Pravu borbu protiv svakog opterećenja arhitekture dekoracijom poveo je na prijelazu iz XIX u XX st. Adolf Loos (1870—1931) u Beču. On je teoretski i praktički zacrtao put kojim su isto tako išli Peter Behrens (1868—), Hans Poelzig (1869—), Paul Bonatz (1877—) i Erich Mendelsohn (1887—). To je put koji unutar arhitektonskog korpusa traži čistoću funkcionalne organizacije i oblikovanog izraza, bez osobite težnje za konstruktivističkim raščlanjivanjem.

Originalne puteve razvijaju u okviru novih stremljenja u arhitekturi na području Amerike Louis H. Sullivan (1856—1924) u djelima među kojima se ističe Palača prometa na Svjetskoj izložbi u Chicagu 1893, oblicima oslobođenima od historicizma, i F. L. Wright, koji postavlja temelje tzv. organskog smjera u metodici arhitektonskog projektiranja.

U općem okviru svoga razvoja suvremena je arhitektura snažno pokročila naprijed onim trenutkom kada je, koristeći se novim tekovinama tehnike, svijesno uz metodu funkcionalne analize razvila i princip konstruktivne raščlambe korpusa. Taj se princip postepeno razvijao od početka XX st. djelovanjem Augustea Perreta (1874—1954), a potom Ch.-Ed. Jeanneret-Le Corbusiera (1887—), koji već potkraj Prvog svjetskog rata proklamira svoj princip konstrukcije »domino«, kao samostalni konstruktivni skelet. Maksimalnu čistoću u razlučivanju nosećeg skeleta od membrana-zidova koje formiraju prostor postizava Mies van der Rohe (izložbeni paviljon u Barceloni, 1927—28). Varijantu Bau-

Kazalište u Mannheimu (L. Mies van der Rohe)

hausa zastupa u svom djelovanju Walter Gropius. U najnovijim kreacijama na području arhitekture, u kojima je u potpunosti riješen problem funkcionalne i konstruktivne analize, pojavljuju se nova strujanja, koja često vuku u novi tip dekorativizma ili likovnih spekulacija. Na graničnoj liniji današnjeg razvoja arhitekture između racionalnog i likovnog stoje Le Corbusier, Mies van der Rohe i O. Niemayer. A. Moh.

ARITMETIKA I ALGEBRA. Riječ *aritmetika* dolazi od grčkog ἀριθμός, arithmos *broj*. Već je Platon pod aritmetikom razumijevao nauku o svojstvima parnih i neparnih brojeva. Kasnije se aritmetikom općenito nazivalo računanje s brojevima i pravila tog računanja.

U svojem daljem razvoju (rješavanje jednadžbi) aritmetika prelazi u *algebru*, no nema neke određene granice koja bi strogo lučila dokle dopire aritmetika a gdje počinje algebra. Uostalom, danas algebra obuhvata vanredno široko područje matematike, od kojeg »klasična« algebra čini samo vrlo malen dio. Sama riječ *algebra* je arapskog porijekla. Ona dolazi od naslova *Aldžebr Valmukabala* djela o rješavanju jednadžbi arapskog matematičara iz IX st. Muhameda ben Muse Alhvarizmija. Od imena tog matematičara izvedena je i riječ *algoritam*, pod čime se razumijeva tehnika računanja (specijalno, ponavljanog) i matematičkih izvođenja uopće.

Osnovi aritmetike i algebre potječu od starih Babilonjana, Egipćana, Indijaca, Kineza, Grka i Arapa. U Evropu je spomenuta Alhvarizmijeva knjiga došla preko Španije u X st., a u XII st. je prevedena na latinski jezik. Za dalju izgradnju algebre dali su važne radove Vieta (1540—1603, simbolika), Cardano (1501—1876, kubne jednadžbe), Abel (1802—1829, jednadžbe 5. i višeg stupnja), Galois (1811—1832) i drugi.

BROJEVI I RAČUNSKE OPERACIJE

1. Prirodni brojevi

Brojevi 1, 2, 3, 4, 5... zovu se *prirodni brojevi*; poređani u ovakav uzlazni (rastući) niz čine *niz prirodnih brojeva*. Prirodni broj može označivati mjesto na kojem se u nekom poređanom skupu nalazi određeni elemenat (*redni* ili *ordinalni broj*) ili može označivati koliko u nekom skupu ima elemenata (*glavni* ili *kardinalni broj*). Npr., u izreci »11. mjesec u godini ima 30 dana« 11 je redni a 30 glavni broj.

