četverokuta. Konveksni četverokut je tetivni četverokut samo ako su mu suprotni vrhovi suplementarni. Ako su $a = d(\overline{AB})$, $b = d(\overline{BC})$, $c = d(\overline{CD})$, $d = d(\overline{DA})$ duljine stranica, a $e = d(\overline{AC})$, $f = d(\overline{BD})$ duljine dijagonala konveksnog tetivnog četverokuta (sl. 88), tada vrijede jednakosti

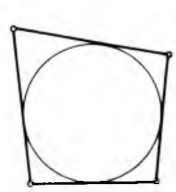
$$ef = ac + bd, \quad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

$$e = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}, \quad f = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

od kojih prva izražava tzv. *Ptolemejev poučak*. Obrnuto, ako u nekom četverokutu vrijedi prva jednakost, tada je to tetivni četverokut. Ako je $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ poluopseg, a S ploština promatranoga tetivnog četverokuta, tada vrijedi jednakost $S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$. Ako je r polumjer opisane



Sl. 88


Sl. 89

kružnice, tada je $r = \frac{1}{4S}\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$.

Tangencijalni je *četverokut* onaj kojemu stranice diraju jednu kružnicu (sl. 89). Konveksni četverokut je tangencijalan samo ako su mu jednaki zbrojevi duljina suprotnih stranica.

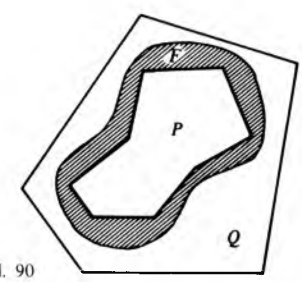
Ploština poligona. Svakom poligonu P može se na jedan jedini način pridružiti pozitivan realan broj $S(P)$ tako da vrijede svojstva: *a*) sukladnim poligonima pridružen je isti broj, tj. iz $P \equiv Q$ slijedi $S(P) = S(Q)$, *b*) ako je poligon P zbroj poligona Q i R, tada je $S(P) = S(Q) + S(R)$, *c*) kvadratu stranice s duljinom 1 pridružen je broj 1.

Broj $S(P)$ zove se *ploština poligona P*. Prema tome je ploština na skupu $\mathscr{P}$ svih poligona funkcija $S\colon \mathscr{P} \to \mathbb{R}^+$ takva da za nju vrijede svojstva *a*) do *c*).

Dva su poligona jednakih ploština *jednaki*. Prema tome su i sukladni poligoni jednaki. Međutim, jednaki poligoni ne moraju biti sukladni.

Ploština pravokutnika jednaka je umnošku duljina dviju njegovih susjednih stranica. Ploština paralelograma jednaka je umnošku duljina bilo koje stranice i odgovarajuće visine, $S = av_a$. Ploština trokuta jednaka je polovici umnoška duljine bilo koje stranice i odgovarajuće visine, $S = \frac{1}{2}av_a$. Ako su a i b duljine dviju stranica trokuta, a γ kut između tih stranica, tada je ploština tog trokuta $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Ploština S trokuta s duljinama stranica a, b, c i poluopsegom $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ dana je *Heronovom formulom* $S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$. Ploština S trapeza s duljinama osnovica a, c i visinom v jednaka je $S = \frac{1}{2}(a + c)v$. Ako je poligon na bilo koji način predočen kao zbroj trokuta, tada je ploština tog poligona jednaka zbroju ploština tih trokuta.

Izmjerljivost figura. Figura F je izmjerljiva ako za bilo koji pozitivan realan broj ε postoje poligoni P i Q takvi da je P sadržan u F, a da Q sadrži F (sl. 90), te da je $S(Q) - S(P) < \varepsilon$, tj. da se razlika ploština poligona P i Q može učiniti po volji malenom. Tada postoji broj $S(F)$ koji nije manji od ploštine bilo kojeg poligona P, a nije veći od ploštine bilo kojeg poligona Q iz prethodne definicije. Taj broj $S(F)$ zove se *ploština figure F*.



