

Akoaksijalni stupovi jesu stupovi kojima se težišna os ne poklapa s osi krutosti ($z \neq g$). Njihova su ravninska izvijanja u smjeru osi x i y te torzijsko izvijanje spregnuti, pa nastaje fleksijsko-torzijsko izvijanje. R. Rosman je, međutim, pokazao da se fleksijsko-torzijsko izvijanje može interpretirati kao torzijsko izvijanje oko osi rotacije D (sl. 32).

Radi pojednostavnjenja, kritična se vrijednost ukupnog opterećenja piše u obliku

$$G_{kr} = c G_{kr,x}, \quad (149)$$

gdje se bezdimenzijskim koeficijentom c uvodi u račun spregnutost ravninskih izvijanja u smjeru osi x i y te torzijskog izvijanja oko osi z , pa se c naziva *koeficijentom spregnutosti*.

Na osnovi jednadžbi (147), (148) i (149) bit će

$$c = \frac{I_D}{r_D^2 I_x}, \quad (150)$$

gdje je I_D deplanacijski moment inercije, a r_D polumjer inercije poprečnog presjeka s obzirom na još nepoznatu os rotacije D . Ako se I_D i r_D izraze kao funkcije koordinata x_G i y_G težišne osi te koordinata x_D i y_D osi rotacije, pa se oni uvrste u jednadžbu (150), tada c postaje funkcija koordinata osi rotacije x_D i y_D . Iz uvjeta

$$\frac{\partial c}{\partial x_D} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y_D} = 0 \quad (151)$$

dobivaju se koordinate osi rotacije

$$x_D = \frac{x_G}{1 - t_y/c}, \quad y_D = \frac{y_G}{1 - 1/c}. \quad (152)$$

Uvrste li se u izraz za c , dobiva se kubna jednadžba koeficijenta spregnutosti

$$\left(1 - \frac{x_G^2 + y_G^2}{r^2}\right) c^3 - \left[\left(1 - \frac{x_G^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{y_G^2}{r^2}\right) t_y + t_z\right] c^2 + (t_y + t_z + t_y t_z) c - t_y t_z = 0. \quad (153)$$

Svi su koeficijenti bezdimenzijski, a ovise o krutostima presjeka i o koordinatama težišne osi. Kubna jednadžba ima tri korijena, a mjerodavan je najmanji, c_1 ; on je manji od najmanje od triju vrijednosti 1, t_y i t_z .

Nakon što se odredi c_1 , primjenom jednadžbi (148) i (149) izračuna se kritično ukupno opterećenje stupa:

$$G_{kr} = c_1 k \frac{K_x}{H^2}. \quad (154)$$

Položaj se osi rotacije stupa određuje jednadžbama (152).

Primjer. Stup na sl. 32 sastoji se od četiri međusobno kruto spojena zida. Svaki od zidova ima širinu b i površinu poprečnog presjeka A . Momenti su inercije $I_x = 0,4167 A b^2$, $I_y = 1,667 A b^2$ i $I_z = 0,2233 A b^4$, a kvadrat polumjera inercije $r^2 = 1,093 b^2$. Geometrijski su parametri $t_y = 4$ i $t_z = 0,4901$, a koeficijent spregnutosti $c = 0,392$. Kritično je ukupno opterećenje $G_{kr} = 0,392 k K/H^2$. Vrijednost koeficijenta k ovisi o raspoređenosti opterećenja uzduž visine stupa. Ako je npr. G raspoređen jednoliko, dobiva se da je $k = 7,837$.

ZGLOBNI NIZOVI ŠTAPOVA S KONSTANTNOM UZDUŽNOM SILOM

Dvopoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajem opterećena je aksijalnom silom P i bočnom silom Q (sl. 33 a). Stupanj je slobode bočni pomak v srednjeg ležaja (sl. 33 b), a pripadni je uzdužni pomak kraja grede

$$u = \frac{v^2}{l}. \quad (155)$$

Deformacijska je energija sustava, jer se štapovi smatraju aksijalno nedeformabilnima, jednaka deformacijskoj energiji pera $Cv^2/2$, rad je aksijalne sile Pu , a rad bočne sile Qv . Onda je potencijal sustava

$$U = \left(\frac{C}{2} - \frac{P}{l}\right) v^2 - Qv. \quad (156)$$

Uvjet (2) daje jednadžbu ravnoteže:

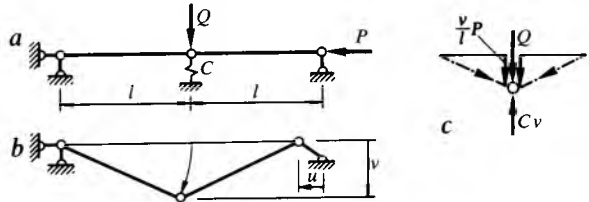
$$\frac{dU}{dv} = Cv - 2\frac{P}{l}v - Q = 0. \quad (157)$$

Njeno se mehaničko značenje vidi na sl. 33c: zbroj sila koje djeluju na srednji zglob grede jednak je nuli.