Za prirodne brojeve vrijedi *princip potpune indukcije*: skup brojeva koji sadrži broj 1 i ima svojstvo da ukoliko sadrži broj n sadrži i idući broj $n + 1$, sadrži sve prirodne brojeve.

Ako u nizu prirodnih brojeva b dolazi poslije a, kaže se da je b *veće* od a i a *manje* od b (oznake: $b > a$, $a < b$). Vrijedi ova trihotomija: za bilo koja dva prirodna broja a, b ispravna je tačno jedna od triju relacija $a > b$, $a = b$, $a < b$. Time je skup prirodnih brojeva *uređen* (*relacijom poređaja* $>$). Skup prirodnih brojeva je i *dobro uređen*, tj. svaki njegov podskup sadrži najmanji element. Nadalje, s obzirom na isto uređenje, skup prirodnih brojeva je *diskretan*: za bilo koji prirodni broj a postoje prirodni brojevi $b = a - 1$, $c = a + 1$ (osim za $a = 1$, gdje postoji samo drugi od ta dva broja) takvi da je $b < a < c$ i da ni između b i a ni između a i c nema više nijednog prirodnog broja.

Osnovne računske operacije. *Zbroj* ili *suma* $a + b$ prirodnih brojeva a, b je broj koji je u nizu prirodnih brojeva b-ti po redu iza broja a. Brojevi a, b koji se zbrajaju zovu se *pribrojnici* ili *sumandi*.

Umnožak ili *produkt* ab prirodnih brojeva a, b je zbroj od b prirodnih brojeva a. Brojevi a, b koji se množe zovu se *faktori*; posebno se još a zove *multiplikand*, a b *multiplikator*.

Zbrajanje i množenje može se unutar prirodnih brojeva vršiti bez ograničenja i jednoznačno, tj. ako su a, b prirodni brojevi, tada su i $a + b$, ab tačno određeni prirodni brojevi. Za zbrajanje i množenje vrijede pravila

$a + b = b + a$ (*komutativnost* zbrajanja); (1a)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (*asocijativnost* zbrajanja); (2a)

$ab = ba$ (*komutativnost* množenja); (1b)

$ab \cdot c = a \cdot bc$ (*asocijativnost* množenja); (2b)

$a(b + c) = ab + ac$ (*distributivnost* množenja prema zbrajanju); (3)

$1 \cdot a = a$ (1 je *neutralni element* za množenje); (4)

$ac = bc$ povlači $a = b$ (mogućnost *kraćenja*; odsutnost »*djelitelja nule*«); (5a)

$a + b > a$; uz $b \neq 1$ $ab > a$; (5b)

$a > b$ povlači $a + c > b + c$ (*monotonija* zbrajanja); (6a)

$a > b$ povlači $ac > bc$ (*monotonija* množenja). (6b)

Razlika ili *diferencija* $a - b$ prirodnih brojeva a, b je broj koji pribrojen broju b daje a. Broj a od kojeg se oduzima zove se *minuend*, a broj b koji se oduzima zove se *suptrahend*. Oduzimanje suptrahenda b od minuenda a može se (i to onda jednoznačno) unutar prirodnih brojeva provesti samo ako je $a > b$.

Količnik ili *kvocijent* $\frac{a}{b}$ prirodnih brojeva a, b je broj koji pomnožen sa b daje a. Broj a koji se dijeli zove se *dividend*, a broj b s kojim se dijeli, *divizor*. Dijeljenje dividenda a s divizorom b može se (i to onda jednoznačno) unutar prirodnih brojeva provesti samo ako je a *višekratnik* od b.

Prosti brojevi. Prirodni broj veći od 1 koji se ne može predočiti kao produkt dvaju prirodnih brojeva većih od 1 — zove se *prost* ili *primbroj*; ostali prirodni brojevi (veći od 1) su *složeni*. Ne postoji najveći primbroj, pa primbrojeva ima beskonačno mnogo. Za određivanje primbrojeva dao je već Eratosten (← 276—194) postupak nazvan »Eratostenovo sito«.