Sl. 90

Krug je izmjerljiva figura. Krug s polumjerom r ima ploštinu $S = r^2\pi$.

Postoje i figure koje nisu izmjerljive.

Ako je figura $F' = f(F)$ slika izmjerljive figure F pri afinitetu f s koeficijentom k, tada vrijedi jednakost $S(F') = k^2 \cdot S(F)$. Posebno, ta jednakost vrijedi i ako je f sličnost s koeficijentom k. Ako je $k = 1$ ili $k = -1$, slijedi: ako je F' slika figure F pri ekviafinitetu, tada figure F i F' imaju jednake ploštine, tj. ekviafinitet čuva ploštinu. Posebno, sukladne figure imaju jednake ploštine.

Dvije su figure F i F' *jednakosastavljive* ako se mogu predočiti u obliku zbroja istog (konačnog) broja figura $F_1, F_2, \ldots, F_n$ i $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ tako da su odgovarajuće figure sukladne, tj. vrijedi $F_1 \equiv F'_1, F_2 \equiv F'_2, \ldots, F_n \equiv F'_n$. Očigledno je da jednakosastavljive figure imaju jednake ploštine. Međutim, za poligone vrijedi i obrnuto, tj. ako dva poligona imaju jednake ploštine, tada su oni jednakosastavljivi.

GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

Geometrijska konstrukcija (u teorijskom smislu) jest opisivanje postupka kojim se rješava *konstruktivni zadatak*, što znači da se dokazuje postojanje figure koja zadovoljava dane uvjete, tj. nalazi se u zadanim odnosima s već postojećim figurama. Pri tom postupku primjenjuju se tzv. *temeljne* (fundamentalne) *konstrukcije* koje iskazuju tzv. *aksiome geometrijskih instrumenata*. U tim se aksiomima navodi što se može konstruirati tim instrumentima. Svaka konstrukcija svodi se na konačno mnogo temeljnih konstrukcija.

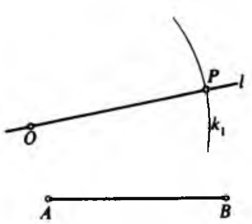
Najčešće su tzv. *klasične* ili *euklidske konstrukcije*, tj. konstrukcije *ravnalom* i *šestarom*. Ravnalom se može konstruirati bilo koji pravac kroz danu točku i pravac kroz dvije dane točke. Šestarom se može konstruirati bilo koja kružnica, bilo koja kružnica s danim središtem i kružnica s danim središtem i danim polumjerom. Posebno se dopušta neposredno prenošenje šestarom dane dužine na dani polupravac, iako ta konstrukcija nije temeljna konstrukcija euklidskih konstrukcija u užem smislu. Klasičnom konstrukcijom može se riješiti svaki konstruktivni zadatak kojemu se algebarsko rješavanje svodi na rješavanje linearnih i kvadratnih jednadžbi. Klasične konstrukcije nazivaju se još i *kvadratnim konstrukcijama*.

U praksi se umjesto klasičnih izvode njima ekvivalentne *tehničke konstrukcije*. Za njihovo izvođenje služe *crtaći trokuti* za konstrukciju pravca paralelnog s danim pravcem ili okomitog na dani pravac.

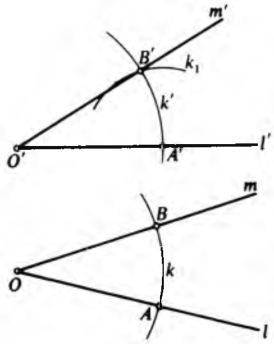
Osnovne konstrukcije. Osim temeljnih konstrukcija važne su i tzv. *osnovne konstrukcije*. One se često pojavljuju pri rješavanju konstruktivnih zadataka. Bit će nabrojano 15 osnovnih konstrukcija. U tu će se svrhu primjenjivati, zbog jednostavnijeg zapisivanja, neke uobičajene oznake. Kružnica sa središtem O i polumjerom r označuje se sa $k(O,r)$, pa npr. $k_1 = k(O,\overline{AB})$ znači da je konstruirana kružnica k_1 sa središtem O i polumjerom jednakim danoj dužini $\overline{AB}$. Sjecišta pravaca i kružnica označuju se simbolom $\cap$, pa npr. $A = p \cap k_1$ znači da je točka A jedna zajednička točka pravca p i kružnice k_1. Ako takvih zajedničkih točaka ima više od jedne, tada prethodna oznaka znači da je A bilo koja od tih točaka. Međutim, ako je neka zajednička točka već prije bila označena, tada prethodna oznaka znači da je A zajednička točka različita od te, prije označene točke. Najčešće osnovne konstrukcije jesu:

