sustavna upotreba tih metoda započela poslije prvoga svjetskog rata. Nagli razvoj tih metoda ostvaren je za vrijeme drugoga svjetskog rata, pogotovo u razdoblju poslije njega, kad je naglo porasla industrijska proizvodnja. U takvim uvjetima, naime, nije bilo moguće dovoljno temeljito kontrolirati kvalitetu proizvoda bilo zbog male pouzdanosti dotadašnjih metoda bilo zbog niske produktivnosti sredstava tehničke kontrole.

Početkom pedesetih godina uvodi se suvremena statistička kontrola kvalitete u industriji SAD i Japana, ali je ona teško prodirala u svakodnevnu praksu zbog teškoća u prikupljanju podataka i određivanju vrijednosti statističkih veličina. Tzv. brze metode statističke kontrole kvalitete ipak nisu bile dovoljno brze, a ni dovoljno pouzdane, da bi se mogle svakodnevno efikasno primjenjivati i donositi pravodobne odluke u proizvodnim uvjetima. Osnovna je teškoća u primjeni tih metoda bila u računanju bez pogodnih pomagala, pogotovo u malim radnim organizacijama i radionicama.

Te su teškoće uklonjene upotrebom elektroničkih računala na radnim strojevima i mjernim uređajima, što je omogućilo statističku kontrolu na svakom radnom mjestu i u svim fazama proizvodnog procesa, pa i upravljanje ukupnom proizvodnjom na temelju statističke kontrole kvalitete. Danas je vrlo raširena upotreba kompjutoriziranih ručnih uređaja (pomična mjerila, mikrometri, komparatori) koji s primjerenom programskom podrškom trenutno statistički obrađuju izmjerene veličine s pripadnim grafičkim prikazom. Osim toga, složeniji mjerni uređaji (trodimenzijski mjerni uređaji, uređaji za ispitivanje zupčanika, uređaji za ispitivanje hrapavosti ploha i sl.) omogućuju uz pomoć elektroničkog računala potpunu statističku analizu s grafičkim prikazom.

Bez obzira na to da li se mjerni podaci prikupljaju i onda obrađuju ili su mjerna ticala neposredno povezana s računalom, za statističku je analizu potrebna primjerena programska podrška.

Najzanimljivija je primjena statističke kontrole kvalitete za automatsku kontrolu alatnih strojeva i grupa strojeva u fleksibilnim proizvodnim linijama kad se automatski kontrolira karakteristična veličina (npr. promjer izratka) kompenzacijom alata, i to na temelju kontrole srednje vrijednosti $\bar{x}$ karakteristične veličine, da bi se izbjegle intervencije zbog slučajnih promjena.

Postoji niz razvijenih programa za statističku kontrolu kvalitete. Tako je npr. program tvrtke Hawlett-Packard sposoban da odluči o prihvaćanju ili odbacivanju izratka s obzirom na svaku mjerenu karakteristiku. Program, osim toga, prati učestalost kojom se svaka mjerena karakteristika pojavljuje u području ispod ili iznad granica dopuštenih odstupanja. Za svaku se karakteristiku tiskaju srednje vrijednosti $\bar{x}$, procijenjeno standardno odstupanje s i histogrami. Programski paketi obično mogu analizirati kontrolne karte.

Upotrebom računala brzo se proširila primjena statističke kontrole kvalitete u proizvodnim industrijskim procesima, jer je takva kontrola provjereno sredstvo za osiguranje kvalitete proizvoda i proizvodnih procesa. Iako kontrola kvalitete u suvremenoj proizvodnji teži potpunoj kontroli na proizvodnoj liniji (kontrola *on-line*), statistička će se kontrola kvalitete i dalje primjenjivati, pa se može očekivati i njezino unapređivanje.

LIT.: *A. V. Feigenbaum,* Total Quality Control, Engineering and Management. McGraw-Hill Book Company, New York 1961. – *E. Schindowski, O. Schürz,* Statistische Qualitätskontrolle. VEB Verlag Technik, Berlin 1965. – *J. M. Juran,* Quality Control-Handbook. McGraw-Hill Book Company, New York [3]1974. – *J. M. Juran, F. M. Gryna,* Planiranje i analiza kvaliteta od razvoja proizvoda do korišćenja. Privredni pregled, Beograd 1974. – JUS N.N0.029, Planovi i postupci uzimanja uzoraka za kontrolu prema atributima, 1974. – *W. Masing,* Handbuch der Qualitätssicherung. Carl Hauser Verlag, München 1980. – ISO 3951, Sampling Procedures and Charts for Inspection by Variables for Percent Defective, 1981. – *H. J. Warnecke, W. Dutschke,* Fertigungsmesstechnik. Springer-Verlag, Berlin 1984.

F. Dusman

STATISTIKA, znanstvena disciplina koja se bavi problemima u vezi s prikupljanjem, obradbom i analizom podataka. Glavni su zadaci matematičke statistike izgradnja teorijskih temelja i praktičnih postupaka za stvaranje zaključaka o pojavi na koju se odnose izmjereni, odnosno opaženi podaci. Budući da se podaci redovito odnose na tzv. *slučajne pojave,* statističke se analize i zaključci zasnivaju na pojmovima i metodama *teorije vjerojatnosti* (v. *Vjerojatnost*).

Statističke se metode primjenjuju na različitim područjima ljudske djelatnosti, pa su razvijene i neke posebnosti. Zbog toga se govori o ekonomskoj, medicinskoj i vojnoj statistici, o statističkoj fizici, statističkoj kontroli kvalitete itd. U ovom se članku izlažu osnovni pojmovi i metode *matematičke statistike*, koja ima veliku primjenu u tehničkim znanostima.

Prikupljanje podataka o stanovništvu počelo je već u drevnim civilizacijama (Kina, Perzija, Grčka, Rim). U XVII. st. pojavljuju se na njemačkim sveučilištima predavanja iz »statistike« (lat. *status* stanje), koja se odnose na problematiku državnih popisa. Ozbiljnije doprinose razvitku ekonomske statistike dali su engleski znanstvenici XVII. stoljeća (J. Grant, E. Halley, W. Petty), koji su istraživali zakonitosti u masovnim društvenim pojavama. Prvi državni statistički ured osnovan je u Švedskoj (1756).

Počeci matematičke statistike mogu se naći već kod utemeljitelja teorije vjerojatnosti: J. Bernoullija (1654–1705), P. S. Laplacea (1749–1827), S. D. Poissona (1781–1840) i K. F. Gaussa (1777–1855). Najvažnije probleme matematičke statistike i glavne ideje za njihovo rješavanje postavili su vodeći statističari tzv. anglosaksonske statističke škole: F. Galton (1822–1911), K. Pearson (1857–1936), R. A. Fisher (1890–1962) i J. Neyman (1894–1981).

Danas u svijetu postoji mnogo znanstvenika i institucija koji se bave statistikom. Također postoji veoma opsežna literatura i nekoliko specijalnih znanstvenih i stručnih časopisa koji obrađuju samo statističku problematiku.

STATISTIČKI PODACI

Sređivanje i prikazivanje. Mjerenje ili opažanje određenih pojava redovito rezultira određenim *skupom brojčanih podataka.* Brojčani se podaci odnose na jednu ili više promatranih veličina.

Ako se promatra samo jedna veličina X, onda je rezultat jednog mjerenja jedan realan broj x. Višestrukim ponavljanjem mjerenja veličine X dobiva se konačni niz brojeva $x_1,\ldots,x_n$, kao rezultat n ponovljenih mjerenja. Veličina X obično se naziva *statističko obilježje* promatrane pojave, a dobiveni niz brojeva *statistički podaci.*

Ako se npr. promatranjem broja X kvarova nekog stroja u jednom tjednu zabilježe opažene vrijednosti veličine X kroz $n=10$ tjedana, dobiva se, primjerice, niz brojeva: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=3$, $x_4=2$, $x_5=0$, $x_6=1$, $x_7=0$, $x_8=2$, $x_9=4$, $x_{10}=1$. Kao rezultati opažanja veličine X mogu se pojaviti samo cijeli brojevi. Pri tome se neki brojevi mogu pojaviti i više puta, pa se govori o frekvenciji pojavljivanja nekog podatka.

Za statističko obilježje X koje može poprimiti samo vrijednosti iz nekog *diskretnog* (konačnog ili prebrojivog) skupa brojeva $\mathcal{R}(X)$ kaže se da je *diskretno obilježje*. Prilikom opažanja (mjerenja) obilježja X dobivaju se elementi skupa $\mathcal{R}(X)$. Ako se u nizu od n opažanja broj $x_j^* \in \mathcal{R}(X)$ pojavi ν_j puta, kaže se da podatku x_j^* pripada frekvencija ν_j, odnosno *relativna frekvencija* $q_j=\nu_j/n$, gdje je $j=1,\ldots,r$. Budući da je $\sum_{j=1}^{r}\nu_j=n$, to je $\sum_{j=1}^{r}q_j=1$. Rezultati opažanja (mjerenja) obilježja X obično se prikazuju u tablicama (tabl. 1 i 2). Na temelju *tabličnog prikaza* statističkih podataka izrađuje se i *grafički prikaz*. Ako se na apscisnu os stave vrijednosti obilježja X, a kao ordinate nanesu pripadne frekvencije

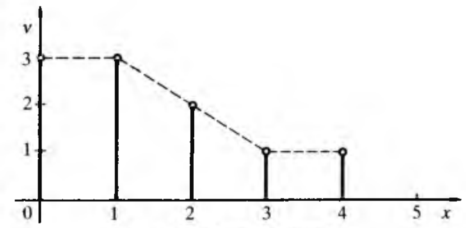
Tablica 1
TABLICA FREKVENCIJA DISKRETNOG OBILJEŽJA

Vrijednost obilježja	x_1^*	$\cdots$	x_j^*	$\cdots$	x_r^*	*Zbroj*
Frekvencija	ν_1	$\cdots$	ν_j	$\cdots$	ν_r	n
Relativna frekvencija	q_1	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_r	1
Kumulativne relativne frekvencije	q_1	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{j} q_i$	$\cdots$	1	

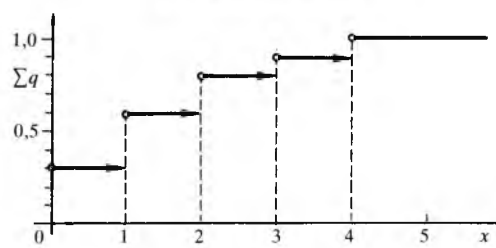
(relativne frekvencije), dobiva se *grafikon frekvencija* (relativnih frekvencija) niza statističkih podataka diskretnog obilježja X (sl. 1). Ako se kao pripadne ordinate uzmu kumulativne relativne frekvencije, dobiva se graf funkcije kumulativnih relativnih frekvencija (sl. 2). Ako se radi o statističkom obilježju koje može poprimiti vrijednosti iz nekog intervala skupa $\boldsymbol{R}$ realnih brojeva, govori se o kontinuiranom obilježju.

Tablica 2
BROJ KVAROVA STROJA U TOKU TJEDNA

x_j^*	0	1	2	3	4	5 i više	Zbroj
v_j	3	3	2	1	1	0	10
q_j	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	0	1
$\sum_{i=1}^{j} q_i$	0,3	0,6	0,8	0,9	1	1	



Sl. 1. Grafikon frekvencije



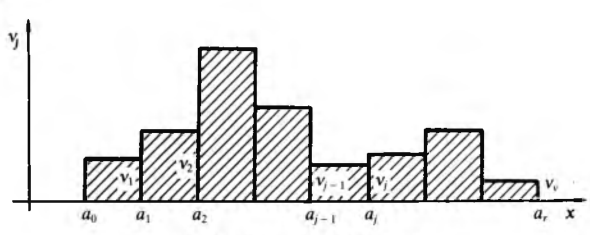
Sl. 2. Funkcija kumulativnih relativnih frekvencija diskretnog obilježja

Tako se trajanje T nekog tehničkog elementa, npr. žarulje, može tretirati kao statističko obilježje svih žarulja izrađenih prema određenoj tehnologiji. Bilježenjem trajanja promatrane žarulje dobiva se neki broj iz intervala $[0,\infty\rangle$. Ponavljanjem tog eksperimenta n puta dobiva se niz realnih brojeva $t_1,\ldots,t_n$, tj. dobivaju se statistički podaci o trajanju žarulje.

Da bi se za kontinuirano obilježje X formirala pripadna tablica, najprije se definiraju tzv. *razredi za vrijednost obilježja.* Interval mogućih vrijednosti obilježja podijeli se na konačni broj r podintervala (razreda).