Rješenje je jednadžbe ravnoteže:

$$v = \frac{1}{1 - \frac{2P}{lC}} \cdot \frac{Q}{C} = \alpha v^I, \quad (158)$$

gdje je v^I bočni pomak u polovištu grede bez utjecaja aksijalne sile, a α koeficijent povećanja pomaka v^I zbog utjecaja aksijalne sile.



Sl. 33. Dvopoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajem opterećena aksijalnom i bočnom silom (a), deformacija pri izvijanju (b) i srednji zglob sa silama koje na njega djeluju (c)

Kritična vrijednost P_{kr} sile P slijedi iz kriterija $\alpha = \infty$:

$$P_{kr} = \frac{Cl}{2}. \quad (159)$$

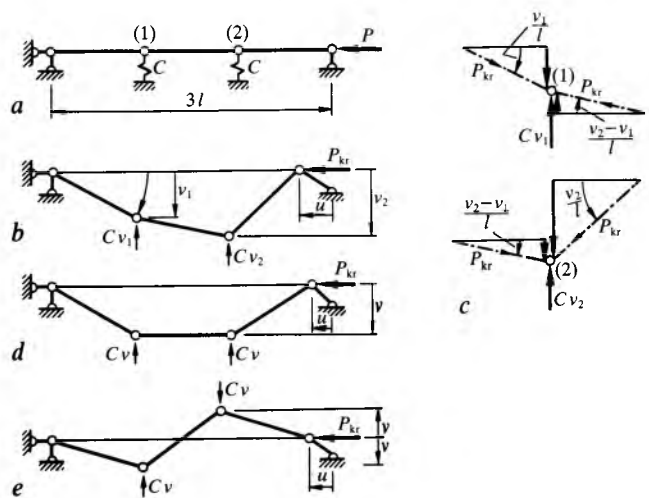
Izraz za koeficijent povećanja α može se napisati i u uobičajenom obliku

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}. \quad (160)$$

Kritično opterećenje P_{kr} može se odrediti i iz uvjeta $d^2U/(dv^2) = 0$ (5):

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{dU}{dv} \right) = C - 2\frac{P_{kr}}{l} = 0. \quad (161)$$

Tropoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajima opterećena je aksijalnom silom P (sl. 34a). Treba odrediti kritičnu vrijednost te sile.



Sl. 34. Tropoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajima opterećena aksijalnom silom (a), deformacija pri izvijanju (b), zglobovi (1) i (2) sa silama koje na njih djeluju (c), deformacija pri simetričnom (d) i antisimetričnom izvijanju (e)

Metoda ravnoteže. Za stupnjeve slobode sustava odabiru se bočni pomaci v_1 i v_2 unutrašnjih ležaja (sl. 34b). Jednadžbe se ravnoteže postavljaju kao uvjeti da su zbroj svih bočnih sila koje djeluju na zglob (1) i zbroj svih bočnih sila koje djeluju na čvor (2) jednaki nuli (sl. 34c):

$$\begin{aligned} \frac{v_1 P}{l} - \frac{v_2 - v_1}{l} P - C v_1 &= 0, \\ \frac{v_2 - v_1}{l} P + \frac{v_2}{l} P - C v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (162)$$

Sustav (162) dviju homogenih linearnih algebarskih jednažbi s nepoznicama v_1 i v_2 ima dva rješenja različita od nule ako je determinanta koeficijenata tog sustava jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{vmatrix} C - 2\frac{P_{kr}}{l} & \frac{P_{kr}}{l} \\ \frac{P_{kr}}{l} & C - 2\frac{P_{kr}}{l} \end{vmatrix} = 0 \quad (163)$$

i odatle

$$\left(C - 2\frac{P_{kr}}{l}\right)^2 = \left(\frac{P_{kr}}{l}\right)^2. \quad (164)$$

Rješenja su

$$P_{kr,1} = P_{kr} = \frac{Cl}{3}, \quad P_{kr,2} = Cl. \quad (165)$$

Energetska metoda. Deformacijska je energija sustava $C(v_1^2 = v_2^2)/2$, a rad vanjskih sila Pu , gdje je

$$u = (v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2)/l \quad (166)$$

uzdužni pomak hvatišta sile P . Prema jednažbi (8) bit će potencijal sustava:

$$\begin{aligned} U &= \frac{C}{2}(v_1^2 + v_2^2) - \frac{P}{l}(v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2) = \\ &= \frac{1}{2}\left(C - 2\frac{P}{l}\right)v_1^2 + \frac{P}{l}v_1 v_2 + \frac{1}{2}\left(C - 2\frac{P}{l}\right)v_2^2. \end{aligned} \quad (167)$$

Druge parcijalne derivacije potencijala U po pomacima v_1 i v_2 daju matricu krutosti:

$$[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} C - 2\frac{P}{l} & \frac{P}{l} \\ \frac{P}{l} & C - 2\frac{P}{l} \end{bmatrix}. \quad (168)$$

Prema kriteriju bifurkacije ravnoteže, determinanta te matrice mora biti jednaka nuli. Dobiva se, dakle, jednažba (163).