1) Prenošenje dužine $\overline{AB}$ na polupravac l s početkom O. Rješenje: $k_1 = k(O,\overline{AB})$, $P = l \cap k_1$; $\overline{OP}$ je tražena dužina (sl. 91).

2) Prenošenje kuta $\sphericalangle(l,m)$ s vrhom O na danu stranu polupravca l' s početkom O'. Rješenje: $k = k(O,r)$, gdje je r po volji, $k' = k(O',r)$, $A = k \cap l$, $B = k \cap m$, $A' = k' \cap l'$, $k_1 = k(A', \overline{AB})$, $B' = k' \cap k_1$ (B' s dane strane od l'); ako je m' polupravac s početkom O' koji sadrži točku B', tada je $\sphericalangle(l',m')$ traženi kut (sl. 92).



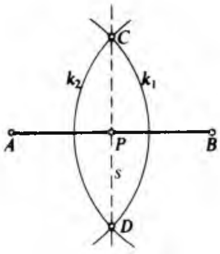
Sl. 91



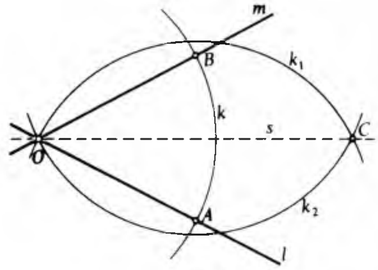
Sl. 92

Na temelju prethodnih dviju konstrukcija mogu se dane dužine, odnosno kutovi, zbrajati, oduzimati i množiti bilo kojim prirodnim brojem.

3) Konstrukcija simetrale i polovišta dane dužine $\overline{AB}$. Rješenje: r po volji, ali $r > \frac{1}{2} d(\overline{AB})$, $k_1 = k(A,r)$, $k_2 = k(B,r)$, $C = k_1 \cap k_2$, $D = k_1 \cap k_2$, $s = CD$, $P = \overline{AB} \cap s$; s je simetrala, a P polovište od $\overline{AB}$ (sl. 93).



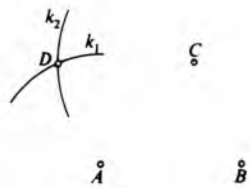
Sl. 93



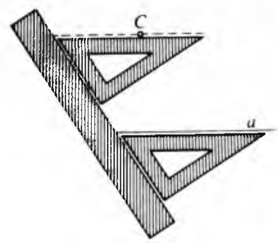
Sl. 94

4) Konstrukcija simetrale danog kuta $\sphericalangle(l,m)$ s vrhom O. Rješenje: $k = k(O,r)$, gdje je r po volji, $A = k \cap l$, $B = k \cap m$, $k_1 = k(A,r)$, $k_2 = k(B,r)$, $C = k_1 \cap k_2$, $s = OC$; s je tražena simetrala (sl. 94).

5) Konstrukcija paralelograma kojemu su dana tri vrha A, B, C. Rješenje: $k_1 = k(A,\overline{BC})$, $k_2 = k(C,\overline{AB})$, $D = k_1 \cap k_2$, gdje su B i D s različitih strana pravca AC; D je traženi četvrti vrh paralelograma (sl. 95). Tehnička konstrukcija: paralela sa AB kroz C (v. konstrukciju *6*) i paralela sa BC kroz A sijeku se u točki D.



