

tangensa od dvaju njemu susjednih elemenata ili umnošku sinusa od dvaju preostalih elemenata, na primjer

$$\cos \alpha = \cot \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \cdot \cot c \quad (47)$$

ili

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \cdot \sin \beta. \quad (48)$$

U pravokutnom sfernom trokutu relacija za $\tan \varepsilon/2$ poprima vrlo jednostavan oblik:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2}. \quad (49)$$

Sve navedene relacije služe za računanje s trigonometrijskim funkcijama, bez obzira na geometrijsko značenje funkcija.

V. Volenec

TRIGONOMETRIJSKA MREŽA, skup međusobno umreženih i stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini s određenim horizontalnim i visinskim položajem u jedinstvenom koordinatnom sustavu. Točke se raspoređuju po terenu prema unaprijed sastavljenom projektu, a služe kao oslonac za izmjernu (premjer) tla (v. *Geodetska izmjerna zemljišta*, TE 6, str. 22) i potom za dobivanje topografsko-katastarskih planova i karata različita mjerila, te kao koordinatni sustav za ostvarivanje mnogih inženjerskih radova na terenu i za razne znanstvene potrebe (određivanje oblika, izmjerna i fizikalnih svojstava Zemlje).

Nezamjenjivu ulogu u razvoju geodezije i ostalih geoznanosti ima uspostavljanje i osuvremenjivanje *osnovnih geodetskih mreža*, koje su temelj za izvođenje ostalih geodetskih radova, bilo za praktične ili znanstvene namjene. Osnovnim geodetskim radovima prikupljaju se temeljni podatci o položaju i visini točaka geodetskih mreža i temeljni podatci o geofizičkim, odnosno geodinamičkim poljima. Geofizička su polja npr. polje ubrzanja sile teže, geomagnetna polja i sl., a u geodinamička se polja ubrajaju polja sila koje uzrokuju pomake Zemljina tla (npr. pomake tektonskih ploča). To su osnovne geodetske baze, tj. skupina geodetskih mreža i točaka definiranih u *astronomsko-geodetskoj mreži*, *trigonometrijskoj mreži*, *mreži preciznog nivelmana* i *nivelmana velike točnosti*, te *osnovnoj gravimetrijskoj mreži*.

U suvremenoj se geodeziji te mreže ujedinjuju, tj. sve se mjerne veličine (duljine, kutovi, pravci, azimuti, visinske razlike, koordinatne razlike, razlike ubrzanja sile teže i njihove derivacije) zajednički obrađuju, pa je tako nastao novi pojam *integrirana geodezija*.

Primjenom suvremenih satelitskih metoda za uspostavljanje geodetskih mreža i mjerenjem apsolutnih ubrzanja sile teže podatci o geodetskim točkama često se dobivaju samostalno (odvojeno), te je u budućnosti realnije govoriti o polju točaka nego o mreži izravno povezanih točaka.

Trigonometrijske mreže rasprostranjene po cijelom teritoriju države osnovne su državne položajne mreže. One omogućuju ujedinjenje geodetskih radova različitih mjerila, izvedenih u različito vrijeme i na različitim mjestu. U novije je doba istodobnom primjenom kinematičkih globalnih pozicijskih sustava (satelitsko određivanje položaja) i aerofotogrametrije moguće paralelno stvarati mreže i snimati detalje.

Razvijanje trigonometrijskih mreža sastoji se od terenskih radova te obradbe i interpretacije rezultata terenskih mjerenja. Terenski se dio rada sastoji u organizaciji i izvođenju astronomsko-geodetskih mjerenja. U posljednje doba tu pripada i prikupljanje baze podataka izravno na terenu. Obradba i interpretacija rezultata obuhvaća redukciju obavljenih mjerenja na prihvaćenu referentnu plohu, matematičku obradbu rezultata mjerenja, njihovu sistematizaciju i grafičko prikazivanje, te stvaranje izlaznih podataka.

Trigonometrijske se mreže uspostavljaju terestričkim i satelitskim metodama, odnosno pomoću klasične i pomoću satelitske triangulacije, trilateracije i poligonometrije. Sve do 1970. trigonome-

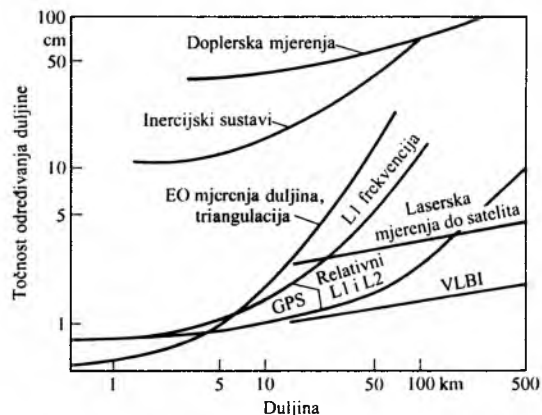
trijske mreže velike točnosti razvijane su samo klasičnim terestričkim mjerenjima. Već sedamdesetih godina satelitske su metode dostigle razinu točnosti najtočnijih terestričkih metoda s relativnom pogreškom stranice $1 \cdot 10^{-6}$. To je vrijedilo samo za udaljenosti od 200...4000 km. Jedna takva mreža ostvarena je na osnovi fotografskog određivanja pravaca prema satelitu PAGEOS. Dalje povećanje točnosti za regionalnu upotrebu nije bilo moguće, pa ta metoda satelitske geodezije nema danas praktičnog značenja.

Osjetno povećanje točnosti u satelitskoj geodeziji ostvareno je laserskim mjerenjima udaljenosti do umjetnih Zemljinih satelita. Instrumentima Satellite-Laser-Ranging treće generacije i prikladnim reflektorima na satelitima (satelit LAGEOS) može se odrediti udaljenost od stajališta na Zemlji do satelita s točnošću od 1...3 cm. Istodobnim opažanjem istog satelita s najmanje četiriju terestričkih stajališta može se ostvariti trigonometrijska mreža velike točnosti. U praksi je to teško ostvarivo zbog visoke cijene instrumentarija i zbog meteoroloških okolnosti koje ometaju istodobna opažanja. Ta se mjerenja primjenjuju u tektonski aktivnim područjima u okviru određenih geodinamičkih programa radi određivanja udaljenosti i promjena udaljenosti između stajališta na tektonskim pločama. Zbog već navedenih razloga u bliskoj se budućnosti ne očekuje uporaba laserskih mjerenja u operativnim geodetskim zadacima.

U razdoblju od 1970. do 1980. godine snažan je razvoj doživjelo doplersko mjerenje, koje od tog doba postaje osnovna metoda satelitske geodezije. Sa sustavom NNSS (engl. Navy Navigation Satellite System), prikladnom mjernom opremom i računanim programima mogu se dobiti koordinate s točnošću od $\pm 0,2 \dots \pm 0,3$ m. Tek na udaljenostima stajališta većim od 100 km doplerske točke mogu sačinjavati osnovu regionalnih geodetskih mreža.

Već se primjenjuje, a pogotovo će se u budućnosti primjenjivati globalni pozicijski sustav (GPS), koji i na kratkim udaljenostima daje točnost jednaku točnosti sadašnjih klasičnih terestričkih metoda. Ta metoda ne zahtijeva dohledanje stajališta, dakle ni podizanje skupih signala, pa se već danas ubraja među najekonomičnije precizne metode.

Laserska mjerenja i radiointerferometrija (metoda VLBI, engl. Very Long Baseline Interferometry) daju gotovo jednaku točnost, ali se, zbog velikih troškova i problema transporta, ne upotrebljavaju za stvaranje osnovnih mreža, nego samo za određivanje točnih baza za kontrolu koordinata i mjerila mreža razvijenih po ostalim satelitskim metodama, te u znanstvene svrhe (utočnjavanje inercijskog sustava koordinata, određivanje oblika i izmjerna Zemlje i dr.). Zbog ograničene točnosti i velikih troškova inercijski sustavi (Inertial Surveying System, ISS) također nisu općenito pogodni, pa se primjenjuju samo u posebnim slučajevima. Satelitska doplerska mjerenja i mjerenja na temelju globalnog pozicijskog sustava pogodna su prije svega za dobivanje koordinata točaka državnih mreža i mreža u inženjerskoj geodeziji. Konceptija uspostave osnovnih državnih mreža, s obzirom na sadašnje mogućnosti satelitske geodezije, mijenja se iz temelja, te mnogi autori smatraju mreže satelitske geodezije mrežama nultog reda. Da bi se ispravno upotrijebila bilo koja metoda, potrebno je poznavati njezinu točnost i ekonomičnost (sl. 1)

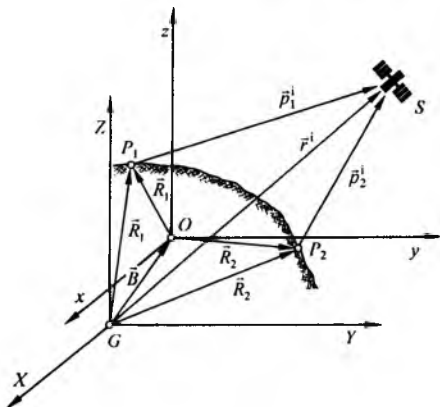


Sl. 1. Točnost metoda pozicijskog određivanja

SATELITSKE METODE USPOSTAVLJANJA TRIGONOMETRIJSKIH MREŽA

Razumijevanje satelitskih metoda zahtijeva kratko objašnjenje osnovne koncepcije satelitske geodezije (v. *Satelitska geodezija*, TE 12, str. 21). Općenito se satelitska geodezija dijeli na geometrijsku, dinamičku i operativnu.