Jednažbe oblika progibne linije pri izvicanju

$$[\mathcal{S}(P_{kr,1})]\{v_1\} = \{0\}, \quad [\mathcal{S}(P_{kr,2})]\{v_2\} = \{0\}, \quad (169)$$

pokazuju da je za $P_{kr,1} = Cl/3$ progibna linija antimetrična ($v_2 = -v_1$), a za $P_{kr,2} = Cl$ progibna je linija simetrična ($v_2 = v_1$).

Primjena poučka o konzervaciji energije. Ako se u jednažbu (35) uvrsti za U izraz prema jednažbi (167) pa se tako dobivena jednažba riješi po sili P , dobiva se

$$P = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2} \cdot \frac{Cl}{2} = \frac{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}{1 - \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2} \cdot \frac{Cl}{2}. \quad (170)$$

Bilo koji od oba uvjeta

$$\frac{\partial P}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial v_2} = 0 \quad (171)$$

daje

$$v_2/v_1 = \pm 1. \quad (172)$$

Za $v_2/v_1 = -1$ iz (170) dobiva se $P_{kr,1} = P_{kr} = Cl/3$, a za $v_2/v_1 = +1$ veća kritična sila $P_{kr,2} = Cl$.

Primjena simetrije grede i opterećenja. Da progibna linija pri izvicanju mora zbog simetrije sustava i opterećenja biti simetrična ili antimetrična, poznato je, dakako, unaprijed.

Prema tome, zadatak se može pojednostavniti tako da se umjesto sustava s dva stupnja slobode (sl. 34b) riješe dva sustava (sl. 34d i e) sa po jednim stupnjem slobode. Primijeni li se metoda ravnoteže, energetska metoda ili poučak o konzervaciji energije, uvijek će biti lakše riješiti dva jednostavna nego jedan teži zadatak.

Dvokatni stup s elastičnim zglobovima krutosti C odnosno C_0 , bočno pridržan na oba kraja, opterećen je aksijalnom silom P (sl. 35a). Stupanj je slobode kutni pomak v gornjeg kata (sl. 35b). Kutni pomak u srednjem zglobu i vertikalni pomak vrha stupa iznose

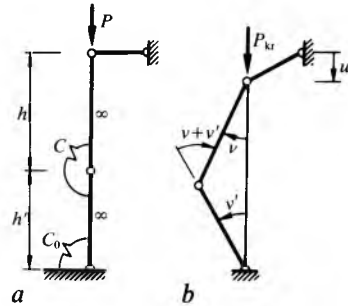
$$v + v' = \left(1 + \frac{h}{h'}\right)v, \quad u = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{h}{h'}\right)v^2. \quad (173)$$

Potencijal je sustava jednak deformacijskoj energiji obaju pera umanjenoj za rad sile P :

$$U = \frac{1}{2}\left[C\left(1 + \frac{h}{h'}\right)^2 + C_0\left(\frac{h}{h'}\right)^2 - h\left(1 + \frac{h}{h'}\right)P\right]v^2. \quad (174)$$

Prema uvjetu ravnoteže (2) dobiva se

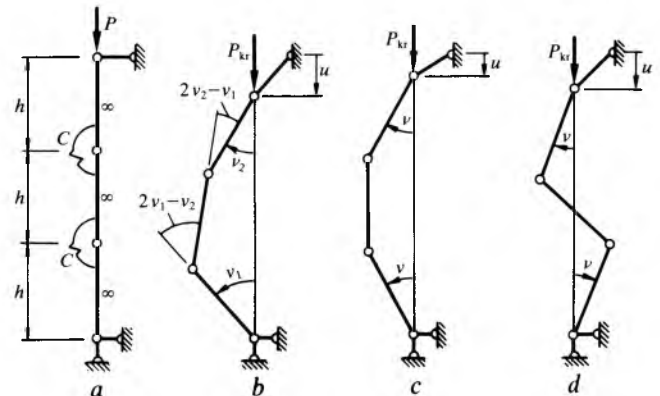
$$P_{kr} = \frac{\left(1 + \frac{h}{h'}\right)^2 C + \left(\frac{h}{h'}\right)^2 C_0}{h\left(1 + \frac{h}{h'}\right)}. \quad (175)$$



