**ANALITIČKA GEOMETRIJA,** grana geometrije u kojoj se geometrijski objekti istražuju metodama matematičke analize. Obično se pod analitičkom geometrijom razumijeva uže područje te nauke, tj. onaj njezin dio u kojemu se geometrijski objekti istražuju samo uz pomoć elementarne algebre.

**1. Uvod.** Geometrija i analiza dva su osnovna područja matematike. Geometrija promatra likove i figure i proučava njihova svojstva i međusobne odnose, a osnov analize čine brojevi i njihovi odnosi. No iako su objekti ovih dvaju osnovnih matematičkih područja posve raznorodni a metode istraživanja u njima bitno različite, među njima ipak postoji uska veza, koja se očituje u tome što unutarnja logička struktura odnosa među objektima jednog od tih područja odgovara velikim dijelom unutarnjoj strukturi odnosa među objektima drugog od tih područja. Zbog ove formalne sličnosti tih dviju teorija, geometrija se može istraživati analitičkim metodama, i to tako da se geometrijski objekti zamijene korespondentnim aritmetičkim, odnosno algebarskim objektima.

Analitička je geometrija otkrivena kada je nastala nova metoda spajanjem ideje koordinatnog sistema, poznate već u Starom vijeku, s idejom primjene algebre na geometriju. Tu je metodu prvi razvio francuski filozof i matematičar René Descartes (lat. Cartesius, *Kartezij*, 1596—1650) u svom djelu *La géométrie*, koje je izašlo 1637 kao primjena općih filozofskih ideja što ih je Descartes razvio u filozofskoj raspravi *Discours de la méthode*. Gotovo istodobno, a nezavisno od Descartesa, analitičku je geometriju otkrio i francuski pravnik i matematičar Pierre Fermat (1601 —1665). Ova njegova otkrića objavljena su tek poslije njegove smrti u djelu *Ad locos planos et solidos isagoge*.

## ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI

**2. Orijentacija i mjerenje dužina.** Jedna od bitnih razlika između elementarne planimetrije, odnosno stereometrije, i analitičke geometrije sadržana je u tom što se u elementarnoj geometriji geometrijske veličine uzimaju u apsolutnom smislu, tj. bez obzira na moguću orijentaciju geometrijskog objekta, dok se u analitičkoj geometriji, uzima u obzir i orijentacija. Pokazalo se da za one geometrijske tvorevine koje se uopće mogu orijentirati postoje dvije različite orijentacije. Prema konvenciji uobičajenoj u analitičkoj geometriji, kvalitativna razlika ovih dviju mogućih orijentacija dolazi do izražaja u predznaku sadržaja (duljine, površine, obujma itd.) promatrane orijentirane geometrijske tvorevine. Zato mjerni brojevi geometrijskih veličina u analitičkoj geometriji mogu biti i pozitivni i negativni.

Neki dani pravac bit će orijentiran ako je na njemu od dva moguća smjera jedan odabran kao pozitivan. Takav pravac zvat će se tada još i *zraka.*

Ako su $A$ i $B$ bilo koje dvije tačke pravca, one na njemu određuju dužinu koja se označuje sa $\overline{AB}$. Ako je pravac orijentiran, smatrat će se da je dužina $\overline{AB}$ pozitivno orijentirana ako se smjer od $A$ prema $B$ podudara s pozitivnim smjerom pravca. U protivnom će se slučaju dužina $\overline{AB}$ smatrati negativno orijentiranom. Ako su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ bilo koje dvije dužine, uvijek je moguće dužinu $\overline{AB}$ izmjeriti dužinom $\overline{CD}$. Broj koji je rezultat tog mjerenja označit će se sa $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ i zvati mjerni broj dužine $\overline{AB}$ s obzirom na jediničnu dužinu $\overline{CD}$, ili kraće, *duljina* dužine $\overline{AB}$. Ako dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ leže na istom orijentiranom pravcu, onda će se mjernom broju $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ dati pozitivan ili negativan predznak, već prema tome da li su dužine jednako ili protivno orijentirane.

Na nekom se pravcu $p$ odaberu dvije tačke $O$ i $J$. Tačka $O$ nazvat će se početnom, a tačka $J$ jediničnom. Pravac $p$ će se orijentirati tako da dužina $\overline{OJ}$ bude na njemu pozitivna. Time je pravac $p$ postao *os.* Sve dužine na tom pravcu mjerit će se jediničnom dužinom $\overline{OJ}$. Ako je $\overline{AB}$ bilo koja dužina na nekoj osi, u daljnjem će se razmatranju mjerni broj dužine $\overline{AB}$ kraće označivati samo sa $AB$, tj. $\frac{\overline{AB}}{\overline{OJ}} = AB$.

Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ razlikovat će se samo po orijentaciji, pa je dakle uvijek

$$AB = -BA \text{ ili } AB + BA = 0.$$

No vrijedi i općenitije: Ako su $A$, $B$, $C$ bilo koje tri tačke neke osi, uvijek vrijedi *Chaslesova relacija:*

$$AB + BC + CA = 0. \qquad (2.1)$$

Potpunom indukcijom može se tada dokazati i ova tvrdnja: Ako su $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ bilo koje tačke neke osi i leže na njoj u bilo kojem poretku, tada uvijek vrijedi

$$T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_4 + \ldots + T_{n-1}T_n + T_nT_1 = 0.$$

Za bilo koje četiri tačke $A$, $B$, $C$ i $D$ neke osi uvijek vrijedi:

a) *Eulerova relacija*

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0; \qquad (2.2)$$

b) $AB \cdot BC \cdot CA - BC \cdot CD \cdot DB + CD \cdot DA \cdot AC - DA \cdot AB \cdot BD = 0;$

c) $AB \cdot CD^2 + BC \cdot AD^2 + CA \cdot BD^2 + AB \cdot BC \cdot CA = 0$

**3. Djelišni omjer i dvoomjer tačaka na pravcu.** Neka su na nekoj osi $p$ odabrane bilo koje dvije tačke $A$ i $B$ kao osnovne. Ako je $T$ bilo koja treća tačka osi $p$, onda se kaže da ta tačka dijeli dužinu $\overline{AB}$ u *djelišnom omjeru* $\mu$, ili kraće, u *omjeru* $\mu$, ako je $\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \mu$.

Taj djelišni omjer simbolički se piše i ovako: $\mu = (ABT)$. Ako je $\mu < 0$, tačka $T$ *dijeli dužinu AB iznutra,* a u slučaju $\mu > 0$, tačka $T$ *dijeli dužinu AB izvana.*

Neka su na nekoj osi $p$ po volji odabrane četiri tačke $A$, $B$, $C$, $D$, i neka je dan jedan određen njihov redoslijed, tj. jedna njihova permutacija. Reći će se da te tačke u danom poretku čine ***četvorku tačaka,*** i pisat će se uvijek prema danom redoslijedu. Na taj se način četiri po volji odabrane tačke osi $p$ mogu poredati u $4! = 24$ različitih četvorki. Neka je dakle dana četvorka $ABCD$. Tačke $C$ i $D$ dijelit će dužinu $AB$ u djelišnim omjerima

$$\mu_1 = (ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}; \ \mu_2 = (ABD) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Kvocijent $\lambda = \mu_1 : \mu_2$ ovih dvaju omjera zove se *dvoomjer* ove (uređene!) četvorke tačaka $ABCD$ i bilježi se simbolički sa $(ABCD)$. Dakle je

$$\lambda = (ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}. \qquad (3.1)$$

Kaže se da je pri tom $A$, $B$ prvi par, a $C$, $D$ drugi par tačaka četvorke. $A$ i $D$ su *izvanje,* a $B$ i $C$ *unutarnje* tačke te četvorke. Vrijednosti pripadnih dvoomjera za 24 različite četvorke danih četiriju tačaka neće biti sve različite. Te četvorke mogu biti svrstane u 6 skupina, od kojih svaka skupina sadrži po 4 četvorke koje imaju istu vrijednost dvoomjera. Vrijedi, naime, ova tvrdnja: Vrijednost se dvoomjera ne mijenja ako oba para tačaka zamijene svoja mjesta ili ako istodobno unutar oba para tačaka tačke zamijene svoja mjesta. Prema tome je uvijek:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

U kojem se slučaju vrijednost dvoomjera mijenja promjenom redoslijeda tačaka i na koji način, razabira se iz ovih dviju tvrdnji:

Zamijene li svoja mjesta samo tačke prvog para ili samo tačke drugog para neke četvorke, produkt starog i novog dvoomjera jednak je jedinici, tj. uvijek je

$$(ABCD) \cdot (BACD) = 1, \qquad (ABCD) \cdot (ABDC) = 1. \qquad (3.2)$$

Zamijene li svoja mjesta samo unutarnje tačke ili samo izvanje tačke četvorke, zbroj starog i novog dvoomjera jednak je jedinici, tj. uvijek je

$$(ABCD) + (ACBD) = 1, \ (ABCD) + (DBCA) = 1. \qquad (3.3)$$

Dokaz prve od ovih tvrdnji slijedi na osnovu definicije (3.1), dok se druga dokazuje primjenom Eulerove relacije (2.2).

Iz (3.2) i (3.3) slijedi da će vrijednosti dvoomjera za spomenute skupine četvorki danih četiriju tačaka biti ove:

$$(ABCD) = \lambda; \ (ABDC) = \frac{1}{\lambda}; (ACBD) = 1 - \lambda;$$

$$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}; \ (ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}; \ (ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ako je dvoomjer $\lambda$ neke dane četvorke jednak $-1$, ona se zove *harmonička četvorka.*

Za bilo kojih pet tačaka $A, B, C, D, E$ nekog pravca vrijedi *Moebiusova relacija:*

$$(ABCD)\cdot(ABDE)\cdot(ABEC) = 1. \qquad (3.4)$$

**4. Koordinatni sistemi na pravcu.** Položaj tačke na nekom pravcu može se odrediti na više različitih načina, već prema tome kakvim se koordinatnim sistemima služimo. Odaberu li se na pravcu po volji dvije tačke, i to početna tačka $O$ i jedinična tačka $J$, dobit će se na tom pravcu *Kartezijev koordinatni sistem* u kojem je svakoj tački $T$ tog pravca pridružen realni broj

$$x = \frac{\overline{OT}}{\overline{OJ}} \qquad (4.1)$$

kao njegova Kartezijeva koordinata ili *apscisa.* Ovo pridruživanje apscise $x$ tački $T$ pravca obostrano je jednoznačno. Da tački $T$ pripada apscisa $x$, označit će se simbolički sa $T(x)$.

Ako su $T_1(x_1)$, $T_2(x_2)$ bilo koje dvije tačke pravca $p$ (sl. 1a), vrijedi prema (2.1) relacija:

$$\overline{OT}_1 + \overline{T_1T}_2 + \overline{T_2O} = 0, \text{ ili } \overline{T_1T}_2 = \overline{OT}_2 - \overline{OT}_1. \quad (4.2)$$

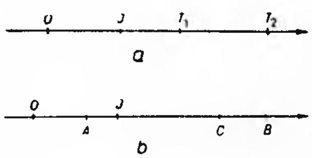
Udaljenost $d$ tačaka $T_1$ i $T_2$ je mjerni broj dužine $\overline{T_1T}_2$. Ako se jednadžba (4.2) podijeli jediničnom dužinom $\overline{OJ}$, dobiva se prema (4.1) za tu udaljenost relacija

$$d = x_2 - x_1.$$

I u *afinom koordinatnom sistemu* na pravcu odabiraju se na njemu kao fiksni elementi bilo koje dvije tačke, tj. *fundamentalne tačke* $A$ i $B$. Položaj neke tačke $T$ na tom pravcu određen je tada djelišnim omjerom

$$\mu = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} \qquad (4.3)$$

kao *afinom koordinatom* tačke $T$. I ovdje je relacijom (4.3) svakoj tački $T$ pravca jednoznačno pridružen konačni realni broj $\mu$ kao afina koordinata, s izuzetkom tačke $B$ kojoj pripadaju vrijednosti $\mu = \pm\infty$, i obratno, svakom realnom broju $\mu$ pridružena je neka određena tačka $T$ pravca $p$, s izuzetkom vrijednosti $\mu = 1$, kojoj je pridružena *beskonačno daleka tačka* pravca $p$. Ako su na nekom pravcu dani nezavisno Kartezijev i afini koordinatni sistem, pa pri tom fundamentalne tačke $A$, $B$ afinog sistema imaju u Kartezijevu sistemu apscisu $a$, odnosno $b$, veza između apscise i afine koordinate bilo koje tačke $T$ bit će dana relacijama



Sl. 1

$$\mu = \frac{x-a}{x-b}, \quad x = \frac{a-\mu b}{1-\mu}. \qquad (4.4)$$

U *projektivnom koordinatnom sistemu* na pravcu odabiraju se kao fiksni elementi bilo koje tri tačke $A$, $B$ i $C$. Svakoj tački $T$ pravca pridružuje se kao njezina *projektivna koordinata* dvoomjer

$$\lambda = (ABCT) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}. \qquad (4.5)$$

*Fundamentalnim tačkama* $A$, $B$ i $C$ pripadaju redom vrijednosti $\infty$, 0 i 1 kao njihove projektivne koordinate $\lambda$. Pripadaju li u nekom Kartezijevu sistemu na danom pravcu (sl. 1a) fundamentalnim tačkama $A$, $B$ i $C$ projektivnog sistema redom apscise $a$, $b$ i $c$, prijelaz od jednih koordinata na druge bit će dan jednadžbama

$$\lambda = \frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b},$$

$$x = \frac{b(c-a) - \lambda a(c-b)}{c-a-\lambda(c-b)}. \qquad (4.6)$$

**5. Projektivitet i involucija.** Neka su $p$ i $p'$ dva pravca na kojima su određeni Kartezijevi koordinatni sistemi. Svakoj tački $T(x)$ pravca $p$ pridružit ćemo jednu tačku $T(x')$ pravca $p'$, i obratno, svakoj tački $T'$ pravca $p'$ jednu tačku $T$ pravca $p$, pa ćemo reći da je ovo pridruženje tačaka projektivno, ili kraće, da su nizovi tačaka na pravcima $p$ i $p'$ međusobno projektivni ako su koordinate $x$ i $x'$ pridruženih tačaka vezane bilinearnom relacijom

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \qquad (5.1)$$

gdje su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\delta$ konstante koje nisu sve jednake nuli. Ako je $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, bit će to pridruživanje tačaka obostrano jednoznačno, pa se tada govori o *nesingularnom projektivitetu.* Ako je pak $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, projektivitet je singularan, i tada je svim tačkama jednog pravca pridružena jedna jedina tačka drugog pravca.

Ako se uz pomoć relacija (4.4), odnosno (4.6), u jednadžbi (5.1) Kartezijeve koordinate zamijene afinima, odnosno projektivnim koordinatama, naći će se da se i u ovim koordinatama projektivno pridruženje tačaka izražava jednom bilinearnom vezom.

Kako je relacija (5.1) kojom je određen projektivitet dvaju nizova tačaka za konstante $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\delta$ homogena, bit će u njoj bitne samo tri konstante. Zato će biti dovoljno za određenje projektiviteta zadati tri para korespondentnih tačaka. Ako su, naime, tačkama $T_1(x_1)$, $T_2(x_2)$ i $T_3(x_3)$ projektivno pridružene redom tačke $T_1'(x_1')$, $T_2'(x_2')$, $T_3'(x_3')$, bit će prema (5.1)

$$\alpha x_i x_i' + \beta x_i + \gamma x_i' + \delta = 0; \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (5.2)$$

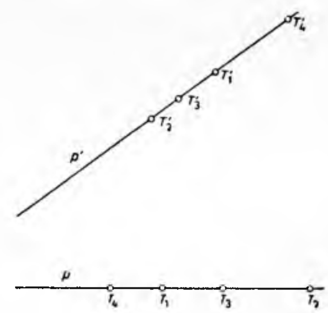
Eliminacijom konstanti iz sistema što ga čine jednadžbe (5.1) i (5.2) slijedi da je projektivno pridruženje danih nizova tačaka određeno relacijom

$$\begin{vmatrix} x x' & x & x' & 1 \\ x_1 x_1' & x_1 & x_1' & 1 \\ x_2 x_2' & x_2 & x_2' & 1 \\ x_3 x_3' & x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Analogna relacija vrijedi tada, dakako, i za afine i projektivne koordinate.

Za projektivne nizove tačaka vrijedi ovaj osnovni teorem: Dvoomjer četiriju tačaka je invarijanta nesingularnog projektiviteta, tj. ako su $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ bilo koje četiri tačke pravca $p$, a $T_1'$, $T_2'$, $T_3'$, $T_4'$ njima redom projektivno pridružene tačke pravca $p'$ (sl. 2), onda je uvijek $(T_1\,T_2\,T_3\,T_4) = (T_1'\,T_2'\,T_3'\,T_4')$.

