$$\int_l M_a M_b \mathrm{d}x = \Omega_b M_a^\circ. \tag{135}$$

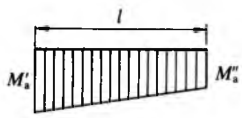
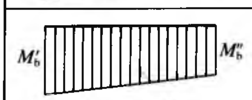
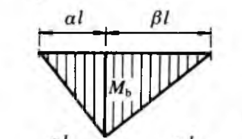
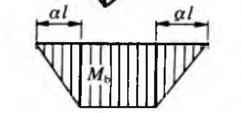
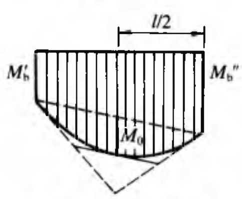
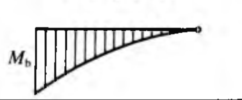
Metoda raščlanjivanja dijagrama. Složeni se dijagrami mogu raščlaniti u jednostavnije. Tako se npr. momentni dijagram štapa na koji djeluju rubni momenti i jednoliko raspodijeljeno opterećenje uzduž cijelog raspona može raščlaniti u dijagram M_1 koji odgovara rubnim momentima i dijagram M_2 koji odgovara raspodijeljenom opterećenju. Tada je

$$\int_l M^2 \mathrm{d}x = \int_l (M_1 + M_2)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_l M_1^2 \mathrm{d}x + 2\int_l M_1 M_2 \mathrm{d}x + \int_l M_2^2 \mathrm{d}x. \tag{136}$$

Primjena tablica integrala. Određivanje pomaka može se znatno olakšati primjenom tabl. 2, koja sadrži vrijednosti integrala kvadrata funkcija, i tabl. 3, koja sadrži vrijednosti integrala produkata funkcija. Krivulje su parabole drugog stupnja. Vrijednosti treba uvrstiti s pripadnim predznacima.

Tablica 3
INTEGRALI PRODUKATA FUNKCIJA

	$\int_{(l)} M_a M_b \mathrm{d}x$
	$\frac{1}{6}(2M_a' M_b' + 2M_a'' M_b'' + M_a'' M_b' + M_a' M_b'')$
	$\frac{1}{6}\left[M_a'(1+\beta) + M_a''(1+\alpha)\right] M_b$ za $\alpha = 1/2$: $\frac{1}{4}(M_a' + M_a'') M_b$
	$\frac{1}{2}(1-\alpha)(M_a' + M_a'') M_b$
	$\frac{1}{6}\left[M_a' M_b' + (M_a' + M_a'')(M_b' + M_b'' + 2M_0) + M_a'' M_b''\right]$
	$\frac{1}{3}(M_a' + M_a'') M_b$
	$\frac{1}{12}(3M_a' + M_a'') M_b$

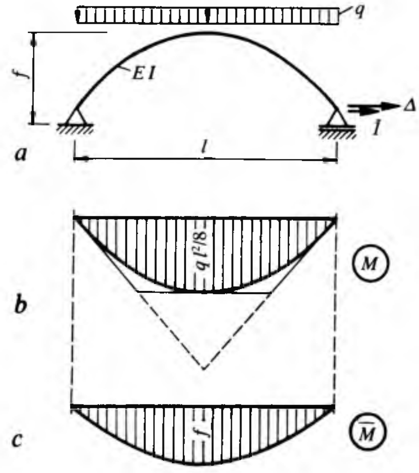
Primjer 1. Treba odrediti horizontalni pomak Δ desnog ležaja plitke lučne proste grede na koju djeluje jednoliko raspodijeljeno opterećenje uzduž horizontalne projekcije luka (sl. 88a). Os luka je parabola drugog stupnja.