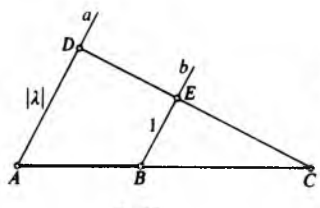
Sl. 95



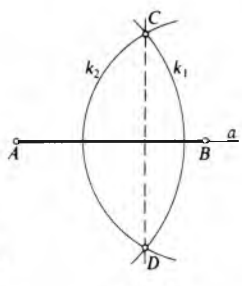
Sl. 96

6) Konstrukcija paralele s danim pravcem $a = AB$ kroz danu točku C. Rješenje: prema *5*) konstruira se točka D, pa je CD tražena paralela. Tehnička konstrukcija: jedna stranica crtaćeg trokuta prisloni se uz pravac a, a uz drugu njegovu stranicu prisloni se ravnalo (ili drugi crtaći trokut); (prvi) crtaći trokut pomiče se uz ravnalo do položaja u kojem se njegova prva stranica prislanja uz točku C, pa se uz tu stranicu povuče tražena paralela (sl. 96).

7) Dijeljenje dane dužine $\overline{AB}$ u danom omjeru λ. Rješenje: kroz A i B konstruiraju se po volji paralelni pravci a i b; na njih se nanose dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ tako da je $d(\overline{AD}) = |\lambda|$, $d(\overline{BE}) = 1$, i to na istu ili suprotne strane od pravca AB, već prema tome da li je $\lambda > 0$ ili $\lambda < 0$; $C = AB \cap DE$ tražena je točka za koju vrijedi $(ABC) = \lambda$ (sl. 97).



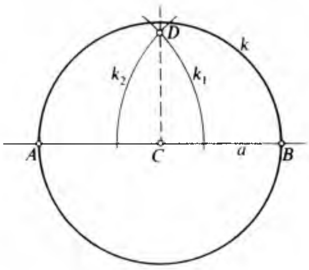
Sl. 97



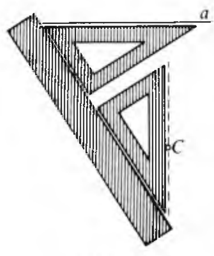
Sl. 98

8) Povlačenje kroz danu točku C pravca okomitog na dani pravac a. Rješenje ako C ne leži na a: A i B su točke na a po volji, $k_1 = k(A,\overline{AC})$, $k_2 = k(B,\overline{BC})$, $D = k_1 \cap k_2$; CD je traženi pravac (sl. 98), a osim toga D je točka simetrična točki C s obzirom na pravac a. Rješenje ako C leži na a: $k = k(C,r)$, gdje je r po volji, $A = a \cap k$, $B = a \cap k$, $k_1 = k(A,r_1)$ $(r_1 > r)$,

$k_2 = k(B,r_1)$, $D = k_1 \cap k_2$; CD je traženi pravac (sl. 99). Tehnička konstrukcija (u oba slučaja): hipotenuza crtaćeg trokuta prisloni se uz pravac a, a uz jednu njegovu katetu prisloni se ravnalo; crtaći trokut zaokrene se tako da mu je sada druga kateta prislonjena uz ravnalo i pomiče se uz to ravnalo do položaja u kojemu se njegova hipotenuza prislanja uz točku C, pa se uz hipotenuzu povuče traženi pravac (sl. 100).

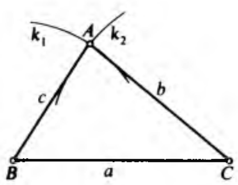


Sl. 99

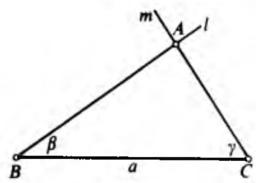


Sl. 100

9) Konstrukcija trokuta kojemu su dane sve tri stranice a, b, c (gdje je $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$). Rješenje: $d(\overline{BC}) = a$, $k_1 = k(B,c)$, $k_2 = k(C,b)$, $A = k_1 \cap k_2$; ABC je traženi trokut (sl. 101).