U *geometrijskoj satelitskoj geodeziji* u prvom je redu važan terestrički mjesni vektor \vec{R}_j , a nepoznati vektor \vec{r}^i eliminira se istodobnim mjerenjima (sl. 2).



Sl. 2. Prikaz upotrebe umjetnih Zemljinih satelita u geodeziji

Glavni je cilj *dinamičke satelitske geodezije* određivanje radijvektora \vec{r}^i , odnosno određivanje polja ubrzanja sile teže na osnovi gibanja satelita kao senzora.

Operativna satelitska geodezija, kao dio geometrijske satelitske geodezije, obuhvaća metode u kojima se položaj satelita uzima kao poznata vremenska funkcija $\vec{r}^i(t)$.

Geometrijske metode satelitske geodezije

Te se metode osnivaju na opažanju satelita kao pokretnih vizurnih signala. Slično terestričkim mjerenjima, ovdje se može govoriti o satelitskoj triangulaciji, trilateraciji i poligonometriji. Suština se satelitske triangulacije sastoji u određivanju položaja točaka na Zemljinoj površini na osnovi prostornih trokuta, kojih je jedan vrh položaj satelita u određenom trenutku.

U geometrijske se metode ubrajaju sinkronizirane i kvazisinkronizirane metode te orbitalna metoda.

Sinkronizirane metode osnivaju se na istodobnim opažanjima satelita s različitih točaka na Zemljinoj površini. Parametri točaka kao vremenske funkcije dobro su poznati i daju mogućnost izračunavanja položaja satelita u bilo kojem trenutku (sl. 2). Na slici su sa X, Y, Z označene koordinatne osi globalnoga geocentričnog koordinatnog sustava s ishodištem u središtu Zemljine mase G , sa x, y, z koordinatne osi konvencionalnog geodetskog sustava s ishodištem u O , s \vec{r}^i geocentrični radijvektor satelita, s P_1 i P_2 stajališta na Zemlji s kojih se opažaju sateliti, a s \vec{p}_1^i i \vec{p}_2^i udaljenosti mjerene od stajališta P_1 do satelita S (deblje tiskanim slovima označene su vremenski promjenljive veličine). Zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da su koordinatne osi obaju sustava međusobno paralelne i da sustavi imaju jednako mjerilo. Ako je p_j^i mjereni pravac, odnosno jedinični vektor ($|\vec{p}_j^i| = 1$), onda prema slici 2 vrijedi

$$\vec{r}^i = \vec{B} + \vec{R}_j + p_j^i \vec{p}_j^i, \quad j \in (1, 2), \quad (1)$$

gdje su \vec{B} geocentrični, stalni vektor ishodišta konvencionalnoga geodetskog sustava, \vec{R}_j vektor stajališta, a $p_j^i \vec{p}_j^i$ topocentrični vektori satelita S .

Jednadžba (1) jest *osnovna jednadžba satelitske geodezije*. Ako su poznate komponente vektora stajališta \vec{R}_j i topocentrični vektori $p_j^i \vec{p}_j^i$, mogu se odrediti koordinate satelita u konvencionalnom geodetskom sustavu. U stručnoj se terminologiji određivanje tih koordinata u određenom trenutku obično naziva pravim zadatkom satelitske geodezije. Ako je poznat vektor \vec{B} , iz izraza (1) mogu se odrediti geocentrične koordinate satelita. Češće se pojavljuje potreba računanja koordinata stajališnih točaka u konvencionalnom geodetskom sustavu (tzv. obrnuti zadatak):

$$\vec{R}_j = \vec{r}^i - p_j^i \vec{p}_j^i - \vec{B}. \quad (2)$$

Naravno, računa se i geocentrični vektor ishodišta konvencionalnog sustava:

$$\vec{B} = \vec{r}^i - \vec{R}_j - p_j^i \vec{p}_j^i. \quad (3)$$

Istodobnim opažanjem istog satelita s dvaju stajališta i na osnovi razlika dviju jednadžbi (2) dobiva se

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = p_1^i \vec{p}_1^i - p_2^i \vec{p}_2^i, \quad (4)$$

što su zapravo koordinatne razlike stajališta P_1 i P_2 u konvencionalnome geodetskom koordinatnom sustavu. Izraz (4) zahtijeva točno poznavanje teorije gibanja i položaja satelita. Kada su poznate koordinate jednog stajališta (P_1), mogu se pomoću (4) izračunati koordinate drugog stajališta (P_2) u koordinatnom sustavu točke P_1 .

Ako koordinatne osi globalnoga geocentričnog i konvencionalnog geodetskog sustava nisu međusobno paralelne i ako se pojavljuje razlika u njihovom mjerilu, tada izraz (1) glasi

$$\vec{r}^i = \vec{B} + (1 + dm) R_\epsilon \vec{R}_j + p_j^i \vec{p}_j^i, \quad (5a)$$

gdje je dm faktor mjerila, a

$$|R_\epsilon| = |R_3(\epsilon_z) R_2(\epsilon_y) R_1(\epsilon_x)| = \begin{vmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{vmatrix}, \quad (5b)$$

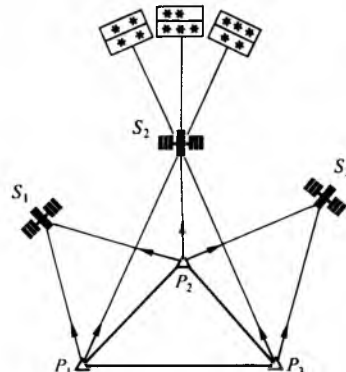
gdje su $R_\epsilon, R_1, R_2, R_3$ matrice rotacije, $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ rotacijski kutovi oko osi x, y i z . Analogno tome izraz (4) prelazi u oblik

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = (1 - dm) R_\epsilon^T (p_1^i \vec{p}_1^i - p_2^i \vec{p}_2^i). \quad (6)$$

Sateliti se opažaju optičkim i radioelektroničkim metodama. U *optičke metode opažanja* pripadaju vizualna opažanja (pomoću teodolita, kinoteodolita, teleskopa), te fotografska, fotoelektrična i laserska mjerenja. U radioelektroničke metode ubrajaju se radiointerferometrijska mjerenja, doplerska mjerenja te mjerenja na temelju globalnog pozicijskog sustava (GPS).

Fotografska metoda do sedamdesetih je godina bila jedna od najtočnijih, a osnivala se na fotografiranju satelita na zvjezdanom svodu (fonu). Ako su bile poznate ekvatorske koordinate okolnih zvijezda na snimku, interpolacijom se dobivala prava *rektascenzija* i deklinacija satelita u trenutku fotografiranja. Te su koordinate omogućivale točno utvrđivanje pravca opažanja i *stajališta* satelita u jedinstvenom koordinatnom sustavu.

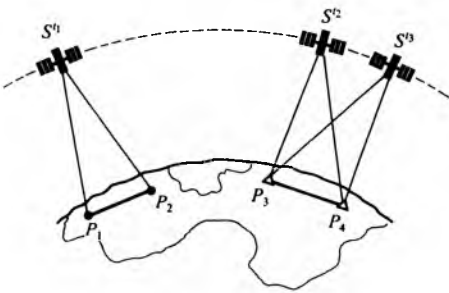
Sl. 3. Fotografska metoda opažanja satelita



Istodobnim opažanjem satelita S_1 s točke P_1 i P_2 (sl. 3) dobiva se sinkronizirana ravnina u prostoru $P_1P_2S_1$. Opažanjem istog (ili dvaju različitih) satelita u sljedećem trenutku određuje se još jedna sinkronizirana ravnina $P_1P_2S_2$. Presjek tih ravnina određuje pravac spojnice točaka P_1 i P_2 . Očito, točke P_1 i P_2 ne moraju se dočleđati, a mogu biti udaljene i nekoliko stotina ili tisuća kilometara. Jedini je uvjet istodobna vidljivost satelita s obje točke, pa zbog toga ta metoda uvelike ovisi o meteorološkim uvjetima. Ako se s treće točke, a istodobno i s jedne od prijašnjih, fotografira isti satelit (ili dva različita satelita) u dva različita trenutka, dobiju se još dvije sinkronizirane ravnine $P_2P_3S_2$ i $P_2P_3S_3$.

Presjek tih ravnina određuje pravac spojnice točaka P_2 i P_3 . Položaj treće spojnice (dužina P_1P_3) određuje presjek sinkronizirane ravnine $P_1P_3S_2$ s dužinama P_1P_2 i P_2P_3 . Tim je postupkom određen točan položaj točke P_2 na osnovi poznatih koordinata P_1 i P_3 , a time i veličina (mjerilo) i oblik trokuta $P_1P_2P_3$. Taj način određivanja ne zahtijeva poznavanje točnih koordinata satelita. Skupina tako određenih trokuta čini mrežu satelitske triangulacije. U njoj je dovoljno poznavati koordinate *samo jedne* točke (npr. P_1) i duljinu jedne bazične stranice (npr. P_1P_2). Duljina bazične stranice P_1P_2 može se odrediti ako se u trenutku fotografiranja satelita odredi udaljenost satelita od točke P_1 ili P_2 . Ta se spojnica može dobiti i iz podataka terestričke triangulacije ili poligonometrije. Satelitska je trilateracija, prema tome, određiva nje elemenata prostornih trokuta na osnovi duljina mjerenih do satelita.

Orbitalna metoda objašnjena je donekle svojim imenom. Ako su u trenutku t_1 poznate koordinate satelita S^1 (u koordinatnom sustavu točaka P_1 i P_2) i ako su poznate koordinate satelita S^2 i S^3 u trenutcima opažanja t_2 i t_3 iz točaka P_3 i P_4 , onda je moguće odrediti koordinate točaka P_3 i P_4 u koordinatnom sustavu točaka P_1 i P_2 (sl. 4).