Desni se kraj grede optereti horizontalnom, prema van orijentiranom, jediničnom bezdimenzijskom silom. Oba su momentna dijagrama M (sl. 88b) i $\bar{M}$ (sl. 88c) parabolična. Mohrova formula daje pomak

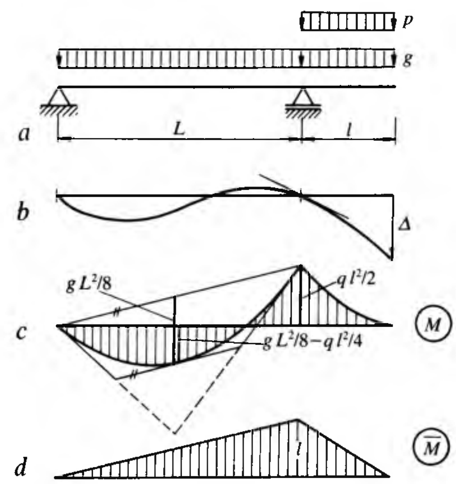
$$\Delta = \frac{1}{EI}\int_l M\bar{M}\mathrm{d}x = \frac{ql^3 f}{15EI}. \tag{137}$$

Primjer 2. Na prostu gredu s prepustom djeluje stalno jednolično raspodijeljeno opterećenje intenzivnosti g, a može djelovati i korisno jednolično raspodijeljeno opterećenje intenzivnosti p (sl. 89a). Treba odrediti najveću moguću vrijednost progiba Δ kraja prepusta (sl. 89b). Mjerodavni momentni dijagram M (sl. 89c) odgovara stalnom opterećenju na cijeloj gredi i korisnom opterećenju na prepustu. Greda se na mjestu i u orijentiranom smjeru traženog pomaka optereti jediničnom bezdimenzijskom silom. Tom opterećenju pripada momentni dijagram $\bar{M}$ koji ima oblik trokuta (sl. 89d). Mohrova formula daje

$$EI\Delta = \int_{L+l} M\bar{M}\mathrm{d}x = \frac{Ll}{6}\left(ql^2 - \frac{gL^2}{4}\right) + \frac{ql^4}{8}. \tag{138}$$



Sl. 88. Lučna prosta greda



Sl. 89. Uz određivanje progiba grede s prepustom

Redukcijski stavak. U Mohrovoj se formuli unutrašnje sile S sustava zbog djelovanja vanjskih sila te unutrašnje sile $\bar{S}$ i reakcije $\bar{C}$ koje se pojavljuju zbog virtualnog opterećenja odnose na zadani sustav. Pri utvrđivanju pomaka statički neodređenih sustava računski se rad može bitno pojednostavniti, a postići i veća točnost, ako se jedna grupa sila, obično sile $\bar{S}$ i $\bar{C}$, umjesto na zadanom sustavu izračuna na bilo kojem u pravilu statički određenom osnovnom sustavu, koji se dobiva od zadanog sustava uklanjanjem potrebnog broja veza (redukcijski stavak). Osnovni se sustav nastoji odabrati tako da broj štapova u kojima je $S \neq 0$ i $\bar{S} \neq 0$ bude što manji, tj. da broj štapova koji pridonose traženom pomaku bude što manji.

UTJECAJNE LINIJE I UTJECAJNE PLOHE

Utjecajna linija $\eta(V)$ neke mehaničke veličine V (unutrašnje sile, ležajne sile ili pomaka) grafički je prikaz utjecajnog koeficijenta $v = v(x)$ te veličine. To je prikaz te veličine zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske koncentrirane sile $\bar{1}$ kao funkcije položaja, tj. apscise x. Sila pri pomicanju po konstrukciji ostaje sama sebi paralelna. Utjecajna linija pokazuje kako se mijenja veličina V kad se sila $\bar{1}$ pomiče po konstrukciji. Utjecajne se linije obično konstruiraju za vertikalno opterećenje, pa je sila $\bar{1}$ vertikalna. Pozitivne se vrijednosti utjecajnog koeficijenta nanose naniže od horizontalne zaključne linije.