Eratostenovo sito. U nizu prirodnih brojeva većih od 1 precrta se najprije (1. korak) svaki drugi broj iza 2. Zatim (2. korak) se precrta svaki treći broj iza 3, brojeći pri tom i one brojeve koji su već otprije precrtani. Dalje (3. korak) precrta se svaki peti broj iza 5 itd., tj. ako je u k-tom koraku precrtavanja početo brojenje od broja p_k, a prvi od p_k veći broj koji je ostao neprecrtan iza tog precrtavanja jest p_{k+1}, precrtava se u $k+1$) - tom koraku svaki p_{k+1}-ti broj iza p_{k+1} (brojeći pri tom uvijek i one brojeve koji su već precrtani). Tako se dobiva niz:

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \ldots$$

Brojevi koji su precrtani jesu složeni, a oni koji ostaju neprecrtani jesu prosti. Prvi prosti brojevi jesu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

Treba li ispitati da li je neki broj a veći od 1 prost ili složen, dovoljno je provjeriti da li ima neki prost broj p manji ili jednak $\sqrt{a}$ (v. Korijeni u ovom članku) s kojim je a djeljiv bez ostatka. Ako takav primbroj postoji, a je složen, a ako ne postoji, a je prost.

Vrijedi ovaj *osnovni teorem aritmetike*: Svaki prirodni broj a (veći od 1) može se rastaviti na *primfaktore*, tj. ako a nije sam primbroj, može se predočiti kao produkt primbrojeva; ako se ne obaziramo na poredak faktora, takvo je predočenje jednoznačno određeno.

Dekadski sistem. Pri praktičkom označivanju i računanju pišemo prirodne brojeve redovno u *pozicionom sistemu* s *bazom* 10 (*dekadski* ili *decimalni* sistem). Vrijednost pojedine brojke (*znamenke* ili *cifre*) u takvu predočenju prirodnog broja zavisi o mjestu (*poziciji*) koje ona zauzima, a jednaka je odgovarajućem višekratniku odnosne potencije broja 10 (v. Potencije u ovom članku). Npr. $2056 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 6$. Poziciono pisanje ima — što se tiče jednostavnosti, preglednosti, sistematičnosti i prikladnosti za praktično računanje — znatne prednosti pred drugim sistemima, npr. rimskim brojkama. Razlog što je usvojen upravo decimalni sistem nije načelne prirode, nego je u tome što se nekad pretežno brojilo i računalo na prste. Postoje i tendencije da se decimalni sistem zamijeni *duodecimalnim* (baza 12), jer bi taj za praksu bio pogodniji (12 je djeljivo sa 2, 3, 4 i 6, a 10 samo sa 2 i 5); ipak, zbog ukorijenjenosti decimalnog, prelaz na novi sistem uzrokovao bi znatne teškoće. Elektronski računski strojevi računaju i s brojevima predočenim u sistemu s bazom 2 (*dijadski* sistem). Jedine znamenke dijadskog sistema su 0 i 1; npr. broj $52 = 2^5 + 2^4 + 2^2$ predočen u dijadskom sistemu glasi 110 100.

Pravila djeljivosti. Postoje jednostavna pravila za *ispitivanje djeljivosti* (bez ostatka) prirodnog broja (predočenog u decimalnom sustavu) s pojedinim prirodnim brojevima. Broj je djeljiv sa 2, odnosno sa 5, ako mu je posljednja znamenka djeljiva sa 2, odnosno sa 5; broj je djeljiv sa 3, odnosno sa 9, ako mu je zbroj znamenaka djeljiv sa 3, odnosno sa 9; broj je djeljiv sa 4 ako je broj određen s njegove posljednje dvije znamenke djeljiv sa 4; broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv sa 2 i sa 3; broj je djeljiv sa 8 ako je broj određen s njegove posljednje tri znamenke djeljiv sa 8.

2. Cijeli brojevi

Cijeli brojevi zovu se brojevi $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$; poređani u ovakav niz čine *niz cijelih brojeva.* Ako u nizu cijelih brojeva b dolazi poslije (desno od) a, kaže se da je $b > a$ i $a < b$. I za cijele brojeve vrijedi da, s obzirom na relaciju $>$, čine uređen (ali ne dobro uređen) diskretan skup. Cijeli brojevi > 0 zovu se *pozitivni*, a cijeli brojevi < 0, *negativni* (pozitivni brojevi i 0 zovu se zajedno i *ne-negativni* brojevi).