Sl. 4. Prikaz orbitalne metode satelitske geodezije

Prilikom linearnih mjerenja potrebno je obaviti najmanje tri opažanja satelita iz točaka P_3 i P_4 . Vrlo je važno svojstvo orbitalne metode mogućnost opažanja satelita u različito vrijeme iz točaka P_1 , P_2 i P_3 , P_4 . Zbog toga je taj način pogodan za određivanje točaka na velikim udaljenostima, za povezivanje točaka na otoku s točkom na kopnu i sl. Međutim, ta metoda zahtijeva vrlo točno poznavanje elemenata putanje satelita i u praksi se često kombinira radi veće točnosti. Operativna geodezija pripada skupini orbitalnih metoda.

Tranzitni sustav i doplerska mjerenja

Sustav satelita *Transit*, nazvan i tranzitni sustav, razvila je mornarica SAD radi boljeg određivanja položaja brodova na moru, a u okviru navigacijskog sustava NNSS, engl. Navy Navigation Satellite System (v. *Sateliti*, TE 12, str. 11; v. *Satelitska geodezija*, TE 12, str. 27). Taj se navigacijski sustav, koji se temelji na mjerenju Dopplerova efekta, počeo 1970-ih godina kao nova metoda primjenjivati i za geodetske potrebe u osnovnim trigonometrijskim mrežama za stvaranje mreže nultog reda, a bio je posebno ekonomičan u zemljama bez razvijene osnovne geodetske mreže. On se u dobro premjerenim zemljama s već razvijenom osnovnom državnom mrežom upotrebljava za kontrolu konvencionalnih mreža. Na osnovi pravilno raspoređenih doplerskih točaka moguće je izračunati parametre za pretvorbu državnoga u globalni geocentrični koordinatni sustav.

Prednost je doplerskih mjerenja s obzirom na konvencionalne mjerne postupke u tome što ona ne ovise o vremenskim prilikama, a susjedne se točke ne moraju dogledati (prijamnici se mogu postaviti na izoliranim i teško pristupačnim mjestima). Nedostatak je metode u razmjerno malenim frekvencijama, zbog čega se utjecaj ionosferske refrakcije teže eliminira nego u metodi GPS. Isto tako, mala visina satelita (~1000 km) uzrokuje netočnosti u prognozi njegove putanje, a poseban je nedostatak što se ne lansiraju novi sateliti. Sve to smanjuje točnost određivanja položaja satelita, pa metoda gubi na značenju.

Dopplerov efekt, prema austrijskom fizičaru Ch. Doppleru (1803–1853), očituje se u promjeni frekvencije bilo kojeg valnog signala zbog relativnog gibanja odašiljača prema prijammiku (v. *Optika*, TE 9, str. 674). Odašilje li satelit signal stabilne radio-

frekvencije f_s , prijammik na Zemlji prima signal promijenjene frekvencije f_c . Ako se zanemare članovi višeg reda, ta se pojava može opisati jednadžbom:

$$f_c = f_s \left(1 - \frac{1}{c} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \right), \quad (7)$$

gdje je \bar{r} udaljenost prijammika od odašiljača, c brzina svjetlosti u vakuumu, a t vrijeme.

Kad je frekvencija konstantna, broj se titraja n može odrediti prema izrazu

$$n = f t. \quad (8)$$

Ako se frekvencija mijenja, putanja se može podijeliti na dijelove koji odgovaraju kratkim vremenskim intervalima, pa je broj titraja

$$n = f_1 \Delta t_1 + f_2 \Delta t_2 + \dots + f_n \Delta t_n, \quad (9)$$

gdje su f_i ($i \in (1, n)$) srednje frekvencije odgovarajućih vremenskih intervala Δt_i . Kada je $\lim \Delta t \rightarrow 0$, jednadžba (9) može se napisati u obliku

$$n_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f_c dt, \quad (10)$$

gdje je T vrijeme primanja satelitskog signala. Zbog tehničkih teškoća ne mjeri se u prijammiku broj titraja radiofrekventnog izvora n_{12} prema jednadžbi (10), nego razlika u prijammiku generirane referentne frekvencije f_r i primljene frekvencije f_c , odnosno *doplerski broj titraja* N_{kn} :

$$N_{kn} = \int_{T_k}^{T_n} (f_r - f_c) dt. \quad (11)$$

Ako se s T_k i T_n označe trenutci početka i završetka primanja satelitskog signala, s t_k , t_n trenutci početka i kraja odašiljanja signala stabilne frekvencije f_s , a s \bar{r}_j^k i \bar{r}_j^n početna i konačna razlika udaljenosti prijammika od satelita, može se napisati

$$T_k = t_k + \frac{|\bar{r}_j^k|}{c}, \quad T_n = t_n + \frac{|\bar{r}_j^n|}{c}. \quad (12)$$

Uvrsti li se (12) u (11), dobiva se

$$N_{kn} = \int_{t_k + \frac{|\bar{r}_j^k|}{c}}^{t_n + \frac{|\bar{r}_j^n|}{c}} (f_r - f_c) dt. \quad (13)$$

Broj odašilanih titraja, odnosno titraja frekvencije f_s , u vremenskom intervalu $(t_n - t_k)$ jednak je broju titraja primljene frekvencije f_c u intervalu

$$(T_n - T_k) = \left(t_n + \frac{\bar{r}_j^n}{c} \right) - \left(t_k + \frac{\bar{r}_j^k}{c} \right), \quad (14)$$

pa je

$$\int_{t_k}^{t_n} f_s dt = \int_{t_k + \frac{\bar{r}_j^k}{c}}^{t_n + \frac{\bar{r}_j^n}{c}} f_c dt. \quad (15)$$

Integriranjem jednadžbe (13) dobiva se

$$N_{kn} = f_r \left[\left(t_n + \frac{\bar{r}_j^n}{c} \right) - \left(t_k + \frac{\bar{r}_j^k}{c} \right) \right] - f_c \left[\left(t_n + \frac{\bar{r}_j^n}{c} \right) - \left(t_k + \frac{\bar{r}_j^k}{c} \right) \right]. \quad (16)$$

Uvrsti li se (15) u (16), slijedi

$$N_{kn} = (f_r - f_s)(t_n - t_k) + \frac{f_r}{c} (\bar{r}_j^n - \bar{r}_j^k). \quad (17)$$

Na osnovi slike 2 topocentrični vektori satelita S u trenutcima t_k i t_n mogu se dobiti iz razlika odgovarajućih koordinata satelita (x^k, y^k, z^k) , (x^n, y^n, z^n) te koordinata prijammne stanice x_j, y_j, z_j :

$$\begin{aligned} \bar{r}_j^k &= [(x^k - x_j)^2 + (y^k - y_j)^2 + (z^k - z_j)^2]^{1/2}, \\ \bar{r}_j^n &= [(x^n - x_j)^2 + (y^n - y_j)^2 + (z^n - z_j)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Uvrsti li se (18) u (17), dobiva se jednadžba hiperboloida:

$$\begin{aligned} N_{kn} &= (f_r - f_s)(t_n - t_k) + \frac{f_r}{c} \{ [(x^n - x_j)^2 + (y^n - y_j)^2 + \\ &+ (z^n - z_j)^2]^{1/2} - [(x^k - x_j)^2 + (y^k - y_j)^2 + (z^k - z_j)^2]^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Svaki par granica integrala $(T_n - T_k)$, $(T_i - T_n)$, ... daje u prostoru jedan hiperboloid. Presjek više takvih hiperboloida određuje položaj prijamne antene. Na osnovi strukture satelitskog signala trajanje mjerenja doplerskog broja titraja višekratnik je od 4,6 s. Obično se odabire trajanje od 23 s, što znači da se u dvije minute može izmjeriti ~5 doplerskih brojeva titraja (dvije minute odgovaraju trajanju navigacijskih vijesti). Pri opažanju prolaska satelita u trajanju od 16 minuta može se dobiti ~40 jednadžbi (19) s tri nepoznanice.

Geometrijska interpretacija doplerskog broja titraja izlazi iz jednadžbe (17). Posljednji član na desnoj strani pokazuje razliku udaljenosti prijamnika od satelita u trenutku t_n i t_k s mjerilom razlike f_r/c . Interval integriranja koji odgovara jednom prolasku satelita (~15 ··· 16 min) daje dvodimenzijско rješenje i primjenjuje se u navigaciji pri određivanju položaja broda. Obradom velikog broja prolazaka satelita (npr. 50) omogućuje se povećanje točnosti i trodimenzijско pozicijsko određivanje.

Tranzitni segment čine svemirski, kontrolni i korisnički segment.

Svemirski segment sastoji se od satelita na visini od ~1075 km, s vremenom obilaska 107 min i putanjama koje imaju nagib prema ekvatoru od ~90°. U kolovozu 1988. bilo je ukupno trinaest tranzitnih satelita, od kojih se sedam može opažati. Četiri aktivna satelita starog su tipa OSCAR, a tri tipa NOVA. Ostalih šest satelita tipa su OSCAR i služe kao pričuva. Masa satelita mnogo je manja s obzirom na satelite GPS i iznosi samo 60 kg.