U prethodnom primjeru stave se u prvi razred sve vrijednosti od 0 do uključivo 50 sati, u drugi vrijednosti od 50 do uključivo 100 sati itd., pa se tako formiraju razredi (podintervali) širine 50 sati.

Nakon toga se u nizu $x_1,\ldots,x_n$ izmjerenih vrijednosti obilježja X odredi broj v_j onih rezultata mjerenja koji pripadaju j-tom razredu. To je frekvencija v_j, odnosno relativna frekvencija $q_j = v_j/n$ j-tog razreda obilježja X. Također vrijedi da je $\sum_{j=1}^{r} v_j = n$ i $\sum_{j=1}^{r} q_j = 1$. Na temelju tablice frekvencija (tabl. 3) izrađuje se *histogram frekvencija* (sl. 3) tako da se iznad intervala $[a_{j-1},a_j\rangle$ nacrta pravokutnik visine v_j.

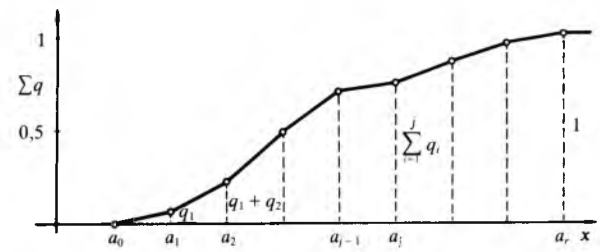


Sl. 3. Histogram frekvencija

Tablica 3
TABLICA FREKVENCIJA KONTINUIRANOG OBILJEŽJA

Redni broj razreda	1	...	j	...	r
Granice razreda	$[a_0, a_1\rangle$	...	$[a_{j-1}, a_j\rangle$	...	$[a_{r-1}, a_r\rangle$
Frekvencija	v_1	...	v_j	...	v_r
Relativna frekvencija	q_1	...	q_j	...	q_r
Kumulativne relativne frekvencije	q_1	...	Σq_i	...	1

Pri crtanju histograma relativnih frekvencija poželjno je visinu v_j pravokutnika nad intervalom $[a_{j-1},a_j\rangle$ odrediti tako da njegova površina bude q_j $(v_j = q_j/(a_j - a_{j-1}),\ j = 1,\ldots,r)$. Tada je zbroj površina svih pravokutnika jednak jedinici. Graf funkcije kumulativnih relativnih frekvencija dobiva se tako da se za točku a_0 uzme ordinata nula, a za točku $a_j\,(j=1,\ldots,r)$ ordinata $\sum_{i=1}^{j} q_i$ i tako dobivene točke međusobno povežu dužinama (sl. 4).



Sl. 4. Funkcija kumulativnih relativnih frekvencija kontinuiranog obilježja

Izbor je brojeva $a_0 < a_1 < \ldots < a_r$ kojima se definiraju razredi, teorijski, proizvoljan, ali se pri njihovu izboru vodi računa o praktičnim razlozima (izgled tablice, preglednost grafikona i sl.). Formiranje razreda prakticira se i za diskretna obilježja, pogotovo ako je broj mjerenja velik i ako se pri tome pojavljuje mnogo različitih vrijednosti obilježja.

Ako se pri promatranju određene pojave uoče dva obilježja (dvije veličine) X i Y, onda se kao rezultati mjerenja dobivaju uređeni parovi realnih brojeva. Višestrukim ponavljanjem mjerenja dobiva se konačni niz $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ uređenih parova realnih brojeva.

Promatra li se, npr., određeni skup dvadesetogodišnjih mladića tako da se mjeri težina (X) i visina (Y) svakoga od njih, rezultati n mjerenja čine n-člani niz uređenih parova (x_i,y_i), $i = 1,\ldots,n$, gdje je x_i brojčana vrijednost težine, a y_i visine.

Ako se za obilježje X formira r razreda $[a_{i-1},a_i\rangle$, $i = 1,\ldots,r$, a za obilježje Y s razreda $[b_{j-1},b_j\rangle$, $j = 1,\ldots,s$, može se definirati frekvencija v_{ij}, odnosno relativna frekvencija $q_{ij} = v_{ij}/n$, gdje je v_{ij} broj uređenih parova u kojima x_i pripada i-tom razredu obilježja X, a y_j j-tom razredu obilježja Y.

Ako je, npr., treći razred za težine (X) interval $[60,65\rangle$, a peti razred za visine (Y) interval $[1{,}70,\ 1{,}75\rangle$ te ako je u nizu od $n = 100$ mjerenja pronađeno 8 mladića s težinom između 60 i 65 kilograma i visinom između 1,70 i 1,75 metara, onda je $v_{35} = 8$ i $q_{35} = 0{,}08$.

Tablica frekvencija (relativnih frekvencija) za dva obilježja X i Y naziva se *kontingencijska tablica* (tabl. 4). U prvom retku glave tablice 4 upisani su redni brojevi razreda, a u drugome pripadni intervali za obilježje X. U prvom stupcu tablice 4 upisani su redni brojevi razreda, a u drugome pripadni intervali za obilježje Y. U unutrašnja polja tablice 4 upisuju se pripadne frekvencije, odnosno relativne frekvencije. Posljednji redak sadrži frekvencije (relativne frekvencije) pripadnih razreda obilježja X, a posljednji stupac frekvencije (relativne frekvencije) pripadnih razreda obilježja Y.

Tablica 4
KONTINGENCIJSKA TABLICA

		1 $[a_0, a_1\rangle$	...	i $[a_{i-1}, a_i\rangle$	...	r $[a_{r-1}, a_r\rangle$	Σ
1	$[b_0, b_1\rangle$	ν_{11}	...	ν_{1i}	...	ν_{1r}	μ_1
⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
j	$[b_{j-1}, b_j\rangle$	ν_{j1}	...	ν_{ji}	...	ν_{jr}	μ_j
⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
s	$[b_{s-1}, b_s\rangle$	ν_{s1}	...	ν_{si}	...	ν_{sr}	μ_s
	Σ	ν_1	...	ν_i	...	ν_r	n

Osnovni parametri. Da bi se dobio cjelovit uvid u određeni skup statističkih podataka, definiraju se parametri koji karakteriziraju neka opća svojstva tog skupa.

Statistički momenti najvažniji su parametri. Brojevi

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

nazivaju se *ishodišni* (*pomoćni*) *momenti k-tog reda* niza podataka $x_1, \ldots, x_n$, a brojevi

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_1)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

centralni momenti k-tog reda. Za $k = 0$ dobiva se da je $a_0 = m_0 = 1$. Ishodišni moment prvog reda $a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ naziva se još i *aritmetička sredina* ili *prosjek* promatranog skupa podataka i često se označava sa $\bar{x}$. Temeljna su svojstva aritmetičke sredine

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = m_1 = 0, \tag{3}$$

$$\min_{c \in \boldsymbol{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = m_2. \tag{4}$$

Relacija (3) iskazuje da je aritmetička sredina odstupanja podataka od $\bar{x}$ jednaka nuli, a relacija (4) da je aritmetička sredina kvadrata odstupanja podataka od $\bar{x}$ najmanja, tj. manja je od aritmetičke sredine kvadrata odstupanja podataka od bilo kojega drugog realnog broja c. Ta svojstva pokazuju da $\bar{x}$ karakterizira položaj (lokaciju) podataka na brojevnom pravcu, a m_2 karakterizira rasipanje (disperziju) podataka oko $\bar{x}$. Zato se centralni moment drugog reda m_2 naziva *disperzija* ili *varijanca* skupa podataka i obično se označava sa s_x^2. Broj $s_x = \sqrt{m_2}$ naziva se *standardno odstupanje* (standardna devijacija).

Kao parametar lokacije upotrebljava se još i *medijan M*, definiran za parno n izrazom

$$M = \frac{1}{2} (x_{n/2} + x_{(n/2)+1}), \tag{5a}$$

a za neparno n izrazom

$$M = x_{(n+1)/2}, \tag{5b}$$

pri čemu se pretpostavlja da su podaci poredani po veličini, tj. da je $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$.

Osnovno je svojstvo medijana

$$\min_{c \in \boldsymbol{R}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - c| \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - M| = A, \tag{6}$$

što znači da je aritmetička sredina apsolutnih vrijednosti odstupanja podataka od medijana manja od aritmetičke sredine apsolutnih vrijednosti odstupanja podataka od bilo kojeg drugog realnog broja c. Parametar A, tzv. *srednje apsolutno odstupanje* podataka od medijana, može također poslužiti kao pokazatelj rasipanja podataka.

Parametar

$$K = \frac{m_3}{s_x^3} \tag{7}$$

naziva se *koeficijent asimetrije.* Ako su podaci raspoređeni simetrično s obzirom na $\bar{x}$, onda je $K = 0$. Kad je $K > 0$, govori se o *pozitivnoj asimetričnosti,* a kad je $K < 0$, govori se o *negativnoj asimetričnosti* skupa podataka.

Parametar

$$E = \frac{m_4}{s_x^4} - 3 \tag{8}$$

naziva se *koeficijent spljoštenosti* ili *eksces* skupa podataka.

Ako su podaci za diskretno obilježje X već tako sređeni da su istaknute frekvencije (relativne frekvencije) pojedinih vrijednosti (tabl. 1), statistički se momenti mogu izraziti formulama:

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} (x_j^*)^k \nu_j = \sum_{j=1}^{r} (x_j^*)^k q_j, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} (x_j^* - a_1)^k \nu_j = \sum_{j=1}^{r} (x_j^* - a_1)^k q_j, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Formule (9) i (10) mogu se upotrijebiti i za približno izračunavanje pripadnih statističkih momenata podataka o kontinuiranom obilježju, sređenih u tabl. 2, pri čemu se za x_j^* obično uzima sredina j-tog razreda ($x_j^* = (a_{j-1} + a_j)/2$).

Ako se podaci odnose na dva obilježja X i Y, tj. ako se raspolaže nizom $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ uređenih parova brojeva, statistički se momenti definiraju relacijama:

$$a_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i^l, \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

$$m_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{10})^k (y_i - a_{01})^l, \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Brojevi a_{kl} nazivaju se *ishodišni* (*pomoćni*) *momenti reda* (k, l), a brojevi m_{kl} *centralni momenti reda* (k, l). Odmah se vidi da je $a_{00} = m_{00} = 1$, $a_{10} = \bar{x}$, $a_{01} = \bar{y}$, $m_{10} = m_{01} = 0$, $m_{20} = s_x^2$, $m_{02} = s_y^2$ i, općenito, da se momenti a_{k0} i m_{k0} odnose samo na obilježje X, a momenti a_{0l} i m_{0l} samo na obilježje Y. Centralni moment m_{11} naziva se *korelacijski moment* ili *kovarijanca,* a ako su $s_x > 0$ i $s_y > 0$, onda se broj

$$r = \frac{m_{11}}{s_x s_y} \tag{13}$$

naziva *koeficijent korelacije* promatranog skupa podataka. Osnovno je svojstvo koeficijenta korelacije da je

$$r^2 \leqq 1. \tag{14}$$

Ako su x_i i y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) povezani funkcijskom zavisnošću oblika $y_i = \alpha x_i + \beta$ ($\alpha \neq 0$), onda je $r^2 = 1$. I obratno, ako je $r^2 = 1$, onda između y_i i x_i postoji funkcijska zavisnost navedenog tipa. Ako je $r = 0$, kaže se da su x_i i y_i *nekorelirani podaci.*

Teorijska interpretacija. Temeljna je pretpostavka za razvijanje statističke teorije da su izmjereni (opaženi) brojčani podaci posljedica tzv. *statističkih zakonitosti* koje su karakteristične za slučajne pojave. Statističke se zakonitosti pojavljuju kad je broj mjerenja dovoljno velik, jer se tada relativne frekvencije stabiliziraju oko fiksiranih brojeva, tj. *vjerojatnosti.* Matematički modeli za opisivanje i egzaktno izražavanje statističkih zakonitosti razvijeni su u *teoriji vjerojatnosti* (v. *Vjerojatnost*). Rezultati opažanja (mjerenja) nekog statističkog obilježja interpretiraju se kao slučajni ishodi pri ponovljenim nezavisnim mjerenjima *slučajne varijable X,* odnosno *slučajnog vektora* (X, Y). Diskretno statističko obilježje teorijski se interpretira kao *diskretna slučajna varijabla X* sa zadanim skupom vrijednosti $\mathcal{R}(X) = \{x_1^*, \ldots, x_r^*\}$, pritom može biti i $r = \infty$, i pripadnim vjerojatnostima $p_j = \mathrm{P}(X = x_j^*) \geqq 0 \left(\sum_{j=1}^{r} p_j = 1 \right)$.