Ako su fundamentalnim tačkama $A$, $B$, $C$ projektivnog sistema na pravcu $p$ projektivno pridružene fundamentalne tačke $A'$, $B'$, $C'$ projektivnoga koordinatnog sistema pravca $p'$, tada će zbog invarijantnosti dvoomjera projektivno pridružene tačke na oba pravca imati projektivnu koordinatu iste numeričke vrijednosti. Odatle za koordinatu $\lambda$ (4.5) i naziv *projektivna koordinata.*



Sl. 2

Padnu li pravci $p$ i $p'$ zajedno, kaže se da su pripadni nizovi tačaka *kolokalni.* Taj dvostruki niz tačaka bit će tada relacijom (5.1) sam sebi projektivno pridružen. Za dvostruke tačke projektivnih kolokalnih nizova, tj. za one korespondentne tačke koje padaju zajedno, jest $x = x'$, pa relacija (5,1) prelazi u $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)\, x + \delta = 0$. Ako je izraz $\Delta \equiv (\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta$ veći od nule, u tom će projektivitetu postojati dvije različite realne dvostruke tačke. To je onda *hiperbolični projektivitet.* Ako je pak $\Delta = 0$, postoji samo jedna dvostruka realna tačka, a projektivitet se zove *paraboličan.* Napokon, u slučaju $\Delta < 0$ dvostruke tačke projektiviteta su konjugirano imaginarne, a projektivitet je *eliptičan.*

Ako je tački $T(x)$ prvog niza pridružena tačka $T'(x')$ drugog niza, a toj tački $T'(x')$ kao tački prvog niza pridružena tačka $T''(x'')$ drugog niza, onda vrijede relacije

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

$$\alpha x' x'' + \beta x' + \gamma x'' + \delta = 0.$$

Može se dogoditi da je za jedan projektivitet kolokalnih nizova tačaka

$$x'' \equiv x, \qquad (5.3)$$

tj. da su za taj projektivitet tačke $T$ i $T''$ uvijek identične. Takav se projektivitet zove *involucija*. U tom je slučaju $\beta = \gamma$, pa je tako involucija tačaka na pravcu dana relacijom

$$\alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0.$$

Dvostruke tačke involucije bit će određene jednadžbom

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \delta = 0.$$

Već prema tome da li je izraz $\beta^2 - \alpha\delta$ veći od nule, jednak nuli ili manji od nule, involucija je hiperbolična, parabolična ili eliptična.

**6. Djelišni omjer, dvoomjer i projektivitet u pramenu.** Ravnina će se orijentirati tako da se u njoj jedan od dva moguća smjera vrtnje odabere kao pozitivan, a drugi je tada negativan. Smatrat će se da je pozitivna ona strana ravnine s koje promatran taj pozitivni smjer vrtnje odgovara gibanju protivnom od gibanja kazaljke na satu. Druga je strana ravnine tada negativna. Ravnina se dogovorno promatra uvijek s njene pozitivne strane. Ako je u orijentiranoj ravnini dan neki kut, pa je određeno koji mu je krak prvi a koji drugi, time će i taj kut biti orijentiran. Smatra se da je orijentirani kut pozitivan ili negativan već prema tome da li treba prvi njegov krak zaokrenuti za taj kut u pozitivnom ili negativnom smislu da bi on pao na drugi krak.

Skup svih pravaca koji prolaze jednom istom tačkom, a leže u istoj ravnini, čini *pramen pravaca*, a zajednička tačka kojom oni prolaze jest *vrh pramena*. Zrake ravnine koje prolaze istom tačkom čine *pramen zrakâ*. Neka su u nekom pramenu zrakâ odabrane bilo koje dvije zrake $a$, $b$ kao osnovne. Ako je $m$ bilo koja treća *djelišna zraka* istog pramena, onda će se omjer

$$\mu = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} \tag{6.1}$$

zvati *djelišnim omjerom* tih triju zraka, a simbolički će se kraće pisati $\mu = (abm)$. Pri tom $(am)$ znači bilo koji od orijentiranih kutova za koji treba zaokrenuti zraku $a$ oko vrha pramena da ona pokrije (uz istu orijentaciju) zraku $m$. Za svaki, naime, od tih kutova poprima istu vrijednost $\sin(am)$, pa dakle i djelišni omjer (6.1).

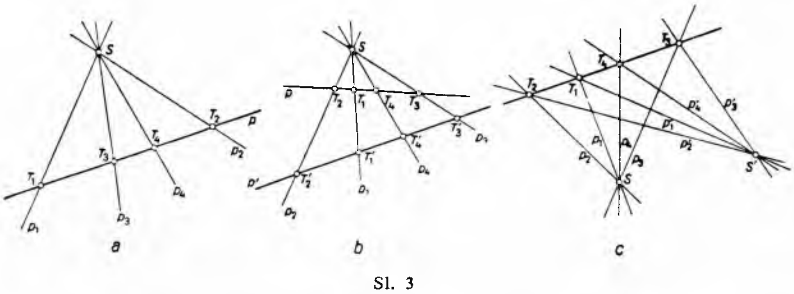
Bilo koje četiri zrake $a$, $b$, $c$, $d$ nekog pramena u danom redoslijedu čine *četvorku zraka*. Svaka od *djelišnih zrakâ* $c$ i $d$ čini s *osnovnim zrakama* $a$ i $b$ djelišne omjere

$$\mu_1 = (abc) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}, \quad \mu_2 = (abd) = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}. \tag{6.2}$$

Kvocijent $\lambda = \mu_1 : \mu_2$ ovih dvaju djelišnih omjera zove se *dvoomjer* četvorke zraka $a$, $b$, $c$, $d$ i simbolički se bilježi $(abcd)$. Prema tome je

$$\lambda = (abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}. \tag{6.3}$$

Promijeni li koja od osnovnih zraka $a$ ili $b$ orijentaciju, djelišni omjeri (6.2) mijenjaju predznak, ali se time predznak dvoomjera (6.3) ne mijenja. Promjena orijentacije djelišnih zraka $c$ i $d$ nikako ne utječe na vrijednost djelišnih omjera (6.2), pa ni dvoomjera (6.3). Prema tome je vrijednost dvoomjera četvorke zraka nezavisna o njihovoj orijentaciji pa se zato izraz (6.3) može zvati i dvoomjerom četvorke pravaca.



Sl. 3

Odnos između dvoomjera četiriju tačaka i četiriju pravaca određuje *Papposov teorem* (Pappos Aleksandrijski, oko 300):

Ako su $p_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ četiri pravca nekog pramena (sl. 3a) s vrhom u tački $S$, a $p$ bilo koji pravac iste ravnine koji ne prolazi vrhom $S$, pa ako je $T_i$ tačka u kojoj pravac $p_i$ siječe pravac $p$, tada je dvoomjer $(p_1p_2p_3p_4)$ četiriju pravaca uvijek jednak dvoomjeru $(T_1T_2T_3T_4)$ četiriju tačaka.

Iz Papposova teorema slijedi neposredno ispravnost ovih tvrdnji:

Ako su $p_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ četiri pravca jednog pramena, a $p$ i $p'$ dva pravca koji tom pramenu ne pripadaju (sl. 3b), pa je $T_i$ sjecište pravaca $p$ i $p_i$, a $T_i'$ sjecište pravaca $p'$ i $p_i$, onda su dvoomjeri $(T_1T_2T_3T_4)$ i $(T_1'T_2'T_3'T_4')$ jednaki.

Ako su $T_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ četiri tačke nekog pravca $p$, a $S$ i $S'$ dvije tačke koje ne leže na tom pravcu (sl. 3c), pa je $p_i$ spojnica tačaka $S$ i $T_i$, a $p_i'$ spojnica tačaka $S'$ i $T_i$, onda su dvoomjeri $(p_1p_2p_3p_4)$ i $(p_1'p_2'p_3'p_4')$ jednaki.

Iz posljednjih teorema slijedi da je dvoomjer četvorke tačaka kao i dvoomjer četvorke pravaca invarijanta centralnog projiciranja.

I ostali pojmovi definirani za niz tačaka na pravcu prenose se sada analogno na pramen pravaca. Tako se kaže, ako je dvoomjer neke četvorke pravaca jednak $-1$, da je to *harmonička četvorka pravaca*.

Pojam projektiviteta i involucije pramena pravaca svodi se na osnovi Papposova teorema na analogne pojmove u nizu tačaka na pravcu.

**7. Koordinatni sistemi u ravnini.** Položaj neke tačke u ravnini moguće je odrediti samo onda ako su unaprijed u toj ravnini istaknuti neki čvrsti geometrijski objekti, prema kojima se tada položaj tačke i određuje. Ti čvrsti geometrijski objekti mogu biti neke tačke, pravci ili bilo koji drugi geometrijski elementi ili tvorevine, a oni, zajedno s propisom kako se uz njihovu pomoć određuje relativni položaj tačke, čine tada *koordinatni sistem*. Zbog slobode u izboru tih geometrijskih objekata i različitih mogućnosti određivanja relativnog položaja tačke, postoje i raznovrsni koordinatni sistemi.

a) *Kartezijev koordinatni sistem.* Kao čvrsti geometrijski objekti odabrana su dva ukrštena pravca, *koordinatne osi*. Njihova zajednička tačka $O$ je *ishodište koordinatnog sistema* (sl. 4a). Jedna je od tih osi *os apscisâ* ili *os x*, a druga je *os ordinatâ* ili *os y*. Jedinične tačke $J_1$ i $J_2$ na koordinatnim osima odabiraju se tako da bude $OJ_1 = OJ_2$ i da uz tako određenu orijentaciju os apscisa prijeđe u os ordinata rotacijom u pozitivnom smislu za *koordinatni kut* $\omega = \measuredangle(x, y)$, koji je manji od spruženog, tj. $0 < \omega < \pi$. Ako je $\omega = \frac{\pi}{2}$, Kartezijev je sistem *pravokutan*, inače je *kosokutan*. Ako je $T$ bilo koja tačka ravnine, pa paralela s osi ordinatâ koja prolazi tačkom $T$ siječe os apscisa u tački $P$, a paralela s osi apscisâ kroz tačku $T$ siječe os ordinatâ u tački $Q$, onda će tački $T$ biti jednoznačno pridružen jedan uređeni par Kartezijevih koordinata i to

$$\text{apscisa } x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OJ_1}} \quad \text{i} \quad \text{ordinata } y = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OJ_2}}. \tag{7.1}$$

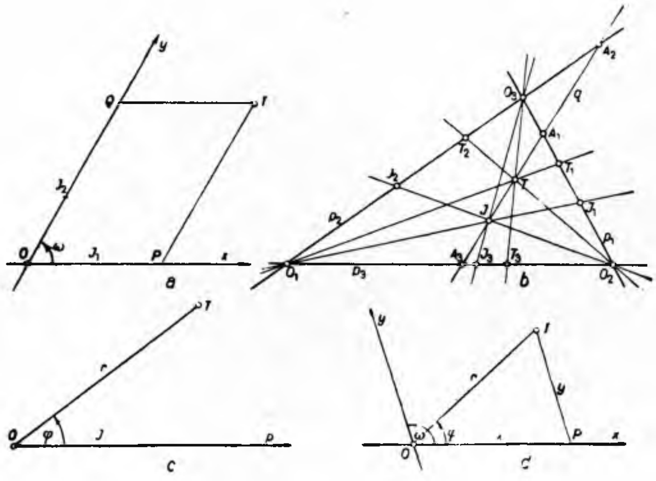
Ovo je pridruživanje tačaka $T$ ravnine i uređenih parova realnih brojeva $x$, $y$ obostrano jednoznačno. Da tački $T$ pripadaju koordinate $x, y$, označuje se simbolički sa $T(x, y)$. Koordinatama $x, y$ određen je uz pomoć Kartezijeva sistema položaj svake tačke ravnine koja leži u konačnosti. Želi li se odrediti i položaj *nepravih tačaka* ravnine, tj. njenih beskonačno dalekih tačaka, upotrijebit će se *homogene koordinate* $X$, $Y$, $W$, koje su definirane relacijama

$$x = \frac{X}{W}; \quad y = \frac{Y}{W}. \tag{7.2}$$

Da nekoj tački pripadaju te tri homogene koordinate označuje se simbolički sa $T(X : Y : W)$. Sada je, dakle, svaka tačka ravnine određena sa tri takve koordinate, no pri tom za određenje položaja tačke nisu važne apsolutne vrijednosti tih koordinata nego samo njihovi omjeri $X : W$ i $Y : W$. Homogene koordinate mogu poprimiti bilo koje realne vrijednosti, s izuzetkom da ne smiju sve tri istodobno iščezavati. Za beskonačno daleke tačke ravnine bit će $W = 0$, dok je za tačke u konačnosti uvijek $W$ različito od 0.

b) *Afini koordinatni sistem.* Ovaj je sistem samo jedno poopćenje Kartezijeva. Afine koordinate $x, y$ definirane su kao i Kartezijeve relacijama (7.1), samo što u tom slučaju jedinične dužine $\overline{OJ_1}$ i $\overline{OJ_2}$ na objema osima ne moraju biti jednake, nego su po volji i nezavisno odabrane.

Homogene afine koordinate $X : Y : W$ bit će definirane uz pomoć nehomogenih afinih koordinata $x, y$ relacijama (7.2).



Sl. 4

c) *Projektivni koordinatni sistemi.* Neka su $O_1, O_2, O_3, J$ četiri tačke u ravnini, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Po dvije od triju tačaka $O_1, O_2, O_3$ određuju redom tri pravca $p_1, p_2, p_3$ (sl. 4b) koji čine zajedno s *jediničnom tačkom J projektivni koordinatni sistem.* U tom će sistemu položaj neke tačke $T$ biti određen homogenim projektivnim tačkovnim koordinatama koje neka su na ovaj način definirane: Ako su $J_i$, odnosno $T_i$, tačke u kojima spojnica $O_iJ$, odnosno spojnica $O_iT$, siječe pravac $p_i$ $(i = 1, 2, 3)$, tada neka je

$$\begin{aligned} x_2 : x_3 &= (O_2 O_3 J_1 T_1), \\ x_3 : x_1 &= (O_3 O_1 J_2 T_2), \\ x_1 : x_2 &= (O_1 O_2 J_3 T_3). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Da su ove tri relacije koegzistentne može se razabrati tako da se tačke pravca $p_i$ projiciraju iz tačke $O_i$ na pravac $q$, koji je spojnica tačaka $T$ i $J$. Tako se, naime, dobiva redom

$$\begin{aligned} (O_2 O_3 J_1 T_1) &= (A_3 A_2 J T), \\ (O_3 O_1 J_2 T_2) &= (A_1 A_3 J T), \\ (O_1 O_2 J_3 T_3) &= (A_2 A_1 J T), \end{aligned}$$

a odatle primjenom Moebiusove relacije (3.4) slijedi da je

$$(O_2 O_3 J_1 T_1) \cdot (O_3 O_1 J_2 T_2) \cdot (O_1 O_2 J_3 T_3) = 1,$$

što je u skladu sa (7.3).

Zamislimo da u projektivnom koordinatnom sistemu tačke $O_1$ i $J$ zajedno s pravcima $p_2$ i $p_3$ ostanu nepomične, a tačke $O_2$ i $O_3$ da se po pravcima $p_3$ i $p_2$ gibaju tako da se udaljuju od tačke $O_1$ i odlaze u beskonačnost. Pri tom graničnom prijelazu pravac $p_1$ prijeći će u beskonačno daleki pravac ravnine, projektivni koordinatni sistem u afini, a relacije (7.3) pokazuju da tim graničnim prijelazom homogene projektivne koordinate $x_1 : x_2 : x_3$ prelaze u homogene afine koordinate $W : X : Y$.

d) *Polarni koordinatni sistem.* Osim već opisanih koordinatnih sistema, od velikog broja različitih mogućih slučajeva tačkovnih koordinatnih određenja vrlo se često upotrebljava *polarni koordinatni sistem.* U tom su slučaju kao čvrsti geometrijski objekti u ravnini odabrani: bilo koja tačka $O$ kao *pol* koordinatnog sistema i *polarna os p*, tj. jedna zraka s početnom tačkom u polu $O$ (sl. 4c). Osim toga treba odabrati jedinicu dužine $\overline{OJ}$. Tada je položaj neke tačke $T$ u ravnini određen dvjema *polarnim koordinatama*, i to

$$\textit{radijvektorom}\ r = \frac{\overline{OT}}{\overline{OJ}} \quad \text{i}\ \textit{amplitudom}\ \varphi = \sphericalangle (p, OT). \tag{7.4}$$

Pri tom je amplituda $\varphi$ kut za koji treba zaokrenuti polarnu os u pozitivnom smislu da padne u radijvektor tačke $T$. Ograniče li se polarne koordinate neke tačke $T(r, \varphi)$ na intervale

$$0 \leqq r < +\infty; \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \tag{7.5}$$

postojat će obostrano jednoznačna korespondencija između svih tačaka ravnine i parova $r, \varphi$ polarnih koordinata s izuzetkom samog pola, gdje je amplituda $\varphi$ neodređena, pa je dakle pol *singularna tačka* ovoga koordinatnog određenja.