Sateliti tipa NOVA imaju više prednosti s obzirom na satelite OSCAR. To su smanjen utjecaj trenja preostale atmosfere na visini od ~1000 km i smanjen utjecaj Sunčeva zračenja, mogućnost točnijeg prognoziranja putanje u jednom tjednu, povećana memorija za registriranje podataka (dovoljno za 10 dana), mogućnost programiranja satelitskog računala s kontrolne stanice, povećana jačina signala i mogućnost korigiranja frekvencije oscilatora s točnošću od $1 \cdot 10^{-12}$. Približne efemeride (broadcast-efemeride) priopćava radioodašiljač satelita, a satelitu ih dostavlja kontrolna stanica, za tip OSCAR dva puta dnevno, a za tip NOVA jedanput dnevno.

Kontrolni segment sastoji se od četiri stanice na području SAD, a zadatak mu je kontrola rada satelita, te računanje podataka putanje satelita (efemeride). Za točnije računanje koordinata satelita trebalo bi više pravilnije raspoređenih opažачkih stanica (za tu namjenu postoji više od 20 stanica). Te se precizne efemeride mogu dobiti nakon opažanja, ali za komercijalnu svrhu obično nisu dostupne. Zbog toga se često pri satelitskim kampanjama određuju kao dodatne nepoznanice i precizne koordinate satelita.

Precizne efemeride dane su u novom američkom geodetskom koordinatnom sustavu NWL-90, dok su približne efemeride dane u starom svjetskom geodetskom koordinatnom sustavu WGS 72, koji se primjenjivao u sustavu GPS do 1. siječnja 1987. godine. Sustav nije idealno geocentričan, ishodište sustava pomaknuto je oko 4,5 m sjeverno po osi Z (os Z je srednja os rotacije Zemlje). Iako su oba sustava geocentrična, preciznim se istraživanjima pokazala razlika u mjerilu od $1 \cdot 10^{-6}$ i rotacija oko osi Z. G. Seeber je 1980. dao izraze za transformaciju koordinata iz sustava NWL-90 u sustav WGS 72.

Korisnički segment čine prijamnici tranzitnog korisnika.

Izvor pogrešaka. Pogreške u određivanju putanje satelita nastaju zbog nepoznavanja točnih efemerida, zbog pogrešaka refrakcije i pogrešaka prijamnika. Svaku skupinu pogrešaka uzrokuje više čimbenika. Tako npr. na pogrešku efemerida za jedan prolazak satelita utječe pogreška zbog nepoznavanja modela ubrzanja sile teže (WGS 72) u iznosu od $\pm 5 \cdot \cdot \cdot 10$ m, zatim nepotpuno modeliranje pogrešaka koje djeluju na površinske dijelove satelita (otpor zraka, Sunčevo zračenje) u iznosu od $\pm 10 \cdot \cdot \cdot 25$ m te pogreške zaokruživanja efemerida u iznosu od ± 5 m.

Iako se mjeri s dvije frekvencije, pojavljuje se ostatak ionosferske refrakcije. Ako se pri tome zanemari troposferska refrakcija, taj efekt uzrokuje pogrešku položaja satelita u putanji od $\pm 1 \cdot \cdot \cdot 5$ m.

Pogreške u prijamniku mogu promijeniti koordinate od $\pm 1 \cdot \cdot \cdot 6$ m (za jedan obilazak satelita), a uzrok im je u progreskama oscilatora ($\pm 1 \cdot 10^{-12} \cdot \cdot \cdot 10 \cdot 10^{-12}$), hodu sata prijamnika ($\pm 50 \mu s$) i promjenama faznog središta antene.

Ukupna pogreška u putanji pojedinačnih prolazaka satelita može iznositi od $\pm 12 \cdot \cdot \cdot 28$ m.

Metode doplerskih mjerenja. Razlikuje se nekoliko doplerskih mjernih metoda. To su određivanje pojedinačnih točaka, višepostajna metoda, metoda polukratkog luka i metoda kratkog luka.

Točnost određivanja pojedinačnih točaka u prvom redu ovisi o točnosti samih efemerida satelita. Na osnovi pedesetak prolazaka satelita mogu se dobiti koordinate postaje s točnošću od $\pm 3 \cdot \cdot \cdot 5$ m. Ako se upotrijebe precizne efemeride, ta metoda daje geocentrične koordinate s točnošću od $\pm 0,5 \cdot \cdot \cdot \pm 1$ m.

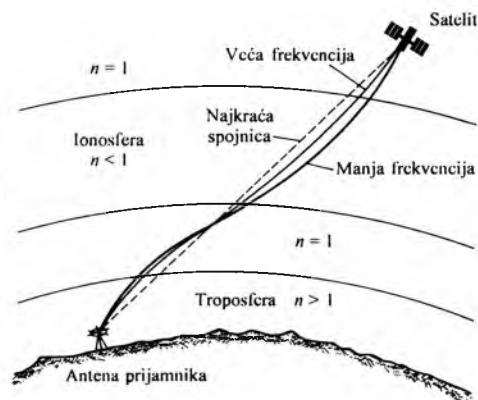
Višepostajna metoda sastoji se u eliminiranju utjecaja koji uzrokuju odstupanja koordinata točaka u istim smjerovima na susjednim točkama (200 ··· 500 km). Očito je da se računanjem razlika koordinata takva vrsta sustavnih pogrešaka smanjuje. To se u prvom redu odnosi na pogreške efemerida satelita, pogreške zračnih slojeva i sl. Zbog toga su koordinatne razlike točnije od samih koordinata. Relativne koordinate postaje mogu se dobiti s točnošću od $\pm 0,2 \cdot \cdot \cdot \pm 0,5$ m ako se upotrijebe približne koordinate satelita i višepostajna metoda.

Metodom polukratkog luka (engl. semi-short-arc), uvodi se u proces izjednačenja i do pet parametara putanje satelita. Tim se rješenjem poboljšavaju koordinate satelita.

Metodom kratkog luka (engl. short-arc), osim koordinatnih razlika, izjednačenjem se dobivaju i uobičajeni parametri kratkog dijela putanje satelita. Tako se mogu do određene mjere popraviti približne koordinate satelita i dobiti relativne koordinate stajališta s maksimalnom točnošću od $\pm 0,15$ m (u desetak dana opažanja). Ta se točnost postiže bez obzira raspolaže li se približnim ili točnim efemeridama.

Globalni pozicijski sustav (GPS)

U SAD počela se od 1973. razvijati nova metoda pozicijskog određivanja na temelju sustava NAVSTAR-GPS (engl. Navigation System with Time And Ranging – Global Positioning System). To je globalni pozicijski sustav ili sustav globalnog pozicioniranja (v. *Sateliti, umjetni Zemljini*, TE 12, str. 11; v. *Satelitska geodezija*, TE 12, str. 29). Program razvoja sadržavao je tri faze: u prvoj je razrađena koncepcija metode, druga je obuhvaćala provjeru koncepcije, a od 1985. program je ušao u izgradnju kao završnu, treću fazu. Potpuna izgradnja sustava ostvarena je 1993. godine. Sada oko Zemlje kruže 24 satelita u 6 različitih ravnina na visini od ~20 000 km i s vremenom obilaska 12 sati. U drugoj je fazi bilo šest satelita i dva satelita koja se nisu mogla primijeniti u navigaciji, ali su bila prikladna za fazna mjerenja. Na temelju mjerenja s tim satelitima mogu se dobiti geocentrične koordinate s točnošću ± 10 m. Noseći radiovalovi koje sateliti odašilju imaju dvije frekvencije: one iznose $L_1 = 1575,42$ MHz ($\lambda = 19,05$ cm) i $L_2 = 1227,6$ MHz ($\lambda = 24,45$ cm), što omogućuje određivanje utjecaja ionosfere (sl. 5).

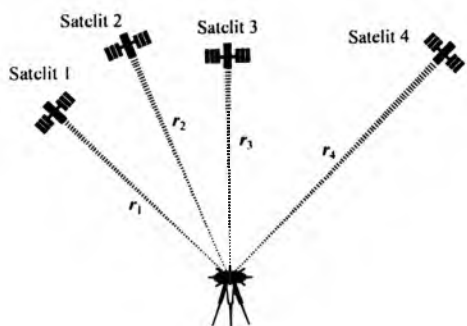


Sl. 5. Putanje signala različitih frekvencija; n indeks loma

Osnovna jednadžba za određivanje položaja satelita može se napisati na osnovi vremena T_i putovanja signala od satelita do terestričkog stajališta, s uvođenjem popravka ΔT_s za sinkronizaciju vremenskih signala stanice na Zemlji i sata satelita:

$$r_i = |\vec{R}_i - \vec{R}_s| + c\Delta T_s = cT_i = \{(X_i - X_s)^2 + (Y_i - Y_s)^2 + (Z_i - Z_s)^2\}^{1/2} + c\Delta T_s, \quad (20)$$

gdje je r_i udaljenost između terestričkog stajališta i satelita, \vec{R}_i s komponentama X_i, Y_i, Z_i pozicijski vektor satelita u geocentričnom koordinatnom sustavu, \vec{R}_s s komponentama X_s, Y_s, Z_s pozicijski vektor antene u istom koordinatnom sustavu, a c brzina rasprostiranja satelitskog signala. S tri istodobna mjerenja mogle bi se odrediti koordinate antena kada ne bi bilo nepoznanica ΔT_s . Zbog toga se u navigaciji provode najmanje četiri istodobna mjerenja (sl. 6).



Sl. 6. Pozicijsko određivanje pomoću sustava GPS s četiri simultana mjerenja udaljenosti

Primijeni li se metoda doplerskih mjerenja, jednadžba opažanja dobiva oblik

$$\Delta r_i = |\vec{R}_i(t_k) - \vec{R}_i| - |\vec{R}_i(t_j) - \vec{R}_i| = \frac{c}{f_r} \{N_{jk} - (f_r - f_s)(t_k - t_j)\}, \quad (21)$$

gdje je f_r frekvencija referentnog signala u prijammiku, f_s frekvencija odašlanog signala, t_j i t_k trenuci odašiljanja signala satelita stalnih frekvencija, a N_{jk} doplerski broj titraja.