Sl. 35. Dvokatni stup s dva elastična zgloba, bočno pridržan na oba kraja i opterećen aksijalnom silom (a) i deformacija pri izvicanju (b)

Trokatni stup s elastičnim unutrašnjim zglobovima krutosti C opterećen je aksijalnom tlačnom silom P (sl. 36a). Deformaciju pri izvicanju stupa opisuju stupnjevi slobode v_1 i v_2 (sl. 36b). Zakreti su unutrašnjih zglobova ($2v_1 - v_2$) i ($2v_2 - v_1$), a vertikalni je pomak glave stupa

$$\begin{aligned} u &= [1 - \cos v_2 + 1 - \cos(v_1 - v_2) + 1 - \cos v_1]h = \\ &= (v_1^2 - v_1 v_2 + v_2^2)h, \end{aligned} \quad (176)$$



Sl. 36. Trokatni stup s elastičnim zglobovima, bočno pridržan na oba kraja i opterećen aksijalnom silom (a), deformacija pri izvicanju (b), deformacija pri simetričnom (c) i antimetričnom izvicanju (d)

pa je potencijal sustava

$$U = \left(\frac{5}{2}C - Ph\right)v_1^2 + \left(\frac{5}{2}C - Ph\right)v_2^2 - (4C - Ph)v_1v_2. \quad (177)$$

Druge parcijalne derivacije potencijala U po stupnjevima slobode v_1 i v_2 čine matricu $[\bar{S}]$ krutosti drugog reda sustava. Prema kriteriju bifurkacije ravnoteže determinanta je te matrice jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} \frac{5C - 2P_{kr}h}{-4C + P_{kr}h} & \frac{-4C + P_{kr}h}{5C - 2P_{kr}h} \\ -4C + P_{kr}h & 5C - 2P_{kr}h \end{vmatrix} = 0. \quad (178)$$

Dobiva se algebarska jednačba drugog stupnja kritične sile P_{kr} :

$$h^2 P_{kr}^2 - 4hCP_{kr} - 3C^2 = 0, \quad (179)$$

a njeni su korijeni:

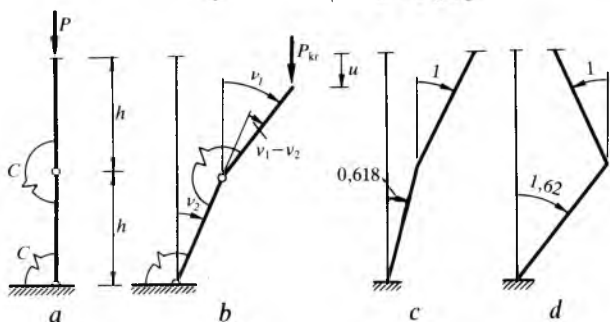
$$P_{kr,1} = P_{kr} = \frac{C}{h}, \quad P_{kr,2} = 3\frac{C}{h}. \quad (180)$$

Zbog simetrije sustava i opterećenja unaprijed je poznato da progibna linija mora biti simetrična (sl. 36c) ili antisimetrična (sl. 36d). Umjesto da se rješava zadatak s dva stupnja slobode, mogu se jednostavnije riješiti dva zadatka sa po jednim stupnjem slobode. Nižoj, tj. mjerodavnoj kritičnoj sili odgovara simetrična, a višoj antisimetrična deformacija.

Dvokatna elastično upeta konzola s elastičnim zglobom opterećena je aksijalnom silom P (sl. 37a). Stupnjevi su slobode kutni pomaci obaju štapova v_1 i v_2 (sl. 37b).

Matrica je krutosti drugog reda

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} C - P_{kr}h & -C \\ -C & 2C - P_{kr}h \end{bmatrix}. \quad (181)$$



Sl. 37. Dvokatna elastično upeta konzola s elastičnim zglobom opterećena aksijalnom silom (a), deformacija pri izvijanju (b), prvi (c) i drugi oblik progiba (d)

Korijeni jednačbe $|\bar{S}| = 0$ bifurkacije ravnoteže jesu:

$$P_{kr,1} = P_{kr} = 0,382 \frac{C}{h}, \quad P_{kr,2} = 2,62 \frac{C}{h}. \quad (182)$$

Prvoj kritičnoj sili odgovara $v_2/v_1 = 0,618$ (sl. 37c), a drugoj $v_2/v_1 = -1,62$ (sl. 37d).