Kontinuirano statističko obilježje teorijski se interpretira kao *kontinuirana slučajna varijabla X* sa zadanom *funkcijom gustoće vjerojatnosti,*

$$\begin{gathered} f(x) \geqq 0, \qquad x \in \boldsymbol{R}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \mathrm{P}(a \leqq X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a < b. \end{gathered} \tag{15}$$

Diskretna i kontinuirana slučajna varijabla mogu se u statističkom smislu karakterizirati i pripadnom *funkcijom razdiobe (distribucije) vjerojatnosti* $F(x) = \mathrm{P}(X \leqq x)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Za diskretnu je slučajnu varijablu

$$F(x) = \sum_{x_j^* \leqq x} p_j, \tag{16}$$

dok je za kontinuiranu slučajnu varijablu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Za teorijske razdiobe definira se *matematičko očekivanje* ili, kraće, *očekivanje* slučajne varijable X:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_j x_j^* p_j, & \text{za diskretnu slučajnu varijablu } X \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{za kontinuiranu slučajnu varijablu } X, \end{cases} \tag{18}$$

disperzija ili *varijanca* slučajne varijable X:

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2, \tag{19}$$

ishodišni moment k-tog reda slučajne varijable X:

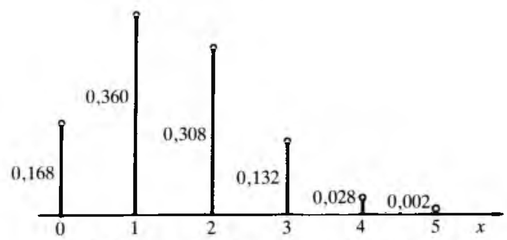
$$\alpha_k = \mathrm{E}[X^k], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

centralni moment k-tog reda slučajne varijable X:

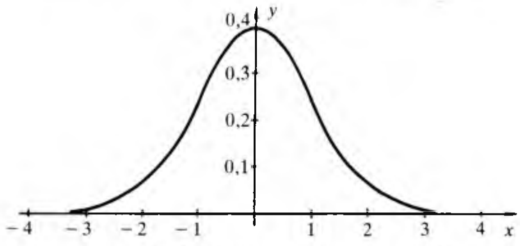
$$\mu_k = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^k], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Dvodimenzijski slučajni vektor (X, Y) teorijski se zadaje pripadnom funkcijom razdiobe vjerojatnosti $F(x, y) = \mathrm{P}(X \leqq x, Y \leqq y)$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, a također se mogu razmatrati diskretni i kontinuirani slučajni vektori.

Tipične su teorijske diskretne razdiobe vjerojatnosti: *binomna, Poissonova, geometrijska* i *hipergeometrijska*, a tipične su teorijske kontinuirane razdiobe vjerojatnosti: *normalna* ili *Gaussova, eksponencijalna, uniformna* i još mnoge druge (v. *Vjerojatnost).* Teorijske su razdiobe određene svojim parametrima. Npr. binomna je razdioba $\mathcal{B}(n, p)$ određena dvama parametrima n i p ($n \in \boldsymbol{N}$, $0 < p < 1$), Poissonova $\mathcal{P}o(a)$ parametrom a ($a > 0$), normalna $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dvama parametrima μ i σ ($\mu \in \boldsymbol{R}$, $\sigma > 0$), dvodimenzijska normalna razdioba $\mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \varrho)$ sa pet parametara μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, i ϱ ($\mu_1, \mu_2, \in \boldsymbol{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, 0 \leqq \varrho < 1$) itd. (sl. 5 i 6).



Sl. 5. Grafikon vjerojatnosti za $\mathcal{B}(n = 5, p = 0{,}3)$



Sl. 6. Graf funkcije vjerojatnosti za $\mathcal{N}(0, 1)$

Glavni se problemi matematičke statistike odnose na *procjenu parametara* pretpostavljene teorijske razdiobe i na *testiranje hipoteza.* Hipoteza se također može odnositi na parametre pretpostavljene teorijske razdiobe (parametarski test), ali se hipoteza može sastojati i od izjava koje se ne odnose na parametre, nego se tiču drugih svojstava razdiobe. Zadatak je statističke teorije da izgradi takve matematičke modele za procjenu parametara i testiranje hipoteza koji izražavaju bitna svojstva promatrane stvarnosti i omogućuju dobivanje praktičnih postupaka za donošenje racionalnih odluka. Temeljna je pretpostavka koja omogućuje razvoj gotovo svih modela u matematičkoj statistici da se konkretni rezultati mjerenja mogu interpretirati kao vrijednosti slučajnog uzorka neke slučajne varijable (slučajnog vektora).

STATISTIČKO PROCJENJIVANJE

Slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ s funkcijom razdiobe $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_n)$, gdje je F funkcija razdiobe slučajne varijable X, naziva se slučajni uzorak. Ako je za X_i izmjerena vrijednost x_i ($i = 1, \ldots, n$), niz se vrijednosti $(x_1, \ldots, x_n)$ naziva vrijednost slučajnog uzorka. Brojevi $x_1, \ldots, x_n$ interpretiraju se kao niz nezavisnih mjerenja slučajne varijable X.

Svojstva nekih statistika. Ako je $Y_n = h(X_1, \ldots, X_n)$, gdje je h određena funkcija od n varijabli, slučajna se varijabla Y_n naziva *statistika.*

U primjenama su najčešće sljedeće statistike:

1) Neka je $A = \{X \in S\}$ događaj takav da slučajna varijabla X poprimi vrijednost iz skupa $S \subseteq \boldsymbol{R}$ i neka je $v_n(A)$ broj onih mjerenja u slučajnom uzorku koja pripadaju skupu S, tada je slučajna varijabla $v_n(A)$ statistika koja se naziva *frekvencija*, a slučajna varijabla $Q_n(A) = v_n(A)/n$ statistika koja se naziva *relativna frekvencija* događaja A.

Ako je x zadani realni broj i $A = \{X \leqq x\}$ događaj takav da izmjerena vrijednost nije veća od broja x, tada se $F_n(x) = Q_n(A)$ naziva *funkcija razdiobe uzorka* ili *empirijska funkcija razdiobe.*

2) Statistika $\bar{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ naziva se *aritmetička sredina uzorka.*

3) Statistika $\bar{S}^2 = [(X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2]/(n-1)$ naziva se *korigirana disperzija uzorka.*

4) Statistika

$$A_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

naziva se *ishodišni moment r-tog reda uzorka,* a statistika

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^r \tag{23}$$

naziva se *centralni moment r-tog reda uzorka.* Očito je $A_0 = M_0 = 1$, $A_1 = \bar{X}$, $M_1 = 0$ i $M_2 = \dfrac{n-1}{n} \bar{S}^2$.

5) Neka su vrijednosti slučajnog uzorka poredane prema rastućim vrijednostima tako da je $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$ i neka je $p (0 < p < 1)$ zadani broj, tada je broj $v(p) = \inf\{x \in \boldsymbol{R} : F_n(x) \geqq p\}$ vrijednost statistike $V(p)$ koja se naziva *kvantil (fraktil) uzorka razine p.* Statistika $V(0{,}5) = M$ naziva se *medijan uzorka.*

6) Statistika $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ naziva se *maksimum uzorka,* a statistika $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$ *minimum uzorka,* dok se statistika $W = Y - Z$ naziva *raspon* ili *rang uzorka.*

Navedene statistike kao slučajne varijable imaju sljedeća svojstva:

1) Frekvencija $v_n(A)$ događaja A ima binomnu razdiobu $\mathcal{B}(n, p)$, tako da je očekivanje $\mathrm{E}[v_n(A)] = np$ i varijanca $\mathrm{D}[v_n(A)] = np(1-p)$. Iz toga proizlazi da za relativnu frekvenciju $Q_n(A)$ događaja A vrijedi

$$\mathrm{E}[Q_n(A)] = p, \qquad \mathrm{D}[Q_n(A)] = \frac{p(1-p)}{n}. \tag{24}$$

Ako se na slučajnu varijablu $Q_n(A)$ primijeni *Čebiševljeva nejednakost,* dobiva se

$$\mathrm{P}(|Q_n(A) - p| \geqq \varepsilon) < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqq \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{25}$$

Za svaki, dakle, $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|Q_n(A) - p| \geqq \varepsilon) = 0. \tag{26}$$

To je *Bernoullijev zakon velikih brojeva,* koji izriče da je »nevjerojatno« da se u velikom ($n \to \infty$) uzorku značajno razlikuje ($\varepsilon > 0$ po volji maleno) relativna frekvencija od vjerojatnosti događaja A. To praktički znači da se za veliko n vjerojatnost $\mathrm{P}(A)$ može aproksimirati relativnom frekvencijom $Q_n(A)$. Uzme li se $A = \{X \leqq x\}$, dobiva se da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|F_n(x) - F(x)| \geqq \varepsilon) = 0, \tag{27}$$

pa se tada može teorijska funkcija razdiobe aproksimirati pripadnom empirijskom funkcijom razdiobe.

Slučajna varijabla

$$Z_n = \frac{v_n(A) - np}{np(1-p)} \tag{28}$$

ima svojstvo da je $\mathrm{E}[Z_n] = 0$, $\mathrm{D}[Z_n] = 1$ i da za $n \to \infty$ niz Z_n ($n = 1,2,\ldots$) konvergira k slučajnoj varijabli Z kojoj pripada standardna normalna razdioba $\mathcal{N}(0,1)$. To omogućuje da se uz određene uvjete ($n > 30$, $1/n < p < 1 - 1/n$) binomna razdioba $\mathcal{B}(n,p)$ aproksimira normalnom razdiobom $\mathcal{N}(np, np(1-p))$, odnosno da se za slučajnu varijablu $Q_n(A)$ može reći da približno ima $\mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$ (*Moivre–Laplaceov teorem*).

2) Za aritmetičku sredinu $\bar{X}$ slučajnog uzorka vrijedi:

$$\mathrm{E}[\bar{X}] = \mathrm{E}[X] = m, \qquad \mathrm{D}[\bar{X}] = \frac{\mathrm{D}[X]}{n} = \frac{s^2}{n}. \tag{29}$$

Niz slučajnih varijabli $Z_n = (\bar{X} - m)\sqrt{n}/s$ ($n = 1,2,\ldots$) konvergira k slučajnoj varijabli Z kojoj pripada $\mathcal{N}(0,1)$, a to znači da se za velike n ($n > 30$) može uzeti da $\bar{X}$ približno ima $\mathcal{N}\left(m, \frac{s^2}{n}\right)$ (*centralni granični teorem*).

3) Za korigiranu disperziju $\bar{S}^2$ slučajnog uzorka vrijedi:

$$\mathrm{E}[\bar{S}^2] = \mathrm{D}[X] = s^2, \qquad \mathrm{D}[\bar{S}^2] = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}s^4\right). \tag{30}$$

4) Za momente uzorka vrijedi:

$$\mathrm{E}[A_r] = \alpha_r, \qquad \mathrm{D}[A_r] = \frac{1}{n}(\alpha_{2r} - \alpha_r^2), \qquad r = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{E}[M_2] = \frac{n-1}{n}\mu_2, \\ \mathrm{D}[M_2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \mu_2^2) - \frac{2}{n}(\mu_4 - 2\mu_2^2) + \frac{1}{n^2}(\mu_4 - 3\mu_2^2), \end{gathered} \tag{32}$$

$$\mathrm{E}[M_r] = \mu_r + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad r = 3,4,5,\ldots \tag{33}$$

$$\mathrm{D}[M_r] = \frac{1}{n}(\mu_{2r} - 2r\mu_{r-1}\mu_{r+1} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{34}$$

Oznaka $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ označava veličinu koja teži k nuli istom brzinom kao i $\frac{1}{n}$, kada n teži u beskonačnost.

Iz centralnog graničnog teorema proizlazi da se momenti uzorka *asimptotski* ($n \to \infty$) ponašaju *normalno,* tj. za veliko n može se približno uzeti da su to slučajne varijable s pripadnim normalnim razdiobama.

5) Kvantil uzorka $V(p)$ kontinuirane slučajne varijable X s pripadnom funkcijom gustoće f, ima asimptotski normalnu razdiobu $\mathcal{N}\left(x_p, \frac{p(1-p)}{nf^2(x_p)}\right)$, gdje je x_p teorijska vrijednost kvantila razine p. Medijan uzorka, prema tome, ima asimptotski normalnu razdiobu $\mathcal{N}\left(M, \frac{1}{4nf^2(M)}\right)$.