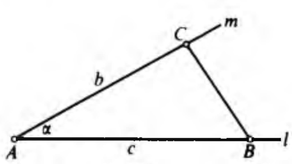
Sl. 101



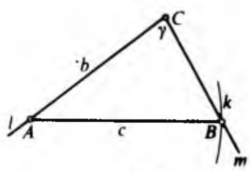
Sl. 102

10) Konstrukcija trokuta kojemu je dana jedna stranica a i dva kuta. Rješenje: zbog $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ dovoljno je promatrati slučaj kada su dani kutovi β, γ; $d(\overline{BC}) = a$, $\sphericalangle(BC,l) = \beta$, $\sphericalangle(CB,m) = \gamma$, $A = l \cap m$; ABC je traženi trokut (sl. 102).

11) Konstrukcija trokuta kojemu su dane dvije stranice b, c i kut α između njih. Rješenje: $\sphericalangle(l,m) = \alpha$, $d(\overline{AB}) = c$, $d(\overline{AC}) = b$ (B na l, a C na m); ABC je traženi trokut (sl. 103).



Sl. 103

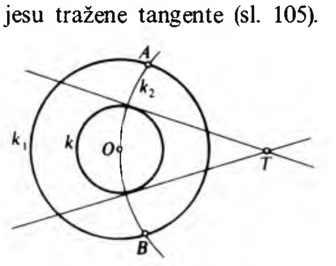


Sl. 104

12) Konstrukcija trokuta kojemu su dane dvije stranice b, c ($c > b$) i kut γ nasuprot većoj od njih. Rješenje: $\sphericalangle(l,m) = \gamma$, $d(\overline{CA}) = b$ (A na l), $k = k(A,c)$, $B = k \cap m$; ABC je traženi trokut (sl. 104).

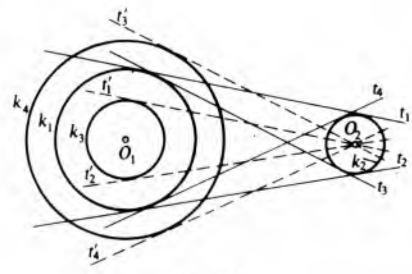
Konstrukcija pravokutnog trokuta kojemu je dana jedna stranica i jedan kut svodi se na konstrukciju *10*). Ako su pak dane obje katete, tada se primjenjuje konstrukcija *11*), a ako je dana hipotenuza i jedna kateta, primjenjuje se konstrukcija *12*).

13) Konstrukcija tangenata dane kružnice $k = k(O,r)$ koje prolaze kroz danu vanjsku točku T te kružnice. Rješenje: $k_1 = k(O,2r)$, $k_2 = k(T,\overline{TO})$, $A = k_1 \cap k_2$, $B = k_1 \cap k_2$; simetrale dužina $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ jesu tražene tangente (sl. 105).



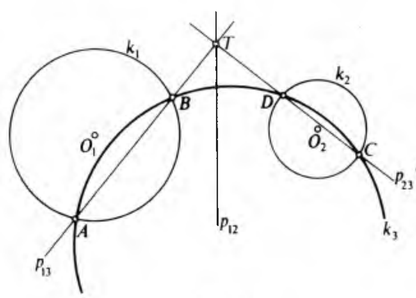
Sl. 105

14) Konstrukcija zajedničkih tangenata dviju danih kružnica $k_1 = k(O_1,r_1)$ i $k_2 = k(O_2,r_2)$ ($r_1 \geq r_2$). Rješenje: $k_3 = k(O_1,r_1 - r_2)$, $k_4 = k(O_1,r_1 + r_2)$; ako je $d(\overline{O_1O_2}) > r_1 - r_2$, tada se prema konstrukciji *13*) povlače tangente t'_1 i t'_2 iz točke O_2 na k_3, a ako je još i $d(\overline{O_1O_2}) > r_1 + r_2$, konstruiraju se i tangente t'_3 i t'_4 iz O_2 na k_4; tražene zajedničke tangente t_1, t_2, t_3, t_4 (tzv. *vanjske* i *unutrašnje*) kružnica k_1 i k_2 jesu pravci paralelni redom s pravcima t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 i udaljeni od njih za r_2 (sl. 106).