Cijeli brojevi mogu se izgraditi i posredno (s pomoću prirodnih) i uvesti kao *uređeni parovi* (m, n) prirodnih brojeva m, n. Paru (m, n) odgovara tada cio broj $m - n$. Parovi (m_1, n_1), (m_2, n_2) smatraju se jednakim ako je $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Nejednakost i operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja definiraju se zatim na prirodan način, svođenjem na nejednakost i navedene operacije među prirodnim brojevima, a svojstva skupa cijelih brojeva izvode se iz odgovarajućih svojstava skupa prirodnih brojeva

Zbroj $a + b$ cijelih brojeva a, b je broj koji je u nizu cijelih brojeva za toliko mjesta udaljen od a kolik je iznos od b, i to na desno ili lijevo već prema tome da li je b pozitivan ili negativan. Posebno je

$$0 + a = a \quad \text{(0 je neutralni element za zbrajanje).} \tag{7}$$

Množenje se na cijele brojeve proširuje time da se za pozitivne a, b stavlja

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0 \cdot (-a) = 0; \quad (-a)b = -(ab); \quad (-a)(-b) = ab. \tag{8}$$

Operacija oduzimanja, odnosno dijeljenja, definira se i za cijele brojeve kao *inverzna* (suprotna) operaciji zbrajanja, odnosno množenja. Za računanje s cijelim brojevima vrijede pravila (1a) do (8), osim: (5b), za $c = 0$ (5a), a za $c \leqq 0$ (6b); pored toga vrijedi

$$a > b \text{ i } c < 0 \text{ povlači } ac < bc, \tag{6c}$$

$$a + (-a) = 0, \quad -(-a) = a; \quad -(a + b) = -a - b. \tag{9}$$

Zbrajanje, oduzimanje i množenje može se unutar cijelih brojeva vršiti bez ograničenja i jednoznačno. Dijeljenje $\frac{a}{b}$ je izvedivo (i to onda jednoznačno) samo ako je $b \neq 0$ i ako postoji cio broj c takav da je $bc = a$; a je tada (cjelobrojni) *višekratnik* od b, a b *mjera* od a (oznaka: $b|a$, čitaj: b dijeli a).

Apsolutna vrijednost $|a|$ cijelog broja a je a za pozitivni a, nula za $a = 0$ i $-a$ za negativni a. Za apsolutne vrijednosti vrijedi

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a \pm b| \leqq |a| + |b|, \quad |a \pm b| \geqq \big||a| - |b|\big|. \tag{10}$$

Zajednička mjera i zajednički višekratnik. Cio broj b je *zajednička mjera* cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ako je $b|a_1, b|a_2, \ldots, b|a_n$. Najveći broj b toga svojstva je njihova *najveća zajednička mjera* (NZM) $M = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ako je $(a, b) = 1$, tj. ako nijedan prirodni broj veći od 1 ne dijeli oba broja a, b, zovu se cijeli brojevi a, b *relativno prosti.* Cio broj b je *zajednički višekratnik* cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ako je $a_1|b, a_2|b, \ldots, a_n|b$. Najmanji pozitivni broj b toga svojstva je njihov *najmanji zajednički višekratnik* (nzv) $v = [a_1, a_2 \ldots, a_n]$.

Treba li odrediti $M = (a_1, \ldots, a_n)$ ili $v = [a_1, \ldots, a_n]$, rastave se najprije apsolutne vrijednosti brojeva $a_1, \ldots, a_n$ na primfaktore. Neka u rastavu od $|a_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, primbroj $p_j, j = 1, 2, \ldots$, dolazi k_{ij} puta. Tada je $M = (a_1, \ldots, a_n)$ jednako produktu svih onih primbrojeva p_j koji ulaze u rastav sviju brojeva $|a_i|$, i to svaki od tih primbrojeva p_j uzet toliko puta kao faktor koliki je za taj j (a uz $i = 1, \ldots, n$) *najmanji* od brojeva k_{ij}. (Ako uopće nema primbroja koji bi ulazio u rastav sviju brojeva $|a_i|$, ili ako je neki a_i jednak ± 1, bit će $(a_1, \ldots, a_n) = 1$.) $v = [a_1, \ldots, a_n]$ jednako je produktu svih onih primbrojeva p_j koji ulaze u rastav bar jednog od brojeva $|a_i|$, i to svaki od tih primbrojeva p_j uzet toliko puta kao faktor koliki je za taj j (a uz one i za koje p_j ulazi u rastav od $|a_i|$) *najveći* od brojeva k_{ij}. Npr. za $a_1 = 24$, $a_2 = 60$, $a_3 = -36$ nalazi se $a_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $|a_3| = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Primbroj 2 ulazi u (rastav od) a_1 3 puta, a_2 2 puta, $|a_3|$ 2 puta; primbroj 3 u a_1 1 puta, a_2 1 puta, $|a_3|$ 2 puta; primbroj 5 u a_2 1 puta. Odatle je $(24, 60, -36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ $[24, 60, -36] = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