Zglobne grede sa m polja. Promatraju se tri tipa aksijalno pritisnutih m -poljnih zglobnih greda s elastičnim unutrašnjim ležajima krutosti C . Prvi tip (sl. 38a) ima vanjske ležaje bočno nedeformabilne, drugi tip (sl. 38b) ima jedan od vanjskih ležaja elastičan kao što su i unutrašnji ležaji, a drugi nedeformabilan, dok treći tip (sl. 38c) ima oba vanjska ležaja elastična kao što su i unutrašnji ležaji.

Način izvijanja ovisi o krutosti C ležaja. Ako su ležaji relativno kruti ili, preciznije, ako je C veće od neke granične vrijednosti C° , ležaji se pri izvijanju ne pomiču, a grede se izvijaju kao Eulerov štap II, tako da je

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{K}{l^2}. \quad (183)$$

Ako je $C < C^\circ$, ležaji se pri izvijanju pomiču, a grede se ne deformiraju. Označi li se sa v_j bočni pomak ležaja j , sustav

će se jednačbi bifurkacije ravnoteže sastojati, prema I. G. Bubnovu i N. Snitku, od tročlanih jednačbi:

$$v_{j-1} - \left(2 - \frac{Cl}{P_{kr}}\right)v_j + v_{j+1} = 0 \quad (j = 1 \dots m - 1). \quad (184)$$

Rubne jednačbe glase

$$v_0 = 0, \quad v_m = 0 \quad (185)$$

ako su vanjski ležaji nedeformabilni (sl. 38a), a

$$v_0 = 0, \quad v_m = v_{m+1} \quad (186)$$

ako je lijevi vanjski ležaj nedeformabilan, a desni elastičan (sl. 38b).

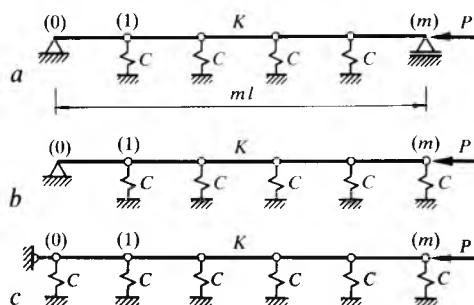
S oznakom

$$\cos \omega = 1 - \frac{Cl}{2P_{kr}} \quad (187)$$

opće rješenje diferencijalne jednačbe (184) glasi

$$v_j = A \sin(\omega j) + B \cos(\omega j), \quad (188)$$

gdje su A i B nepoznate konstante.



Sl. 38. m -poljne zglobne grede s elastičnim unutrašnjim ležajima izložene tlačnoj sili; vanjski su ležaji bočno nepomični (a), jedan je vanjski ležaj bočno nepomičan, a drugi elastičan (b), vanjski su ležaji elastični (c)

Uvrštenjem općeg rješenja (188) za v u sustav rubnih uvjeta dobiva se za gredu na sl. 38a odnosno na sl. 38b:

$$P_{kr} = \frac{0,5}{1 + \cos \frac{\pi}{m}} Cl, \quad (189)$$

$$P_{kr} = \frac{0,5}{1 + \cos \frac{2\pi}{2m+1}} Cl.$$

Brojčane vrijednosti tih kritičnih sila za grede sa 2 i više polja sadrži tabl. 5.

Tablica 5
VRIJEDNOSTI KRITIČNIH SILA GREDA SA m POLJA

$m =$	2	3	4	5	6	∞	Multiplikator
Sl. 38a	0,5000	0,3333	0,2929	0,2764	0,2680	0,2500	} $-Cl$
Sl. 38b	0,3820	0,3080	0,2831	0,2715	0,2652	0,2500	

Izjednače li se izrazi za obje kritične sile prema jednačbama (183) i (189) dobivaju se granične krutosti unutrašnjih ležaja:

$$C^\circ = 2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{m}\right) \pi^2 \frac{K}{l^3} = \frac{4m-6}{m-1} \pi^2 \frac{K}{l^3}, \quad (190)$$

$$C^\circ = 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{2m+1}\right) \pi^2 \frac{K}{l^3},$$

koje za grede na sl. 38a i sl. 38b odvajaju oba oblika bifurkacije ravnoteže. Numeričke vrijednosti graničnih krutosti C° greda na sl. 38a, 38b i 38c sadrži tabl. 6.