Dimenzija ordinata utjecajnog koeficijenta v odgovara omjeru između dimenzije mehaničke veličine i dimenzije koncentrirane sile. Tako npr. ordinate utjecajne linije momenata savijanja imaju dimenziju duljine, a ordinate su utjecajnih linija reakcija i uzdužnih sila bez dimenzije.

Nagib (gradijent) utjecajne linije $\eta(V)$ neke mehaničke veličine V ordinata je utjecajne linije $\eta'(V)$ te mehaničke veličine za jedinični moment na promatranom mjestu.

Derivacija utjecajne linije momenta savijanja u nekom presjeku C po apscisi jednaka je ordinati utjecajne linije poprečne sile u tom presjeku:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\eta(M_C) = \eta(Q_C). \tag{139}$$

Postoje dvije metode za određivanje utjecajnih linija: statička i kinematička metoda.

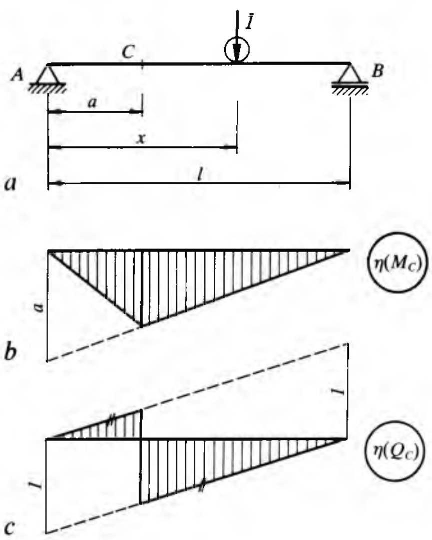
Statička metoda. Jedinična vertikalna bezdimenzijska koncentrirana sila $\bar{1}$ postavlja se sukcesivno u niz karakterističnih položaja (apscisa x) i svaki put se određuje pripadna vrijednost promatrane mehaničke veličine V.

Primjer. Treba odrediti utjecajne linije momenta savijanja i poprečne sile u presjeku C proste grede (sl. 90a). Dobiva se da je

$$\eta(M_C) = \begin{cases} \dfrac{x(l-a)}{l}, & x \leqq a \\ \dfrac{a(l-x)}{l}, & x \geqq a \end{cases} \tag{140}$$

$$\eta(Q_C) = \begin{cases} -\dfrac{x}{l}, & x < a \\ \dfrac{l-x}{l}, & x > a \end{cases} \tag{141}$$

Utjecajna linija momenta savijanja (sl. 90b) ima lom, a utjecajna linija poprečne sile (sl. 90c) skok u tom presjeku.



Sl. 90. Utjecajne linije momenta savijanja i poprečne sile proste grede

Kinematička metoda. Utjecajne se linije određuju jednim od dvaju dualnih poučaka, koji slijede iz dvaju dualnih poučaka virtualnog rada:

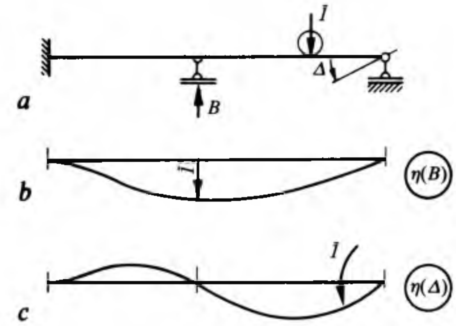
a) Utjecajna linija $\eta(S)$ neke unutrašnje ili ležajne sile S progibna je linija (linija vertikalnih komponenata pomaka) opterećenog pojasa sustava zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske deformacije na mjestu i u orijentiranom smjeru sile S. Pri pronalaženju utjecajnih linija ležajnih sila ležajni se štapići smatraju dijelom sustava.

b) Utjecajna linija $\eta(\Delta)$ nekog pomaka Δ progibna je linija opterećenog pojasa sustava zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske sile na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ.

Kinematička se metoda najčešće upotrebljava za određivanje utjecajnih linija statički određenih sustava.