Za dva broja a_1, a_2 može se postupati i ovako: Najprije se veća od apsolutnih vrijednosti $|a_1|, |a_2|$ podijeli manjom, zatim se s ostatkom tog dijeljenja podijeli manja, i onda novim ostatkom dijeljenja prethodni ostatak dijeljenja itd., dok se ne dođe do ostatka 0; prethodni ostatak jednak je tada $M = (a_1, a_2)$. $v = [a_1, a_2]$ nalazi se odatle što za dva broja uvijek vrijedi $M \cdot v = a_1 \cdot a_2$. Npr. za $a_1 = 1610$, $a_2 = 184$ dobiva se dijeljenjem $1610 : 184$ ostatak 138, dijeljenjem $184 : 138$ ostatak 46, dijeljenjem $138 : 46$ ostatak 0, pa je $(1610, 184) = 46$, $[1610, 184] = 1610 \cdot 184/46 = 6440$. Ovakav postupak može se primijeniti i na slučaj više od 2 broja, tako da se najprije računa NZM (odnosno nzv) prvih dvaju brojeva, a onda sukcesivno NZM (odnosno nzv) već dobivene NZM (odnosno nzv) i idućeg broja. Npr. $(24, 60, -36) = \big((24, 60), -36\big) = (12, -36) = 12$, $[24, 60, -36] = \big[[24, 60], -36\big] = (120, -36) = 360$.

Kongruencije. Ako za cijele brojeve a, b, m vrijedi $m|(a - b)$, kaže se da su brojevi a, b *kongruentni modulo m* $\big($oznaka: $a \equiv b(m)\big)$. Cijeli brojevi $a \equiv 0(2)$, tj. oni koji su djeljivi sa 2, zovu se *parni* ili *tâki*, a ostali, tj. brojevi $a \equiv 1(2)$ koji nisu (bez ostatka) djeljivi sa 2, *neparni* ili *lihi*.

Za računanje s kongruencijama vrijedi

$$a \equiv a(m); \quad a \equiv b(m) \text{ povlači } b \equiv a(m); \quad a \equiv b(m) \text{ i } b \equiv c(m) \text{ povlači } a \equiv c(m).$$

Relacija kongruencije je dakle *relacija ekvivalencije*, pa se cijeli brojevi za dani m raspadaju na *disjunktne* (bez zajedničkih elemenata) klase brojeva međusobno kongruentnih modulo m. Nadalje

$$a \equiv b(m) \text{ i } c \equiv d(m) \text{ povlači } a + c \equiv b + d(m) \text{ i } ac \equiv bd(m),$$
$$ab \equiv ac(m) \text{ uz } (a, m) = 1 \text{ povlači } b \equiv c(m).$$

Za cijele brojeve a, b $(b > 0)$ vrijedi *algoritam dijeljenja*: Za dane a, b postoje jednoznačno određeni q, r takvi da je $a = bq + r$ i da je $0 \leqq r < b$. Isto vrijedi za $b < 0$ uz $0 \leqq r < -b$.

3. Racionalni brojevi

Racionalni brojevi su kvocijenti $\frac{a}{b}$ cijelih brojeva a, b $(b \neq 0)$.

Ako vrijedi $b|a$, racionalni broj je cio. Dva racionalna broja $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ jednaka su onda i samo onda ako je $ad = bc$. Nadalje, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ onda i samo onda ako je $bd > 0$ i $ad > bc$ ili $bd < 0$ i $ad < bc$. S obzirom na relaciju $>$ i skup racionalnih brojeva je uređen. Racionalni brojevi veći od 0 pozitivni su, a oni manji od 0 negativni. Skup racionalnih brojeva je *posvuda gust*: između svaka dva (različita) racionalna broja a, b $(a < b)$ postoji neki racionalni broj c (čak beskonačno mnogo takvih brojeva) takav da je $a < c < b$. Taj je skup *prebrojiv*: svi racionalni brojevi mogu se tako numerirati da svaki od njih bude označen drugim prirodnim brojem.