Da se nađe veza između polarnih i Kartezijevih koordinata, uzme se ishodište Kartezijeva sistema u polu polarnog sistema, a pozitivni dio osi apscisâ neka padne na polarnu os (sl. 4d). Veza između polarnih i Kartezijevih koordinata dana je tada relacijama

$$x = r\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad y = r\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}, \quad \text{odnosno inverznim relacijama}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}; \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y\sin\omega}{x + y\cos\omega}.$$

U slučaju da je Kartezijev sistem pravokutan, ove se relacije pojednostavnjuju i glase

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

**8. Neke osnovne relacije.** a) *Udaljenost dviju tačaka.* Ako su $T_1(x_1 y_1)$ i $T_2(x_2 y_2)$ bilo koje dvije tačke u nekom općenitom Kartezijevu sistemu (sl. 5a), njihova je udaljenost analitički određena relacijom

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega},$$

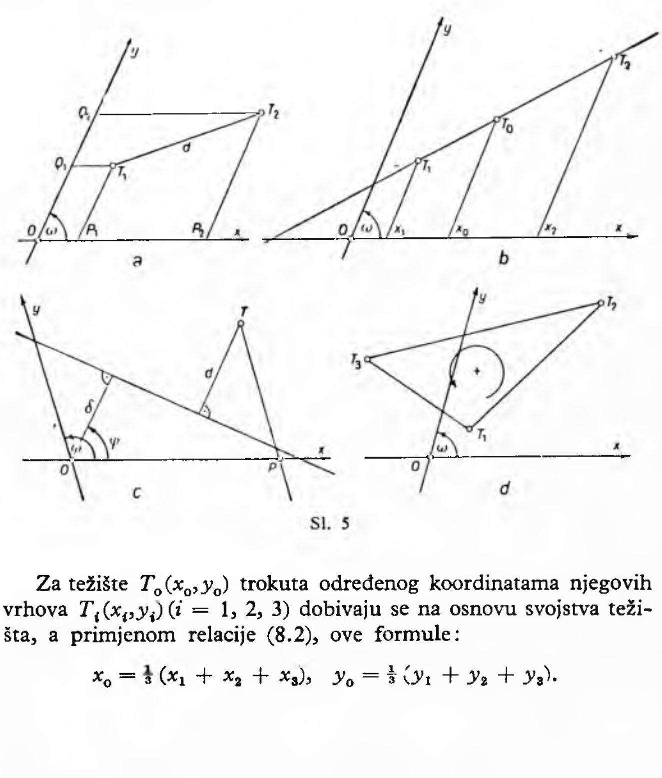
ili u pravokutnom sistemu relacijom

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{8.1}$$

b) *Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.* Ako tačka $T_0(x_0, y_0)$ dijeli dužinu $\overline{T_1T_2}$ u omjeru $\mu$, tj. ako je $\dfrac{\overline{T_1T_0}}{\overline{T_2T_0}} = \mu$ (sl. 5b), koordinate tačke $T_0$ bit će određene koordinatama tačaka $T_1$ i $T_2$ i numeričkom vrijednošću $\mu$ djelišnog omjera na osnovu relacija

$$x_0 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}; \quad y_0 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}, \tag{8.2}$$

i to bez obzira na to da li je koordinatni sistem pravokutan ili kosokutan. U slučaju da je $T_0$ polovište dužine $\overline{T_1T_2}$, bit će $\mu = -1$, pa iz (8.2) izlazi $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.



Sl. 5

Za težište $T_0(x_0, y_0)$ trokuta određenog koordinatama njegovih vrhova $T_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ dobivaju se na osnovu svojstva težišta, a primjenom relacije (8.2), ove formule:

$$x_0 = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_0 = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

c) *Udaljenost tačke od pravca.* Ako je pravac u ravnini određen udaljenošću $\delta$ od ishodišta ($\delta \geq 0$) i priklonim kutom $\varphi$ (sl. 5c) što ga normala spuštena iz ishodišta na taj pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa ($0 \leqq \varphi < 2\pi$), onda će udaljenost $d$ tačke $T(x,y)$ od tog pravca biti analitički određena relacijom

$$d = x\cos\varphi + y\cos(\omega - \varphi) - \delta. \qquad (8.3)$$

Pri tom je dogovorno uzeto da je udaljenost tačke od pravca pozitivna ako se tačka $T$ nalazi na protivnoj strani pravca $p$ nego ishodište $O$ sustava. Nalazi li se tačka $T$ na istoj strani na kojoj i ishodište, udaljenost se $d$ smatra negativnom. U slučaju $\omega = \frac{\pi}{2}$ formula (8.3) prelazi u jednostavniju

$$d = x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta. \qquad (8.4)$$

d) *Površina orijentiranog trokuta.* Orijentacija nekog poligona određena je cikličkim poretkom njegovih vrhova. Smatrat će se da je orijentacija nekoga jednostavnog poligona pozitivna ako je njom određena pozitivna vrtnja u danoj ravnini. U protivnom slučaju ta je orijentacija negativna. Površini nekog orijentiranog lika u ravnini pridat će se pozitivni, odnosno negativni predznak već prema tome da li mu je orijentacija pozitivna ili negativna. Uz ovaj dogovor o predznaku, površina trokuta $\triangle\, T_1 T_2 T_3$ koji je u ravnini Kartezijeva koordinatnog sistema zadan koordinatama svojih vrhova (sl. 5d) određena je relacijom

$$P = \frac{\sin\omega}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ako je koordinatni sistem pravokutan, ta se relacija pojednostavnjuje i glasi

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (8.5)$$

Odatle neposredno slijedi da je uvjet za kolinearnost triju tačaka $T_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) ravnine, tj. uvjet da one sve tri leže na istom pravcu, dan relacijom

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.6)$$

**9. Transformacije.** a) *Pojam transformacije.* Ako je svakoj tački $T$ nekog prostora $P$ bilo koje dimenzije pridružena neka tačka $T'$ nekog prostora $P'$, ali tako da je i obratno svakoj tački $T'$ iz $P'$ pridružena jedna tačka $T$ prostora $P$, onda se kaže da ovo obostrano jednoznačno pridruživanje tačaka daje jednu transformaciju ili preslikavanje jednog prostora na drugi.

Ako se zamisli poseban slučaj kada su prostori $P$ i $P'$ dvodimenzionalni, onda se radi o preslikavanju neke ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$. Ako je u svakoj od tih ravnina dan pravokutni Kartezijev sistem, pa je pri tom preslikavanju tački $T(x,y)$ ravnine $\Pi$ pridružena neka tačka $T'(x',y')$ ravnine $\Pi'$, onda će koordinate tačke $T$ biti određene koordinatama tačke $T'$ sistemom relacija

$$x = f_1(x',y'); \quad y = f_2(x',y'), \qquad (9.1)$$

koje se zovu *jednadžbe transformacije.* Pri tom se pretpostavlja da su funkcije $f_1$ i $f_2$ jednoznačne i neprekidne, s eventualnim izuzetkom pojedinih singularnih mjesta, i nadalje, da se sistem relacija (9.1) može razriješiti po $x', y'$, tj. da postoje i inverzne jednadžbe transformacije

$$x' = \varphi_1(x,y); \quad y' = \varphi_2(x,y), \qquad (9.2)$$

gdje su i funkcije $\varphi_1$ i $\varphi_2$ isto tako jednoznačne i neprekidne.

Pri preslikavanju ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$ bit će preslikane ujedno i sve figure iz jedne u drugu od tih ravnina. Osobito važno bit će uočiti koja se svojstva neke figure i koje veličine pri danoj transformaciji ne mijenjaju. Takva svojstva, odnosno veličine koje ostaju nepromijenjene pri svim transformacijama neke određene vrste, zovu se *invarijante* tih transformacija. Ako su takve veličine analitički određene nekim izrazima uz pomoć koordinata, ti se izrazi primjenom jednadžbi transformacije (9.1), odnosno (9.2), neće mijenjati, tj. i oni su invarijante dane transformacije. Ako je pri nekom preslikavanju ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$ svaka figura prve ravnine preslikana u drugoj ravnini na figuru njoj kongruentnu, onda se radi o *kongruentnom preslikavanju* ili *izometriji.* Kongruentno preslikavanje ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$ pri kojem ujedno ostaje sačuvana orijentacija figura dano je jednadžbama transformacije

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b, \end{aligned} \qquad (9.3)$$

odnosno inverznim jednadžbama

$$\begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha, \end{aligned} \qquad (9.4)$$

gdje su $a$, $b$ i $\alpha$ bilo koji realni brojevi. Da je tim jednadžbama doista dano kongruentno preslikavanje razabira se neposredno iz činjenice što je izraz (8.1), koji daje udaljenost dviju tačaka u pravokutnom sustavu, invarijanta transformacije (9.3). Kako se pak primjenom ovih transformacija predznak determinante u formuli (8.5) ne mijenja, zaključuje se da je pri tim transformacijama i orijentacija figura ostala sačuvana. Jednadžbama

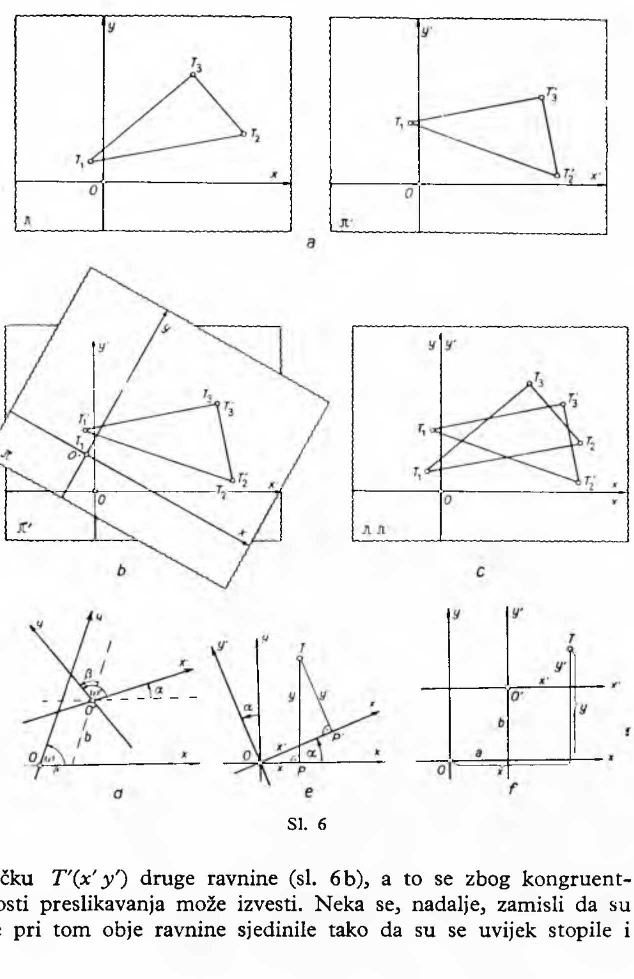
$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= -x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + b, \end{aligned}$$

odnosno inverznim jednadžbama

$$\begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha - (y - b)\cos\alpha \end{aligned}$$

dano je kongruentno preslikavanje ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$, ali kako se sada primjenom tih jednadžbi predznak determinante (8.5) mijenja, pri ovim transformacijama orijentacija figura prelazi u protivnu.

Osim toga što jednadžbe (9.3) i (9.4) daju kongruentno preslikavanje ravnine $\Pi$ na ravninu $\Pi'$ (sl. 6a), mogu im se pridati dva druga geometrijska značenja. Neka se najprije zamisli da su ravnine $\Pi$ i $\Pi'$ položene jedna na drugu, ali tako da pri tom svaka tačka $T(x,y)$ prve ravnine pokriva upravo njoj pridruženu



Sl. 6

tačku $T'(x'y')$ druge ravnine (sl. 6b), a to se zbog kongruentnosti preslikavanja može izvesti. Neka se, nadalje, zamisli da su se pri tom obje ravnine sjedinile tako da su se uvijek stopile i obje korespondentne tačke. Kaže se tada da su korespondentne tačke identificirane. Sada postoji jedna jedina ravnina, ali u njoj dva koordinatna sistema, pa su $x, y$ i $x'y'$ koordinate jedne te iste tačke, ali s obzirom na dva različita koordinatna sistema u ravnini. Kaže se da tako shvaćene jednadžbe (9.3), odnosno (9.4), prema ovom drugom tumačenju daju *transformacije koordinata.*

Treće tumačenje jednadžbi (9.3), odnosno (9.4), sastoji se u tome da se opet ravnine $\Pi$ i $\Pi'$ sjedine, ali sada tako da oba koordinatna sistema padnu zajedno (sl. 6c). Pri tom dakako neće više biti općenito identificirane one tačke koje su korespondentne. U tom će slučaju u toj jednoj, sjedinjenoj ravnini postojati samo jedan koordinatni sistem, a $x, y$ i $x', y'$ su sada koordinate dviju korespondentnih, ali općenito različitih tačaka, i to s obzirom na jedan isti sistem. Tako shvaćene jednadžbe (9.3) i (9.4) daju *transformaciju tačaka,* tj. kongruentno preslikavanje ravnine same na sebe. Ako se zamisli u tom slučaju da su $T(x, y)$ i $T(x', y')$ položaji jedne iste tačke, ali u dva različita vremenska momenta, onda ove jednadžbe transformacije daju pomak cijele ravnine sa svim tačkama i figurama u njoj prema danom koordinatnom sistemu.

U općenitom slučaju jednadžbe (9.1), odnosno (9.2), mogu se uvijek shvatiti u smislu prvog i trećeg tumačenja, a u smislu drugog tumačenja, tj. kao transformacija koordinata, mogu se shvatiti samo ako one daju kongruentno preslikavanje, tj. ako poprime poseban oblik (9.3), odnosno (9.4).

b) *Posebni slučajevi transformacija.* Neka su u ravnini dana dva kosokutna sistema $Oxy$ i $O'x'y'$ s koordinatnim kutovima $\omega$, odnosno $\omega'$ u bilo kojem međusobnom položaju. Neka nadalje ishodište $O'$ ima u sistemu $Oxy$ koordinate $a$ i $b$, a $\alpha$ (odnosno $\beta$) neka je kut za koji treba zaokrenuti u pozitivnom smislu os $x$ (odnosno os $y$) da ona bude paralelna osi $x'$ (odnosno osi $y'$) (sl. 6d), onda su koordinate $x, y$ i $x', y'$ jedne iste tačke s obzirom na oba koordinatna sistema međusobno određene jednadžbama

$$x = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} x' - \frac{\sin\beta}{\sin\omega} y' + a,$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega} x' + \frac{\sin(\omega + \beta)}{\sin\omega} y' + b, \qquad (9.5)$$

odnosno inverznim jednadžbama

$$x' = \frac{\sin(\omega' + \alpha)}{\sin\omega'}(x - a) + \frac{\sin\beta}{\sin\omega'}(y - b),$$

$$y' = -\frac{\sin\alpha}{\sin\omega'}(x - a) + \frac{\sin(\omega' - \beta)}{\sin\omega'}(y - b). \qquad (9.6)$$

Specijalizacijom $\omega = \omega' = \frac{\pi}{2}$ slijede iz tih jednadžbi jednadžbe transformacije (9.3) i (9.4) za pravokutne koordinate. Daljnjom specijalizacijom $a = b = 0$ slijede jednadžbe

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \qquad (9.7)$$

odnosno jednadžbe

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \qquad (9.8)$$

koje daju rotaciju pravokutnog Kartezijeva sistema (sl. 6e). U slučaju $\alpha = 0$, ali $a, b \neq 0$, slijede *jednadžbe translacije* Kartezijeva sistema (sl. 6f):

$$x = x' + a; \quad y = y' + b,$$

odnosno $\quad x' = x - a; \quad y' = y - b.$

Jednadžbama $\quad x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13},$

$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23},$$

gdje su $a_{ij}$ bilo koji realni brojevi, ali je pri tom

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

dana je općenita transformacija afinih koordinata, dok jednadžbe transformacije homogenih projektivnih koordinata glase

$$\rho x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3',$$

$$\rho x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3',$$

$$\rho x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3',$$

gdje su $\rho$ i $a_{ij}$ bilo koji realni brojevi, ali je pri tom $\rho \neq 0$, a determinanta transformacije $A \equiv |a_{ij}|$ različita od 0.

**10. Krivulje i njihove jednadžbe.** Ako se iz dvodimenzionalnog skupa svih tačaka ravnine koordinatnog sistema $Oxy$ izdvoje sve one kojih koordinate zadovoljavaju neku jednadžbu

$$F(x,y) = 0, \qquad (10.1)$$

gdje je na lijevoj strani neka funkcija dviju promjenljivih, te će tačke činiti jednodimenzionalan skup, jer je sada samo jedna od koordinata slobodna, a druga je jednadžbom (10.1) već određena. Kaže se da takav skup tačaka čini krivulju u danoj ravnini, a (10.1) da je jednadžba te krivulje. Analogno će jednadžba

$$F(r, \varphi) = 0 \qquad (10.2)$$

određivati krivulju u ravnini polarnoga koordinatnog sistema, a slično vrijedi i za krivulje u ostalim vrstama koordinatnih sistema. Krivulje kojima se bavi analitička geometrija mogu biti zadane ili tako da je dana jednadžba u obliku (10.1), odnosno (10.2), gdje je lijeva strana izražena uz pomoć nekih elementarnih funkcija, ili tako da je dana definicija krivulje kao *geometrijskog mjesta tačaka.* Pri tom se pod geometrijskim mjestom tačaka razumijeva skup tačaka koje sve zadovoljavaju isti uvjet, koji se dade izraziti nekom jednadžbom između određenih geometrijskih veličina. Prema tome, analitička geometrija ima dva osnovna zadatka: 1. ako je krivulja zadana kao geometrijsko mjesto tačaka, da se odredi jednadžba te krivulje u bilo kojim koordinatama; 2. ako je krivulja dana svojom jednadžbom, da se odredi koja je to krivulja pa da se iz analitičkih svojstava dane jednadžbe odrede geometrijska svojstva krivulje.

Razriješe li se jednadžbe (10.1) ili (10.2) po jednoj od varijabli, mjesto tih implicitnih jednadžbi dobit će se jednadžbe u kojima je jedna koordinata izražena kao funkcija druge. Tako će krivulja biti određena jednadžbom

$$y = f(x) \quad \text{ili} \quad r = f(\varphi). \qquad (10.3)$$

No često će biti zgodnije i prikladnije za analitička istraživanja krivuljâ da se funkcionalna zavisnost između koordinata krivulje, umjesto da je ona neposredno dana jednadžbama (10.1), (10.2), odnosno (10.3), izrazi posredno uz pomoć jedne pomoćne varijable, *parametra.* Tako dolazimo do *parametarskog predočivanja krivulja,* u kojemu je krivulja određena jednadžbama oblika

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t), \qquad (10.4)$$

ili $\quad r = g_1(t); \quad \varphi = g_2(t). \qquad (10.5)$

Ovdje su $f_i$ i $g_i$ neke jednoznačne funkcije parametra $t$. Eliminacijom parametra iz tih jednadžbi dolazi se do »običnih« jednadžbi (10.1) ··· (10.3) dane krivulje.