6) Ako je $\mathrm{P}(X \leqq x) = F(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, funkcija razdiobe slučajne varijable X, maksimum Y slučajnog uzorka ima funkciju razdiobe $\mathrm{P}(Y \leqq y) = [F(y)]^n$, $y \in \boldsymbol{R}$, a minimum Z ima funkciju razdiobe $\mathrm{P}(Z \leqq z) = 1 - [1 - F(z)]^n$, $z \in \boldsymbol{R}$.

Procjena parametara. U vezi sa svakom slučajnom varijablom pojavljuju se određeni parametri, kao npr., očekivanje, disperzija, momenti, ili pak parametri koji se pojavljuju u formulama za funkciju razdiobe, odnosno funkciju gustoće vjerojatnosti i sl. Procijeniti nepoznati parametar Θ slučajne varijable X na temelju n-članog slučajnog uzorka $(X_1,\ldots,X_n)$ znači odabrati pripadnu statistiku $Y_n = h(X_1,\ldots,X_n)$, koja se tada naziva *estimator* (*procjenitelj*) za parametar Θ. Vrijednost $y_n = h(x_1,\ldots,x_n)$ odabranog estimatora, izračunana na temelju niza mjerenja $x_1,\ldots,x_n$, služi kao *procjena* parametra Θ, tj. uzima se da je $\Theta \approx y_n$. Dopuštene vrijednosti za parametar Θ određuju skup T koji se naziva *parametarski skup.* Tako se, npr., za disperziju s^2 obično uzima da je $T = [0, \infty\rangle$, za parametar μ u $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ da je $T = \boldsymbol{R}$ i sl.

Jedan je od glavnih zadataka matematičke statistike razvijanje postupaka i metoda za definiranje dobrih estimatora i za njihovo međusobno uspoređivanje. Za izbor estimatora ima različitih metoda.

Metoda maksimalne vjerojatnosti zasniva se na sljedećem: Ako je X diskretna slučajna varijabla i ako njena funkcija vjerojatnosti ovisi o parametru Θ ($\Theta \in T$), tada je $L(\Theta) = \mathrm{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \mathrm{P}(X_1 = x_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(X_n = x_n)$ određena funkcija (engl. *likelihood function*, funkcija vjerodostojnosti) od Θ, koja označava vjerojatnost da će se dobiti baš vrijednost $(x_1,\ldots,x_n)$ slučajnog uzorka $(X_1,\ldots,X_n)$ kada parametar ima vrijednost Θ. Treba odrediti Θ tako da $L(\Theta)$ bude maksimalno. Tako stvorena veza između Θ i $(x_1,\ldots,x_n)$ definira estimator Y_n za parametar Θ.

Ako je X kontinuirana slučajna varijabla s pripadnom funkcijom gustoće f koja ovisi o parametru Θ, estimator se za Θ određuje iz zahtjeva da $L(\Theta) = f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)$ poprimi maksimalnu vrijednost. Veza između Θ i $(x_1,\ldots,x_n)$ dobiva se iz jednadžbe $\partial L(\Theta)/\partial\Theta = 0$. Za tako određeni estimator Y_n kaže se da je dobiven metodom maksimalne vjerojatnosti i naziva se *ML-estimator* (prema engl. *maximum likelihood*).

Da bi se, npr., našao ML-estimator za parametar $\Theta = p$ u binomnoj razdiobi $\mathcal{B}(N,p)$, najprije se nađe funkcija vjerodostojnosti

$$L(p) = \binom{N}{x_1}\cdots\binom{N}{x_n} p^{\sum_i x_i}(1-p)^{nN - \sum_i x_i}. \tag{35}$$

Sređivanjem jednadžbe $\frac{\partial L(p)}{\partial p} = 0$ dobiva se jednadžba

$$\sum_{i=1} x_i - pNn = 0, \tag{36}$$

odnosno $p = \bar{x}/N$. Prema tome je statistika $Y_n = \bar{X}/N$ ML-estimator za parametar p u $\mathcal{B}(N,p)$. Pretpostavlja se, dakako, da je N poznato.

Budući da je funkcija gustoće za $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{37}$$

pripadna je funkcija vjerodostojnosti

$$L(\mu) = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \mu)^2\right]. \tag{38}$$

Sređivanjem jednadžbe $\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu} = 0$ dobiva se jednadžba

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0, \tag{39}$$

odnosno

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \tag{40}$$

tako da je statistika $\bar{X}$ (aritmetička sredina slučajnog uzorka) ML-estimator za parametar μ u $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Ako je Y_n estimator za parametar Θ dobiven metodom maksimalne vjerojatnosti i ako je $\hat{\Theta} = g(\Theta)$, gdje je g određena funkcija, onda je i $\hat{Y}_n = g(Y_n)$ ML-estimator za $\hat{\Theta}$.

Metoda momenata sastoji se u tome da se teorijski izraz za neki moment, npr., ishodišni moment prvog reda (očekivanje), slučajne varijable X, koji sadrži nepoznati parametar Θ, izjednači s izračunanom vrijednošću pripadnog momenta uzorka. Time se uspostavlja veza između Θ i $(x_1, \ldots, x_n)$, što u načelu omogućuje da se dobije estimator za parametar Θ.

Npr. teorijski izraz za očekivanje u eksponencijalnoj razdiobi $\mathscr{E}x(a)$, $a > 0$, jest $1/a$, pa iz jednadžbe $1/a = \bar{X}$ proizlazi da je $a = 1/\bar{X}$. Prema tome statistika $Y_n = 1/\bar{X}$ jest estimator za parametar a u $\mathscr{E}x(a)$.

Da bi se dobili estimatori za nepoznate parametre N i p u binomnoj razdiobi $\mathscr{B}(N, p)$, treba izjednačiti teorijski izraz za očekivanje Np sa $\bar{X}$ i teorijski izraz za disperziju $Np(1-p)$ sa M_2. Iz sustava jednadžbi $Np = \bar{X}$, $Np(1-p) = M_2$ dobiva se $p = 1 - (M_2/\bar{X})$ i $N = \bar{X}^2/(\bar{X} - M_2)$, tako da je statistika $\bar{X}^2/(\bar{X} - M_2)$ estimator za parametar N, a statistika $1 - (M_2/\bar{X})$ estimator za parametar p binomne razdiobe po metodi momenata.

Bayesova metoda definiranja estimatora temelji se na pretpostavci da opažač već ima apriornu vjerojatnosnu razdiobu parametra Θ, obično utvrđenu subjektivno. Parametar se Θ tretira, dakle, kao slučajna varijabla s poznatom razdiobom. Pretpostavlja se da opažač raspolaže slučajnim uzorkom $(X_1, \ldots, X_n)$, pa se može promatrati slučajni $(n+1)$-člani vektor $(\Theta, X_1, \ldots, X_n)$ i uvjetno očekivanje $y_n = \mathrm{E}[\Theta/ /(x_1, \ldots, x_n)]$ slučajne varijable Θ, pod uvjetom da je poznata vrijednost $(x_1, \ldots, x_n)$ slučajnog uzorka $(X_1, \ldots, X_n)$. Broj y_n uzima se kao vrijednost estimatora Y_n kojim se prema Bayesovoj metodi procjenjuje nepoznati parametar Θ.

Najvažnija svojstva estimatora. Da bi se istakla svojstva estimatora na temelju kojih se oni mogu međusobno uspoređivati, definiraju se neka poželjna svojstva estimatora.

Ako je $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(|Y_n - \Theta| \geqq \varepsilon) = 0$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$, kaže se da je Y_n *konzistentni estimator* za parametar Θ.

Estimatori dobiveni metodom maksimalne vjerojatnosti konzistentni su estimatori.

Ako je $\mathrm{E}[Y_n] = \Theta$, kaže se da je Y_n *nepristrani* (*centrirani*) *estimator* za parametar Θ.

Ako su $Y_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ i $Z_n = g(X_1, \ldots, X_n)$ dva nepristrana estimatora za parametar Θ, a $\mathrm{D}[Y_n] < \mathrm{D}[Z_n]$, kaže se da je Y_n *efikasniji* estimator od Z_n.

Ako u skupu svih nepristranih estimatora za parametar Θ postoji estimator s najmanjom disperzijom, on se naziva *najefikasniji* estimator za parametar Θ.

Ako je X diskretna slučajna varijabla sa skupom vrijednosti $\mathscr{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ kojima vjerojatnosti ovise o parametru Θ tako da je $\mathrm{P}(X = x_i) = p(x_i, \Theta)$, definira se

$$I(\Theta) = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln p(x_i, \Theta)\right]^2 p(x_i, \Theta), \tag{41}$$

odnosno ako je X kontinuirana slučajna varijabla s pripadnom funkcijom gustoće u kojoj se pojavljuje parametar Θ tako da je $f(x) = f(x, \Theta)$, definira se

$$I(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln f(x, \Theta)\right]^2 f(x, \Theta) \mathrm{d}x. \tag{42}$$

Veličina $I(\Theta)$ naziva se *Fisherova informacija*.

Ako je Y_n konzistentni i nepristrani estimator, onda vrijedi *Rao-Cramerova nejednakost*

$$\mathrm{D}[Y_n] \geqq \frac{1}{n I(\Theta)}. \tag{43}$$

Ako je Y_n^* dobiven metodom maksimalne vjerojatnosti kao jedino rješenje jednadžbe $\dfrac{\partial L(\Theta)}{\partial \Theta} = 0$, tada je

$$\mathrm{D}[Y_n^*] = \frac{1}{n I(\Theta)}, \tag{44}$$

tj. Y_n^* je najefikasniji estimator za parametar Θ.

Metodom maksimalne vjerojatnosti dobivaju se, redovito, najefikasniji estimatori.

Omjer $e(Y_n) = \mathrm{D}[Y_n^*]/\mathrm{D}[Y_n]$ naziva se *efikasnost* estimatora Y_n. Pri tome je $0 \leqq e(Y_n) \leqq 1$ i za najefikasniji je estimator $e(Y_n^*) = 1$. Ako postoji $\lim\limits_{n \to \infty} e(Y_n) = e_0 (0 \leqq e_0 \leqq 1)$, broj se e_0 zove *asimptotska efikasnost* estimatora Y_n. Ako je $e_0 = 1$, kaže se da je Y_n *asimptotski efikasan* estimator za parametar Θ. Ako je $\mathrm{E}[Y_n] = \Theta + b_n(\Theta)$ i $b_n(\Theta) \neq 0$, kaže se da je $b_n(\Theta)$ *pristranost* estimatora Y_n. Ako je $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_n(\Theta)}{\sqrt{\mathrm{E}[(Y_n - \Theta)^2]}} = 0$, kaže se da je estimator Y_n *asimptotski relativno nepristran*.

Ako slučajnoj varijabli $(Y_n - \Theta)/\sqrt{\mathrm{E}[(Y_n - \Theta)^2]}$ asimptotski $(n \to \infty)$ pripada standardna normalna razdioba $\mathscr{N}(0,1)$, kaže se da je Y_n *asimptotski normalan estimator* za parametar Θ.

Uz neke dosta općenite uvjete estimator dobiven metodom maksimalne vjerojatnosti asimptotski je relativno nepristran i asimptotski normalan estimator.

Primjeri estimatora:

1) Statistika $Q_n(A)$ (relativna frekvencija događaja A) jest konzistentan, nepristran, najefikasniji i asimptotski normalan estimator za vjerojatnost $\mathrm{P}(A)$ događaja A.

2) Aritmetička je sredina uzorka $\bar{X}$ konzistentan, nepristran, najefikasniji i asimptotski normalan estimator za očekivanje $\mathrm{E}[X]$.

3) Korigirana je disperzija uzorka $\bar{S}^2$ konzistentan, nepristran, asimptotski normalan i asimptotski efikasan estimator za disperziju $\mathrm{D}[X]$.

4) Ishodišni moment r-tog reda A_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ uzorka konzistentan je, nepristran i asimptotski normalan estimator za ishodišni moment r-tog reda α_r. Centralni moment r-tog reda M_r $(r = 2, 3, \ldots)$ uzorka konzistentan je, ali ne i nepristran, i asimptotski normalan estimator za teorijski centralni moment r-tog reda μ_r. Da bi se dobio nepristrani estimator za μ_2, treba uzeti statistiku $nM_2/(n-1)$, da bi se dobio nepristrani estimator za μ_3, treba uzeti statistiku

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} M_3, \tag{45}$$

a da bi se dobio nepristrani estimator za μ_4, treba uzeti statistiku

$$\frac{n(n^2 - 2n + 3) M_4 - 3n(2n-3) M_2^2}{(n-1)(n-2)(n-3)}. \tag{46}$$

5) Kvantil uzorka $V(p)$ uz određene je uvjete konzistentan i asimptotski normalan estimator za teorijski kvantil x_p.