Tablica 6

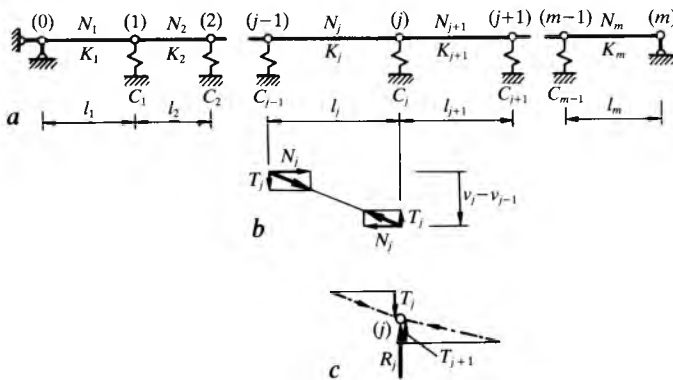
VRIJEDNOSTI GRANIČNE KRUTOSTI C° ZA GREDE SA m POLJA

$m =$	2	3	4	5	6	9	11	∞	Multiplikator
Sl. 38a	2	3	3,33	3,50	3,60	3,75	3,90	4	} $\frac{\pi^2 K}{l^3}$
Sl. 38b	2,5	3	3,25	3,40	3,50	3,67	3,73	4	
Sl. 38c	2,67	3	3,20	3,33	3,43	3,60	3,67	4	

ZGLOBNI NIZOVI ŠTAPOVA S PROMJENLJIVOM UZDUŽNOM SILOM REŠETKE

Zglobna greda sa m polja, elastičnim unutrašnjim i nedeformabilnim vanjskim ležajima. Upotrijebljene oznake znače: j redni broj ležaja i redni broj polja, C_j i v_j krutost i bočni pomak elastičnog ležaja j , l_j duljinu polja j , a K_j i N_j fleksijsku krutost i uzdužnu silu grede u polju j .

Zglobna greda sa m polja, elastičnim unutrašnjim i nedeformabilnim vanjskim ležajima te s promjenljivom uzdužnom silom (sl. 39a) može se izvititi na dva načina.



Sl. 39. m -poljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim, a nedeformabilnim vanjskim ležajima (a), greda polja j (b) i čvor j sa silama koje na njega djeluju (c)

Ako su krutosti C_j deformabilnih ležaja relativno velike, grede se izvijaju bez deformacije ležaja, kao Eulerov štap II, pa je

$$N_{j,kr} = \pi^2 \frac{K_j}{l_j^2} \tag{191}$$

Ako su krutosti C_j relativno male, izvijanje se ostvaruje deformacijom ležaja, a grede se ne savijaju. Broj stupnjeva slobode jednak je broju deformabilnih ležaja.

Na osnovi ravnoteže, poprečne sile greda polja j (sl. 39b) i $j + 1$ funkcije su pomaka susjednih ležaja i uzdužne sile promatranog polja:

$$T_j = \frac{v_j - v_{j-1}}{l_j} N_j, \quad T_{j+1} = \frac{v_{j+1} - v_j}{l_{j+1}} N_{j+1}, \tag{192}$$

a reakcija ležaja jednaka je umnošku njegove krutosti i pomaka:

$$R_j = C_j v_j. \tag{193}$$

Izraze li se u jednadžbi ravnoteže čvora j (sl. 39c),

$$R_j = T_j - T_{j+1} \tag{194}$$

reakcija i poprečne sile kao funkcije pomaka, jednadžbe (192) i (193), dobiva se jednadžba pomaka triju susjednih ležaja:

$$\frac{N_j}{l_j} v_{j-1} + \left(C_j - \frac{N_j}{l_j} - \frac{N_{j+1}}{l_{j+1}} \right) v_j + \frac{N_{j+1}}{l_{j+1}} v_{j+1} = 0. \tag{195}$$

Ako greda ima jednake raspone, jednake krutosti ležaja i konstantnu uzdužnu silu ($l_j \rightarrow l$, $C_j \rightarrow C$, $N_j \rightarrow N$; za

$j = 1, 2, \dots, m$), postat će jednadžba (195) jednostavnija i poprimit će oblik (184). Izraze li se još uzdužne sile nekom referentnom, najbolje najvećom silom N :

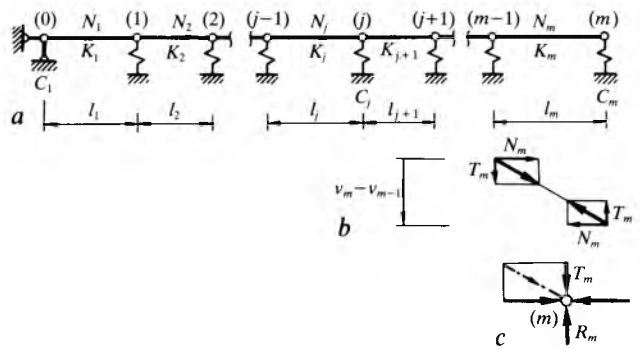
$$N_j = v_j N, \tag{196}$$

onda se elementi simetrične matrice $[\tilde{S}]$ krutosti drugog reda sustava mogu napisati u obliku

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_{jj} &= C_j - \left(\frac{v_j}{l_j} + \frac{v_{j+1}}{l_{j+1}} \right) N \\ \tilde{S}_{j,j+1} &= \frac{v_{j+1}}{l_{j+1}} N \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1), \tag{197}$$

te se kriterij $|\tilde{S}| = 0$ bifurkacije ravnoteže lako može formulirati.