Klasifikacija krivulja u analitičkoj geometriji provodi se uvijek na osnovi njihovih običnih jednadžbi u Kartezijevim koordinatama. Prema toj klasifikaciji krivulje se dijele na *algebarske* i *transcendentne.* Prve su one koje su dane algebarskim jednadžbama, tj. jednadžbama u kojima su na varijable $x, y$ primijenjene samo algebarske operacije (zbrajanje, odbijanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i radiciranje) konačni broj puta. Takve se jednadžbe mogu uvijek urediti tako da se svedu na oblik (10.1), gdje je na lijevoj strani neki polinom u $x, y$. Transcendentne krivulje imaju transcendentne jednadžbe, tj. jednadžbe u kojima je, osim algebarskih operacija, na varijable primijenjena bar jedna operacija koja nije algebarska. Za neku se algebarsku krivulju kaže da je $n$-tog reda ako je njezina uređena jednadžba u Kartezijevim koordinatama $n$-tog stupnja. Pravac je dakle jedina krivulja prvog reda; elipsa, hiperbola i parabola primjeri su krivulja drugog reda, a sinusoida ili logaritamska krivulja su primjeri transcendentnih krivulja.

**11. Pravac.** a) *Opći oblik jednadžbe pravca.* Svaka linearna jednadžba

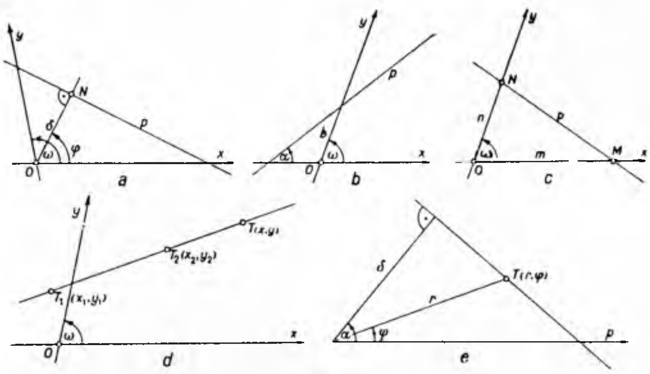
$$Ax + By + C = 0, \qquad (11.1)$$

gdje bar jedan od brojeva $A, B$ ne iščezava, predočuje[1] pravac u Kartezijevu koordinatnom sistemu. To je *opći oblik* jednadžbe pravca. Konstante $A, B$ i $C$ zavise o položaju pravca prema koordinatnom sistemu. Taj se položaj može odrediti na više različitih načina, pa prema tome koji se elementi uzimaju kao određeni, dobivaju se različiti posebni slučajevi jednadžbe pravca. Najčešće dolaze ovi posebni oblici jednadžbe pravca:

b) *Normalni ili Hesseov oblik.* Ako se u formuli (8.3) stavi $d = 0$, dobiva se

$$x\cos\varphi + y\cos(\omega - \varphi) - \delta = 0. \qquad (11.2)$$

Tu je dakle pravac određen udaljenošću $\delta$ od ishodišta i priklonim kutom $\varphi$ što ga normala iz ishodišta na taj pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi apscisa (sl. 7a). U slučaju pravokutnoga




Sl. 7

koordinatnog sistema jednadžba (11.1) poprima jednostavni oblik

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0. \qquad (11.3)$$

Opći oblik jednadžbe pravca (11.1) sveden na normalni (11.2) glasi

$$\frac{(Ax + By + C)\sin\omega}{-\operatorname{sign}C\cdot\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}} = 0,$$

a u slučaju pravokutnog sistema

$$\frac{Ax + By + C}{-\operatorname{sign}C\cdot\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

c) *Eksplicitni oblik.* Ovaj oblik izražava ordinatu tačke pravca eksplicite kao funkciju apscise:

$$y = ax + b. \qquad (11.4)$$

Konstanta $a$ je *koeficijent smjera*, jer je njom određen smjer pravca. Ako je, naime, $\alpha$ prikloni kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa (sl. 7b), onda je koeficijent smjera određen relacijom

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}, \qquad (11.5)$$

a prikloni kut pravca prema osi apscisa izražen je, obrnuto, koeficijentom smjera prema relaciji

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\omega}{a\cos\omega + 1}. \qquad (11.6)$$

U slučaju $\omega = \frac{\pi}{2}$ jednadžbe (11.5) i (11.6) prelaze u

$$a = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (11.7)$$

d) *Segmentni oblik.* Ako je $m$ segment što ga pravac odsijeca na osi apscisâ, a $n$ segment na osi ordinatâ (sl. 7c), jednadžba pravca glasi:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0.$$

e) *Pravac kroz dvije tačke.* Ako je pravac određen sa dvije tačke $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ (sl. 7d), njegova jednadžba glasi:

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0, \qquad (11.8)$$

što se može pisati i ovako:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Ta relacija izražava prema (8.6) činjenicu da su tačke $T(x, y)$, $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ kolinearne. Odabere li se za parametar $t$ djelišni omjer u kojem tačka $T$ dijeli dužinu $\overline{T_1T_2}$, parametarsko predočenje tog pravca prema (8.2) glasi:

$$x = \frac{x_1 - tx_2}{1 - t}; \quad y = \frac{y_1 - ty_2}{1 - t},$$

Eliminacijom parametra $t$ slijedi odatle (11.8).

f) *Pravac određen tačkom i smjerom.* Ako je dana čvrsta tačka $T_1(x_1, y_1)$ pravca i prikloni kut pravca prema osi apscisa, pa je koeficijent smjera određen formulom (11.5), odnosno (11.6), jednadžba je pravca:

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

g) *Pravac u polarnom sistemu.* Ako je $\delta$ udaljenost pravca od pola, a $\alpha$ kut što ga zatvara normala spuštena iz pola na taj pravac (sl. 7e), jednadžba pravca glasi

$$r = \frac{\delta}{\cos(\alpha - \varphi)}.$$

**12. Dva pravca i pramen pravaca.** a) *Sjecište dvaju pravaca.* Ako su

$$p_i \ldots A_ix + B_iy + C_i = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad (12.1)$$

dva pravca ravnine, koordinate njihova eventualnog sjecišta zadovoljavaju obje jednadžbe sistema (12.1). Da se to sjecište odredi, treba razriješiti sistem (12.1). Označi li se kraće

$$D_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

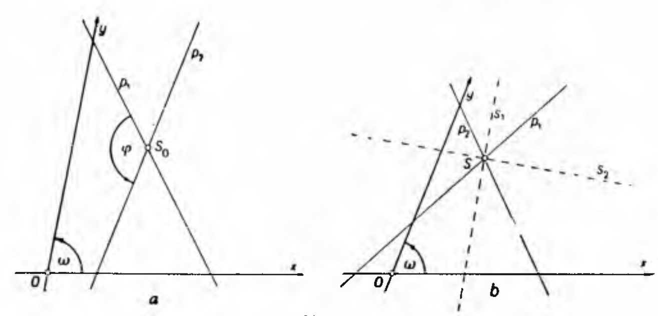
može se rješenje sistema (12.1) pisati u obliku

$$x_0 = D_1 : D_3; \quad y_0 = D_2 : D_3 \qquad (12.2)$$

U slučaju kada je $D_3$ različito od 0, sjecište $S_0(x_0, y_0)$ je prema (12.2) određeno i u konačnosti. Pravci su tada ukršteni. U slučaju kada je $D_3 = 0$, ali je bar jedna od determinanata $D_1, D_2$ različita od 0, sjecište $S_0$ je beskonačno daleko. Pravci su tada paralelni, ali različiti. Napokon, u slučaju kada je $D_1 = D_2 = D_3 = 0$, sjecište $S_0$ nije određeno. Pravci $p_1$ i $p_2$ padaju tada zajedno.

b) *Kut dvaju pravaca.* Pod kutom dvaju pravaca $p_1, p_2$ razumije se onaj najmanji kut $\varphi$ za koji treba zaokrenuti oko njihova zajedničkog sjecišta $S_0$ u pozitivnom smislu pravac $p_1$ da on padne u pravac $p_2$ (sl. 8a). Za pravce određene jednadžbama (12.1) taj je kut dan relacijom

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\sin\omega}{A_1A_2 + B_1B_2 - (A_1B_2 + A_2B_1)\cos\omega},$$




Sl. 8

odnosno u slučaju pravokutnoga koordinatnog sistema, relacijom

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Odatle slijedi da uvjet paralelizma tih pravaca glasi

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0,$$

a uvjet za njihovu okomitost

$$A_1A_2 + B_1B_2 - (A_1B_2 + A_2B_1)\cos\omega = 0,$$

što se u slučaju $\omega = \frac{1}{2}\pi$ pojednostavnjuje i dobiva oblik

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Ako su pravci zadani u eksplicitnom obliku, njihov je kut dan formulom

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(a_2 - a_1)\sin\omega}{a_1 a_2 + (a_1 + a_2)\cos\omega + 1},$$

a u slučaju pravokutnog sistema formulom $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 + 1}$.

Odatle je uvjet paralelizma $a_2 - a_1 = 0$, a uvjet za okomitost pravaca $a_1 a_2 + (a_1 + a_2)\cos\omega + 1 = 0$, što u pravokutnom koordinatnom sistemu poprima oblik $a_1 a_2 + 1 = 0$.

c) *Simetrale kutova dvaju pravaca.* Ako su pravci zadani u normalnom obliku (11.2), pa je $s_1$ simetrala onog para njihovih vršnih kutova kojemu pripada kut u kojemu se nalazi ishodište sistema, a $s_2$ simetrala drugog para vršnih kutova tih pravaca (sl. 8b), jednadžbe tih simetrala bit će

$$s_1 \ldots\ldots x\cos\varphi_1 + y\cos(\omega - \varphi_1) - \delta_1 - [x\cos\varphi_2 + y\cos(\omega - \varphi_2) - \delta_2] = 0,$$

$$s_2 \ldots\ldots x\cos\varphi_1 + y\cos(\omega - \varphi_1) - \delta_1 + [x\cos\varphi_2 + y\cos(\omega - \varphi_2) - \delta_2] = 0,$$

i analogno za slučaj pravokutnoga koordinatnog sistema.

d) *Pramen pravaca.* Pramen pravaca određen je bilo kojim svojim dvama pravcima. Ako su dakle

$$p_i \ldots A_i x + B_i y + C_i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

dva pravca nekog pramena (sl. 8c), taj je pramen analitički predočen jednadžbom

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0, \qquad (12.3)$$

ili u simetričnijem obliku

$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0. \qquad (12.4)$$

Za svaku, naime, realnu vrijednost parametra $\lambda$, odnosno kvocijenta $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, jednadžba (12.3), odnosno (12.4), predočuje jedan pravac danog pramena. Poprimi li parametar $\lambda$, odnosno kvocijent $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, redom sve realne vrijednosti, te će jednadžbe predočivati redom sve pravce danog pramena.

Tri pravca $p_1, p_2, p_3$ prolaze jednom istom tačkom, tj. pripadaju jednom istom pramenu, onda i samo onda ako koeficijenti njihovih općih jednadžbi zadovoljavaju relaciju

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**13. Kružnica.** Ako je $S(x_0, y_0)$ centar kružnice a $\rho$ polumjer (sl. 9a), njezina jednadžba u kosokutnom sistemu glasi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\omega - \rho^2 = 0.$$

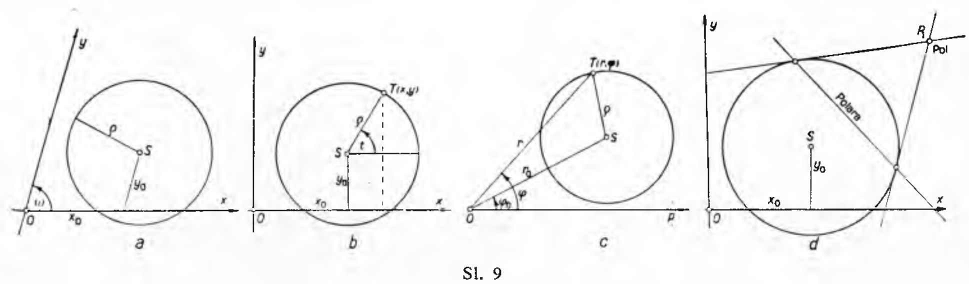
U pravokutnom sistemu bit će jednadžba te kružnice

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2 = 0, \qquad (13.1)$$

što se može pisati i ovako

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + q = 0,$$

gdje je $$q = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2.$$




Sl. 9

Općenito, neka jednadžba drugoga stupnja u pravokutnim Kartezijevim koordinatama predočivat će kružnicu ako se može svesti na oblik

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Ta kružnica ima središte u tački $S(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ a polumjer joj je $$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Realnost te kružnice zavisi o predznaku radikanda tog izraza Kružnica (13.1) (sl. 9b) može se parametarski predočiti ovako:

$$x = x_0 + \rho\cos t; \qquad y = y_0 + \rho\sin t.$$

U polarnom koordinatnom sistemu, u općenitom položaju (sl. 9c), kružnica ima jednadžbu

$$r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 - \rho^2 = 0.$$

Ako je kružnica određena sa tri svoje tačke $T_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, njena je jednadžba

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Uvjet da je pravac $Ax + By + C = 0$ tangenta kružnice (13.1) dan je relacijom

$$(A^2 + B^2)\rho^2 - (Ax_0 + By_0 + C)^2 = 0.$$

Ako je tačka $T_1(x_1, y_1)$ dirалište tangente na kružnicu (13.1), jednadžba te tangente glasi

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) - \rho^2 = 0. \quad (13.2)$$

Ako je $P_1(x_1, y_1)$ bilo koja tačka ravnine, tada je (13.2) jednadžba *polare* te tačke s obzirom na kružnicu (13.1) (sl. 9d). Tačka $P_1$ je tada *pol* te polare. Leži li pol $P_1$ izvan kružnice, polara je spojnica dirališta onih tangenata koje su iz pola $P_1$ povučene na danu kružnicu. Da se dakle na kružnici odrede dirališta tangenata povučenih iz neke tačke $P_1$ izvan kružnice, treba samo naći sjecišta polare tačke $P_1$ i dane kružnice.

**14. Parabola** je geometrijsko mjesto tačaka $T$ kojima je udaljenost od jedne čvrste tačke, ***žarišta*** ili *fokusa F*, jednaka udaljenosti od jednog čvrstog pravca, *ravnalice* ili *direktrise* $q$ (sl. 10a), tj.

$$r = d. \qquad (14.1)$$

Ako je u pravokutnom koordinatnom sistemu tačka $F(\frac{1}{2}p, 0)$ žarište, a pravac $q \ldots x + \frac{1}{2}p = 0$ direktrisa, parabola ima jednadžbu

$$y^2 - 2px = 0. \qquad (14.2)$$

To je *tjemena jednadžba parabole.* Tjeme joj je u ishodištu koordinata, os ordinata je tangenta u tjemenu, a os apscisa os simetrije ili, kraće, samo *os.* Duljina tetive koja prolazi fokusom i okomita je na os iznosi $2p$, a zove se *parametar parabole.* Prema tome je $p$ *poluparametar.* Krivulja određena jednadžbom

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (14.3)$$

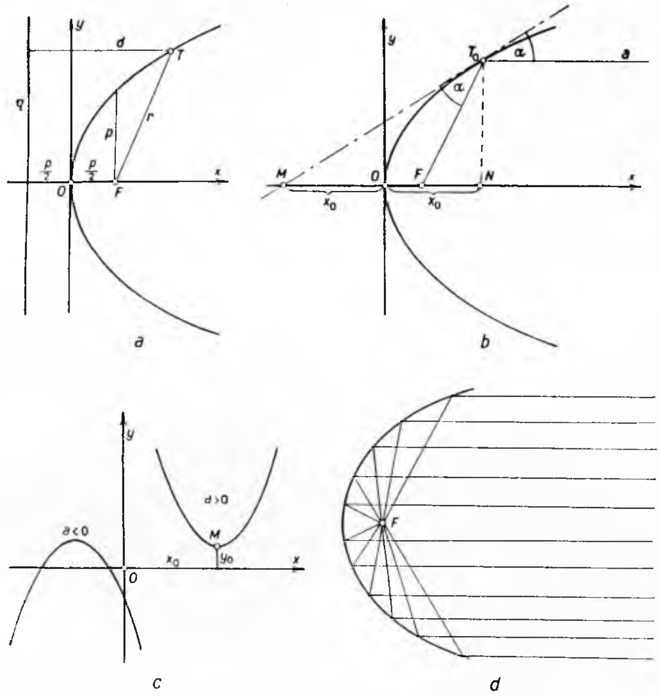
također je parabola. Njena je os paralelna s osi ordinata, tjeme ima koordinate $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, a poluparametar je jednak $p = \dfrac{1}{2|a|}$. Ako je $a > 0$, parabola (14.3) je svojom konkavnom stranom okrenuta prema gore, a u slučaju $a < 0$ konkavna je strana parabole okrenuta prema dolje (sl. 10c).

Da pravac $Ax + By + C = 0$ bude tangenta parabole (14.2), mora biti ispunjena uvjetna relacija $B^2 p - 2AC = 0$. Ako su $x_0$, $y_0$ koordinate dirališta $T_0$ u kojem tangenta dodiruje parabolu, ta tangenta ima jednadžbu

$$y_0 y - p(x + x_0) = 0.$$

Jednadžba polare parabole ima isti oblik, samo su sada $x_0$, $y_0$ koordinate bilo koje tačke ravnine, tj. *pola* za tu polaru.