Intervali povjerenja. Neka je γ $(0 < \gamma < 1)$ zadani broj, Y_n estimator za nepoznati parametar Θ, a $G_1 = G_1(Y_n, \gamma)$ i $G_2 = G_2(Y_n, \gamma)$ su zadane funkcije, pri čemu vrijedi:

$$\mathrm{P}(G_1 \leqq \Theta \leqq G_2) \geqq \gamma, \qquad \Theta \in T, \tag{47}$$

tada se interval $[G_1, G_2]$ sa slučajnim rubovima G_1 i G_2 naziva *interval povjerenja pouzdanosti* γ za parametar Θ. Ako se, naime, puno puta ponovi niz $(x_1, \ldots, x_n)$ mjerenja slučajne varijable X i za svaki taj niz izračuna vrijednost y_n estimatora Y_n, te pripadni rubovi $g_1 = G_1(y_n, \gamma)$ i $g_2 = G_2(Y_n, \gamma)$ intervala povjerenja, tada će se bar u približno $100\,\gamma\%$ slučajeva dobiti interval koji sadrži (pokriva) parametar Θ.

Očito je da interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar Θ nije jednoznačno određen. Težnja je da se odabere takav estimator Y_n i funkcije G_1 i G_2 pomoću kojih se, uz zadani γ, dobiva najuži interval povjerenja.

Ako je Y_n asimptotski normalan i asimptotski relativno nepristran estimator za parametar Θ, onda za velike uzorke $(n > 30)$ približno vrijedi

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}[Y_n] - z_\gamma \sqrt{\mathrm{D}[Y_n]} \leqq Y_n \leqq \mathrm{E}[Y_n] + z_\gamma \sqrt{\mathrm{D}[Y_n]}) \geqq \gamma, \tag{48}$$

gdje je $z_\gamma = \Phi^{-1}[(1+\gamma)/2]$, a Φ je funkcija razdiobe za $\mathscr{N}(0,1)$. $\mathrm{E}[Y_n]$ i $\mathrm{D}[Y_n]$ redovito ovise o Θ, pa ako se nejednadžbe

$$\mathrm{E}[Y_n] - z_\gamma \sqrt{\mathrm{D}[Y_n]} \leqq Y_n \tag{49a}$$

$$\mathrm{E}[Y_n] + z_\gamma \sqrt{\mathrm{D}[Y_n]} \geqq Y_n \tag{49b}$$

riješe po Θ, dobivaju se nejednadžbe oblika

$$\Theta \geqq G_1(Y_n, \gamma), \tag{50a}$$

$$\Theta \leqq G_2(Y_n, \gamma), \tag{50b}$$

kojima su definirani rubovi intervala povjerenja za parametar Θ.

Bez obzira na veličinu (n) uzorka i bez pretpostavke o asimptotskoj normalnosti estimatora Y_n mogu se, na temelju Čebiševljeve nejednakosti, dobiti rubovi intervala povjerenja rješenjem po Θ nejednadžbi:

$$\mathrm{E}[Y_n] - \sqrt{\frac{\mathrm{D}[Y_n]}{1-\gamma}} \leqq Y_n, \tag{51a}$$

$$\mathrm{E}[Y_n] + \sqrt{\frac{\mathrm{D}[Y_n]}{1-\gamma}} \geqq Y_n, \tag{51b}$$

Intervali povjerenja pouzdanosti γ dobiveni na temelju Čebiševljeve nejednakosti redovito su puno širi od intervalâ povjerenja dobivenih na temelju asimptotske normalnosti.

Primjenjujući relativnu frekvenciju $Q_n(A) = Q_n$ kao estimator za vjerojatnost $\mathrm{P}(A) = p$, na temelju Čebiševljeve nejednakosti (51) dobiva se:

$$G_1(Q_n, \gamma) = Q_n - \frac{1}{2\sqrt{n(1-\gamma)}}, \tag{52a}$$

$$G_2(Q_n, \gamma) = Q_n + \frac{1}{2\sqrt{n(1-\gamma)}}, \tag{52b}$$

$$G_1(Q_n, \gamma) = \frac{Q_n + \frac{z_\gamma^2}{2n} - z_\gamma \sqrt{\frac{Q_n(1-Q_n)}{n} + \frac{z_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_\gamma^2}{n}} \tag{53a}$$

$$G_2(Q_n, \gamma) = \frac{Q_n + \frac{z_\gamma^2}{2n} + z_\gamma \sqrt{\frac{Q_n(1-Q_n)}{n} + \frac{z_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_\gamma^2}{n}} \tag{53b}$$

Ako je n dovoljno veliko ($n > 100$), u desnim se stranama izraza (53) mogu zanemariti članovi $z_\gamma^2/(2n)$ i $z_\gamma^2/(4n^2)$, pa približno vrijedi:

$$G_1(Q_n, \gamma) = Q_n - z_\gamma \sqrt{\frac{Q_n(1-Q_n)}{n}}, \tag{54a}$$

$$G_2(Q_n, \gamma) = Q_n + z_\gamma \sqrt{\frac{Q_n(1-Q_n)}{n}}. \tag{54b}$$

Da bi se dobio interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar μ u $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, uz pretpostavku da je σ poznato, primjenjuje se činjenica da statistika $\bar{X}$ ima $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. Dobiva se

$$G_1(\bar{X}, \gamma) = \bar{X} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{55a}$$

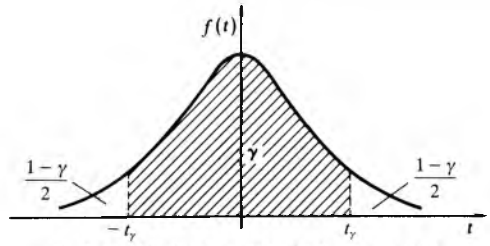
$$G_2(\bar{X}, \gamma) = \bar{X} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{55b}$$

Ako su nepoznata oba parametra μ i σ, definiraju se statistika $T = (x-\mu)\sqrt{n}/S$ koja ima *Studentovu razdiobu* $t(n-1)$ sa $n-1$ stupnjem slobode i koja se za $n > 30$ aproksimira sa $\mathcal{N}(0,1)$, te statistika $U = (n-1)\bar{S}^2/\sigma^2$, koja ima *hi-kvadratnu razdiobu* $\chi^2(n-1)$ sa $n-1$ stupnjem slobode i koja se za $n > 30$ aproksimira sa $\mathcal{N}(n-1, 2(n-1))$. Funkcije gustoće tih razdioba prikazane su na sl. 7 i 8. Interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar μ ima rubove

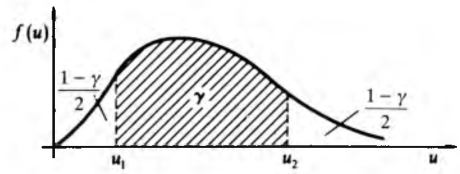
$$G_1(\bar{X}, \bar{S}, \gamma) = \bar{X} - t_\gamma \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}, \tag{56a}$$

$$G_2(\bar{X}, \bar{S}, \gamma) = \bar{X} + t_\gamma \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}, \tag{56b}$$

gdje je t_γ određeno iz uvjeta $\mathrm{P}(-t_\gamma \leqq T \leqq t_\gamma) = \gamma$. Vrijednosti t_γ u ovisnosti o γ i n mogu se naći u odgovarajućim tablicama.



Sl. 7. Graf funkcije gustoće Studentove razdiobe



Sl. 8. Graf funkcije gustoće hi-kvadratne razdiobe

Interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar σ^2 ima rubove:

$$G_1(\bar{S}, \gamma) = \frac{n-1}{u_2}\bar{S}^2, \tag{57a}$$

$$G_2(\bar{S}, \gamma) = \frac{n-1}{u_1}\bar{S}^2, \tag{57b}$$

gdje je u_1 određeno iz uvjeta $\mathrm{P}(U < u_1) = (1-\gamma)/2$, a u_2 iz uvjeta $\mathrm{P}(U > u_2) = (1-\gamma)/2$. Vrijednosti u_1 i u_2 u ovisnosti o γ i n također se mogu naći u odgovarajućim tablicama.

Da bi se dobio interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar a ($a > 0$) uniformne razdiobe $\mathcal{U}(0, a)$, za estimator se uzima statistika $Y_n = \frac{(n+1)}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$, pri čemu vrijedi

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}(Y_n \leqq ay) = \begin{cases} 0 & , \text{ za } y < 0 \\ \left[\dfrac{ny}{n+1}\right]^n, & za\, 0 \leqq y \leqq 1 + \dfrac{1}{n}, \\ 1 & , \text{ za } y > 1 + \dfrac{1}{n} \end{cases} \\
\mathrm{E}[Y_n] = a, \\
\mathrm{D}[Y_n] = \frac{a^2}{n(n+2)}.
\end{gathered} \tag{58}$$

Iz (58) proizlazi da interval povjerenja pouzdanosti γ za parametar a ima rubove

$$G_1(Y_n, \gamma) = \frac{n}{n+1} Y_n, \tag{59a}$$

$$G_2(Y_n, \gamma) = \frac{n Y_n}{(n+1)\sqrt[n]{1-\gamma}}. \tag{59b}$$

TESTIRANJE STATISTIČKIH HIPOTEZA

Svaka nekontradiktorna izjava (istinita ili neistinita) o razdiobi ili parametrima slučajne varijable (slučajnog vektora) naziva se *statistička hipoteza*. Odluka o prihvaćanju ili odbacivanju hipoteze H, koja se odnosi na slučajnu varijablu X donosi se na osnovi vrijednosti $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ slučajnog uzorka $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, tj. na temelju n nezavisnih mjerenja slučajne varijable X. Ako vrijednost $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$) slučajnog uzorka pripada zadanom skupu C ($C \subseteq \boldsymbol{R}^n$), koji se naziva *kritično područje*, hipoteza se H odbacuje, jer se smatra da izmjerene vrijednosti proturječe pretpostavljenoj hipotezi H.

Postupak testiranja statističke hipoteze H, ili kraće *test*, definiran je ako je definirano kritično područje C. Govori se o testu C kojim se testira hipoteza H, pri čemu se H prihvaća ako je $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \setminus C$, odnosno H se ne prihvaća ako je $\boldsymbol{x} \in C$.

Parametarski test. Ako se hipoteza H odnosi na određeni parametar $\Theta (\Theta \in T)$ slučajne varijable X i ako hipoteza H glasi $\Theta \in T_0$ $(T_0 \subseteq T, T_0 \neq \emptyset)$, govori se o parametarskom problemu testiranja hipoteze ili, kraće, o *parametarskom testu.* Piše se $H: \Theta \in T_0$ i govori o hipotezi da parametar pripada određenom podskupu T_0 skupa T svih dopuštenih vrijednosti parametra Θ.

Skup T općenito je podskup od $\boldsymbol{R}^m$, tj. pretpostavlja se da promatrana razdioba ovisi općenito o m parametara. Posebno, ako je $T_0 = \{t_0\}$, tj. ako je T_0 jednočlan skup, piše se $H_0: \Theta = t_0$ i tada se H_0 naziva *jednostavna hipoteza.* Ako T_0 ima više od jednog elementa, govori se o *složenoj hipotezi.*

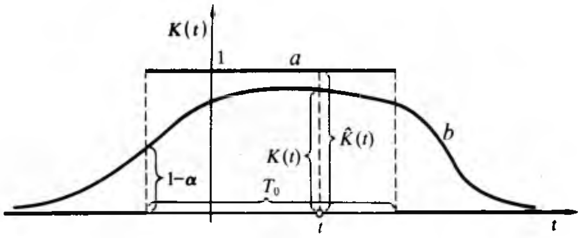
Operativna karakteristika (OC) testa je funkcija $K: T \to \boldsymbol{R}$ definirana izrazom

$$K(t) = \mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n \setminus C, \Theta = t) = 1 - \mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in C, \Theta = t), \qquad t \in \Theta. \tag{60}$$

Ona ima, dakle, značenje vjerojatnosti prihvaćanja hipoteze kad parametar Θ ima vrijednost t. Idealna operativna karakteristika glasi

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t \in T_0 \\ 0 & \text{za } t \in T \setminus T_0 \end{cases}. \tag{61}$$

U testu s idealnom operativnom karakteristikom odluka o prihvaćanju istinite hipoteze, tj. kada je zaista $\Theta \in T_0$, donosi se s vjerojatnošću jedan (sl. 9).