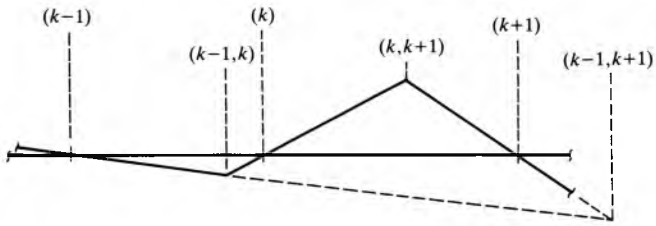
Za kontinuiranu gredu (sl. 91a) prikazana je na sl. 91b utjecajna linija reakcije B, a na sl. 91c utjecajna linija kutnog pomaka Δ desnog kraja grede.

Utjecajne linije unutrašnjih i ležajnih sila. Utjecajna linija $\eta(S)$ neke unutrašnje ili ležajne sile S dobije se tako da se u sustavu na mjestu te sile ukloni veza koja pripada sili S, dakle da se uvede nulpolje sile S i da se onda sustavu nametne pripadna jedinična deformacija. Oduzimanjem jedne veze statički određeni sustav postaje mehanizmom. Na utjecajnim linijama unutrašnjih i ležajnih sila statički određenih sustava pomaci se diskova mijenjaju po pravcu, pa se utjecajna linija sastoji od onoliko pravocrtnih odsječaka koliko ima diskova.



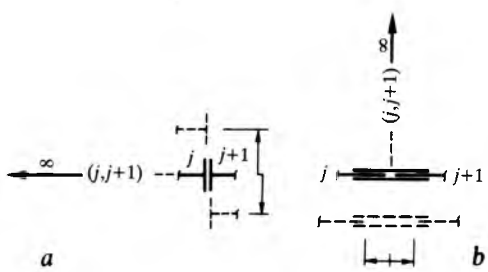
Sl. 91. Utjecajne linije reakcije i kutnog pomaka kontinuirane grede

Na vertikali kroz pol rotacije (j) nekog diska nalazi se nultočka utjecajne linije, što znači da pravac siječe zaključnu liniju, a na vertikali koja prolazi kroz relativni pol (j–k) para susjednih ili nesusjednih diskova j i k nalazi se presjecište pripadnih pravaca, tj. pojavljuje se lom utjecajne linije ako su j i k susjedni diskovi (sl. 92).



Sl. 92. Položaj nultočaka i presjecišta pravaca utjecajnih linija statički određenih sustava

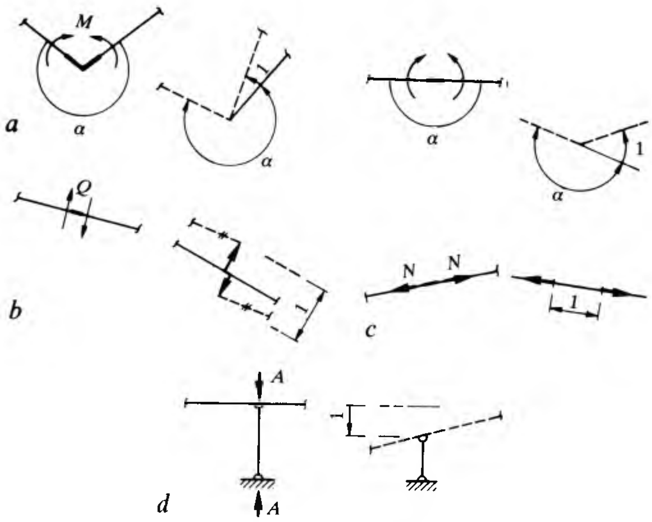
Ako je neki štap nulpoljem poprečne sile raščlanjen u dva štapa j i $j+1$, relativni je pol (j, $j+1$) štapova j i $j+1$ beskonačno daleko na osi štapova. Relativni kutni pomak štapova j i $j+1$ oko njihova relativnog pola jest relativno smicanje krajeva štapova uz nulpolje (sl. 93a). Ako je neki štap nulpoljem uzdužne sile raščlanjen u dva štapa j i $j+1$, relativni je pol (j, $j+1$) štapova j i $j+1$ beskonačno daleko u smjeru okomitom na štapove. Relativni kutni pomak štapova j i $j+1$ oko njihova relativnog pola jest relativni aksijalni pomak (sl. 93b).