Siječe li tangenta os parabole u tački $M$, a $N$ je projekcija dirališta $T_0$ na os parabole, tjeme je parabole upravo polovište dužine $MN$ (sl. 10b). Odatle slijedi da su dužine $\overline{MF}$ i $\overline{FT_0}$ jednake, pa je trokut $\triangle MFT_0$ istokračan. Dakle, kutovi što ih tangenta u tački $T_0$ zatvara s radijvektorom $\overline{FT_0}$ i sa pravcem $a$ koji prolazi diralištem $T_0$ a paralelan je osi parabole, međusobno su jednaki. Tehničku primjenu ovog važnog svojstva parabole predstavljaju parabolična zrcala. Kako je, naime, prema zakonu refleksije kut upadanja jednak kutu odbijanja, svaka zraka koja izlazi iz fokusa bit će nakon refleksije na paraboli paralelna njenoj osi (sl. 10d). Parabolično zrcalo ima oblik rotacionog paraboloida, tj. plohe koja nastaje rotacijom parabole oko njezine osi. Nalazi li se u fokusu takva zrcala izvor nekih valova, njihove će zrake nakon refleksije na zrcalu biti paralelne s osi parabole. Tako je moguće primjenom paraboličnog zrcala usmjeriti u jedan paralelni snop one zrake koje su pošle iz fokusa.



Sl. 10

**15. Elipsa** je geometrijsko mjesto tačaka $T$ ravnine za koje je zbroj udaljenosti od dviju čvrstih tačaka stalan. Te čvrste tačke $F_1$ i $F_2$ su *fokusi* elipse. Prema toj definiciji mora biti $F_1T + F_2T = \text{const.}$ ili, ako se ta konstantna vrijednost označi sa $2a$, $r_1 + r_2 = 2a$.

Udaljenost $e$ fokusa od centra elipse zove se *linearni ekscentricitet*. Ako su u pravokutnom sistemu tačke $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$ fokusi elipse (sl. 11a), njena jednadžba glasi

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (15.1)$$

To je *centralna jednadžba* elipse. U parametarskom predočenju ta elipsa (sl. 11b) dana je jednadžbama

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t.$$

Tačke $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ su *tjemena* elipse. Pri tom je $\overline{A_1A_2} = 2a$ *velika os*, a $\overline{B_1B_2} = 2b$ *mala os* elipse. Između duljina poluosi i linearnog ekscentriciteta postoji odnos $a^2 - b^2 = e^2$. Omjer $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ linearnog ekscentriciteta i velike poluosi zove se *numerički ekscentricitet*. *Parametar* elipse je duljina one tetive $\overline{M_1M_2}$ koja prolazi fokusom a okomita je na veliku os. Poluparametar elipse određen je relacijom $p = \dfrac{b^2}{a}$. Ako je pol polarnog sistema u centru elipse a tjeme $A_2$ na polarnoj osi, dobiva se centralna jednadžba elipse u polarnim koordinatama:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}.$$

Ako je tjeme $A_1$ u ishodištu koordinatnog sistema a tjeme $A_2$ na pozitivnom dijelu osi apscisa (sl. 11d), dobiva se *tjemena jednadžba* elipse.

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Uvjet da pravac $Ax + By + C = 0$ bude tangenta elipse (15.1) dan je formulom

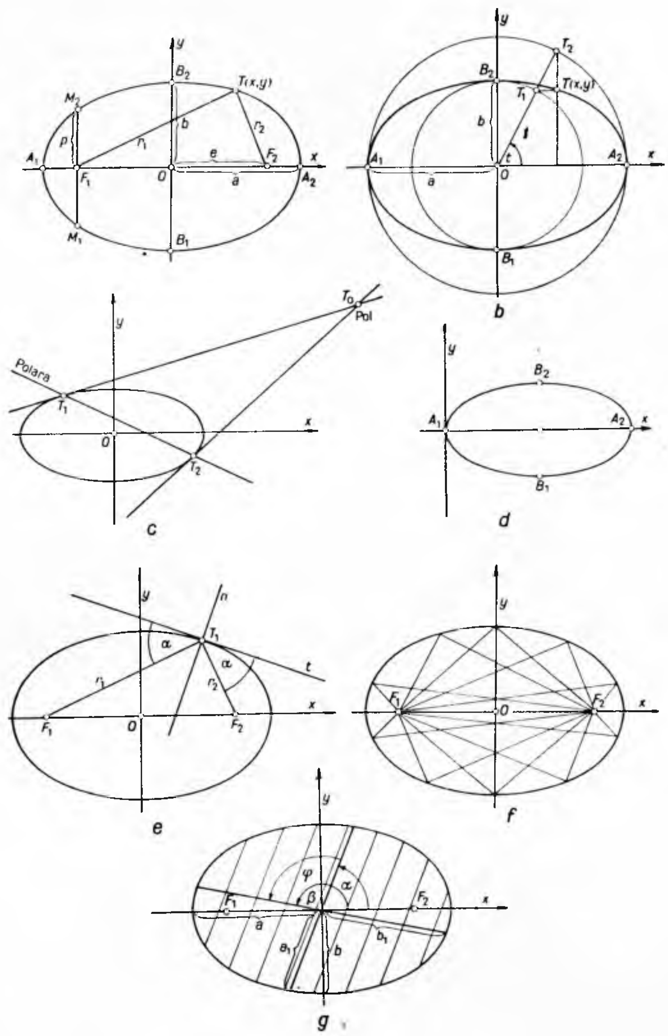
$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0.$$

Ako je $T_0(x_0, y_0) = 0$ dirailište tangente na elipsi, jednadžba tangente glasi

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0. \qquad (15.2)$$

Ako je $T_0(x_0\ y_0)$ bilo koja tačka ravnine, (15.2) je jednadžba polare, a tačka $T_0$ je *pol* za tu polaru. Nalazi li se pol $T_0$ izvan elipse, polara je spojnica dirališta onih tangenata elipse koje prolaze polom $T_0$ (Sl. 11c).

Tangenta elipse zatvara s radijvektorom svoga dirališta jednake kutove (sl. 11e). Ta činjenica može poslužiti za tačnu konstrukciju tangenata elipse ako je zadano diralište. Nalazi li se u jednom žarištu izvor nekih valova, na osnovi zakona refleksije zrake tih valova će nakon zrcaljenja na elipsi prolaziti sve kroz drugo žarište (sl. 11f).



Sl. 11

Promjer ili dijametar elipse je svaka tetiva koja prolazi njezinim centrom. Geometrijsko mjesto polovišta paralelnih tetiva elipse je jedan njezin dijametar. *Konjugirani dijametri* su dva dijametra koji imaju uzajamno svojstvo da polovišta tetiva paralelnih jednom od tih dijametara leže na drugomu, i obratno, polovišta tetiva paralelnih drugom dijametru leže na prvomu (sl. 11g). Ako su $k$ i $k'$ koeficijenti smjera dvaju konjugiranih dijametara, oni su vezani relacijom $k\,k' = -\frac{b^2}{a^2}$. Prema tome su $k$ i $k'$ uvijek protivnog predznaka. Ako je prikloni kut $\alpha$ prvog dijametra šiljast, prikloni kut $\beta$ drugog dijametra je tup. Jedini par konjugiranih dijametara koji se sijeku okomito čine osi elipse. No u slučaju kada je $a = b$, tj. za kružnicu, svaki se par konjugiranih dijametara siječe okomito. Ako su $2a_1$ i $2b_1$ duljine dvaju konjugiranih dijametara, a $\varphi$ kut među njima, vrijede ova dva *Apolonijeva teorema:*

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2; \quad a_1 b_1 \sin\varphi = ab.$$

**16. Hiperbola** je geometrijsko mjesto tačaka $T$ ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju čvrstih tačaka stalna. Te čvrste tačke $F_1$ i $F_2$ su *žarišta* ili *fokusi* hiperbole (sl. 12a). Za tačke hiperbole vrijedi dakle

$$|F_1 T - F_2 T| = \text{const.} \quad \text{ili} \quad |r_1 - r_2| = 2a.$$

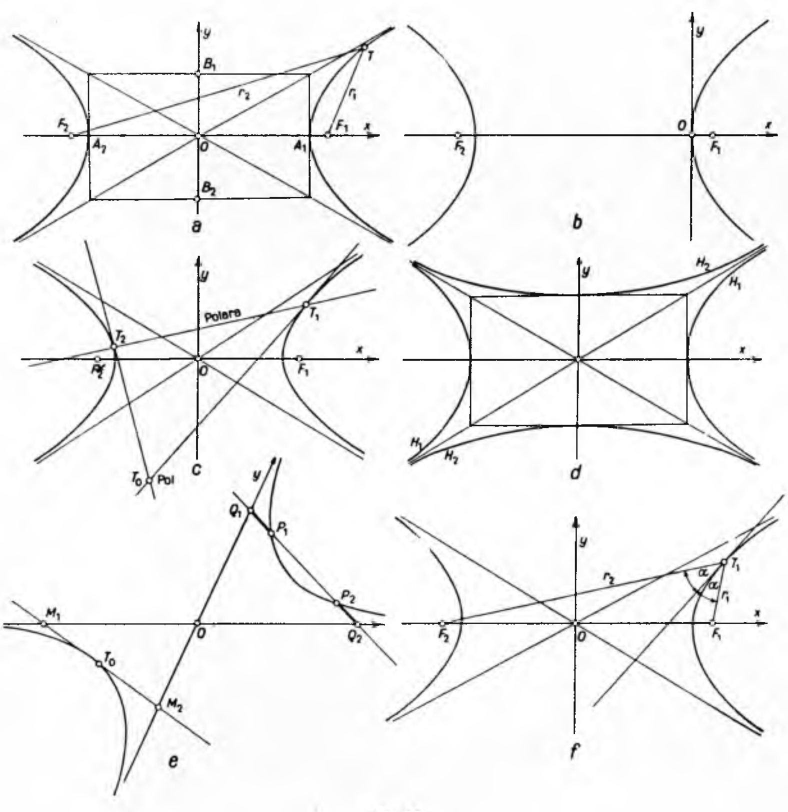
Pri tom tačke za koje je $r_1 - r_2 = 2a$ čine *lijevu granu* hiperbole, a tačke za koje je $r_1 - r_2 = -2a$ čine *desnu granu*. Udaljenost $e$ fokusa od centra hiperbole zove se *linearni ekscentricitet*. Ako su $F_1(e, 0)$, $F_2(-e, 0)$ fokusi hiperbole, njena *centralna* jednadžba u pravokutnim koordinatama glasi

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (16.1)$$

Parametarski je ta hiperbola dana jednadžbama

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t; \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t.$$

Tačke $A_1$ i $A_2$ su *tjemena hiperbole*, $\overline{A_1 A_2} = 2a$ je *realna os* hiperbole, $\overline{B_1 B_2} = 2b$ je njena *imaginarna os*. Ako je $a = b$, hiperbola se zove istostrana i ima jednadžbu $x^2 - y^2 - a^2 = 0$. Linearni ekscentricitet hiperbole određuju njene poluosi jednadžbom




Sl. 12

$a^2 + b^2 = e^2$. Omjer $\varepsilon = \frac{e}{a}$ linearnog ekscentriciteta i realne poluosi zove se *numerički ekscentricitet*. *Parametar* hiperbole je duljina tetive koja prolazi fokusom a okomita je na realnu os. Za poluparametar $p$ vrijedi $p = \frac{b^2}{a}$. Centralna jednadžba hiperbole u polarnim koordinatama glasi $r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1}$

*Tjemena jednadžba* hiperbole (sl. 12b) ima oblik $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$. Uvjet da pravac $Ax + By + C = 0$ bude tangenta hiperbole (16.1) dan je relacijom $A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 = 0$. Ako je $T_0(x_0, y_0)$ diralište tangente na hiperboli, jednadžba te tangente glasi

$$b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0. \qquad (16.2)$$

No to je ujedno jednadžba *polare* za *pol* $T_0(x_0, y_0)$, gdje je $T_0$ sada bilo koja tačka ravnine (sl. 12c).

*Asimptote* hiperbole su pravci koji imaju svojstvo da udaljenost između njih i one tačke koja po nekoj grani hiperbole odlazi u beskonačnost teži prema nuli. Hiperbola (16.1) ima dvije asimptote: $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$. Asimptote hiperbole mogu se shvatiti kao granični slučaj tangente (16.2), kad njezino dirалište $T_0(x_0, y_0)$ po nekoj grani hiperbole odlazi u beskonačnost. Za hiperbole (sl. 12d)

$$H_1 \ldots b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0; \quad H_2 \ldots -b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

kaže se da su međusobno *konjugirane*. One imaju zajedničke asimptote, a realna os svake od tih hiperbola identična je s imaginarnom osi njoj konjugirane hiperbole. Ako su asimptote hiperbole osi koordinatnog sistema (sl. 12e), jednadžba hiperbole dobiva jednostavan oblik: $4xy - e^2 = 0$.

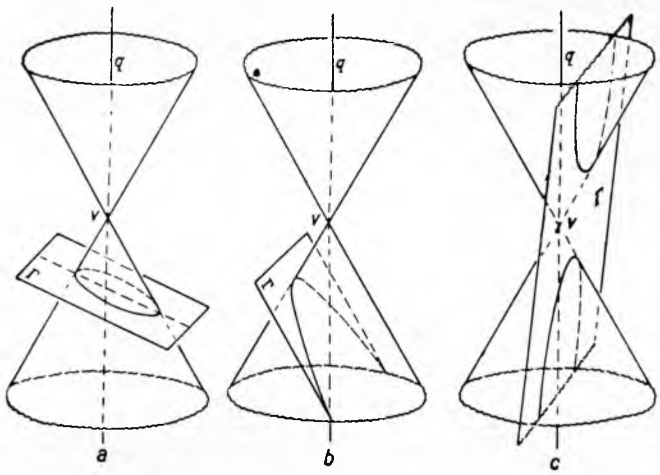
Siječe li neki pravac hiperbolu u tačkama $P_1$ i $P_2$, a njezine asimptote u tačkama $Q_1$ i $Q_2$, onda je na svakoj takvoj sekanti segment $\overline{Q_1P_1}$ između asimptote i hiperbole jednak segmentu $\overline{P_2Q_2}$ između hiperbole i asimptote (sl. 12e). Odatle slijedi da će u graničnom slučaju, kada sekanta prijeđe u tangentu, dirалište $T_0$ raspolovljivati segment $\overline{M_1M_2}$ tangente između asimptota. Tangenta na hiperbolu zatvara sa radijvektorima svoga dirališta jednake kutove, i to tako da je tangenta simetrala kuta što ih zatvaraju ti radijvektori (sl. 12f). Odatle slijedi da će se zrake koje polaze iz jednog fokusa na hiperboli reflektirati tako da nakon refleksije imaju smjer kao da su pošle iz drugog fokusa. *Promjer* ili *dijametar* hiperbole je svaka ona tetiva koja prolazi njezinim središtem. Dijametar s koeficijentom smjera $k$ neke hiperbole $H_1$ i dijametar s koeficijentom smjera $k'$ hiperbole $H_2$ koja je hiperboli $H_1$ konjugirana čine par *konjugiranih dijametara* ako je

$$k\,k' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (16.3)$$

Svaki od tih dijametara raspolovljuje sve tetive koje su paralelne s njemu konjugiranim dijametrom. Kako su prema (16.3) koeficijenti smjera obaju tih dijametara istog predznaka, oni s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvaraju obadva ili istodobno šiljaste kutove ili istodobno tupe kutove. Ako su $2a_1$ i $2b_1$ duljine dvaju konjugiranih dijametara, a $\varphi$ kut među njima, vrijede za njih ovi *Apolonijevi teoremi:*

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2, \quad a_1 b_1 \sin\varphi = ab.$$

**17. Presjeci stošca.** Elipsa, hiperbola i parabola imaju neka zajednička svojstva. Tako se, npr., mogu sve te tri krivulje definirati stereometrijski na jedinstven način. U tu svrhu treba poći od pojma kružnog stošca. Svi pravci $p$ prostora koji prolaze nekom tačkom $V$ nekoga danog pravca $q$ a tim pravcem zatvaraju isti kut $\alpha$, čine jednu pravčastu plohu koja se zove *stožac, čunj* ili *konus,* i to napose *uspravni kružni stožac.* Tačka $V$ je *vrh* stošca, pravac $q$ mu je *os*, a svaki od pravaca $p$ mu je *izvodnica.* Presiječe li se stožac nekom ravninom $\Gamma$, krivulja presjeka zove se *čunjosjek* ili *konika* ili *presjek stošca.* Ako ravnina $\Gamma$ ne prolazi vrhom $V$ stošca, presjek stošca je elipsa, parabola ili hiperbola, već prema tome da li ona siječe sve izvodnice stošca (sl. 13a), ili je paralelna s jednom njegovom izvodnicom (sl. 13b), ili je paralelna sa dvije od tih izvodnica (sl. 13c). Ako ravnina presjeka



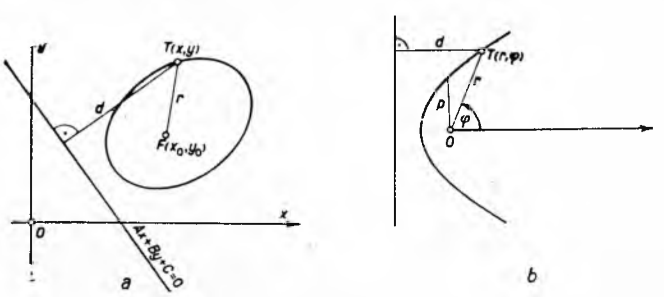

Sl. 13

prolazi vrhom stošca, presjeci stošca će biti degenerirani. Tako nastaju tri daljnja slučaja presjeka stošca, i to: par ukrštenih realnih pravaca, jedan dvostruki realan pravac i par ukrštenih imaginarnih pravaca sa zajedničkom realnom tačkom. Osim ovih krivulja, među presjeke stošca računaju se još i par paralelnih pravaca i par imaginarnih paralelnih pravaca koji se dobivaju u slučaju kad vrh $V$ stošca ode po pravcu $q$ u beskonačnost te pri tom stožac prijeđe u kružni valjak, i uz to je ravnina presjeka $\Gamma$ paralelna s osi valjka. Napokon, *imaginarna elipsa* nastaje kao presjek kružnog stošca i neke imaginarne ravnine.