Zglobna greda sa m polja, elastičnim ležajima i jednim nedeformabilnim vanjskim ležajem. Analogno prethodnom primjeru analizira se m -poljna zglobna greda s elastičnim ležajima i jednim nedeformabilnim vanjskim ležajem te s promjenljivom uzdužnom silom (sl. 40a).



Sl. 40. m -poljna zglobna greda s elastičnim ležajima i jednim nedeformabilnim vanjskim ležajem (a), greda polja m (b) i čvor m sa silama koje na njega djeluju (c)

Iz uvjeta ravnoteže momenata koji djeluju na gredu u polju m (sl. 40b) dobiva se poprečna sila

$$T_m = \frac{v_m - v_{m-1}}{l_m} N_m. \tag{198}$$

Izraze li se u jednadžbi ravnoteže čvora m (sl. 40c), $R_m = T_m$, reakcija R_m i poprečna sila T_m kao funkcije pomaka, jednadžbe (193) i (198), ona postaje rubnom jednadžbom

$$\frac{N_m}{l_m} v_{m-1} + \left(C_m - \frac{N_m}{l_m} \right) v_m = 0, \tag{199}$$

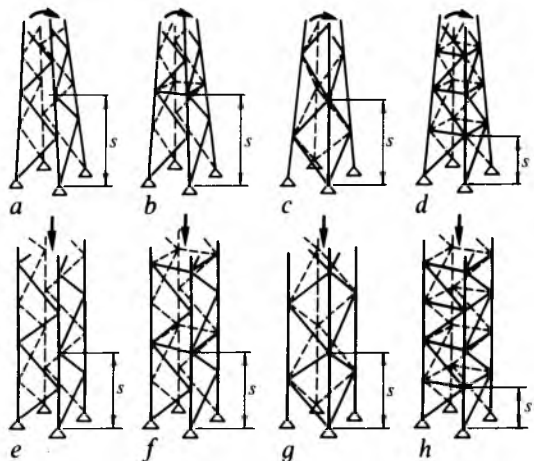
a elementi su simetrične matrice krutosti drugog reda sustava:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_{jj} &= C_j - \left(\frac{v_j}{l_j} + \frac{v_{j+1}}{l_{j+1}} \right) N \\ \tilde{S}_{j,j+1} &= \frac{v_{j+1}}{l_{j+1}} N \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{200}$$

Rešetke. Promatraju se ravninska i toranjka rešetka.

Ravninska rešetka. Za izvijanje pojasnih štapova u ravnini rešetke usvaja se $\beta = 1$, a s istom vrijednošću za β analizira se i izvijanje okomito na ravninu rešetke ako su čvorovi u tom smjeru pridržani. Sa $\beta = 1$ računaju se i štapovi ispune u ravnini i okomito na ravninu rešetke.

Toranjska rešetka (sl. 41). C. Petersen preporučuje da se koeficijent β duljine izvijanja pojasnih štapova odredi u ovisnosti o tipu (profilu) poprečnog presjeka pojasa (tabl. 7). Vrijednosti su dane za šuplje profile (tip 1), L-profile (tip 2) i profile u obliku slova X od dva kutnika (tip 3). Za tipove 2 i 3 treba vitkost štapa proračunati na osnovi najmanjeg polumjera inercije njegova poprečnog presjeka.



Sl. 41. Toranjске rešetke (s duljina mjerodavnog pojasnog štapa)

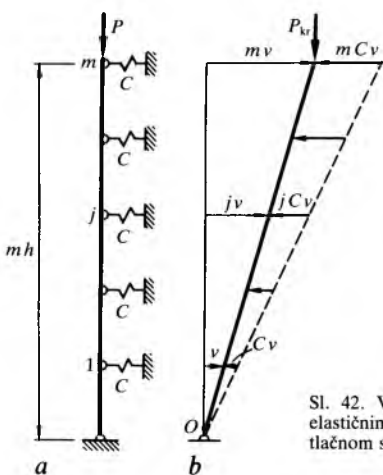
Tablica 7

VRIJEDNOSTI KOEFICIJENTA β I NJHOVA OVISNOST O KONSTRUKCIJI I PROFILU ŠTAPOVA

Slika	Tip	β	Slika	Tip	β
41 a	1	0,65	41 e	1	0,75
	2	0,70		2	0,80
	3	0,85		3	0,90
41 b	1	0,60	41 f	1	0,70
	2	0,65		2	0,75
	3	0,80		3	0,85
41 c		0,95	41 g		1,00
41 d		0,85	41 h		0,90

VIŠEPOLJNI ŠTAPOVI S KONSTANTNOM UZDUŽNOM SILOM

Višekatni nedeformabilni stup s elastičnim ležajima opterećen je tlačnom aksijalnom silom P (sl. 42a). Treba metodom ravnoteže utvrditi kritičnu vrijednost sile koja će prouzrokovati bifurkaciju ravnoteže.