Međutim, umjesto razlike frekvencija može se kao osnova za određivanje udaljenosti r između satelita i terestričke antene uvesti fazni pomak, slično kao za elektrooptičke daljinomjere. Označi li se s $\varphi^s(t)$ i f_s faza primljenog signala satelita u prijammiku, odnosno frekvencija nosećeg signala satelita, s $\varphi_r(t)$ i f_r faza, odnosno frekvencija referentnog signala generiranog u prijammiku, a s t vrijeme (u GPS vremenskoj skali) proteklo od inicijalnog trenutka $t_0 = 0$, tada se može napisati izraz za fazu primljenog signala satelita u prijammiku u trenutku t :

$$\varphi^s(t) = f_s t - f_s \frac{\vec{r}}{c} - \varphi_0^s, \quad (22)$$

odnosno za fazu generiranog signala u prijammiku:

$$\varphi_r(t) = f_r t - \varphi_{0r}. \quad (23)$$

Inicijalne faze φ_0^s i φ_{0r} uzrokovane su pogreškama satova satelita δ^s i prijammika δ_r i iznose

$$\varphi_0^s = f_s \delta^s, \quad \varphi_{0r} = f_r \delta_r. \quad (24)$$

Stvorena razlika faza u prijammiku prema izrazima (22), (23) i (24) iznosi

$$\varphi_r^s(t) = \varphi^s(t) - \varphi_r(t) = -f_s \frac{\vec{r}}{c} - f_s \delta^s + f_r \delta_r + (f_s - f_r)t. \quad (25)$$

Frekvencije generirane u satelitu f_s i u prijammiku f_r mogu se smatrati jednakima ($f_s = f_r$), pa se prethodni izraz može napisati u obliku

$$\varphi_r^s(t) = -f \frac{\vec{r}}{c} - f \Delta \delta; \quad (\Delta \delta = \delta^s - \delta_r). \quad (26)$$

Budući da se u prijammiku može mjeriti samo dio fazne razlike unutar punog kruga $\Delta \varphi_r^s$, izraz (26) glasi

$$\varphi_r^s(t) = \Delta \varphi_r^s |_{t_0} + m_r^s, \quad (27)$$

gdje je m_r^s broj cijelih valnih duljina u udaljenosti između satelita i prijammika u trenutku t (što je dodatna nepoznata veličina). Uvođenjem nove oznake $\Phi_r^s = -\Delta \varphi_r^s$, dobiva se konačan izraz za izbijaću fazu:

$$\Phi_r^s = \frac{1}{\lambda} r_r^s + \frac{c}{\lambda} (\delta^s - \delta_r) + m_r^s, \quad (28)$$

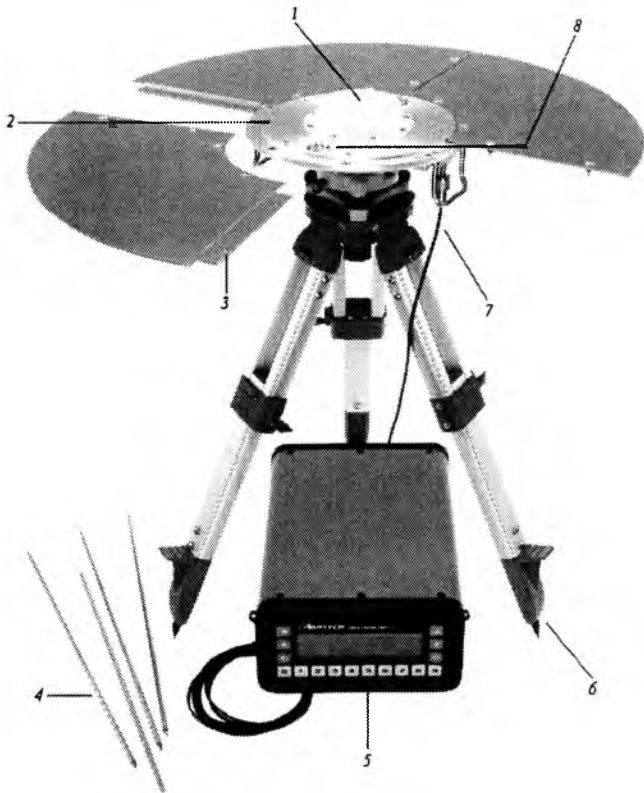
gdje je λ valna duljina satelitskog signala, a r_r^s udaljenost prijammika od satelita.

Na osnovi razlike mjerenih faznih razlika u stajalištima A i B prema istom satelitu j dobiva se tzv. jednostruka fazna razlika, iz koje je uklonjena pogreška sata u satelitu (što se obavlja prilikom računalne obradbe rezultata mjerenja):

$$\Phi_B^j(t) - \Phi_A^j(t) = \frac{1}{\lambda} [\vec{r}_B^j(t) - \vec{r}_A^j(t)] + m_B^j - m_A^j - f_j [\delta_B(t) - \delta_A(t)]. \quad (29)$$

Izraz (29) nije jednoznačan pa se zbog toga mjere fazne razlike na najmanje četiri satelita u tri trenutka.

Fazna se mjerenja mogu obuhvatiti tzv. rekonstrukcijom nosećeg vala satelitskog signala na tri načina: poznavanjem koda C/A i P kojima su modulirani noseći valovi satelitskog signala (npr. pomoću prijammika TI 4100 ili prijammika Ashtech XII, sl. 7), multipliciranjem prijammnog signala samim sobom (metoda kvadriranja signala, npr. pomoću prijammika Macrometer) ili križnom korelacijom signala frekvencije L_1 i L_2 koje odašilju sateliti (npr. pomoću prijammika Trimble 4000 SSE, kada se umjesto koda P modulira nepoznati kôd Y na frekvencijama L_1 i L_2).



Sl. 7. Geodetski prijammnik sustava GPS (tip Ashtech XII). 1 precizna antena, 2 antenska platforma, 3 proširenje platforme, 4 mjerne šipke, 5 prijammnik, 6 stativ, 7 antenski kabel, 8 kompas

Kôd C/A (Clear/Acquisition, Clear/Access ili Coarse/Access) manje je točan kôd, moduliran samo na frekvenciji L_1 i dostupan svim opažačima. Kôd P (Precise-code) precizniji je, moduliran

na oba noseća vala frekvencije L_1 i L_2 , a često se zamjenjuje nepoznatim kôdom Y radi ometanja neovlaštenih korisnika.

Od jednostrukih faznih razlika moguće je stvoriti dvostruke, kojima se uklanjaju i pogreške sata u prijammniku, a od dvostrukih i trostruke fazne razlike kojima se uklanjaju skokovi u cijelom broju valnih duljina.

Teorijski je moguć i treći način mjerenja koji je prošao fazu ispitivanja, tj. princip radiointerferometrijske metode VLBI, upotrebljavan za mjerenja prema kvazarima. Radi se o određivanju duljina baze pomoću radiointerferometrije na temelju vremenskog pomaka primljenih radiovalova od dalekih zvijezda (kvazara) na dva različita stajališta.

Primjena i točnost sustava GPS. Sustav GPS primjenjuje se u geodeziji i navigaciji. Upotrebom kôda P u geodeziji može se postići točnost od $\pm 3 \dots \pm 5$ m na osnovi pojedinačnog određivanja, ali u vremenu mnogo kraćem od trajanja doplerskog mjerenja. Točnost relativnih određivanja od $1 \cdot 10^{-6}$ postiže se za samo jedan sat, a točnost od $1 \cdot 10^{-7}$ primjenom kôda P za samo deset minuta. Pozicija broda može se odrediti s točnošću od 10 m upotrebom kôda C/A.

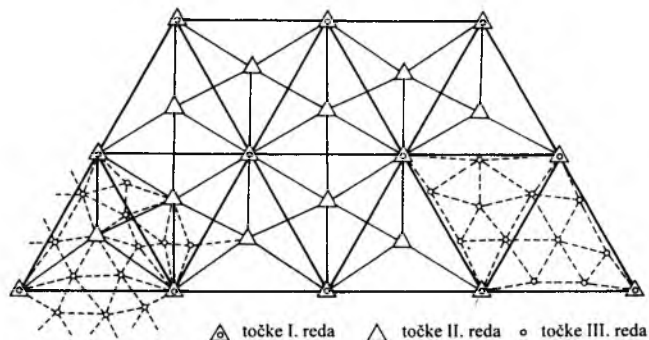
Sustav WGS 84 (Svjetski geodetski konvencionalni terestrički sustav) realiziran je na osnovi doplerskih mjerenja. Prema najnovijim spoznajama ishodište mu je s obzirom na centar mase Zemlje pomaknuto $\sim 0,5$ m. Točnost tog koordinatnog sustava iznosi ~ 1 m.

U geodeziji se primjenjuje samo mjerenje faznih razlika (jednadžba 29). Tim se mjerenjem dobivaju koordinatne razlike točaka, odnosno prostorne duljine. Određivanjem geocentričnih koordinata jedne točke i postavljanjem jednog prijammnika na tu točku mogu se dobiti geocentrične koordinate ostalih točaka uz pomoć drugih prijammnika. Ta je metoda pouzdana ne samo za stvaranje osnovnih geodetskih mreža, nego se planira njezina upotreba i u katastarskoj izmjeri. Ako se jedan uređaj postavi u središte regije, mogu se drugim uređajem, i bez dogledanja, odrediti koordinate ostalih točaka na terenu, a s tih se točaka elektroničkim tahimetrom može snimiti čitav teren. Sustav GPS ne samo da konkurrira konvencionalnim metodama nego daje mogućnost određivanja velikih duljina (mjerila mreže, udaljenost između otoka i kopna itd.) bez skupih i golemih radioteleskopa. Primjenom doplerskih mjerenja i sustava GPS moguće je ostvariti prostorni koordinatni sustav i mjerenjima ubrzanja sile teže riješiti mnoga pitanja u geodeziji. Sustavom GPS može se izbjeći načelo razvijanja mreža koje je poznato pod nazivom iz velikog u malo i koje se do sada primjenjivalo u osnovnim trigonometrijskim radovima.