Tako postoji u svemu devet slučajeva presjeka stošca, koji su ovdje dani njihovim najjednostavnijim jednadžbama u *kanonskom obliku:*

1. imaginarna elipsa: $b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2 = 0;$
2. elipsa: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$
3. hiperbola: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$
4. parabola: $y^2 - 2px = 0;$
5. par imaginarnih ukrštenih pravaca: $b^2x^2 + a^2y^2 = 0;$ (17.1)
6. par realnih ukrštenih pravaca: $b^2x^2 - a^2y^2 = 0;$
7. par paralelnih imaginarnih pravaca: $y^2 + a^2 = 0;$
8. par paralelnih realnih pravaca: $y^2 - a^2 = 0;$
9. dvostruki pravac: $y^2 = 0.$

Razabiramo odatle da su, bez izuzetka, svi presjeci stošca krivulje drugog reda. Presjeci stošca mogu se i planimetrijski definirati uz pomoć jednog njihovog daljnjeg zajedničkog svojstva: giba li se tačka u ravnini tako da je njezina udaljenost $r$ od jedne čvrste tačke u konstantnom omjeru s njezinom udaljenošću $d$ od jednoga čvrstog pravca, ona opisuje u ravnini krivulju koja je




Sl. 14

presjek stošca. Pri tom je čvrsta tačka jedan fokus, čvrsti pravac zove se *ravnalica* ili *direktrisa*, a konstantni omjer spomenutih udaljenosti je numerički ekscentricitet $\varepsilon$ presjeka stošca. Već prema tome da li je $\varepsilon$ manje, jednako ili veće od jedinice, presjek stošca je elipsa, parabola ili hiperbola. U slučaju kada čvrsta tačka $F$ padne na direktrisu, nastaju degenerirani slučajevi presjeka. Prema tome je za sve presjeke stošca karakteristična relacija

$$r = \varepsilon d. \tag{17.2}$$

Ako je u Kartezijevu sistemu dan bilo koji pravac $Ax+By+C=0$ kao direktrisa i bilo koja tačka $F(x_0,y_0)$ kao fokus (sl. 14a), a osim toga je određena brojčana vrijednost numeričkog ekscentriciteta $\varepsilon$, na osnovi relacije (17.2) dobiva se za taj presjek stošca jednadžba

$$(A^2 + B^2)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \varepsilon^2 (Ax + By + C)^2 = 0.$$

O numeričkoj vrijednosti konstante $\varepsilon$ zavisi hoće li u danom slučaju ova jednadžba predočivati elipsu, parabolu ili hiperbolu. Ako je pol $O$ polarnoga koordinatnog sistema u danom fokusu presjeka stošca, a polarna je os okomita na direktrisu i orijentirana od nje prema van (sl. 14b), tada iz (17.2) slijedi da zajednička jednadžba za presjeke stošca u polarnim koordinatama glasi

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

**18. Krivulje drugog reda.** Opću jednadžbu krivulje 2. reda možemo pisati u obliku

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{18.1}$$

Determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

u kojoj su elementi koji leže simetrično s obzirom na glavnu dijagonalu međusobno jednaki, tj. u kojoj je $a_{ij} = a_{ji}$, zove se diskriminanta jednadžbe (18.1). Kroz pet po volji danih tačaka ravnine $T_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, 5)$ prolazi uvijek jedna krivulja drugog reda, koja je tada tim tačkama i određena. Jednadžba te krivulje glasi

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18.2}$$

Svi presjeci stošca su krivulje drugog reda. No vrijedi i obratno: sve krivulje drugog reda su presjeci stošca. Transformacijama koordinata može se, naime, uvijek neka numerički dana jednadžba (18.1) pojednostavniti i svesti na jedan od devet kanonskih oblika (17.1) jednadžbi presjeka stošca. Na taj se način ujedno može za svaki pojedini slučaj odrediti vrsta krivulje drugog reda dane jednadžbom (18.1). No vrsta krivulja drugog reda može se odrediti i neposredno na osnovu jednadžbe (18.1) ispitujući vrijednosti nekih determinanata koje imaju za elemente koeficijente te jednadžbe. To su napose diskriminata $\Delta$ jednadžbe (18.1) i njezine adjunkte

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Osim toga potrebne su još i adjunkte

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

S obzirom na eventualnu centralnu simetriju neke krivulje dane numerički jednadžbom (18.1), treba razlikovati tri slučaja. Kako su naime, $x_0 = A_{31} : A_{33}$, $y_0 = A_{32} : A_{33}$ koordinate centra simetrije te krivulje, to u slučaju:

1. kad je $A_{33} \neq 0$, krivulja ima određeni centar u konačnosti;

2. kada je $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$, krivulja ima neizmjerno mnogo centara simetrije, a geometrijsko mjesto tih centara je jedan pravac;

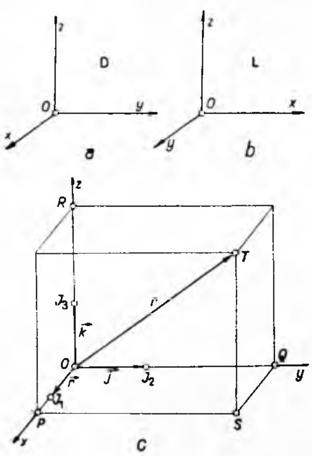
3. kada je $A_{33} = 0$, ali je bar jedna od determinanata $A_{31}$ i $A_{32}$ različita od nule, krivulja (18.1) nema centra.

Potanjim ispitivanjem i diskusijom svakoga od ta tri slučaja dolazi se do ove pregledne tablice koja daje kriterije za određene vrste krivulja drugoga reda (18.1):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Delta \neq 0$ | $A_{33} \neq 0$ | $A_{33} > 0$ | $a_{11}\Delta > 0$ | imaginarna elipsa |
| 2. | | | | $a_{11}\Delta < 0$ | elipsa |
| 3. | | | $A_{33} < 0$ | | hiperbola |
| 4. | | $A_{33} = 0$ | | | parabola |
| 5. | $\Delta = 0$ | $A_{33} \neq 0$ | $A_{33} > 0$ | | par imaginarnih ukrštenih pravaca |
| 6. | | | $A_{33} < 0$ | | par realnih ukrštenih pravaca |
| 7. | | $A_{33} = 0$ | $A_{11} + A_{22} > 0$ | | par imaginarnih paralelnih pravaca |
| 8. | | | $A_{11} + A_{22} < 0$ | | par realnih paralelnih pravaca |
| 9. | | | $A_{11} + A_{22} = 0$ | | dvostruki realni pravac |

## ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

**19. Koordinatni sistemi u prostoru.** a) *Kartezijeve koordinate.* Od koordinatnih sistema kojima se služimo u analitičkoj geometriji prostora najčešće se primjenjuje Kartezijev koordinatni sistem. Tu služe kao koordinatne osi tri orijentirana pravca $Ox$, $Oy$, $Oz$ koji prolaze jednom zajedničkom tačkom $O$, ishodištem koordinata, a ne leže sva tri u istoj ravnini. Ako sva ta tri pravca stoje jedan na drugom okomito, koordinatni je sistem pravokutan, inače je kosokutan. S obzirom na međusobnu orijentaciju koordinatnih osi tu postoje dvije mogućnosti, pa tako postoje desni (sl. 15 a) i lijevi (sl. 15 b) koordinatni sistem. U desnom (lijevom) sistemu koordinatne osi $Ox$, $Oy$, $Oz$ imaju redom smjerove kao ispruženi palac, ispruženi kažiprst i savinuti srednji prst desne (lijeve) ruke. Ovdje ćemo se služiti samo desnim pravokutnim koordinatnim sistemom.



Sl. 15

Položaj neke tačke $T$ u prostoru određen je njezinim *vektorom mjesta* ili *radijvektorom* $\overrightarrow{OT} = \vec{r}$. Neka su $J_1$, $J_2$, $J_3$ jedinične tačke, odabrane redom na pozitivnim dijelovima osi $Ox$, $Oy$, odnosno $Oz$, i to tako da je $\overline{OJ_1} = \overline{OJ_2} = \overline{OJ_3}$ (sl. 15c). Jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi neka su

$$\vec{i} = \overrightarrow{OJ_1};\quad \vec{j} = \overrightarrow{OJ_2};\quad \vec{k} = \overrightarrow{OJ_3}.$$

Kartezijeve koordinate tačke $T$ su tada okomite projekcije vektora mjesta $\vec{r}$ na koordinatne osi, tj. to su

*apscisa* $x = \vec{r} \cdot \vec{i}$, *ordinata* $y = \vec{r} \cdot \vec{j}$, *aplikata* $z = \vec{r} \cdot \vec{k}$.

Budući da je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$, vektor mjesta $\vec{r}$ određen je kao vektorski zbroj svojih komponenata u smjeru koordinatnih osi, tj.

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z. \tag{19.1}$$

Oznakom $T(\vec{r})$, odnosno $T(x, y, z)$ naznačuje se da tački $T$ pripada vektor mjesta $\vec{r}$, odnosno da joj pripadaju koordinate $x$, $y$ i $z$. Ravnine $XY$, $YZ$ i $ZX$, od kojih svaka prolazi kroz dvije osi, zovu se *koordinatne ravnine.* Te tri ravnine dijele cijeli prostor na osam *oktanata* (sl. 16a) koji su određeni različitim kombinacijama predznaka koordinata.

Osim Kartezijeva koordinatnog sistema, u analitičkoj geometriji prostora često se upotrebljavaju sistemi do kojih se dolazi generalizacijom ravninskih polarnih koordinata na prostor. No ovdje postoje tri različite mogućnosti takve generalizacije:

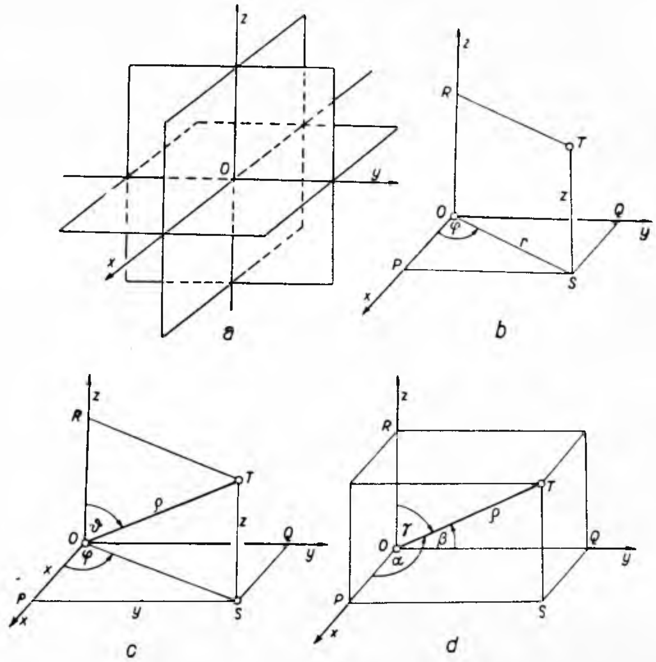
b) *Cilindrične koordinate.* U tom je slučaju tačka $T$ određena trima koordinatama $r$, $\varphi$, $z$; koordinate $r$, $\varphi$ su ravninske polarne koordinate tačke $S$, koja je projekcija tačke $T$ na ravninu $XY$ (sl. 16b), a $z$ je aplikata tačke $T$.

Odnos između cilindričnih koordinata i pravokutnih Kartezijevih koordinata dan je jednadžbama

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z,$$

odnosno jednadžbama

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\quad z = z.$$



Sl. 16

c) *Sferne koordinate.* U tom je slučaju tačka $T$ određena sa tri koordinate $\rho$, $\varphi$, $\vartheta$ (sl. 16c), koje su ovako definirane:

$$\rho = OT,\quad \varphi = \sphericalangle POS,\quad \vartheta = \sphericalangle ROT.$$

Između sfernih i Kartezijevih koordinata postoji odnos dan jednadžbama

$$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\vartheta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

d) *Polarne prostorne koordinate.* Prostorne polarne koordinate $\rho$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tačke $T$ (sl. 16d) definirane su ovako

$$\rho = OT,\quad \alpha = \sphericalangle POT,\quad \beta = \sphericalangle QOT,\quad \gamma = \sphericalangle ROT.$$

Odnos prostornih polarnih i Kartezijevih koordinata daju jednadžbe

$$x = \rho\cos\alpha,\quad y = \rho\cos\beta,\quad z = \rho\cos\gamma;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x},$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{z^2 + x^2}}{y},\quad \gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Koordinate $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nisu međusobno nezavisne jer među njima postoji relacija

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

**20. Neke osnovne relacije.** a) *Udaljenost dviju tačaka.* Ako su $T_1(\vec{r}_1)$ i $T_2(\vec{r}_2)$ bilo koje dvije tačke prostora (sl. 17 a), gdje je $\vec{r}_\nu = \vec{i}\,x_\nu + \vec{j}\,y_\nu + \vec{k}\,z_\nu$, $(\nu = 1, 2)$, tada je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$
$$= \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1).$$

Za udaljenost tih dviju tačaka dobivamo tako

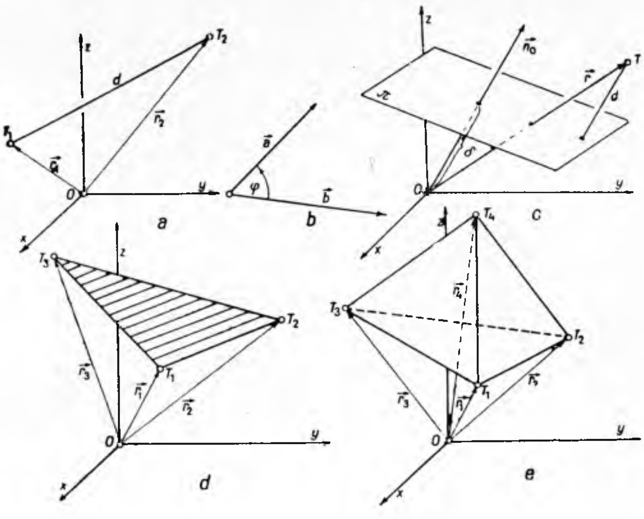
$$d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (20.1)$$

b) *Kut dvaju smjerova.* Smjer je u prostoru određen nekim orijentiranim pravcem ili nekim vektorom. Ako su dva smjera dana vektorima (sl. 17 b)

$$\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}\,a_y + \vec{k}\,a_z, \quad \vec{b} = \vec{i}\,b_x + \vec{j}\,b_y + \vec{k}\,b_z,$$

kut što ga ti smjerovi zatvaraju dan je relacijom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (20.2)$$




Sl. 17

Uvjet za okomitost tih vektora daje jednadžba

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (20.3)$$

Kut $\varphi$ što ga zatvaraju jedinični vektori

$$\vec{e}_\nu = \vec{i}\cos\alpha_\nu + \vec{j}\cos\beta_\nu + \vec{k}\cos\gamma_\nu, \quad (\nu = 1, 2)$$

određen je formulom

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

c) *Udaljenost tačke od ravnine.* Ako je položaj ravnine $\Pi$ u prostoru određen tako da je dana njezina udaljenost $\delta$ od ishodišta i jedinični vektor $\vec{n}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ okomit na ravninu $\Pi$ (sl. 17c), onda je udaljenost $d$ tačke $T(\vec{r})$ od ravnine $\Pi$ dana izrazom

$$d = \vec{n}_0\cdot\vec{r} - \delta, \quad (20.4)$$

ili u skalarnom obliku

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta. \quad (20.5)$$

d) *Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.* Dijeli li tačka $T(\vec{r})$ danu dužinu $\overline{T_1T_2}$ u omjeru $\mu$, dakle tako da je $\dfrac{\overline{T_1T}}{\overline{T_2T}} = \mu$, položaj tačke $T$ je određen relacijom

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \mu\,\vec{r}_2}{1 - \mu} \quad (20.6)$$

ili $\quad x = \dfrac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}, \quad y = \dfrac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}, \quad z = \dfrac{z_1 - \mu z_2}{1 - \mu}.$

Tako su, napose, koordinate polovišta dužine $\overline{T_1T_2}$ jednake

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

e) *Površina trokuta.* Ako su $T_\nu(\vec{r}_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ vrhovi nekog trokuta (sl. 17 d), njegova je površina

$$P = \frac{1}{2}\left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\times(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\right|,$$

ili

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

f) *Volumen tetraedra.* Simbol $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ neka znači *mješoviti* ili *vektorsko-skalarni produkt* triju vektora, tj. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$. Tada tetraedar kojemu su zadani vrhovi $T_\nu(\vec{r}_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ (sl. 17e) ima volumen

$$V = \frac{1}{6}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1,\ \vec{r}_3 - \vec{r}_1,\ \vec{r}_4 - \vec{r}_1\right) \quad (20.7)$$

ili

$$V = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (20.8)$$

Pri tom je uzeta u obzir i orijentacija tetraedra. Smatrat će se, naime, da je tetraedar $T_1T_2T_3T_4$ (u tom poredaju vrhova) pozitivno (negativno) orijentiran ako je trokut $\triangle T_1T_2T_3$ u ravnini $T_1T_2T_3$ pozitivno (negativno) orijentiran kada se promatra s one strane te ravnine na kojoj se nalazi vrh $T_4$. Prema danoj formuli za volumen tetraedra bit će taj volumen pozitivan ili negativan, prema tome da li je tetraedar pozitivno ili negativno orijentiran. Iz (20.8) slijedi da je uvjet za komplanarnost četiriju tačaka, tj. uvjet da one sve leže u istoj ravnini, dan relacijom