Sl. 9. Graf idealne (a) i neidealne (b) operativne karakteristike

Ako operativna karakteristika testa zadovoljava uvjet:

$$\min_{t \in T_0} K(t) \geqq 1 - \alpha, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1, \tag{62}$$

kaže se da test ima *razinu značajnosti* (*signifikantnosti*) α. To znači da vjerojatnost prihvaćanja hipoteze nije manja od $1 - \alpha$ ni za koju vrijednost parametra iz skupa T_0, tj. kada je hipoteza istinita, odnosno da vjerojatnost odbacivanja hipoteze nije veća od α.

Prilikom konstrukcije testa obično se najprije zadaje razina značajnosti α, a zatim se određuje pripadno kritično područje C. Glavni je problem kako konstruirati tzv. *dobre testove,* odnosno kako definirati pripadno kritično područje C za zadanu razinu značajnosti α. Za veoma idealiziranu situaciju odgovor je sadržan u tzv. *Neyman-Pearsonovoj lemi.* Pretpostavlja se, naime, da parametar Θ može poprimiti samo dvije različite vrijednosti t_0 i t_1 $(T = \{t_0, t_1\})$, pa treba konstruirati test za testiranje jednostavne hipoteze $H_0: \Theta = t_0$.

Za diskretnu slučajnu varijablu X kojoj vjerojatnosti ovise o parametru Θ uvodi se oznaka $\mathrm{P}(x_i, t) = \mathrm{P}(X = x_i, \Theta = t)$, $i = 1, \ldots, n$, pa se definira

$$L(\boldsymbol{x}, t,) = \mathrm{P}(x_1, t) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(x_n, t), \qquad t \in T, \tag{63}$$

a za kontinuiranu slučajnu varijablu X s pripadnom funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(x, \Theta)$ definira se

$$L(\boldsymbol{x}, t) = f(x_1, t) \cdot \ldots \cdot f(x_n, t), \qquad t \in T. \tag{64}$$

Uzme li se za kritično područje skup

$$C = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \frac{L(\boldsymbol{x}, t_0)}{L(\boldsymbol{x}, t_1)} < c \right\}, \tag{65}$$

gdje je broj $c > 0$ određen tako da vrijedi

$$\mathrm{P}((X_1, \ldots, X_n) \in C, \Theta = t_0) = \alpha, \tag{66}$$

tada za svako drugo kritično područje $C' \subseteq \boldsymbol{R}^n$ vrijedi

$$\mathrm{P}((X_1, \ldots, X_n) \in C', \Theta = t_1) \leqq \mathrm{P}((X_1, \ldots, X_n) \in C, \Theta = t_1). \tag{67}$$

Time je rečeno da je test C najbolji test razine značajnosti α za hipotezu H_0, jer je vjerojatnost odbacivanja hipoteze H_0 kad ona nije istinita $(\Theta = t_1)$ veća od vjerojatnosti odbacivanja u bilo kojem drugom testu C'.

Ako je T proizvoljan skup s više od dva elementa, može se uočiti $t_0 \in T$ i prema Neyman-Pearsonovoj lemi postoji najbolji test razine značajnosti α za jednostavnu hipotezu $H_0: \Theta = t_0$, prema jednostavnoj hipotezi $\hat{H}: \Theta = t\ (t \in T \setminus \{t_0\})$. Kaže se da je test C *jednoliko* (*uniformno*) *najjači test* razine značajnosti α za jednostavnu hipotezu $H_0: \Theta = t_0$ s obzirom na složenu hipotezu $\hat{H}: \Theta \in T \setminus \{t_0\}$, ako je test C najbolji s obzirom na svaku jednostavnu hipotezu $\hat{H}$ razine značajnosti α. Jednoliko najjači test ne postoji uvijek.

Neka je $H: \Theta \in T_0 (T_0 \subseteq T)$ proizvoljna hipoteza, tada se broj

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{L(\boldsymbol{x}, t_0)}{L(\boldsymbol{x}, t_1)}, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \tag{68}$$

gdje je $L(\boldsymbol{x}, t_0) = \max\limits_{t \in T_0} L(\boldsymbol{x}, t)$ i $L(\boldsymbol{x}, t_1) = \max\limits_{t \in T} L(\boldsymbol{x}, t)$, naziva *omjer vjerodostojnosti* (engl. *likelihood ratio*) hipoteze H kad se dobila vrijednost $\boldsymbol{x}$ slučajnog uzorka $\boldsymbol{X}$. Odabere li se realni broj c $(0 < c \leqq 1)$ i definira kritično područje C izrazom

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \lambda(\boldsymbol{x}) < c\}, \tag{69}$$

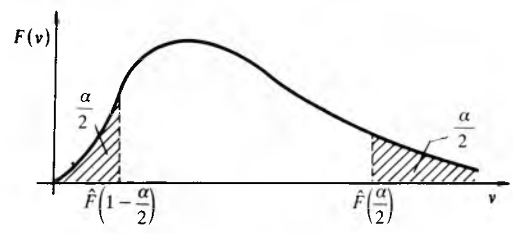
test C se naziva *LR-test.*

Očito je $\lambda(\boldsymbol{x}) \leqq 1$. Ako je $t_0 = t_1 \in T_0$, onda je $\lambda(\boldsymbol{x}) = 1$. To znači da se maksimum funkcije $L(\boldsymbol{x}, t)$ postiže na točki iz skupa T_0, tj. dobivena vrijednost $\boldsymbol{x}$ slučajnog uzorka $\boldsymbol{X}$ ima maksimalnu vjerojatnost kad je istinita hipoteza H. Zato se hipoteza H prihvaća ako je $\lambda(\boldsymbol{x})$ blizu jedinice, a odbacuje se ako je $\lambda(\boldsymbol{x})$ manji od izabrane kritične vrijednosti c. Uz fiksirano $\Theta = t$, $\lambda(\boldsymbol{X}) = \lambda(X_1, \ldots, X_n)$ je određena statistika, tj. $\lambda(\boldsymbol{X})$ je slučajna varijabla i pripada joj funkcija razdiobe $F_n(\lambda, t) = \mathrm{P}(\lambda(\boldsymbol{X}) \leqq \lambda, \Theta = t)$. LR-test imat će razinu značajnosti α ako vrijedi da je

$$\max_{t \in T_0} \mathrm{P}(\lambda(\boldsymbol{X}) < c, \Theta = t) = \max_{t \in T_0} F_n(c, t) \leqq \alpha. \tag{70}$$

Odluka o prihvaćanju ili odbacivanju hipoteze H u LR-testu donosi se na temelju vrijednosti $\lambda(\boldsymbol{x})$ statistike $\lambda(\boldsymbol{X})$, tj. kritično područje može se interpretirati i kao dio skupa realnih brojeva (brojevnog pravca).

Hipoteze o parametrima normalne razdiobe. Ako se hipoteza odnosi na parametre μ i σ normalne razdiobe $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, redovito će LR-test biti jednoliko najjači test. Uvjet $\lambda(\boldsymbol{X}) < c$, kojim se definira kritično područje, izražava se pomoću statistika $\bar{X}$ i $\bar{S}^2$. Granice kritičnog područja, tj. rubne točke pripadnih intervala na brojevnom pravcu, određuju se na temelju vrijednosti funkcije $\hat{F}(\alpha) = \mathrm{F}^{-1}(1 - \alpha)$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, gdje je F funkcija razdiobe pripadne statistike izvedena uz pretpostavku da je hipoteza istinita. Vrijednosti $\hat{F}(\alpha)$ za najvažnije funkcije razdiobe mogu se naći u odgovarajućim tablicama. U tablicama 5, 6 i 7 navedene su u praksi najčešće hipoteze, te njihove test-statistike i pripadna kritična područja (iscrtkani dio brojevnog pravca).



Sl. 10. Graf funkcije gustoće $\mathcal{F}$ razdiobe

Tablica 5
HIPOTEZE O SLUČAJNOJ VARIJABLI $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Hipoteza		Test-statistika	Razdioba test-statistike	Kritično područje razine značajnosti α
σ poznato, $\mu_0 \in \mathbf{R}$	$\mu = \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$	$\mathcal{N}(0, 1)$	$-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu \leqq \mu_0$			0 $\hat{\Phi}(\alpha)$
	$\mu \geqq \mu_0$			$-\hat{\Phi}(\alpha)$ 0
σ nije poznato, $\mu_0 \in \mathbf{R}$	$\mu = \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\bar{S}} \sqrt{n}$	$t(n-1)$	$-\hat{G}_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{G}_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu \leqq \mu_0$			0 $\hat{G}_{n-1}(\alpha)$
	$\mu \geqq \mu_0$			$-\hat{G}_{n-1}(\alpha)$ 0
$\sigma_0 > 0$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$U = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} \bar{S}^2$	$\chi^2(n-1)$	0 $\hat{H}_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{H}_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\sigma^2 \leqq \sigma_0^2$			0 $\hat{H}_{n-1}(\alpha)$
	$\sigma^2 \geqq \sigma_0^2$			0 $\hat{H}_{n-1}(1-\alpha)$

Opaska: Funkcija $\hat{\Phi}$ odnosi se na standardnu normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, 1)$, funkcija $\hat{G}_{n-1}$ na Studentovu, a funkcija $\hat{H}_{n-1}$ na hi-kvadratnu razdiobu s $n-1$ stupnjem slobode.

Neki neparametarski testovi. *Pearsonovim testom* χ^2 (hi-kvadrat, χ^2-test) provjerava se hipoteza o suglasnosti pretpostavljenih vjerojatnosti $p_j = \mathrm{P}(A_j)$, $j = 1, \ldots, r$, gdje $A_1, \ldots, A_r$ čine potpunu familiju događaja, i pripadnih relativnih frekvencija $Q_n(A_j) = v_n(A_j)/n$ dobivenih na n-članom slučajnom uzorku. χ^2-test temelji se na činjenici da statistika:

$$Y_n = n \sum_{j=1}^{r} \frac{[Q_n(A_j) - p_j]^2}{p_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{[v_n(A_j) - np_j]^2}{np_j}, \qquad (71)$$

uz pretpostavku da je hipoteza istinita, ima asimptotski ($n \to \infty$) hi-kvadratnu razdiobu $\chi^2(m)$. Ako nema drugih uvjeta osim $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$, onda je $m = r - 1$. Kritično je područje razine značajnosti α χ^2-testa interval $[\hat{H}_m(\alpha), \infty\rangle$.

χ^2-test najčešće se primjenjuje na testiranje hipoteze gdje izmjereni podaci, prikazani tako da je provedeno grupiranje u r razreda (tabl. 3), potječu od pretpostavljene teorijske razdiobe s pripadnom funkcijom razdiobe F. Tada je

$$p_j = F(a_j) - F(a_{j-1}), \ j = 1, \ldots, r-1, \ a_0 = -\infty, \ a_r = \infty.$$

Za praktičnu primjenu hi-kvadrat testa mora biti n dovoljno veliko (bar 50) i razredi $[a_{j-1}, a_j\rangle$ tako određeni da za svaki razred vrijedi $np_j > 10$. Ako teorijska razdioba ovisi o s parametara koji se procjenjuju na temelju istih podataka tako da se uzimaju pripadne procjene maksimalne vjerojatnosti, tada je broj stupnjeva slobode $m = r - s - 1$.

Kolmogorovljev test (*K-test*) služi za testiranje hipoteze o suglasnosti pretpostavljene teorijske kontinuirane razdiobe (F) i empirijske razdiobe (F_n) izmjerenih podataka. On se temelji na statistici

$$Y_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)|, \qquad (72)$$

kojoj, uz pretpostavku da je hipoteza istinita, asimptotski pripada tzv. *Kolmogorovljeva razdioba* (*K-razdioba*) s funkcijom razdiobe

Tablica 6
HIPOTEZE O ODNOSU DVIJU NEZAVISNIH SLUČAJNIH VARIJABLI $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ NA TEMELJU DVAJU SLUČAJNIH UZORAKA VELIČINE m I n

Hipoteza		Test-statistika	Razdioba test-statistike	Kritično područje razine značajnosti α
σ_1 i σ_2 poznati	$\mu_1 = \mu_2$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$	$-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu_1 \leqq \mu_2$			0 $\hat{\Phi}(\alpha)$
	$\mu_1 \geqq \mu_2$			$-\hat{\Phi}(\alpha)$ 0
$\sigma_1 = \sigma_2$ nisu poznati	$\mu_1 = \mu_2$	$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\bar{S}\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$ $\left(\bar{S}^2 = \dfrac{(m-1)\bar{S}_x^2 + (n-1)\bar{S}_y^2}{m+n-2}\right)$	$t(r)$ $(r = m + n - 2)$	$-\hat{G}_r\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{G}_r\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu_1 \leqq \mu_2$			0 $\hat{G}_r(\alpha)$
	$\mu_1 \geqq \mu_2$			$-\hat{G}_r(\alpha)$ 0
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$V = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$	$\mathcal{F}(m-1, n-1)$	0 $\hat{F}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{F}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
	$\sigma_1^2 \leqq \sigma_2^2$			0 $\hat{F}(\alpha)$
	$\sigma_1^2 \geqq \sigma_2^2$			0 $\hat{F}(1-\alpha)$

Opaska: Oznaka $\mathcal{F}(m-1, n-1)$ odnosi se na tzv. *F-razdiobu* (Fisherovu razdiobu) s parametrima $m-1$ i $n-1$ (sl. 10).