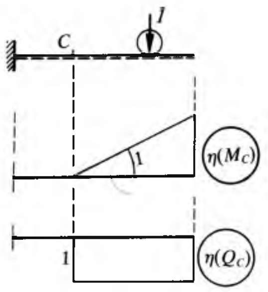
Sl. 93. Pomaci u nulpolju poprečne sile (*a*) i nulpolju uzdužne sile (*b*)

Koncentrirane jedinične bezdimenzijske deformacije koje pripadaju momentu savijanja M, poprečnoj sili Q i uzdužnoj sili N u nekom presjeku konstrukcije te jednoj ležajnoj sili (reakciji) A prikazane su na sl. 94.

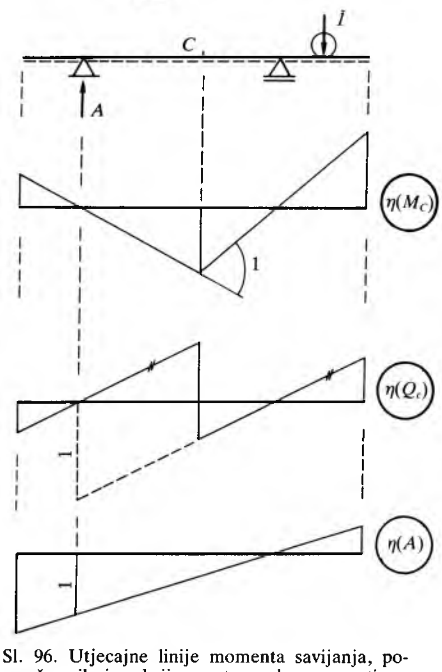
Primjeri. Na sl. 95 do 98 prikazane su neke utjecajne linije nekih statički određenih konstrukcija, a na sl. 99 neke utjecajne linije statički neodređene dvopoljne grede. Pretpostavljeno je da su sve unutrašnje sile pozitivne.



Sl. 94. Koncentrirane jedinične deformacije koje pripadaju momentu savijanja (*a*), poprečnoj (*b*), uzdužnoj (*c*) i ležajnoj sili (*d*)



Sl. 95. Utjecajne linije momenta savijanja i poprečne sile konzole



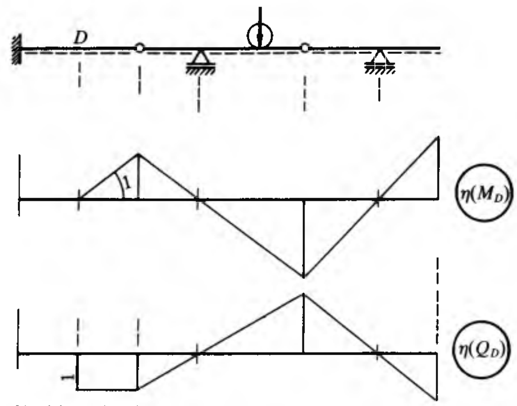
Sl. 96. Utjecajne linije momenta savijanja, poprečne sile i reakcije proste grede s prepustima

Primjena utjecajnih linija. Utjecajnim se linijama jednostavno i vrlo pregledno određuju mehaničke veličine konstrukcija zbog djelovanja vertikalnih opterećenja i napadnih momenata.