KLASIČNE METODE USPOSTAVLJANJA TRIGONOMETRIJSKIH MREŽA

Već prema obliku i veličini teritorija zemlje, primjenjivale su se dvije metode razvijanja triangulacije: pomoću površinske trokutne mreže i mreže lanaca (v. *Bazisne mreže*, TE I, str. 699).

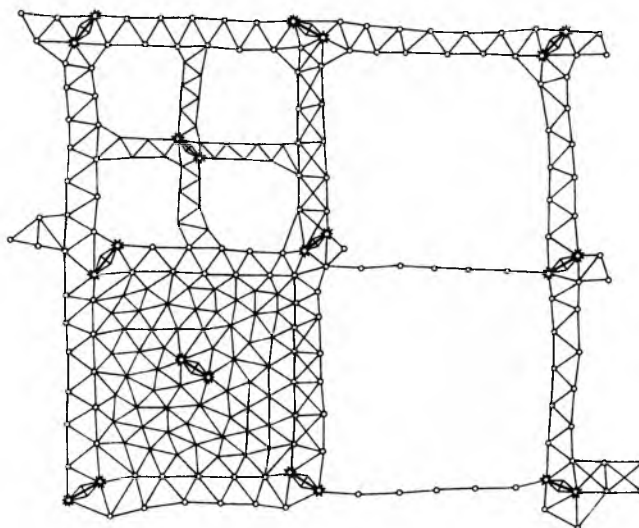
Površinska trokutna mreža prekriva cijeli državni teritorij mrežom trokuta (sl. 8). Zbog velikih troškova, ograničenih tehničkih sredstava, nedovoljnog kadrovskog potencijala, te nemogućnosti zajedničkog izjednačenja, u velikim zemljama takav način razvijanja mreža nije bio prikladan, pa se primjenjivala *mreža lanaca* uzduž meridijana i paralela s njihovom prosječnom duljinom od 200 km. Na mjestu presjeka lanca mjerene su astro-



Sl. 8. Razvijanje umetnutih redova mreže

nomske koordinate točaka (širina i duljina), azimuti i duljine stranica radi orijentacije i dobivanja mjerila mreže. Točke mreže na kojima su izmjerene astronomska širina, duljina i azimut nazivaju se *Laplaceovim točkama*.

Trigonometrijska mreža I. reda skup je međusobno umreženih i stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini s određenim horizontalnim i visinskim položajem u jedinstvenom koordinatnom sustavu s prosječnom udaljenošću točaka od ~ 30 km. Ona je određena reljefom terena, Zemljinom zakrivljenošću, optičkim mogućnostima instrumenata i meteorološkim uvjetima. Lanci su najčešće sastavljeni od trokuta koji se nižu jedan na drugi i od četverokuta s obje dijagonale, a rjeđe od naslonjenih središnjih sustava i dva reda trokuta (sl. 9).



Sl. 9. Mreža razvijena sustavom lanaca i poligonometrije

Daljnja se proglašivanja mreže izvode po načelu iz velikog u malo. Tako je *trigonometrijska mreža II. reda* skup stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini uklopljenih u mrežu I. reda i s pojedinačno ili skupno određenih koordinatama s prosječnom udaljenošću točaka od ~ 18 km. Jednako su tako točke *trigonometrijske mreže III. reda* uklopljene u mrežu II. reda s prosječnom udaljenošću od ~ 12 km, a točke *trigonometrijske mreže IV. reda* uklopljene u mrežu III. reda s prosječnom udaljenošću od $\sim 2,5$ km.

Trigonometrijske mreže I. reda imaju međunarodno značenje, kako zbog određivanja oblika, izmjera i fizikalnih svojstava Zemlje, tako i zbog ujedinjavanja kartografskih radova države. Zbog toga je *Međunarodna asocijacija za geodeziju* odredila mjerila koja moraju ispuniti mreže I. reda:

- 1) srednja pogreška izjednačenog pravca na stajalištu manja je od $\pm 0,4''$;
- 2) pogreška zatvaranja trokutova manja je od $\pm 2,5''$;
- 3) srednja relativna pogreška krajnje duljine bazične mreže manja je od $1 : 400\,000$;
- 4) srednja relativna pogreška izmjerene duljine koja zamjenjuje osnovnu duljinu ili krajnju duljinu bazične mreže manja je od $1 : 300\,000$;
- 5) srednja relativna pogreška izmjerene duljine u trigonometrijskoj mreži manja je od $1 : 200\,000$;
- 6) srednja relativna pogreška u položaju susjednih triangulacijskih točaka manja je od $1 : (100\,000 \cdot \sqrt{s/30})$, s je duljina triangulacijske stranice u km;
- 7) astronomska širina (φ) određena na Laplaceovim točkama ima srednju kvadratnu pogrešku do $\pm 0,3''$, a astronomska duljina (λ) do $\pm 0,5''$;
- 8) mjereni astronomski azimut (A) ima srednju pogrešku manju od $0,5''$ do $0,7''$ (dopušta se srednja pogreška izraza $A - \lambda \cdot \sin \varphi$ na Laplaceovim točkama manja od $\pm 1''$);
- 9) srednja pogreška azimuta bilo koje triangulacijske stranice manja je od $\pm 2''$.

Posebno je važna gustoća umetnutih točaka mreže razvrstanih u redove. Kako se danas za snimanje terena i izradbu karata različitog mjerila uglavnom primjenjuje fotogrametrija s aerotriangulacijom, gustoća točaka određena je mjerilom topografske

karte i uvjetima aerofotogrametrije. Ako se ne primjenjuje aeri-triangulacija, za određivanje orijentacijskih točaka upotrebljava se poligonometrija oslonjena na državnu mrežu.

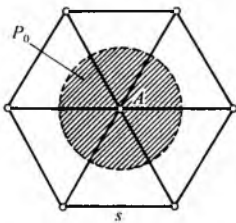
Gustoća točaka osnovnih geodetskih mreža. Radi lakšeg razmatranja gustoće mreže uzima se mreža istostraničnih trokuta s duljinom stranice triangulacije s i površinom $P = (\sqrt{3}/4)s^2$. Jedna točka triangulacije A omeđena je sa 6 trokuta (sl. 10) i njoj pripada površina P_0 , koja obuhvaća $1/3$ površine svih 6 trokuta ($1/3$ površine svakog trokuta):

$$P_0 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 = 0,86 s^2, \quad (30)$$

odnosno

$$s = 1,15 \sqrt{P_0}. \quad (31)$$

Pomoću izraza (31), ako su poznati uvjeti aerofotogrametrije i mjerilo karte, lako se računaju duljine trigonometrijskih stranica, odnosno potreban red mreže. Za mjerilo karte 1: 10 000 i 1: 25 000 treba prosječno jedna točka na $50 \dots 60 \text{ km}^2$, za mjerilo 1: 5 000 jedna točka na $20 \dots 30 \text{ km}^2$, a za mjerila 1: 2 000 i krupnija jedna točka na $5 \dots 15 \text{ km}^2$. Za snimke terena mjerila 1: 10 000 i 1: 25 000 potrebna je duljina triangulacijskih stranica $s = 1,15 \sqrt{50}$ do $1,15 \sqrt{60} = 8 \dots 9 \text{ km}$, za mjerilo 1: 5 000 duljina $s = 5 \dots 6 \text{ km}$ i za mjerilo 1: 1 000 do 1: 2 000 duljina $s = 2 \dots 5 \text{ km}$.



Sl. 10. Gustoća točaka geodetske mreže

Duljina stranica triangulacije IV. reda naše državne mreže, koja je u izradbi, iznosi $1 \dots 4 \text{ km}$, pa je to dobra osnova za sva aerofotogrametrijska snimanja. Za osnovnu državnu kartu mjerila 1: 10 000 dovoljna je mreža III. osnovnog reda (misli se na fotogrametrijsku metodu). Potrebna točnost triangulacije I. reda već je navedena u preporukama Međunarodne asocijacije za geodeziju. Zahtjev za točnošću mreža nižih redova može se dobiti iz razmatranja točnosti geodetskih planova. Nekad je, npr., potrebno da se koordinate točke P_3 na planu 1: 10 000 odrede s točnošću od $\pm 0,1 \text{ mm}$, a točka P_3 nalazi se na pravcu i u sredini između točaka P_1 i P_2 drugog popunjavajućeg reda. Budući da duljina $\pm 0,1 \text{ mm}$ na planu iznosi $\pm 1 \text{ m}$ na terenu, točke P_1 i P_2 treba odrediti s točnošću većom od $\pm 1 \text{ m}$, jer se točka P_3 oslanja na P_1 i P_2 . Položajne pogreške točaka P_1 i P_2 određuju točnost točke P_3 zajedno s mjerenjima radi dobivanja njezinih koordinata. Pretpostavi li se da relativna pogreška točke P_1 s obzirom na točku P_2 iznosi $\pm 0,5 \text{ m}$, slijedi da duljinu stranice treba poznavati unutar srednje kvadratne pogreške Δs koja iznosi $\pm 0,5 \text{ m}$. Tada srednja relativna pogreška stranice s duljine 13 km iznosi

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{0,5 \text{ m}}{13000 \text{ m}} = \frac{1}{26000} \approx 3,846 \cdot 10^{-5}. \quad (32)$$

Pojavom koordinatnog katastra zahtjevi glede točnosti koordinata mreže znatno se mijenjaju. U nekim pokrajinama u Njemačkoj traži se, npr., točnost koordinata od $\pm 1,5 \dots 2 \text{ cm}$, bez obzira na red mreže.