Tablica 7
HIPOTEZE O KOEFICIJENTU KORELACIJE ϱ DVODIMENZIONALNE NORMALNE RAZDIOBE

Hipoteza	*Test-statistika*	*Razdioba test-statistike*	*Kritično područje razine značajnosti α*
$\varrho=0$	$T=\dfrac{R_n}{\sqrt{1-R_n^2}}\sqrt{n-2}$ $\left(R_n=\dfrac{1}{(n-1)\,S_x\,S_y}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\,Y_i-\bar{X}\,\bar{Y}\right]\right)$	$t(n-2)$	$-\hat{G}_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{G}_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\varrho\leqq 0$			0 $\hat{G}_{n-2}(\alpha)$
$\varrho\geqq 0$			$-\hat{G}_{n-2}(\alpha)$ 0
$\varrho=\varrho_0$ $(-1<\varrho_0<1)$	$Z=\dfrac{n-3}{2}\left[\ln\dfrac{(1+R_n)\,(1-\varrho_0)}{(1-R_n)\,(1+\varrho_0)}-\dfrac{\varrho_0}{n-1}\right]$ $(n>10)$	$\mathcal{N}(0,\,1)$	$-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 0 $\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\varrho\leqq\varrho_0$			0 $\hat{\Phi}(\alpha)$
$\varrho\geqq\varrho_0$			$-\hat{\Phi}(\alpha)$ 0

Opaska: Pretpostavlja se da je zadana vrijednost $((x_1,\,y_1),\,\ldots,\,(x_n,\,y_n))$ slučajnog uzorka $((X_1,\,Y_1),\,\ldots,\,(X_n,\,Y_n))$ na temelju koje se računa vrijednost r_n statistike R_n (koeficijent korelacije uzorka).

$$K(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\exp(-2k^2x^2). \tag{73}$$

Vrijednosti funkcije $\hat{K}(\alpha)=K^{-1}(1-\alpha)$ nalaze se u odgovarajućim tablicama. Kritično je područje K-testa razine značajnosti α interval $\hat{K}(\alpha),\infty\rangle$.

K-test zahtijeva veoma mnogo (n) mjerenja. Tako, npr., za razlučivanje normalne i njoj pripadne dvostruko eksponencijalne razdiobe, uz razinu značajnosti $\alpha=0{,}1$, treba da je $n>500$.

Test nezavisnosti služi za provjeravanje hipoteza o nezavisnosti slučajnih varijabla X i Y. Na temelju izmjerenih podataka prikazanih kontingencijskom tablicom (tabl. 4) definira se statistika

$$Y_n=n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{v_{ij}^2}{v_i\mu_j}-1\right), \tag{74}$$

koja, uz pretpostavku da je hipoteza istinita, asimptotski ima hi-kvadratnu razdiobu $\chi^2(m)$, gdje je $m=(r-1)(s-1)$. U praksi se primjenjuje za $v_{ij}>10$. Kritično je područje interval $[\hat{H}_m(\alpha),\infty\rangle$.

Test predznaka provjerava hipotezu o nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti kontinuiranih slučajnih varijabla X i Y. Na temelju niza mjerenja $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ formira se niz $v_1=x_1-y_1,\ldots,v_n=x_n-y_n$. Statistika

$$Y_n=\{\text{broj pozitivnih članova u nizu } v_1,\ldots,v_n\} \tag{75}$$

ima, uz pretpostavku da je hipoteza istinita, binomnu razdiobu $\mathcal{B}(n,1/2)$. Ako je vrijednost y_n statistike Y_n prevelika, hipoteza se odbacuje. Kritično je područje interval $[\hat{B}(\alpha),\infty\rangle$, gdje je $\hat{B}(\alpha)$ najmanji cijeli broj k za koji vrijedi

$$2^{-n}\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\leqq\alpha. \tag{76}$$

Test predznaka upotrebljava se i za provjeru hipoteze o simetričnosti oko ishodišta kontinuirane razdiobe. Test predznaka ima slabu moć razlučivanja i zato zahtijeva mnogo mjerenja.

Test homogenosti služi za provjeru hipoteze da K nezavisnih slučajnih uzoraka $(X_1^{(k)},\ldots,X_{n_k}^{(k)})$, $k=1,\ldots,K$, pripada istoj razdiobi. Test se temelji na statistici:

$$Y=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\frac{(v_{jk}-n_kq_j)^2}{n_kq_j}, \tag{77}$$

gdje je v_{jk} frekvencija j-tog razreda $(j=1,\ldots,J)$ u k-tom slučajnom uzorku, a $q_j=(v_{j1}+\ldots+v_{jk})/(n_1+\ldots+n_k)$ relativna frekvencija j-tog razreda dobivena na temelju svih K slučajnih uzoraka. Vrijednost y statistike Y pokazuje »udaljenost« između opaženih frekvencija v_{jk} i procijenjenih frekvencija n_kq_j. Uz pretpostavku da je hipoteza istinita, statistika Y ima asimptotski hi-kvadratnu razdiobu $\chi^2(m)$ sa $m=(K-1)(J-1)$ stupnjeva slobode. Kritično je područje razine značajnosti α interval $[\hat{H}_m(\alpha),\infty\rangle$.

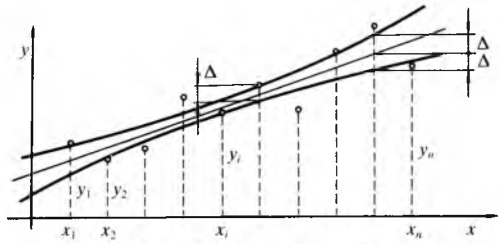
Regresijska analiza. U jednodimenzijskom regresijskom modelu pretpostavlja se da slučajni rezultati mjerenja (Y_i) ovise o neslučajnim vrijednostima (razinama) x_i nekog faktora i slučajnoj pogrešci $\mathcal{E}_i$. Matematički je zapis te ovisnosti

$$Y_i=f(x_i,\alpha,\beta,\ldots)+E_i,\qquad i=1,\ldots,n, \tag{78}$$

gdje su $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa $\mathrm{E}[\mathcal{E}_i]=0$ i $\mathrm{D}[\mathcal{E}_i]=\sigma^2$, a f je zadana funkcija s parametrima $\alpha,\beta,\ldots$. Izmjerena se vrijednost y_i interpretira kao zbroj vrijednosti $f(x_i,\alpha,\beta,\ldots)$ *regresijske funkcije* (*funkcije trenda*) i vrijednosti ε_i slučajne greške. Osnovni je problem da se na temelju niza mjerenja $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ procijene nepoznati parametri $\alpha,\beta,\ldots$ i σ^2, odnosno da se na temelju slučajnog uzorka $(x_1,Y_1),\ldots,(x_n,Y_n)$ definiraju pripadni estimatori. To će se postići tzv. *metodom najmanjih kvadrata,* gdje se zahtijeva da

$$q=\sum_{i=1}^{n}[(y_i-f(x_i,\alpha,\beta,\ldots)]^2 \tag{79}$$

bude minimalno.



Sl. 11. Jednodimenzijska linearna regresija

Rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0,\qquad\frac{\partial q}{\partial\beta}=0,\ldots \tag{80}$$

po nepoznanicama $\alpha,\beta,\ldots$ dobiva se rješenje $\alpha=a$, $\beta=b,\ldots$. Ako se još pretpostavi da su slučajne varijable $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n$

distribuirane po $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ i da je $f(x,\alpha,\beta)=\alpha+\beta x$, govori se o *linearnom regresijskom modelu* (sl. 11). Uvedu li se oznake

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \text{i} \quad s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \tag{81}$$

onda su

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\bar{x}}{s_x^2}(x_i-\bar{x})\right)Y_i, \tag{82}$$

$$B=\frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})Y_i, \tag{83}$$

$$S^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-(A+Bx_i))^2 \tag{84}$$

nepristrani estimatori za α, β i σ^2, a $\hat{Y}=A+Bx_i$ nepristrani je estimator za $\alpha+\beta x_i$. Slučajnoj varijabli A pripada normalna razdioba $\mathcal{N}(\alpha,(1+\bar{x}^2/s_x^2)\sigma^2/n)$, slučajnoj varijabli B normalna razdioba $\mathcal{N}(\beta,\sigma^2/(ns_x^2))$, a slučajnoj varijabli $(n-2)S^2/\sigma^2$ hi-kvadratna razdioba $\chi^2(n-2)$. Interval povjerenja pouzdanosti γ za nepoznatu vrijednost $\alpha+\beta x_i$ ima granice:

$$G_1=\hat{Y}-\Delta, \qquad G_2=\hat{Y}+\Delta,$$
$$\Delta=t_\gamma S\frac{\sqrt{n-2}}{n}\sqrt{1+\frac{(x_i-\bar{x})^2}{s_x^2}}. \tag{85}$$

Najmanje Δ postiže se za $x_i=\bar{x}$, a iz (85) vidi se također da je Δ to manje što je s_x^2 veće.

U *višedimenzionalnom linearnom regresijskom modelu* pretpostavlja se da je $Y_i=\beta_1x_i^{(1)}+\ldots+\beta_rx_i^{(r)}+\varepsilon_i$, $i=1,\ldots,n$, te da su $\beta_1,\ldots,\beta_r$ i σ^2 nepoznati parametri, a da su $x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(r)}$ brojčane vrijednosti faktora o kojima ovisi vrijednost y_i slučajne varijable Y_i. Osnovni je problem da se na temelju niza mjerenja $((x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(r)},y_i),\ i=1,\ldots,n)$ procijene nepoznati parametri. Matrični je oblik modela

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\beta+\varepsilon, \tag{86}$$

gdje je $\boldsymbol{Y}$ jednostupčana matrica s članovima Y_i, $\boldsymbol{X}$ matrica tipa $n\times r$ s članovima $x_i^{(j)}(j=1,\ldots,r)$, a ε jednostupčana matrica s članovima ε_i. Označi li se sa $\boldsymbol{C}$ kvadratna matrica reda r s članovima

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_k^{(i)}x_k^{(j)}, \tag{87}$$

pa ako je $\boldsymbol{C}$ regularna matrica, stavi se $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}^T$ ($\boldsymbol{X}^T$ je oznaka za transponiranu matricu), tada je

$$B_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}Y_k, \qquad j=1,\ldots,r \tag{88}$$

nepristrani estimator za parametar β_j (a_{jk} su članovi matrice $\boldsymbol{A}$). Slučajnom vektoru $(B_1,\ldots,B_r)$ pripada r-dimenzionalna normalna razdioba s korelacijskom matricom $\Gamma=\sigma^2\boldsymbol{C}^{-1}$.

Nepristrani je estimator za σ^2

$$S^2=\frac{1}{n-r}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-B_1x_i^{(1)}-\ldots-B_rx_i^{(r)})^2, \tag{89}$$

a slučajna varijabla $(n-r)S^2/\sigma^2$ ima hi-kvadratnu razdiobu $\chi^2(n-r)$. Nepristrani estimator za $\beta_1x_i^{(1)}+\ldots+\beta_rx_i^{(r)}$ jest $\hat{Y}B_1x_i^{(1)}+\ldots+B_rx_i^{(r)}$, a pripadni interval povjerenja pouzdanosti γ ima granice

$$G_1=\hat{Y}-\sqrt{rf_\gamma D[\hat{Y}]}, \text{ i } G_2=\hat{Y}+\sqrt{rf_\gamma D[\hat{Y}]}, \tag{90}$$

gdje je f_γ ona vrijednost Fisherove razdiobe $\mathcal{F}(r,n-r)$ za koju vrijedi $F(f_\gamma)=\gamma$. Te se vrijednosti mogu naći u odgovarajućim tablicama.