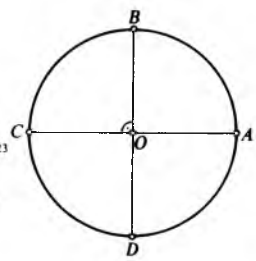


Sl. 106

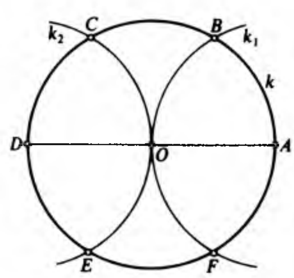
15) Konstrukcija potencijale danih dviju kružnica k_1 i k_2 koje se ne sijeku. Rješenje: k_3 bilo koja kružnica koja siječe k_1 i k_2; $A = k_1 \cap k_3$, $B = k_1 \cap k_3$, $p_{13} = AB$, $C = k_2 \cap k_3$, $D = k_2 \cap k_3$, $p_{23} = CD$, $T = p_{13} \cap p_{23}$; tražena potencijala p_{12} je pravac kroz T okomit na O_1O_2 (sl. 107).



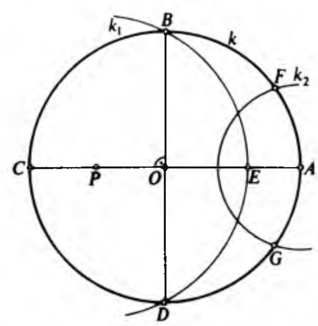
Sl. 107



Sl. 109



Sl. 108



Sl. 110

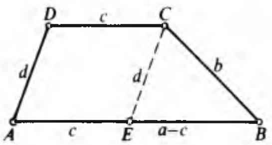
Od jednostavnijih konstrukcija treba još navesti konstrukcije nekih posebnih kutova i (ekvivalentno tome) pravilnih poligona upisanih u danu kružnicu $k = k(O,r)$. Ako je $\overline{AD}$ promjer kružnice k i ako kružnice $k_1 = k(A,r)$ i $k_2 = k(D,r)$ sijeku kružnicu k u točkama B, F i C, E, tada je ACE pravilan trokut i $ABCDEF$ pravilan šesterokut (sl. 108), a ujedno je $\sphericalangle AOB = 60°$ i $\sphericalangle AOC = 120°$. Konstrukcijama simetrala kutova mogu se dalje konstruirati npr. kutovi 30°, 15°, te pravilni dvanaesterokut. Ako su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ međusobno okomiti promjeri kružnice k, tada je $ABCD$ kvadrat upisan u k (sl. 109), a konstrukcijama simetrala kutova konstruiraju se npr. kutovi 45°, 22°30′, te pravilni osmerokut. Ako je zatim P polovište dužine $\overline{OC}$ i ako kružnica $k_1 = k(P,\overline{PB})$ siječe dužinu $\overline{OA}$ u točki E, tada je $d(\overline{BE})$ duljina stranice pravilnog peterokuta, a $d(\overline{OE})$ duljina stranice pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu k (sl. 110).

Ako su F i G sjecišta kružnica k i $k_2 = k(A, \overline{OE})$, tada je $\sphericalangle FOG = 72°$ i $\sphericalangle AOF = 36°$. Raspolavljanjem može se konstruirati i kut 18°. Zato je moguće konstruirati i kut $18° - 15° = 3°$, a onda i sve njegove cjelobrojne višekratnike. Kako se crtaći trokut obično izrađuje tako da ima kutove 90°, 45° i 45° ili 90°, 60° i 30°, to se pomoću crtaćih trokuta mogu izvesti tehničke konstrukcije navedenih i nekih drugih kutova, npr. 15°, 75° itd.