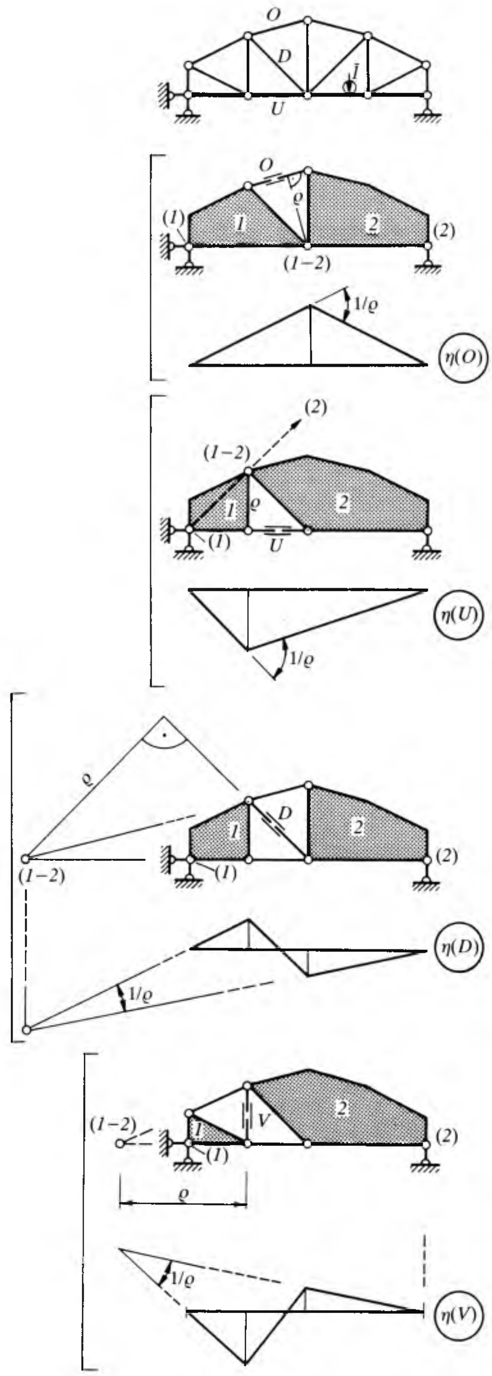
Neka mehanička veličina V na osnovi zakona superpozicije utjecaja pojedinih opterećenja iznosi

$$V = \sum_j \eta_j(V)\,P_j + \int_x \eta_x(V)\,P_x\,\mathrm{d}x + \sum_k \eta_k'(V)\,P_k', \qquad (142)$$

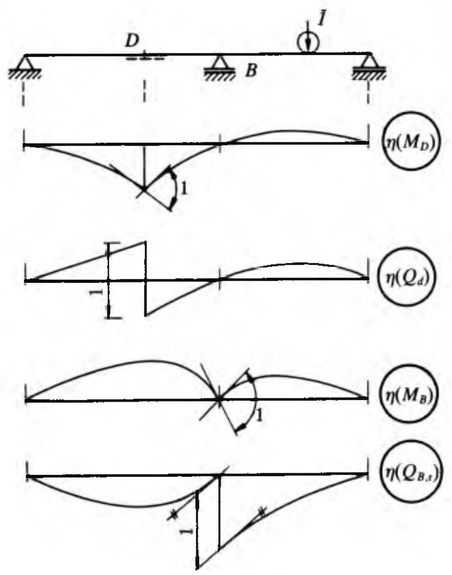
gdje su P_j i $\eta_j(V)$ koncentrirana sila na mjestu j i pripadna ordinata utjecajne linije, a suma se proteže na sve koncentrirane sile; P_x i $\eta_x(V)$ jesu intenzivnost raspodijeljenog optere-



Sl. 97. Utjecajne linije momenta savijanja i poprečne sile Gerberove grede s jednim upetim krajem



Sl. 98. Utjecajne linije rešetkaste proste grede s vertikalama i dijagonalama te poligonskim gornjim pojasom



Sl. 99. Utjecajne linije momenata savijanja i poprečnih sila statički neodređene dvopoljne grede

ćenja na mjestu x i pripadna ordinata utjecajne linije, a integral se proteže na području raspodijeljenog opterećenja; P_k' i $\eta_k'(V)$ jesu koncentrirani napadni moment na mjestu k i nagib (gradijent) utjecajne linije na tom mjestu, a suma se proteže na sve napadne momente. Veličine P_j i P_x su pozitivne ako su orijentirane naniže, gradijent η_k' je pozitivan ako se η povećava s porastom apscise, a P_k' ako djeluje u smjeru gibanja kazaljke na satu.