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20.9)$$

**21. Transformacije Kartezijevih koordinata.** Bilo koja transformacija pravokutnih Kartezijevih koordinata može se zamisliti sastavljenom od dviju osnovnih, od *translacije* i *rotacije.*

a) *Translacija.* Ako su $Oxyz$ i $O'x'y'z'$ dva pravokutna sistema koordinata kojima su osi istosmjerno paralelne, relativni položaj tih sistema bit će određen vektorom translacije ili vektorom paralelnog pomaka (sl. 18 a)

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{t} = \vec{i}\,a + \vec{j}\,b + \vec{k}\,c.$$

U tom je slučaju

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{O'T} + \overrightarrow{OO'} \quad \text{ili} \quad \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{t}.$$

Ta se vektorska jednadžba može rastaviti na tri skalarne, pa se tako dobiju ove jednadžbe translacije koordinatnog sustava:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c;$$
$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

b) *Rotacija.* Ako pravokutni sistemi $Oxyz$ i $O'x'y'z'$ (sl. 18 b) imaju zajedničko ishodište, a koordinatne osi zatvaraju međusobno kutove prema ovoj shemi

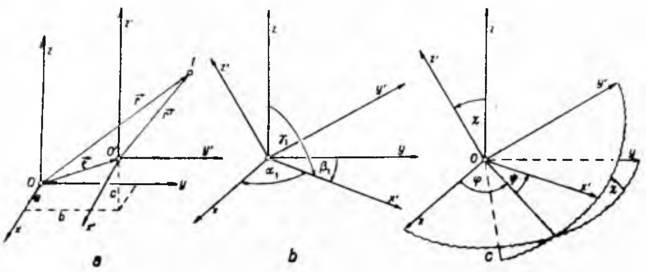
| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $y'$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $z'$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

(21.1)

tada jednadžbe transformacije glase

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{aligned}$$




Sl. 18

Pri tom je

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (21.2)$$

determinanta ove transformacije. Kutovi $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) nisu svi međusobno nezavisni, nego samo tri od njih zgodno odabrana, tj. takva tri koja ne leže u istom retku ili u istom stupcu sheme (21.1). Među tim kutovima postoje relacije koje se uz pomoć determinante (21.2) mogu izreći ovako: 1. Determinanta $D$ jednaka je jedinici; 2. suma kvadrata elemenata jednog retka ili jednog stupca jednaka je jedinici; 3. suma produkata korespondentnih elemenata dvaju različitih redaka ili stupaca jednaka je nuli; 4. svaki je elemenat determinante jednak njegovoj adjunkti.

c) *Eulerovi kutovi.* Kutovi sheme (21.1) mogu se izraziti s pomoću tri međusobno nezavisna *Eulerova kuta* $\varphi$, $\chi$, $\psi$ (sl. 18c). Relacije koje daju vezu među tim kutovima jesu:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\chi\sin\psi, \\ \cos\beta_1 &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\chi\sin\psi, \\ \cos\gamma_1 &= \sin\chi\sin\psi, \\ \cos\alpha_2 &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\chi\cos\psi, \\ \cos\beta_2 &= -\sin\gamma\sin\psi + \cos\varphi\cos\chi\cos\psi, \\ \cos\gamma_2 &= \sin\chi\cos\psi, \\ \cos\alpha_3 &= \sin\varphi\sin\chi, \\ \cos\beta_3 &= -\cos\varphi\sin\chi, \\ \cos\gamma_3 &= \cos\chi. \end{aligned}$$

**22. Analitičko predočivanje krivulja i ploha u prostoru.** Neka je dana neka krivulja $C$ u prostoru pa neka se stanoviti parametar $t$ duž krivulje kontinuirano mijenja tako da je svakoj tački $T$ pridružen neki realni broj $t$, a svakom realnom broju $t$ iz stanovitog intervala neka je pridružena neka tačka $T$ na krivulji (sl. 19 a). Tada je položaj tačke $T$ na krivulji, pa dakle i njezin radijvektor $\vec{r}$, određen tom vrijednosti parametra $t$, tj. duž krivulje $C$ radijvektor $\vec{r}$ je neka vektorska funkcija parametra $t$. Krivulja $C$ će imati, dakle, jednadžbu $C \ldots \vec{r} = \vec{r}(t)$ ili, zbog (19.1), u skalarnom obliku

$$C \ldots x = \varphi_1(t); \quad y = \varphi_2(t); \quad z = \varphi_3(t). \qquad (22.1)$$

To je tada parametarsko predočenje krivulje u prostoru. Tako je npr. jednadžbama

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \qquad (22.2)$$

predočena obična cilindrična spirala (sl. 19b). Eliminacijom parametra $t$ iz relacija (22.1) nalazi se neposredna veza među koordinatama, pa tako krivulja u prostoru mjesto jednadžbama (22.1) može biti predočena analitički i sistemom jednadžbi

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \qquad (22.3)$$

Tako npr. eliminacijom parametra $t$ iz (22.2) slijedi da cilindrična spirala može biti analitički predočena sistemom jednadžbi

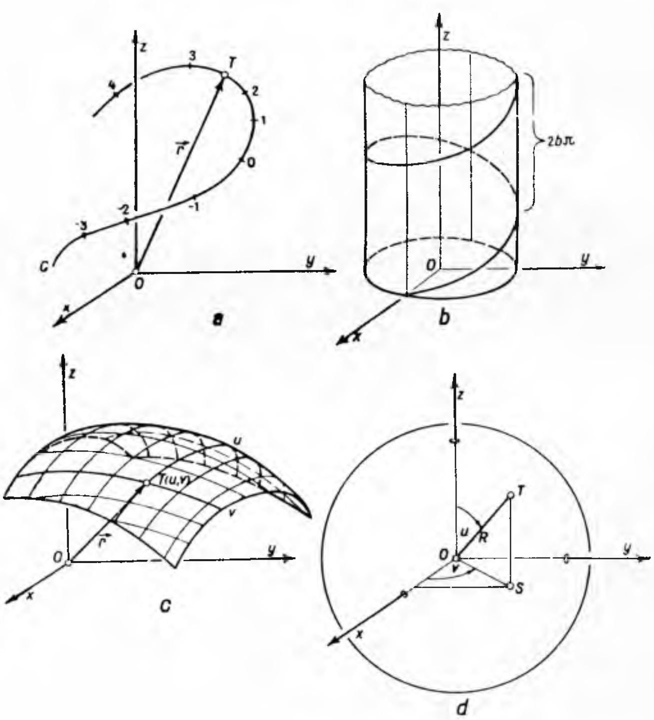
$$x = a\cos\frac{z}{b}, \quad y = a\sin\frac{z}{b}$$

ili ekvivalentnim sistemom

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \frac{y}{x} - \operatorname{tg}\frac{z}{b} = 0.$$

Ako je dana neka ploha u prostoru (sl. 19 c), na njoj se može zamisliti *krivocrtni koordinatni sistem.* Promatrani dio plohe neka je, naime, prekriven sa dva sistema *parametarskih crta,* i to tako da svakom tačkom plohe (s eventualnim izuzetkom nekih singularnih tačaka) prolazi po jedna crta iz svakog sistema, a pri tom se dvije crte iz različitih sistema sijeku najviše u jednoj tački. Svakoj crti prvog sistema neka je pridružena neka realna vrijednost kao parametar $u$, a svakoj crti drugog sistema neka realna vrijednost kao parametar $v$, a obje te vrijednosti neka se duž plohe kontinuirano mijenjaju. Svaka tačka na plohi bit će tako određena kao sjecište od po jedne crte $C_1$ i $C_2$ iz svakog sistema, pa će joj tako pripadati uređeni par realnih vrijednosti parametara $u, v$ koji su pridruženi tim crtama $C_1$ i $C_2$. Parametri $u$ i $v$ jesu krivocrtne koordinate tačke $T$, što se označuje sa $T(u, v)$. No i vektor mjesta $\vec{r}$, koji daje položaj tačke $T$ u prostoru, bit će tako određen vrijednostima parametara $u$ i $v$, pa je prema tome neka ploha analitički predočena jednadžbom $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Rastavi li se ova vektorska funkcija na komponente, mogu se pisati parametarske jednadžbe plohe u skalarnom obliku

$$x = \varphi_1(u, v); \quad y = \varphi_2(u, v); \quad z = \varphi_3(u, v).$$




Sl. 19

Eliminacijom parametara $u, v$ iz tih jednadžbi dobiva se jednadžba plohe $F(x, y, z) = 0$, kojom je implicite dana veza među koordinatama tačke na plohi. Dakako da se ta jednadžba općenito može razriješiti po bilo kojoj varijabli, pa tako ploha može biti predočena npr. jednadžbom oblika $z = f(x, y)$. Razabira se ujedno da je krivulja $C$ sistemom (22.3) određena kao sjecište dviju ploha.

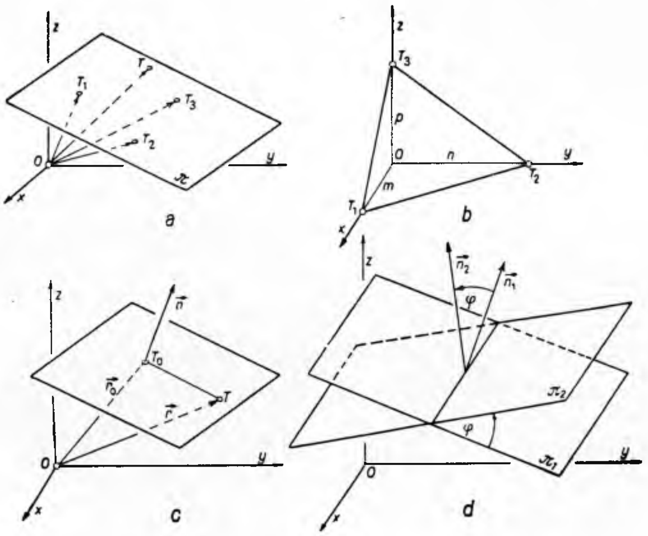
Kao primjer analitičkog predočenja ploha neka posluži kuglina ploha polumjera $R$ sa centrom u ishodištu koordinata (sl. 19 d). Ona ima jednadžbe

$$x = R\sin u\cos v, \quad y = R\sin u\sin v, \quad z = R\cos u.$$

Eliminacijom parametra slijedi odatle jednadžba kugle

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

**23. Ravnina.** Položaj ravnine prema koordinatnom sistemu moguće je odrediti na različite načine, prema izboru različitih elemenata koji taj položaj mogu fiksirati. Tako se dolazi do različitih oblika jednadžbe ravnine.




Sl. 20

Ako je npr. ravnina određena smjerom normalnog vektora $\vec{n}_0$ i udaljenošću $\delta$ od ishodišta koordinata (sl. 17c), pa ako se uvaži da je za tačke u ravnini udaljenost od te ravnine jednaka nuli, iz (20.4) i (20.5) dobivaju se *normalni oblici jednadžbe ravnine*:

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \delta = 0, \quad \text{ili} \quad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0.$$

Ako je ravnina određena trima svojim nekolinearnim tačkama $T_\nu(\vec{r}_\nu)$ (sl. 20a), i ako je $T(\vec{r})$ bilo koja tačka te ravnine, volumen tetraedra što ga čine te četiri tačke bit će jednak nuli, pa se iz (30.7), odnosno (20.8), dobiva jednadžba te ravnine u obliku

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \ \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \ \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0,$$

ili skalarno

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{23.1}$$

Odsijeca li ravnina na koordinatnim osima redom segmente $m, n, p$ (sl. 20b), bit će ona određena tačkama $T_1(m,0,0)$, $T_2(0,n,0)$ i $T_3(0,0,p)$, pa se prema (23.1) dobiva *segmentni oblik jednadžbe ravnine*:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1 = 0.$$

Prolazi li ravnina tačkom $T_0(\vec{r}_0)$, a $\vec{n} = \vec{i}A + \vec{j}B + \vec{k}C$ je bilo koji vektor normalan na ravninu (sl. 20c), jednadžba te ravnine glasi:

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{ili} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

U svakom je, dakle, slučaju jednadžba ravnine linearna, pa se može pisati

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{23.2}$$

ili vektorski

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0, \tag{23.3}$$

i to je *opći oblik jednadžbe ravnine.*

Iz općeg oblika jednadžbe ravnine može se prijeći na posebne, pa tako npr. jednadžba ravnine (23.2), odnosno (23.3), prevedena u normalni oblik, glasi:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r} + D}{-\operatorname{sign} D \cdot |\vec{n}|} = 0.$$

Ako su dane dvije ravnine u prostoru (sl. 20d)

$$\Pi_\nu \ldots \vec{n}_\nu \cdot \vec{r} + D_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2),$$

kut $\varphi$ što ga one zatvaraju određen je jednadžbom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{n_1 n_2} \quad \text{ili} \quad \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Uvjet za okomitost tih dviju ravnina glasi:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

a uvjet njihove paralelnosti,

$$\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2, \quad \text{ili} \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2.$$

**24. Pravac** određen jednom svojom tačkom $T_1(\vec{r}_1)$ i vektorom smjera $\vec{q} = \vec{i}\,a + \vec{j}\,b + \vec{k}\,c$ (sl. 21a) ima parametarsku jednadžbu $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{q}\,t$, ili u skalarnom obliku

$$x = x_1 + a\,t, \quad y = y_1 + b\,t, \quad z = z_1 + c\,t.$$

Eliminacijom parametra $t$ dobivaju se odatle jednadžbe pravca u obliku

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Ako je pravac određen kao spojnica tačaka $T_1(\vec{r}_1)$ i $T_2(\vec{r}_2)$ (sl. 21b), parametarski je predočen u vektorskom obliku jednadžbom

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,t,$$

ili u koordinatama

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t,$$

odakle se eliminacijom parametra dobivaju jednadžbe spojnice dviju tačaka u obliku

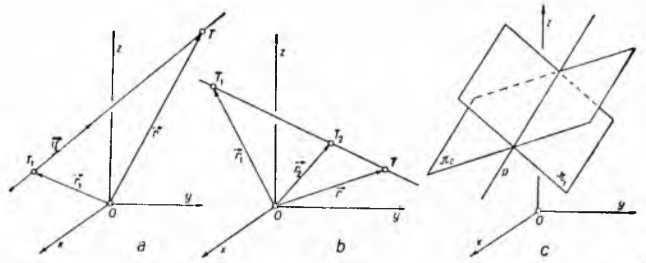
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ima li parametar $t$ značenje djelišnog omjera, u kojem tačka $T$ dijeli dužinu $\overline{T_1T_2}$, spojnica tačaka $T_1$, $T_2$ ima prema (20.6) jednadžbu

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - t\,\vec{r}_2}{1 - t}$$

ili

$$x = \frac{x_1 - t\,x_2}{1 - t}, \quad y = \frac{y_1 - t\,y_2}{1 - t}, \quad z = \frac{z_1 - t\,z_2}{1 - t}.$$




Sl. 21

Pravac $p$ (sl. 21c) kao presjek dviju ravnina $\Pi_1$, $\Pi_2$ određen je sistemom jednadžbi

$$p \ldots \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0, \end{cases}$$

ili
$$p \ldots \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

To su *opće jednadžbe pravca.*

Pravac $p$ je u tom slučaju određen i leži u konačnosti samo onda ako matrica $\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$ ima rang 2.

Dva pravca $\vec{r} = \vec{r}_\nu + \vec{q}_\nu\, t$ ($\nu = 1, 2$) zatvaraju kut $\varphi$ koji je određen jednadžbom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{q_1\, q_2} \quad \text{ili} \quad \cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Oni su okomiti ako je

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

a paralelni ako je

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

**25. Pravac i ravnina u prostoru.** Ravnina $\Pi \ldots \vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$ i pravac $p \ldots \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{q}\, t$ zatvaraju kut $\varphi$ (sl. 22 a) koji je određen jednadžbom

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{q}}{n\, q} \quad \text{ili} \quad \sin\varphi = \frac{A a + B b + C c}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Uvjet za okomitost pravca $p$ i ravnine $\Pi$ glasi

$$A : B : C = a : b : c,$$

a relacija $A a + B b + C c = 0$ daje uvjet njihova paralelizma.

Ravnina koja prolazi tačkama $T_1(\vec{r}_1)$ i $T_2(\vec{r}_2)$, a paralelna je s pravcem $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{q}\, t$, ima jednadžbu

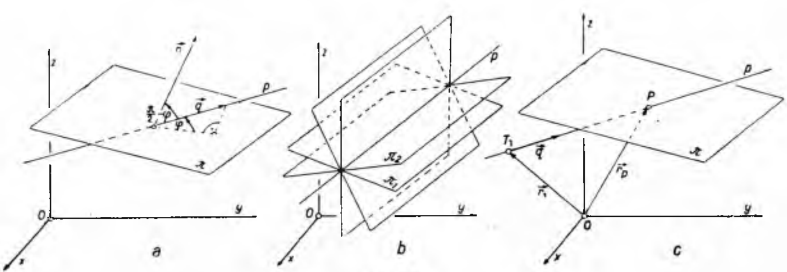
$$(\vec{r} - \vec{r}_1,\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1,\ \vec{q}) = 0$$

ili
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a ravnina koja prolazi tačkom $T_3(\vec{r}_3)$ i paralelna je sa dva pravca $\vec{r} = \vec{r}_\nu + \vec{q}_\nu t$ ($\nu = 1, 2$) ima jednadžbu

$$(\vec{r} - \vec{r}_3,\ \vec{q}_1,\ \vec{q}_2) = 0,$$

ili
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$



Sl. 22

Ako je pravac $p$ zadan jednadžbama

$$p \ldots \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0, \end{cases}$$

odnosno jednadžbama

$$p \ldots \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

onda *svezak ravnina*, tj. skup svih ravnina koje prolaze pravcem $p$ (sl. 22 b), ima jednadžbu

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 + \lambda\,(\vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2) = 0, \qquad (25.1)$$

odnosno jednadžbu

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0. \quad (25.2)$$

Te jednadžbe predočuju za svaku realnu vrijednost parametra $\lambda$ neku ravninu iz danog sveska, i obratno, za svaku ravninu iz tog sveska postoji realna vrijednost parametra $\lambda$ tako da jednadžbe (25.1) i (25.2) predočuju upravo tu ravninu.