Metode geometrijskog konstruiranja. Najpoznatije metode za rješavanje geometrijskih konstrukcija jesu: metoda presjeka, metoda pomoćne figure, metoda transformacije i algebarska metoda.

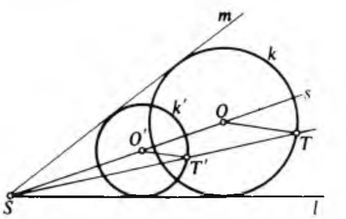
Metoda presjeka. Ako se pri rješavanju konstruktivnog zadatka treba konstruirati neka točka X koja istodobno zadovoljava dva (ili više) uvjeta, pa ako je F_1 skup svih točaka koje zadovoljavaju samo prvi uvjet, a F_2 skup svih točaka koje zadovoljavaju samo drugi uvjet, tada je X bilo koja točka presjeka $F_1 \cap F_2$ figurâ F_1 i F_2. Npr. središte O trokutu ABC opisane kružnice jednako je udaljeno od vrhova A, B i C. Skup je točaka jednako udaljenih od točaka A i B simetrala dužine $\overline{AB}$, a skup točaka jednako udaljenih od točaka A i C simetrala dužine $\overline{AC}$, pa je tražena točka O sjecište tih dviju simetrala (sl. 73).

Metoda pomoćne figure. Konstrukcija tražene figure svodi se na konstrukciju neke druge, tzv. pomoćne figure, pomoću koje se onda konstruira i tražena figura. Npr., ako treba konstruirati trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, kojemu su dane duljine stranica $a = d(\overline{AB})$, $b = d(\overline{BC})$, $c = d(\overline{CD})$, $d = d(\overline{DA})$ takve da vrijedi $a + b > c + d$, $a + d > b + c$, pa ako je E točka dužine $\overline{AB}$ takva da je $d(\overline{AE}) = c$, tada je $AECD$ paralelogram, a pomoćni trokut BCE ima duljine stranica b, d, $a - c$. Zato se najprije konstruira taj trokut, a zatim i paralelogram $AECD$ (sl. 111).



Sl. 111

Metoda transformacije sastoji se u primjeni neke geometrijske transformacije. Npr., ako treba konstruirati kružnicu k koja dira pravce l i m i sadrži danu točku T, najprije se konstruira bilo koja kružnica k' koja dira dane pravce l i m (njezino je središte O' na simetrali s pravaca l i m, na kojoj je i središte O kružnice k). Ako je T' jedno sjecište kružnice k' s pravcem ST, gdje je $S = l \cap m$, tada homotetija sa središtem S i koeficijentom $(TT'S)$ preslikava kružnicu k' u traženu kružnicu k, a točku O' u točku O. Zato je O sjecište simetrale s s pravcem kroz točku T paralelnim s pravcem $O'T'$ (sl. 112).



Sl. 112

Algebarska metoda. Konstruktivni zadatak svodi se npr. na konstrukciju neke tražene dužine s duljinom x ako je dano nekoliko dužina s duljinama a, b, ... Duljina x se algebarski izrazi pomoću danih duljina, a zatim se konstruira duljina izražena dobivenom formulom. Konstruirati se mogu sve one duljine koje se izražavaju pomoću danih duljina primjenom samo četiriju osnovnih računskih operacija, potenciranjem cjelobrojnim eksponentima i vađenjem kvadratnih korijena. Svaka se takva konstrukcija može svesti na konačan broj jednostavnijih konstrukcija:

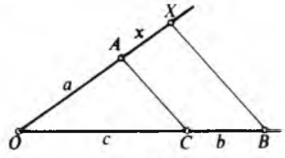
a) Konstrukcija zbroja ili razlike dviju dužina.

b) Konstrukcija duljine $x = ab/c$. Rješenje je predočeno sl. 113, na kojoj je $d(\overline{OC}) = c$, $d(\overline{CB}) = b$, $d(\overline{OA}) = a$, $BX \| CA$, $x = d(\overline{AX})$.