Zbrajanje i množenje racionalnih brojeva $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d$ cijeli, $b, d \neq 0)$ definira se sa

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Oduzimanje, odnosno dijeljenje, inverzna je operacija zbrajanja, odnosno množenja. Za računanje s racionalnim brojevima vrijede pravila kao i za cijele brojeve. Zbrajanje, oduzimanje i množenje može se unutar racionalnih brojeva vršiti bez ograničenja i jednoznačno; isto vrijedi i za dijeljenje racionalnim brojem različitim od nule. Za racionalne brojeve a, b, c, d ($b, d \neq 0$) vrijedi nadalje

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \text{ uz } c \neq 0, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$

posebno $\dfrac{1}{\frac{1}{b}} = b.$ (11)

Apsolutna vrijednost racionalnog broja definira se kao i apsolutna vrijednost cijelog broja i za nju vrijede ista pravila (10).

Euklidov postupak mjerenja. Ako se algoritam dijeljenja primijeni najprije na prirodne brojeve a, b, zatim na b, r itd. (usp. drugi postupak za nalaženje NZM dvaju brojeva), može se racionalni broj $\frac{a}{b}$ (jednoznačno) predočiti u obliku (konačnog) *verižnog razlomka*

$$\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi.

Na primjer: $$\frac{39}{17} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

4. Realni brojevi

Realni brojevi mogu se definirati kao tzv. *prerezi* u (uređenom) skupu racionalnih brojeva, ili kao *granice* (a_i) ograđenih nesilaznih nizova $\{a_i\}$ racionalnih brojeva (v. *Diferencijalni račun*). Ako su a, b realni brojevi određeni takvim nizovima $\{a_i\}, \{b_i\}$, bit će $a > b$ ako u $\{a_i\}$ postoji član koji je veći od svakog člana od $\{b_i\}$. Ako nije ni $a > b$, ni $b > a$, vrijedi $a = b$; time je i skup realnih brojeva uređen. Realni broj a je racionalan ako je $a = (a_i)$, a_i konstantan racionalan broj. Realni brojevi veći od nule su pozitivni, a manji od nule negativni. Za nizove $\{a_i\}$ mogu se npr. uzeti (rastući) početni segmenti (konačnih ili beskonačnih) decimalnih razlomaka; na taj način svaki decimalni razlomak predočuje tačno određeni realni broj, i obrnuto, svaki realni broj može se predočiti kao decimalni razlomak.

Zbrajanje i množenje realnih brojeva $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ određeno je sa $a + b = (a_i + b_i)$; uz $a > 0$, $ab = (a_i b_i)$, inače (8). Oduzimanje i dijeljenje definira se kao prije. Za računanje s realnim brojevima i izvodljivost operacija vrijedi sve što i za racionalne brojeve. (Jedno od osnovnih načela kad se proširuje područje brojeva upravo i jest *princip permanencije formalnih zakona* [Hankel], tj. njihovo zadržavanje u proširenom području brojeva; usp. također Cijeli, Racionalni i Kompleksni brojevi u ovom članku.)

Apsolutna vrijednost realnog broja definira se kao i apsolutna vrijednost cijelog broja, i za nju vrijede ista pravila (10).

Skup realnih brojeva je *zatvoren*: svaki konvergentni niz $\{a_i\}$ realnih brojeva (tj. takav niz da $|a_n - a_{n+p}|$ za dovoljno velik n postaje — i ostaje, nezavisno o p — manje od po volji maloga danog pozitivnog realnog broja) ima u skupu realnih brojeva granicu a (v. *Diferencijalni račun*). Posebno npr. u skupu realnih brojeva, za svaka dva zadana pozitivna realna broja $a \neq 1$, b postoje realni brojevi x, y takvi da je $a^x = b$, $y^a = b$ (v. Potencije, korijeni i logaritmi u ovome članku).