Projektiranje trigonometrijskih mreža. Da bi se razvile kvalitetne trigonometrijske mreže, potrebno je napraviti optimalni projekt. On treba zadovoljiti više uvjeta s obzirom na iskorisćenje mreže, dogledanje točaka i sl., a od tehničkih se uvjeta zahtijeva točnost i pouzdanost koordinata točaka. Te statističke kriterije moguće je odrediti u fazi planiranja mreža (osobito manjih) bez prethodnih mjerenja. Pretpostavke za to jesu približna konfiguracija mreže, očekivana točnost mjerenih parametara i plan opažanja. S te tri ulazne informacije mogu se na osnovi izjednačenja procijeniti očekivana točnost i pouzdanost mreže, te mijenjati ulazni podatci ili upotrebljavati metode optimiranja mreža. Oba su pristupa ekonomična pri projektiranju manjih

mreža. Prilikom projektiranja državnih mreža, zbog opsega računanja, a pogotovo u fazi idejnih projekata, primjenjuju se i klasične metode projektiranja mreža.

Način izradbe projekta ovisi o redu trigonometrijske mreže, odnosno o tome radi li se o površinskoj ili umetnutoj mreži, zatim o veličini teritorija na kojem se proteže mreža i sl. Svaku mrežu točaka povezuju mjerene kutne i linearne veličine, kojima točnost ovisi o primijenjenom instrumentariju i metodi rada. Instrumentarij obično ima iskustvom određenu točnost, koja se u planiranim mjerenjima može postići.

Kvaliteta mreže ovisi o točnosti i pouzdanosti elemenata mreže. Na osnovi točnosti mjerenih podataka treba unaprijed ostvariti potrebnu *točnost elemenata mreže*, odnosno točnost koordinata, duljina, pravaca azimuta ili koje druge funkcije izjednačenih koordinata. Osim točnosti, važna je i *pouzdanost elemenata mreže*. Ona se odnosi na mogućnost nalaženja i uklanjanja grubih pogrešaka u mjerenim elementima mreže (unutrašnja pouzdanost mreže). Vanjska se pouzdanost mreže odnosi na moguće ispitivanje što manjeg utjecaja malih grubih pogrešaka koje se ne mogu otkriti na izjednačenim elementima mreže.

Godinama se primjenjivao *sustav razvijanja mreža* prema načelu iz velikoga u malo. Prvo se razvila osnovna mreža s velikim duljinama stranica, a onda se unutar njih klasičnim ili dinamičkim postupkom provodilo *stupnjevano progušćivanje*.

U *klasičnom postupku* točke višeg reda uzimaju se kao nepogrešne, a njihove koordinate kao nezavisne veličine. Novim se mjerenjima utvrđuje mogu li se stare točke unutar određenih granica smatrati nepromijenjenima. Ako je tako, onda se nova mjerenja uklapaju u mrežu koordinata starih točaka. Koordinate dobivene daljim progušćivanjem smatraju se nepogrešivima i na njih se vežu mreže nižih redova (*hijerarhijsko načelo razvijanja mreža*). *Dinamički postupak* progušćivanja ispravan je teorijski pristup, u kojem se stara i nova mjerenja (višeg i novog nižeg reda mreže) izjednačuju. Stare točke obično mijenjaju koordinate, što ovisi o redovima umetnutih mreža. Koordinate su podložne vremenskim promjenama pri svakom izjednačivanju mreže umetnutih točaka, pa se zbog toga i nazivaju dinamičke mreže stalnih geodetskih točaka. Te promjene s vremenom postaju sve manje.

U hijerarhijskom pristupu manji je utrošak vremena pri izjednačivanju mreža i nema promjene koordinata u državnoj izmjeri, iako je teorijski nepravilno zasnovan. Međutim, dinamički je postupak mnogo skuplji i uzrokuje stalnu promjenu koordinata točaka viših redova. Zbog toga se ne primjenjuje u državnoj izmjeri, ali su moguća i kompromisna rješenja.

Optimiranje geodetskih mreža. Radi optimiranja geodetskih mreža glede točnosti, pouzdanosti i ekonomičnosti razvijeno je više matematičkih metoda za različite faze projekta. To u velikim mrežama uvelike povećava opseg računanja, pa je tada ekonomičnije primijeniti jednostavnu metodu proba, gdje se polazi od izabranog instrumentarija i metode opažanja kojima je točnost mjerenih veličina dana u obliku matrice težine i približnom konfiguracijom mreže (približne koordinate točaka mreže) koja se zadaje konfiguracijskom matricom. Izjednačenjem se dobiva kovarijacijska matrica nepoznanica izjednačenih mjerenih veličina, odnosno popravaka, a iz njih elementi za ocjenu točnosti, te dijelovi redundancije na osnovi kojih se ispituje projekt mreže (konfiguracija). Ako se ne dobiju očekivani rezultati, mijenja se plan opažanja, položaj točaka koji ovisi o konfiguraciji terena i planirani instrumentarij, te se provodi ponovno izjednačenje s novim podacima. Promjena plana opažanja i planiranog instrumentarija (rjeđe i teže u klasičnim metodama konfiguracije mreže) i ponavljanje izjednačenja poduzimaju se dok se ne ostvari određeni cilj.

Pritom se primjenjuju dva postupka. U prvom se u izjednačenje uzimaju sve mjerene veličine, pa se na osnovi postignute točnosti i pouzdanosti mreže iz plana mjerenja izbacuju one veličine koje povezuju mjesta mreže gdje je točnost i pouzdanost u pozitivnom smislu prekoračena. Drugi je postupak obrnut, a polazna je točka minimalni plan opažanja. Nakon izjednačenja na slabim točkama mreže mijenja se plan opažanja dok se ne postigne potrebna točnost i pouzdanost mreže.

Kriterijske matrice. Izjednačenjem mreže dobivaju se kovarijacijske matrice nepoznanica koje su osnova za sva razmatranja točnosti mreže. Međutim, u fazi izradbe projekta mreže polazi se

od potrebne točnosti koordinata točaka. Ona se iskazuje uvođenjem kriterijskih matrica koje pokazuju homogenost i izotropiju mreže.

Često se od kriterijskih matrica zahtijeva homogenost i izotropija, tj. elipse pogrešaka na točkama jednake veličine i kružnog oblika. Obično se primjenjuju jedinične matrice koje zadovoljavaju kriterije homogenosti i izotropije, ali ne dopuštaju korelaciju između točaka, zatim dijagonalne matrice koje dopuštaju različitu točnost točaka mreže i Taylor-Karmanove matrice u kojima su apsolutne elipse pogrešaka homogene i izotropne, a koordinate točaka međusobno korelirane.

Nakon izjednačenja mreže uspoređuje se kriterijska matrica s kovarijacijskom matricom dobivenom izjednačenjem. Elipse pogrešaka koordinata točaka koje su dobivene na osnovi kriterijske matrice morale bi biti manje od elipsa pogrešaka dobivenih izjednačenjem mreže iz kovarijacijske matrice. Tada je, s obzirom na točnost, mreža dobro projektirana.

Kovarijacijske matrice slobodnih mreža ovise o datumu mreže. Sve upotrijebljene matrice trebaju se odnositi ili transformirati na isti datum mreže, pa se tek potom uspoređivati radi optimiranja mreža.

Pri optimiranju mreža treba zahtjeve projekata matematički formulirati kao funkciju cilja koja uključuje zahtjev za točnošću, pouzdanošću i ekonomičnošću uspostavljene mreže. Ti su zahtjevi proturječni (npr. točnost i financijski izdatci) i moraju se tražiti kompromisna rješenja, za što ima više metoda, od standardnih algoritama linearnih i nelinearnih optimiranja, preko aproksimacija na osnovi metode najmanjih kvadrata, do ponovljenih simuliranih izjednačenja.

LIT.: F. R. Helmert, *Theorien der höheren Geodäsie*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962. – N. Čubranić, *Viša geodezija I*. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1974. – N. Čubranić, *Viša geodezija II*. Tehnička knjiga, Zagreb 1974. – A. Muminagić, *Viša geodezija I*. Građevinski fakultet, Sarajevo 1981. – L. P. Pelinen, *Theoretische Geodäsie*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1982. – E. W. Grafarend, *F. Sanso*, *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1988. – G. Seeber, *Satellitengeodäsie*. Walter de Gruyter, Berlin-New York 1989. – A. Bilajbegović, B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, *Osnovni geodetski radovi – suvremene metode – GPS*. Tehnička knjiga, Zagreb 1991. – B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins, *GPS – Theory and Practice*. Springer-Verlag, Wien-New York 1992.

A. Bilajbegović

TUNEL, podzemna građevina koja služi za prolaz prometnica te provođenje vode ili komunalnih instalacija kroz prirodne ili umjetne zapreke ili ispod njih. U širem smislu tunelom se smatra i veći podzemni prostor za energetska ili druga postrojenja, garaže, trgovačke prostore, skladišta, skloništa, sportske objekte, trajne rudarske podzemne prostorije i podzemna odlagališta opasnog otpada.