Za svaki pravocrtni odsječak utjecajne linije vrijedi

$$\int_x \eta_x(V)\,P_x\,\mathrm{d}x = \eta^{\mathrm{r}}(V)\,P^{\mathrm{r}}, \qquad (143)$$

gdje je $P^{\mathrm{r}} = \int_x P_x \mathrm{d}x$ rezultanta raspodijeljenog opterećenja, a $\eta^{\mathrm{r}}(V)$ ordinata utjecajne linije na mjestu rezultante P^{r}. Ako se intenzivnost raspodijeljenog opterećenja uzduž apscise ne mijenja ($P_x = P$), vrijedi

$$\int_x \eta_x(V)\,P\,\mathrm{d}x = \Omega P, \qquad (144)$$

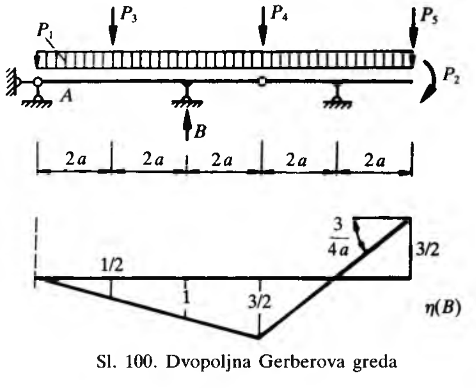
gdje je Ω površina omeđena utjecajnom linijom, njenom zaključnom linijom i vertikalama na početku i na kraju raspodijeljenog opterećenja.

Pomoću utjecajnih linija lako se može odrediti i najnepovoljniji položaj pokretnih opterećenja.

Primjer. Za sastavljenu dvopoljnu Gerberovu gredu s prepustom (sl. 100) treba konstruirati utjecajnu liniju reakcije B i odrediti njenu veličinu. Ona se određuje izrazom:

$$B = \left[\left(\frac{1}{2}+1\right)\Big/2\right]6aP_1 - \frac{3}{4a}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{3}{2}P_4 - \frac{3}{2}P_5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9aP_1 - \frac{3}{2a}P_2 + P_3 + 3P_4 - 3P_5\right). \qquad (145)$$



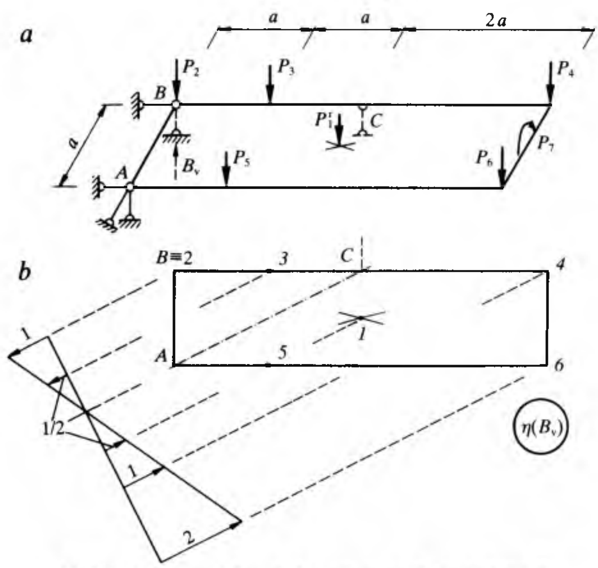
Sl. 100. Dvopoljna Gerberova greda

Utjecajne plohe i njihova primjena. Dok se za linijske (štapne) sustave upotrebljavaju utjecajne linije, za ravninske (dvodimenzijske) sustave upotrebljavaju se utjecajne plohe. Metode određivanja utjecajnih ploha i njihova primjena analogne su metodama određivanja utjecajnih linija i njihovim primjenama.