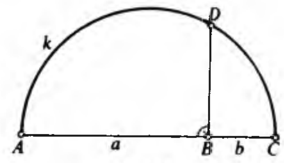
c) Konstrukcija duljine $x = \sqrt{ab}$. Rješenje je predočeno sl. 114, na kojoj je $d(\overline{AB}) = a$, $d(\overline{BC}) = b$; k je kružnica s promjerom $\overline{AC}$, zatim je $BD \perp AC$, te $x = d(\overline{BD})$.

d) Konstrukcija duljine $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ili $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Svodi se na konstrukciju pravokutnog trokuta i njegove treće stranice ako su dane dvije njegove stranice.

Npr., ako treba konstruirati duljinu $x = \sqrt{a^2 - ab + \frac{acd}{b}} + c$, tada se konstruiraju redom duljine $x_1 = \sqrt{ab}$, $x_2 = \sqrt{a^2 - ab} = \sqrt{a^2 - x_1^2}$, $x_3 = \frac{ac}{b}$, $x_4 = \sqrt{\frac{acd}{b}} = \sqrt{dx_3}$, $x_5 = \sqrt{a^2 - ab + \frac{acd}{b}} = \sqrt{x_2^2 + x_4^2}$, $x = x_5 + c$.



Sl. 113



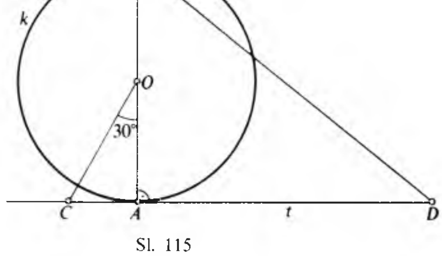
Sl. 114

Klasični konstruktivni zadaci. Još su antički Grci došli do tzv. *klasičnih zadataka* koji se ne mogu riješiti šestarom i ravnalom. To su trisekcija kuta i kvadratura kruga, ili s njom ekvivalentna rektifikacija kružnice.

Trisekcija kuta sastoji se u dijeljenju bilo kojega danog kuta na tri međusobno jednaka dijela. Za neke posebne kutove (npr. za 90° ili 18°) zadatak je rješiv, ali se općenito zadatak svodi na rješavanje jednadžbe 3. stupnja, pa se ne može riješiti ravnalom i šestarom. Ako se dopusti upotreba nekih krivulja ili nekih posebnih instrumenata, tada je zadatak rješiv. Šestarom i ravnalom zadatak se za bilo koji kut može riješiti samo približno, i to po volji velikom točnošću.

Kvadratura kruga sastoji se u konstrukciji kvadrata kojemu je ploština jednaka ploštini danog kruga. Ako kvadrat ima stranicu x, a krug polumjer r, tada treba konstruirati duljinu $x = r\sqrt{\pi}$. Zadatak se svodi na konstrukciju transcendentnog broja $\sqrt{\pi}$ i ne može se izvesti ravnalom i šestarom nego se to može izvesti samo približno, ili treba primijeniti neke transcendentne krivulje ili posebne instrumente.

Rektifikacija kružnice sastoji se u konstrukciji dužine kojoj je duljina x jednaka duljini dane kružnice polumjera r, tj. $x = 2r\pi$. O toj konstrukciji vrijede analogne činjenice kao i o kvadraturi kruga. Vrlo točna približna rektifikacija kružnice predočena je sl. 115, na kojoj je O središte, r polumjer, $\overline{AB}$ promjer, a t tangenta u točki A kružnice k, zatim $\sphericalangle AOC = 30°$, $d(\overline{CD}) = 3r$. Tada je $d(\overline{BD}) = r\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = r \cdot 3{,}14159\ldots$, a kako je $r\pi = r \cdot 3{,}14159\ldots$, to je $d(\overline{BD})$ približna vrijednost za polovicu duljine kružnice k s relativnom pogreškom manjom od 0,002%.



Sl. 115

Tzv. *amaterska rješenja* navedenih klasičnih zadataka ravnalom i šestarom zapravo su približna rješenja.

V. Volenec