Zbog povećanja broja stanovnika, širenja gradova, sve većih potreba za pitkom vodom, energijom i prijevozom, te sve većeg komunalnog standarda, potrebno je više prometnih, energetskih i komunalnih objekata. S druge strane, nedostatak rekreacijskih površina i širenje pješačkih zona u gradovima, izraženija ekološka svijest, nastojanje da se spriječi buka i vibracije, te zaštiti priroda nameću potrebu da se, gdje je to moguće, mnogi objekti izgrađuju podzemno.

U velikim se gradovima gradi podzemna željeznica kao jedino rješenje za učinkovit javni prijevoz. Povećani automobilski promet zahtijeva povoljnije elemente trase i izgradnju niza obilaznica oko gradova, a nove željezničke pruge s brzinama od 200 km/h ili većim traže ispruženiju trasu i manje padove, što je moguće postići tek izgradnjom brojnih tunela. U posljednje se vrijeme u gradovima rješava dovodenje pitke vode i odvođenje otpadnih voda tunelima. Zbog svega je toga gradnja tunela kao sredstva za svladavanje prirodnih i umjetnih zapreka dobro gospodarsko i tehničko rješenje.

U neolitskoj je kulturi kamen bio osnovni materijal za izradbu oružja i oruda. Do kremenja se dolazilo kopanjem dubokih rovova kroz pokrovne naslage. U

Egiptu i Španjolskoj podzemni su se hodnici kopali do dubine od nekoliko stotina metara. Iskapano se tako da se stijena prvo zagrijavala vatrom, te naglo hladila vodom, a zatim se razbijala klinovima, dljetima, čekićem i maljem (što je rudarski znak koji simbolizira stari način rada). Prvi graditeljski tuneli bile su kraljevske grobnice u Egiptu i Indiji te astečke grobnice u Americi.

U starom su vijeku tuneli služili uglavnom za vodoopskrbu. Na području od Perzije do Egipta kopali su se ispod pustinje podzemni rovovi za dovod vode dugi i do 12 km. U Jeruzalemu je ←1000. godine izgrađen tunel za gradski vodovod dug 537 m. Na otoku Samosu građen je vodovodni tunel dug 1000 m (←728–699). Oko ←600. izgrađen je tunel ispod Eufrata dug 900 m i širok 4,6 m, a služio je za komunikaciju između dvora i hrama. Korito Eufrata bilo je preloženo, radovi su obavljani u otvorenoj jami, a zidovi i svodovi tunela izgrađeni su od opeke u mortu od asfalta. Između Napulja i Pozzuolija izgrađen je ←36. godine cestovni tunel dug 1000 m i širok 8 m.

Velik je pothvat u starom vijeku bila gradnja tunela dugog 5 640 m kroz brdo Salviano za odvodnjavanje jezera Fuccino. Probijanje tunela s 30 000 radnika trajalo je od 44. do 54. godine. Tunel se počeo graditi istodobno iz 40 pristupnih rovova, što je u to doba bio neobičan uspjeh tunelogradnje i tehnike trasiranja.

Vodovodni sustav Atene bio je velikim dijelom građen tunelno. Gradnja je počela u ←VI. st., a završena je tek u II. st. za vrijeme rimskog cara Hadrijana. Za turske vladavine taj je objekt napušten, a 1840. ponovno je proradio. Godine 1925. atenski je vodovod rekonstruiran i proširen, a u njegov je sastav ušao i stari tunel, koji je i danas u upotrebi.

U nas je kod Novalje na Pagu u I. ili II. st. bio izgrađen vodovodni tunel dug ~1200 m. U Splitu je za dovod vode u Dioklecijanovu palaču bilo izgrađeno nekoliko tunela, od kojih je najdulji imao ~1000 m.

Među važnije sustave podzemnih hodnika i dvorana ubrajaju se katakombe izgrađene u Rimu u vrijeme progona kršćana. Nakon pada Rimskog Carstva zastoje u gradnji tunela trajao je kroz cijeli srednji vijek.

Primjenom baruta dobila je tunelogradnja novu poticaj. U XVII. i XVIII. st. rijeke i kanali bili su glavne prometne arterije, pa su se tada tuneli gradili uglavnom za potrebe riječnog prometa. U XIX. st. tu je ulogu preuzela željeznica, a u XX. st. i cesta.

Prvi plovni (brodarski) tunel duljine 164 m, širine 6,7 i visine 8,2 m izgrađen je 1681. na dionici kanala Languedoc u Francuskoj, a spajao je rijeku Garonnu sa Sredozemnim morem. Plovni su se tuneli gradili zatim i u Engleskoj, Njemačkoj, SAD i Japanu. Među najvećim se plovnim tunelima ističe tunel Rove s duljinom 7 118 m i širinom 22 m. Građen je od 1911. do 1922. na kanalu koji spaja rijeku Rhônu i Marscille. Najvećim građevnim pothvatima prve polovice XIX. st. pripada i gradnja tunela (1825–1841) ispod Temze u Londonu, duljine 450 m (graditelj M. I. Brunel).

Pronalasci parnog stroja i bušačkog čekića na stlačeni zrak radikalno su u XIX. st. promijenili način gradnje tunela. Velik zamah u gradnji tunela započeo je s otvaranjem prvih željezničkih pruga. Prvi željeznički tunel duljine 1190 m gradio je od 1826–1830. G. Stephenson na pruzi Liverpool–Manchester.

U drugoj polovici XIX. st. probijaju se mnogi alpski željeznički tuneli. Prvi je među njima bio dvokolosiječni tunel *Mont Cenis (Fréjus)* između Francuske i Italije, koji je građen od 1857. do 1871. U početku se bušilo ručno, miniralo se barutom, a srednje mjesечно napredovanje iznosilo je tek 20 m. Kada se 1861. prvi put u gradnji tunela počelo bušiti pomoću stlačene zraka, postignuto je prosječno mjesечно napredovanje od 60 m. Najveći tunel koji se u to doba gradio (1898–1906) bio je jednokolosiječni tunel *Simplon I* dug 19803 m. Pri gradnji tunela posebne je teškoće zadavala visoka temperatura, velik dotok vode, vrući izvori, a posebno veliko brdsko opterećenje na kraćim dionicama i spontano izbacivanje preopterećene stijenske mase u tunel (gorski udari).

U nas je pruga Karlovac–Rijeka građena od 1869. do 1873, a na njoj je od 14 tunela najdulji Kupjak (1223 m). Godine 1900. izgrađena je tunelska petlja Brajdica (Sušak) duga 1838 m, a 1920. tunel Sinac na pruzi Ogulin–Gospić dug 2274 m.

Povećani promet u velikim gradovima potaknuo je izgradnju podzemnih željeznica u Londonu (1863), Glasgowu (1895), Budimpešti (1896), Parizu i Bostonu (1898), Berlinu (1902) i New Yorku (1904).

Dvadeseto stoljeće donijelo je znatne novine u miniranju, mehanizaciji i brzini rada te kapacitetu i pokretnosti vozila za utovar i odvoz materijala. Primjenom teleskopske oplote i betonskih pumpi ubrzala se izradba betonskih obloga. Novi načini podgrađivanja (štrcani beton, sidra, čelična mreža i čelični lukovi) omogućili su iskop u punom profilu te primjenu usavršene mehanizacije u tunelu. Konstruirani su strojevi za izradbu tunela malih profila i razvila se metoda utiskivanja cijevi.

Primjena hidroenergije za proizvodnju električne energije uzrok je gradnje dovodnih hidrotehničkih tunela diljem svijeta. U Hrvatskoj su prvi hidrotehnički tuneli za potrebe hidroelektrana građeni od 1947. do 1952. u sklopu hidroenergetskog sustava Vinodol.

S razvojem automobila kao novog prijevoznog sredstva grade se podvodni tuneli za automobilski promet, npr. 1927. tunel Holland ispod rijeke Hudson u New Yorku (2 820 m), zatim 1933. tunel ispod rijeke Schelde u Antwerpenu, 1940. ispod rukava Rajne u Rotterdamu itd.

Poslije Drugoga svjetskog rata naglo se razvija cestovni promet, grade se autoceste, pa i cestovni tuneli, među kojima su s tehničkog stajališta najzanimljiviji tuneli kroz Alpe. Prvi veliki cestovni tunel bio je onaj ispod Mont Blanca, koji je u duljini od 11 600 m sagrađen 1965. godine. Za razvoj tunelogradnje važan je i tunel St. Gotthard dug 16 300 m. Završen je 1980. a odlikovao se nizom tehničkih novina s obzirom na sigurnosnu, ventilacijsku i drugu opremu.

U Hrvatskoj je najdulji cestovni tunel Učka (5 062 m), završen 1981. godine. Na obilaznici oko Rijeke izgrađeni su tuneli ukupne duljine 2 278 m. Na novoj autocesti Rijeka–Karlovac predviđeno je 8 tunela ukupne duljine 6 042 m, a najdulji tunel Tuhočić (2 141 m) probijen je 1990. godine. U Splitu je 1979. otvoren cestovni gradski tunel ispod Marjana dug 840 m.

U XX. st. rekordnu je duljinu postigao željeznički tunel Seikan u Japanu, koji povezuje otoke Honshu i Hokkaido. Ukupna je duljina tunela 53,85 km, od čega su 23,3 km ispod mora. Velik je građevni pothvat tunel ispod La Manchea. On se sastoji od dva prometna tunela svijetlog otvora 7,6 m i od servisnog tunela svijetlog otvora 4,8 m. Ukupna je duljina tunela 50,5 km, a od toga je pod morem 37,9 km. Radovi na gradnji započeli su 1986. servisni je tunel probijen 1990. a radovi su završeni 1994. godine.

R. Simić