Primjer. Horizontalna fleksijski nedeformabilna ploča statički je određeno oslonjena na podlogu sa šest ležajnih štapića (sl. 101 a); ležaji A i B zajedno čine bočno nepomičan cilindrični zglob, a ležajni štapić C oduzima ploči još preostali stupanj slobode, pa on onemogućuje rotaciju oko osi cilindričnog zgloba. Treba konstruirati utjecajnu plohu reakcije B_{v} i odrediti vrijednost reakcije B_{v} zbog djelovanja jednoliko raspodijeljenog opterećenja intenzivnosti P_1 na cijeloj površini ploče, koncentriranih sila P_2 do P_6 i napadnog momenta P_7.

Pretpostavlja se da je reakcija B tlačna; odgovarajuća deformacija je skraćenje vertikalnog štapića ležaja B za $\bar{1}$. Utjecajna se ploha prikazuje osnovicom i vertikalnim presjekom (sl. 101 b). Doprinos raspodijeljenog opterećenja reakciji B_{v} iznosi $\eta^{\mathrm{r}}(B_{\mathrm{v}})P_1^{\mathrm{r}}$, gdje je P_1^{r} rezultanta raspodijeljenog opterećenja, a $\eta^{\mathrm{r}}(B_{\mathrm{v}})$ ordinata utjecajne plohe na mjestu rezultante P_1^{r}, dakle u središtu ploče. Alternativno, doprinos raspodijeljenog opterećenja reakciji B_{v} može se izračunati kao umnožak ΩP_1, gdje je Ω volumen omeđen utjecajnom plohom, njenom zaključnom ravninom (srednjom ravninom ploče) i vertikalnim ravninama kroz obod ploče. Vrijednost je reakcije B_{v}:

$$B_{\mathrm{v}} = -\frac{1}{2}4a^2\mathrm{P}_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_3 - P_4 - \frac{1}{2}P_5 - 2P_6 + \frac{1}{a}P_7. \qquad (146)$$



Sl. 101. Nedeformabilna ploča i utjecajna ploha reakcije B_{v}

METODA SILA

Osnovna svojstva statički neodređenih konstrukcija. Sustav je statički neodređen ako nije moguće sve ležajne i unutrašnje sile odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže. U nekim se statički neodređenim sustavima neke ležajne i unutrašnje sile mogu odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže. Postojanje prekobrojnih veza nuždan je i dovoljan uvjet da konstrukcija bude statički neodređena.

Osnovna su svojstva statički neodređenih sustava: *a*) ima mnogo rješenja za unutrašnje sile koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže, ali je samo jedno koje zadovoljava i uvjete kompatibilnosti deformacija; *b*) sve ili neke ležajne i unutrašnje sile ovise o dimenzijama poprečnih presjeka štapova i o modulima materijala; *c*) promjene temperature, pomaci ležaja i nepreciznosti izvedbe mogu uzrokovati ležajne i unutrašnje sile i *d*) isključe li se prekobrojne veze, statički neodređeni sustav ostaje stabilan, dok statički određeni sustavi nemaju takvu rezervnu nosivost.

Praktično određivanje stupnja statičke neodređenosti. Stupanj statičke neodređenosti statički neodređenih sustava često se može, umjesto primjenom općih kriterija, jednostavnije odrediti tako da se ukloni toliko veza da sustav postane statički određen; broj je udaljenih veza stupanj statičke neodređenosti. Presijecanjem štapa ravninskog okvira uklanjaju se tri veze i to fleksijska, posmična i aksijalna krutost, a presijecanjem štapa rešetke ili zatege jedna veza – aksijalna krutost (sl. 102).