Sl. 42. Višekatni nedeformabilni stup s elastičnim ležajima opterećen aksijalnom tlačnom silom (a) i deformacija pri izvijanju (b)

Deformacija sustava pri izvijanju (sl. 42b) jest zakret stupa oko njegove pete. Stupanj je slobode bočni pomak v čvora 1. Uvjet ravnoteže

$$\sum M_o = 0 \tag{201}$$

daje

$$P_{kr} \cdot mv = \sum_{j=1}^m C \cdot jv \cdot jh, \tag{202}$$

pa je

$$P_{kr} = \frac{1}{6}(2m+1)(m+1)Ch. \tag{203}$$

Dvopoljni štap s elastičnim srednjim ležajem. Dvopoljni štap fleksijske krutosti K , s elastičnim srednjim ležajem krutosti C , opterećen je aksijalnom silom P (sl. 43a).

Ako je

$$C \geq C^o = 16\pi^2 \frac{K}{L^3}, \tag{204}$$

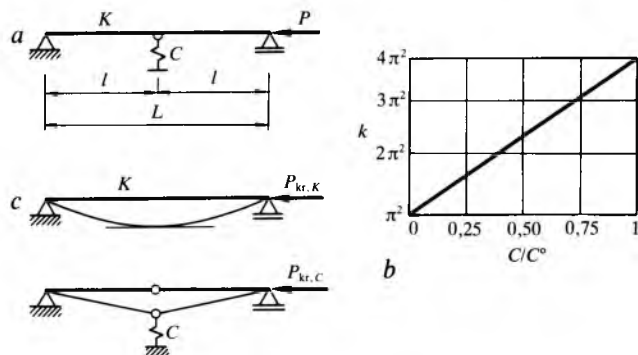
oba se polja štapa ponašaju kao Eulerov štap II, pa je

$$P_{kr} = 4\pi^2 \frac{K}{L^2}. \tag{205}$$

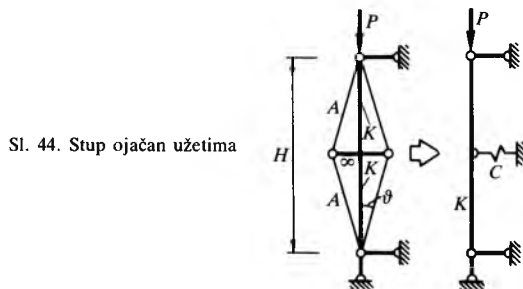
Ako je $C < C^o$, kritična je vrijednost sile P manja i iznosi, prema R. L'Hermiteu i W. Flügeu, približno

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{K}{L^2} + \frac{3}{16} CL = \left(1 + 3 \frac{C}{C^o}\right) \pi^2 \frac{K}{L^2} = k \frac{K}{L^2}. \tag{206}$$

Ovisnost koeficijenta k o omjeru C/C^o prikazana je na sl. 43b.



Sl. 43. Dvopoljni štap s elastičnim srednjim ležajem na koji djeluje tlačna aksijalna sila (a), dijagram koeficijenta $k(C/C^o)$ kritične sile (b) i dva podsustava za utvrđivanje kritične sile prema Southwellu (c)



Sl. 44. Stup ojačan užetima

Radi usporedbe može se kritična sila sustava odrediti primjenom Southwellova poučka kao zbroj kritičnih sila dvaju podsustava (sl. 43c):

$$P_{kr} = P_{kr,K} + P_{kr,C} = \pi^2 \frac{K}{L^2} + \frac{CL}{4}. \tag{207}$$

Navedeni izrazi mogu se primijeniti npr. na stup ojačan užetima (sl. 44); krutost elastičnog ležaja što je stupu daje užad iznosi:

$$C = \frac{2EA}{H} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \tag{208}$$

pa je kritična sila

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{K}{H^2} + \frac{3}{16} CH. \tag{209}$$

Greda s više polja i s elastičnim unutrašnjim ležajima. m -poljna greda fleksijske krutosti K , s elastičnim unutrašnjim ležajima krutosti C , opterećena je aksijalnom silom P (sl. 45a).

Ako krutost C nije manja od granične krutosti C^o , kritična je sila ista kao za m -poljnu zglobnu gredu (183):

$$P_{kr} = (m\pi)^2 \frac{K}{(ml)^2} = \pi^2 \frac{K}{l^2}. \tag{210}$$