Model polinomske regresije $Y_i=\beta_1+\beta_2x_i+\beta_3x_i^2+\ldots+\beta_rx_i^{r-1}+\varepsilon_i$ može se svesti na model r-dimenzionalne ($r>2$) linearne regresije tako da se postavi da je $1=x_i^{(1)}$, $x_i=x_i^{(2)}$, $x_i^2=x_i^{(3)},\ldots,x_i^{r-1}=x_i^{(r)}$. Činjenica da statistika

$$\frac{n-r}{n-r'}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-B_1x_i^{(1)}-\ldots-B_rx_i^{(r)})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-B_1x_i^{(1)}-\ldots-B_{r'}x_i^{(r')})^2}-1\right] \tag{91}$$

ima Fisherovu razdiobu $\mathcal{F}(r-r',n-r)$ može se iskoristiti za testiranje hipoteze $\beta_{r'+1}=\ldots=\beta_r=0$ $(r'<r)$, tj. da $r-r'$ faktorâ nema bitnog utjecaja na rezultate mjerenja, odnosno da se zapravo radi o polinomskoj regresiji stupnja $r'<r$.

Analiza varijance. Za razliku od regresijske analize, pretpostavlja se da faktori imaju kvalitativnu karakteristiku, tako da je matematički model za *jednofaktorski linearni problem*

$$Y_{ij}=\mu+\mu_j+\varepsilon_{ij},\ j=1,\ldots,k,\ i=1,\ldots,n_j,\ k\geqq 2,\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j=0, \tag{92}$$

gdje su μ i μ_j realni brojevi, a ε_{ij} nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable po $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Pretpostavlja se, dakle, da je izmjerena vrijednost y_{ij} rezultat djelovanja fiksirane vrijednosti μ (zajednička sredina), određenog faktora (μ_j), koji ima k različitih razina i slučajne pogreške ε_{ij}.

Tablica 8
ZAPIS ZA n-ČLANI SLUČAJNI UZORAK

Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1k}
Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2k}
⋮	⋮	⋮⋮⋮	⋮
Y_{n_11}	Y_{n_22}	...	Y_{n_kk}

Osnovni je problem da se na temelju n-članog $(n=n_1+\ldots+n_k)$ slučajnog uzorka, koji se obično zapisuje u obliku tablice (tabl. 8), testira hipoteza o jednakosti efekata svih razina $(H:\mu_1=\ldots=\mu_k=0)$. U j-tom stupcu tablice ispisan je slučajni uzorak s n_j članova, koji odgovara rezultatima mjerenja pod djelovanjem j-te razine. Tablica općenito nije pravokutna, jer stupci ne moraju imati jednak broj redaka. Uvede li se oznaka za sredinu čitavog uzorka

$$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ij}, \tag{93}$$

za sredinu uzorka u j-toj razini

$$\bar{Y}_j=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ij}, \tag{94}$$

za rasipanje u čitavom uzorku

$$A=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y})^2, \tag{95}$$

za rasipanje unutar uzoraka

$$B=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_j)^2, \tag{96}$$

te za rasipanje sredina uzoraka

$$C=\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{Y}_j-\bar{Y})^2, \tag{97}$$

dobiva se

$$A=B+C, \qquad \mathrm{E}[B]=(n-k)\sigma^2,$$
$$\mathrm{E}[C]=(k-1)\sigma^2+\sum_{j=1}^{k}n_j\mu_j^2. \tag{98}$$

Uz pretpostavku da je hipoteza istinita, statistika $(n-k)C/(k-1)B$ ima Fisherovu razdiobu $\mathcal{F}(k-1,n-k)$, što se neposredno primjenjuje za određivanje kritičnog područja razine značajnosti α. Prevelika vrijednost te statistike upućuje na odbacivanje hipoteze. Prihvaćanje hipoteze znači da mjerenja pokazuju da nema bitnih razlika u djelovanju pojedinih razina djelotvornog faktora na rezultate mjerenja, odnosno da su odstupanja od μ slučajna.

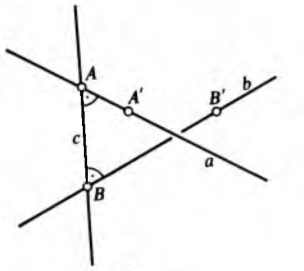
LIT.: *V. Vranić,* Vjerojatnost i statistika. Tehnička knjiga, Zagreb 1971. – *L. Breiman,* Statistics with a View Toward Applications. Houghton Mifflin Company, Boston 1973. – *Г. Крамер:* Математические методы статистики. МИР. Москва 1975. – *Ш. Закс,* Теория статистических выводов. МИР, Москва 1975. – *Z. A. Ivković,* Matematička statistika. Naučna knjiga, Beograd 1976. – *R. V. Hogg, A. T. Craig,* Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan Publishing Co., Inc., New York ^{4}1978. – *R. E. Walpole, R. H. Myers,* Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Macmillan Publishing Co., Inc., New York 1978. – *R. Jamnik,* Matematična statistika. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980. – *I. Pavlić,* Statistička teorija i primjena. Tehnička knjiga, Zagreb 1985. – *S. V. Vukadinović,* Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike. Privredni pregled, Beograd 1988.

Ž. Pauše

STEREOMETRIJA, dio geometrije koji se bavi skupovima točaka u trodimenzijskom, euklidskom prostoru (v. *Geometrija*, TE 6, str. 120). Stereometrijski su objekti geometrijska tijela i njihovi rubovi: poliedri i poliedarske plohe, različita obla tijela i oble plohe. Za likove u bilo kojoj ravnini prostora pretpostavlja se da zadovoljavaju odnose koji se proučavaju u planimetriji (v. *Planimetrija*, TE 10, str. 294).

TEMELJNI ODNOSI TOČAKA, PRAVACA I RAVNINA

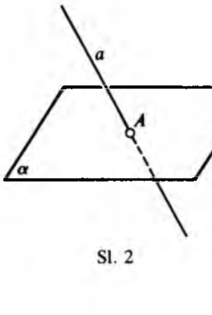
Prostorni odnosi pravaca. Dva različita pravca a i b mogu biti u istoj ravnini i u njoj se sjeći ili biti paralelni. Pravci mogu biti *mimoilazni*, tj. ne ležati u istoj ravnini. I za pravce a, b i c u prostoru iz $a \| b$ i $b \| c$ slijedi $a \| c$. Skup svih pravaca sa svojstvom da su po dva od njih paralelna zove se *smjer*, a svi pravci tog skupa *imaju isti smjer*. Kroz bilo koju točku prolazi samo jedan pravac zadanog smjera.



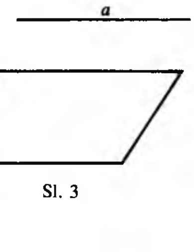
Sl. 1

Ako su a i b mimoilazni pravci, postoji samo jedan pravac c koji siječe oba pravca a i b i okomit je na svaki od njih. Tada je c *zajednička okomica* pravaca a i b. Ako je točka A sjecište pravaca a i c, a točka B sjecište pravaca b i c (sl. 1), što se označuje sa $A = a \cap c$ i $B = b \cap c$, tada se udaljenost $d(A, B)$ zove *udaljenost* mimoilaznih pravaca a i b. Za bilo koju točku A' pravca a i za bilo koju točku B' pravca b vrijedi $d(A', B') \geqq d(A, B)$, pri čemu je $d(A', B') = d(A, B)$ samo ako je $A' = A$, $B' = B$.

Prostorni odnosi pravca i ravnine. Pravac a koji ne pripada ravnini α može s tom ravninom imati najviše jednu zajedničku točku. Ako a i α imaju zajedničku točku A (sl. 2), tada se a i α *sijeku* u toj točki A (kaže se još da pravac a *probada ravninu* α u točki A), a točka A je njihovo *sjecište* (ili *probodište*) i označuje se sa $A = a \cap \alpha$.



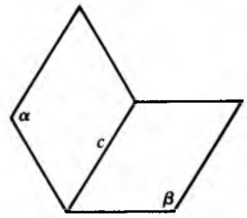
Sl. 2



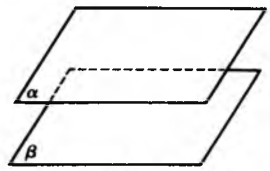
Sl. 3

Ako a i α nemaju zajedničku točku (sl. 3) ili ako pravac a pripada ravnini α, tada su a i α paralelni i piše se $a \| \alpha$ ili $\alpha \| a$. Ako ravnina siječe jedan od dva paralelna pravca, tada ona siječe i drugi. Za dva pravca a i b i dvije ravnine γ i β iz $a \| b$ i $b \| \gamma$ slijedi $a \| \gamma$, a iz $a \| \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $a \| \gamma$. Pravac je paralelan s ravninom ako je paralelan s nekim pravcem te ravnine.

Prostorni odnosi ravninâ te ravninâ i pravaca. Dvije različite ravnine α i β mogu imati zajednički jedan pravac c na kojem leže sve njihove zajedničke točke (sl. 4) ili pak mogu biti bez zajedničkih točaka (sl. 5). U prvom se slučaju ravnine α i β *sijeku* po pravcu c, a pravac c je *presječnica* tih ravnina i označuje se sa $c = \alpha \cap \beta$. U drugom slučaju, ili ako je $\alpha = \beta$, ravnine α i β su *paralelne* i piše se $\alpha \| \beta$ ili $\beta \| \alpha$.



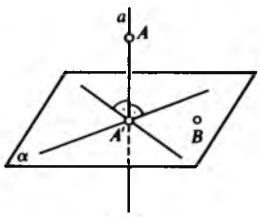
Sl. 4



Sl. 5

Za tri ravnine α, β i γ iz $\alpha \| \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $\alpha \| \gamma$. Kroz svaku točku prostora izvan zadane ravnine prolazi samo jedna ravnina koja je paralelna sa zadanom ravninom. Ako pravac ili ravnina siječe jednu od dviju paralelnih ravnina, tada siječe i drugu. Ako su α i β paralelne ravnine i ravnina ih γ siječe po pravcima a i b, tada su ti pravci paralelni. Kroz pravac paralelan sa zadanom ravninom prolazi samo jedna ravnina paralelna s tom ravninom. Ako je pravac paralelan sa svakom od dviju ravnina koje se sijeku, tada je paralelan i s njihovom presječnicom.

Pravac a je okomit na ravninu α (piše se $a \perp \alpha$ ili $\alpha \perp a$) ako tu ravninu probada u nekoj točki A' i ako je okomit bar na dva različita pravca koji pripadaju ravnini α i prolaze kroz točku A' (sl. 6); on je tada okomit i na sve takve pravce. Za bilo koju točku A i bilo koju ravninu α postoji samo jedan pravac a koji prolazi kroz točku A i okomit je na ravninu α. Pravac a se zove *okomica* iz točke A na ravninu α, a točka $A' = a \cap \alpha$ zove se ***nožište*** te okomice ili *ortogonalna projekcija* točke A na ravninu α. Ako je B bilo koja točka ravnine α različita od A', tada vrijedi $d(A, A') < d(A, B)$. Broj $d(A, A')$ zove se udaljenost točke A od ravnine α.



Sl. 6

Svi pravci koji prolaze kroz neku točku zadanog pravca i okomiti su na taj pravac leže u ravnini koja je okomita na taj pravac. Postoji samo jedna ravnina koja prolazi kroz tu točku i okomita je na zadani pravac. Iz $a \| b$ i $b \perp \gamma$ slijedi $a \perp \gamma$, a iz $a \perp \gamma$ i $b \perp \gamma$ slijedi $a \| b$. Iz $a \perp \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $a \perp \gamma$, a iz $a \perp \beta$ i $a \perp \gamma$ slijedi $\beta \| \gamma$.

Ravnina α okomita je na ravninu β (piše se $\alpha \perp \beta$) ako ravnina α sadrži neki pravac okomit na ravninu β. Okomite se ravnine sijeku. Ako je ravnina α okomita na dvije ravnine β i γ koje se sijeku, tada je ravnina α okomita i na pravac $\beta \cap \gamma$.

Ortogonalna projekcija nekog skupa točaka $\mathcal{S}$ na zadanu ravninu ϱ zove se skup $\mathcal{S}'$ svih ortogonalnih projekcija T' pojedinih točaka T skupa $\mathcal{S}$. Shvati li se pravac kao skup svih točaka koje mu pripadaju, tada je ortogonalna projekcija zadanog pravca opet pravac ako zadani pravac nije okomit na promatranu ravninu ϱ.