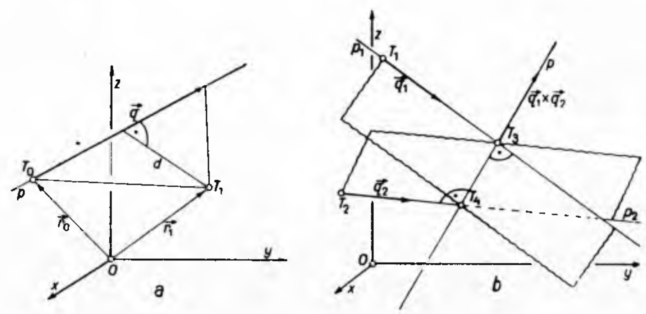
Probodište $P$ (sl. 22 c) pravca $p \ldots \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{q} \cdot t$ i ravnine $\Pi \ldots \vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$ određeno je radijvektorom

$$\vec{r}_P = \vec{r}_1 - \vec{q}\, \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1 + D}{\vec{n} \cdot \vec{q}}.$$

Ako je $\vec{n} \cdot \vec{r}_1 + D = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$, pravac $p$ leži u ravnini $\Pi$.

**26. Tačka i pravac u prostoru i dva pravca u prostoru.** Udaljenost $d$ tačke $T_1(\vec{r}_1)$ od pravca $p \ldots \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q}\, t$ (sl. 23a) jednaka je $d = \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{q}\right| : q$, ili u skalarnom obliku

$$d = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & b \\ z_1 - z_0 & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & c \\ x_1 - x_0 & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & a \\ y_1 - y_0 & b \end{vmatrix}^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Sl. 23

Ako su $p_\nu \ldots \vec{r} = \vec{r}_\nu + \vec{q}_\nu t$ ($\nu = 1, 2$) bilo koja dva pravca u prostoru, njihova zajednička normala $p$ je kao presjek ravnina $\Pi_1$ i $\Pi_2$ (sl. 23 b) dana sistemom jednadžbi

$$p \ldots \begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1,\ \vec{q}_1,\ \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) = 0, \\ (\vec{r} - \vec{r}_2,\ \vec{q}_2,\ \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) = 0, \end{cases}$$

ili skalarno

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

U parametarskom predočenju dana je ta zajednička normala jednadžbom

$$p \ldots \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{q}_1\, \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1,\ \vec{q}_2,\ \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2} + (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)\, t.$$

Najkraća udaljenost pravaca $p_1$ i $p_2$ je ona koju imaju tačke $T_3$ i $T_4$ na njihovoj zajedničkoj normali $p$. Ta je udaljenost jednaka

$$d = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2},$$

ili $$d = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} : \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

**27. Kugla** polumjera $R$ sa središtem u tački $S(\vec{r}_0)$ (sl. 24 a) ima jednadžbu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - R^2 = 0, \tag{27.1}$$

ili $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

što se može pisati i ovako:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0 x - - 2y_0 y - 2z_0 z + q = 0,$$

gdje je

$$q = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2.$$

Jednadžba drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + + Ezx + Fxy + Gx + Hy + + Kz + L = 0$$

predočuje kuglu ako je

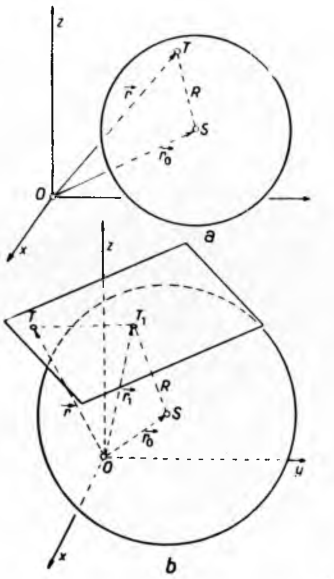
$$A = B = C, \quad D = E = F = 0.$$

U tom je slučaju središte kugle u tački

$$S\left(-\frac{G}{2A}, -\frac{H}{2A}, -\frac{K}{2A}\right),$$

a polumjer joj je

$$R = \frac{\sqrt{G^2 + H^2 + K^2 - 4AL}}{2A}.$$



Sl. 24

Ako je $G^2 + H^2 + K^2 - 4AL \geqq 0$, kugla je realna.

Jednadžba kugle koja je određena četirima svojim nekomplanarnim tačkama $T_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ glasi:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$ je tangencijalna za kuglu (27.1) ako je $(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2 - R^2(A^2 + B^2 + C^2) = 0$.

Ako je $T_1(\vec{r}_1)$ dirалište tangencijalne ravnine (sl. 24 b), jednadžba te ravnine glasi $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) - R^2 = 0$ ili

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) - R^2 = 0.$$

No to je ujedno i jednadžba polarne ravnine, ako je pol $T_1(\vec{r}_1)$ bilo koja tačka prostora. Ako je pol $T_1$ izvan kugle, polarna ravnina siječe kuglu duž kružnice u kojoj tangencijalni stožac s vrhom u polu $T_1$ dodiruje danu kuglu.

**28. Plohe drugog reda.** Plohe koje su u Kartezijevim koordinatama definirane kvadratnom jednadžbom zovu se *plohe drugog reda* ili *kvadrike*. Svaka ravnina prostora siječe kvadriku u nekoj krivulji drugog reda.

Opća jednadžba plohe drugog reda može se pisati u obliku

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{28.1}$$

Od deset konstanti te jednadžbe samo devet ih je bitnih, pa se zato uvijek može odrediti jednadžba one plohe drugog reda koja prolazi kroz devet po volji odabranih tačaka prostora.

Translacijom i rotacijom koordinatnog sistema opća jednadžba (28.1) plohe drugog reda može se pojednostavniti i dovesti na jedan od *kanonskih oblika* posebnih slučajeva ploha 2. reda.

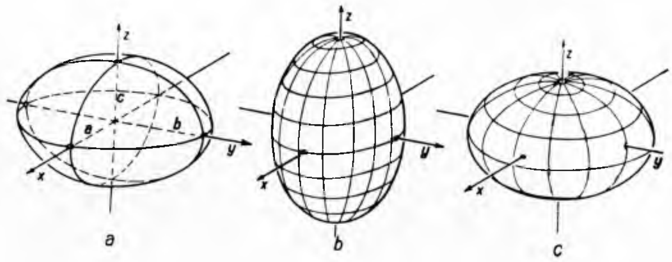
Evo kratak pregled samo nedegeneriranih slučajeva ploha 2. reda na osnovi njihovih kanonskih jednadžbi. Treba razlikovati četiri vrste takvih ploha, a to su: prave centralne plohe 2. reda, paraboloidi, stošci 2. reda i cilindri 2. reda.

a) *Prave centralne plohe 2. reda* su one plohe za koje se jednadžba (28.1) može transformirati na oblik $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$, gdje su sve četiri konstante $A$, $B$, $C$, i $L$ različite od nule. Već prema različitim mogućnostima kombinacija predznaka tih konstanti razlikuju se četiri slučaja:

Elipsoid (sl. 25 a) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ako je $a > b > c$, elipsoid je *troosi*. Ako je $a = b$, elipsoid je *rotacioni* a os aplikatâ mu je os rotacije. Ako je pri tom $a = b < c$



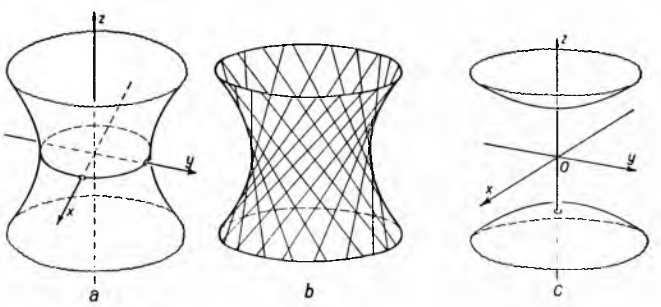
Sl. 25

(sl. 25 b), to je *izduženi elipsoid* ili *ovoid*, a ako je $a = b > c$ (sl. 25 c). to je *spljošteni elipsoid* ili *geoid*.

Jednoplošni hiperboloid (sl. 26 a) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

I on može biti rotacioni, a to je u slučaju kada je $a = b$.



Sl. 26

Jednoplošni hiperboloid je pravčasta ploha, jer na njemu postoje dva sistema pravocrtnih izvodnica (sl. 26b), koje imaju jednadžbe

$$\text{I.} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{y}{b}\right);$$

$$\text{II.} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Svakoj realnoj vrijednosti parametra $u$ (odnosno $v$) odgovara jedna izvodnica prvog (odnosno drugog) sistema.

Dvoplošni hiperboloid (sl. 26c) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

U slučaju $a = b$ to je rotacioni hiperboldid.

Imaginarni elipsoid ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 .$$

Ta ploha nema realnih tačaka.

b) *Paraboloidi.* Opća jednadžba (28.1) ovih ploha može se transformirati na oblik $Ax^2 + By^2 + Kz = 0$, gdje su sve tri konstante $A$, $B$, $K$ različite od nule. Te plohe nemaju centra simetrije, a postoje dvije vrste takvih ploha:

Eliptični paraboloid (sl. 27 a) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 .$$

Ako je $a = b$, os aplikatâ je os rotacije.

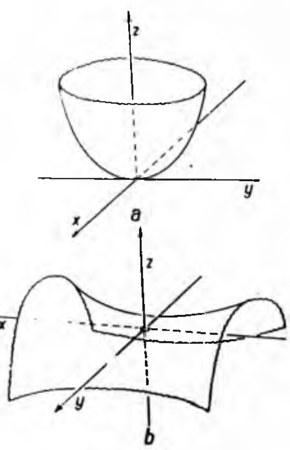
Hiperbolični paraboloid (sl. 27 b) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 .$$

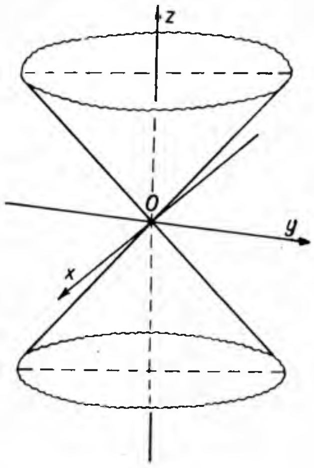
To je pravčasta ploha i na njoj postoje dva sistema izvodnica:

$$\text{I.} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{u} ;$$

$$\text{II.} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{v} .$$




Sl. 27




Sl. 28

c) *Stošci drugog reda.* U tom se slučaju opća jednadžba (28.1) može transformirati na oblik $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$, gdje ni jedna od konstanti $A$, $B$, $C$ ne iščezava. Tu postoje dva slučaja:

Realni stožac (sl. 28) ima jednadžbu

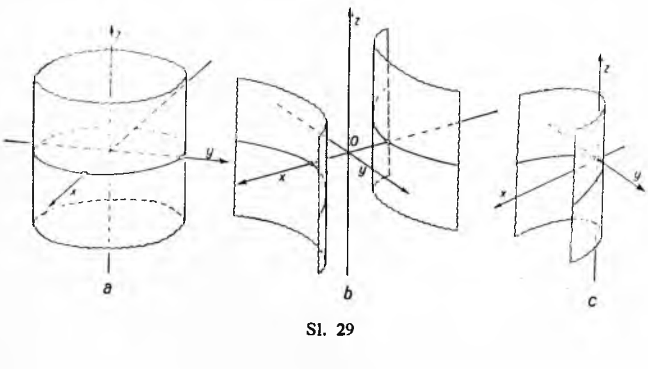
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

Ako je $a = b$, to je *kružni stožac.*

Imaginarni stožac ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

Ta ploha ima jednu jedinu realnu tačku koja pada u ishodište koordinata.




Sl. 29

d) *Cilindri drugog reda.* Tu se razlikuju tri slučaja:

Eliptični cilindar (sl. 29 a) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Hiperbolični cilindar (sl. 29 b) ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Parabolični cilindar (sl. 29 c) ima jednadžbu

$$y^2 - 2px = 0.$$

LIT.: *G. Darboux,* Principes de géométrie analytique, Paris 1917. — *L. Berzolari,* Geometria analitica, Milano 1920. — *L. Bianchi,* Lezioni di geometria analitica, Pisa 1920. — *G. Papelier,* Précis de géométrie analytique, Paris 1925. — *G. Fano-A. Terracini,* Lezioni di geometria analitica e projettiva, Torino-Milano 1930. — *A. Schoenflies-M. Dehn,* Einführung in die analytische Geometrie, Berlin 1931. — *M. И. Мусхелишвили,* Курс аналитической геометрии, Москва-Леиинград 1947. — *A. M. Лопшиц,* Аналитическая геометрия, Москва 1948; — *N. Saltikov,* Analitička geometrija I, II, Beograd 1949. — *H, S. M. Coxeter,* The real projective plane, Toronto 1949. — *L. Bieberbach,* Analytische Geometrie, Bielefeld 1950. — *G. Engel:* Analytische Geometrie, Berlin 1950. — *E. Sperner,* Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I, II, Göttingen 1951/55. — *D. J. Struik,* Analytic and projective geometry, Cambridge 1953. — *R. Cesarec,* Analitička geometrija I, Zagreb 1957. — *G. Grosche,* Projektive Geometrie I, II, Leipzig 1957. — *O. H. Keller,* Analytische Geometrie und lineare Algebra, Berlin 1957. — *И. И. Привалов,* Аналитическая геометрия, Москва 1957. — *D. Mihailović,* Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru, Beograd 1958. — *J. Ulčar,* Analitična geometrija so vektorska algebra, Skopje, 1958. S. Bi.

**ANALIZATORI, mrežni,** analogni računski uređaji koji služe za ispitivanje rada složenih visokonaponskih električnih mreža. Na njima se mogu meriti kretanja aktivnih i reaktivnih snaga, naponske prilike, jačina struja kratkih spojeva itd. Mogu se upotrebiti i za studije drugih tehničkih problema koje se svode na rešavanje sistema jednačina sličnih jednačinama složenih električnih kola.

Potreba za analizatorima ukazala se u doba kada su se električne mreže naglo razvijale i postajale sve veće i složenije, pa su se i metode računanja primenom osnovnih zakona elektrotehnike pokazale kao veoma zametne. Stoga se pošlo putem da se računanje zameni merenjem na pogodnim modelima.

Modeli su u ovom slučaju uređaji koji imaju električne osobine slične osobinama dalekovoda, transformatora i generatora. Delovi uređaja su otpori, kondenzatori i drugi električni elementi koji su među sobom tako povezani da bi se ceo sklop ponašao što je moguće sličnije opremi u prirodi. Za razliku od modela koji se upotrebljavaju u nekim drugim granama tehnike, modeli mreže ne mogu biti mrežama u prirodi i geometrijski slični. Ne može se npr. na modelu mreže dalekovod u smanjenoj razmeri prikazati trofaznim sprovodnicima odgovarajućeg međusobnog rastojanja i razmaka od zemlje, a veliki generatori i transformatori zameniti po svom geometrijskom obliku sličnim malim generatorima i transformatorima, jer takav geometrijski sličan model ne bi mogao biti sličan i u pogledu električnih osobina. Npr. namotaj velikog transformatora ima znatno veći odnos induktiviteta prema otporu nego namotaj njemu geometrijski sličnog malog transformatora.

Ali nije redovito ni mogućno ili uputno da model mreže bude mreži u prirodi i u električnom pogledu potpuno sličan. Npr. u prirodi duž sprovodnika dalekovoda otpor i induktivitet su kontinualno raspoređeni. Kapacitet je stvoren celom dužinom sprovodnika i okoline. Stoga bi verna električna slika dalekovoda bio jedan lanac sastavljen od malih otpora, induktiviteta, kapaciteta i odvodnosti, sa beskonačno velikim brojem članova. Samo na ovakvom modelu dalekovoda mogla bi se ostvariti karakteristična ponašanja pravog dalekovoda. Na njemu bi se reflektovali udarni talasi i on bi se verno ponašao pri različitim učestanostima naizmenične struje. Ovakvo modeliranje dalekovoda bilo bi međutim veoma skupo za pojedinačno prikazivanje dalekovoda velikih složenih mreža. Stoga se na analizatorima dalekovodi, transformatori i generatori prikazuju u znatnoj meri uprošćeno. Na sl. 1 prikazana su primera radi tri načina prikazivanja *dalekovoda.* Pod (a) je prikazivanje tzv. *Π-shemom.* Kapacitet dalekovoda se podeli na dva jednaka dela i koncentriše na početak i kraj. Između kondenzatora se postave na red vezani otpor i induktivitet ukupne vrednosti otpora dalekovoda. Pod (b) je prikazana tzv. *T-shema.* Ceo kapacitet daleko-