Za pozitivne realne brojeve vrijedi *Arhimedov princip*: ako su a, b dva takva broja, postoji prirodni broj n takav da je $na > b$. (Taj princip upotrijebio je već Eudokso, ← 408—355.)

Realni broj koji nije racionalan zove se *iracionalan broj*. Iracionalan broj koji je korijen neke algebarske jednadžbe (v. Algebarske jednadžbe u ovom članku) s cjelobrojnim koeficijentima zove se *algebarski iracionalan broj*; ostali iracionalni brojevi su *transcendentni*. Skup iracionalnih brojeva posvuda je gust. Algebarski iracionalni brojevi su prebrojivi, transcendentni nisu.

Algebarski iracionalni brojevi su npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{5}$ (v. Korijeni u ovom članku). Transcendentni su npr. brojevi e (Hermite 1873; v. Logaritmi u ovom članku), π (Lindemann 1882), e^{π}, $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$ (Gelfond 1934). Iracionalni broj ne možemo nikad »dokraja« napisati kao beskonačni decimalni razlomak. (Racionalni broj napisan kao decimalni razlomak ili je konačan, ili je beskonačan *periodski*, tj. od nekog mjesta na dalje ponavlja se ista grupa znamenaka; npr. $\frac{3}{8} = 0{,}375$, $\frac{8}{7} = 1{,}142\,857\,142\,857\ldots$ Iracionalan broj uvijek je beskonačan neperiodski.) Elektronskim računskim strojevima izračunat je broj e na 60 000 decimalnih mjesta. Za praktične potrebe dovoljno je od iracionalnog broja uzeti u račun nekoliko prvih decimalnih mjesta.

Omjeri i razmjeri. Neka su A i B istovrsne veličine koje se mogu kvantitativno uspoređivati mjerenjem s pomoću iste odabrane jedinične veličine. A i B mogu npr. biti duljine, površine itd. Ako takvo mjerenje za veličinu A daje *mjerni* (realni) *broj* a, a za B mjerni broj b, kaže se da je vrijednost *omjera* $A : B$ (čitaj: A prema B) veličinâ A, B jednaka kvocijentu $\frac{a}{b}$ njihovih mjernih brojeva. Odabere li se kao jedinična veličina B, bit će mjerni broj veličine A upravo jednak vrijednosti omjera $A : B$. Ako je $\frac{a}{b}$ racionalan broj, postoji veličina M čiji su A i B cjelobrojni višekratnici, pa se veličine A, B tada zovu *sumjerljive*; inače, tj. ako je $\frac{a}{b}$ iracionalan broj, veličine A, B su *nesumjerljive*.

Jednadžba koja izražava jednakost (vrijednosti) dvaju omjera zove se *razmjer* ili *proporcija*. Pri tom veličine koje ulaze u prvi omjer ne moraju biti istovrsne s veličinama koje ulaze u drugi.

Ako su članovi A, B, C, D razmjera $A : B = C : D$ svi istovrsne veličine (ili, posebno, brojevi), zove se D *četvrta geometrijska proporcionala* članova A, B, C. Ako je uz to $C = B$, zove se D *treća geometrijska proporcionala* članova A i B, a $B\,(=C)$ *srednja geometrijska proporcionala* između A i D, ili *geometrijska sredina* članova A i D (v. i Sredine u ovom članku).

Ako vrijedi razmjer $A : B = C : D$, i ako su sve veličine A, B, C, D istovrsne, vrijede i razmjeri

$$A : C = B : D,\; B : A = D : C,\; C : A = D : B;$$
$$(A + C) : (B + D) = A : B\,(= C : D),$$
$$(A - C) : (B - D) = A : B\,(= C : D);$$
$$(A + B) : (C + D) = A : C\,(= B : D),$$
$$(A - B) : (C - D) = A : C\,(= B : D);$$
$$(A + B) : (A - B) = (C + D) : (C - D) \text{ itd.};$$

općenitije tada za kakve god realne brojeve u, v vrijedi

$$(uA + vC) : (uB + vD) = A : B\,(= C : D),$$
$$(uA + vB) : (uC + vD) = A : C\,(= B : D).$$

Ako za istovrsne veličine ili realne brojeve a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots n$, vrijedi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n$, pišemo takav niz jednakosti i u obliku *produženog razmjera* $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$.

Predočivanje realnih brojeva na brojevnom pravcu. Ako na pravcu odaberemo dvije tačke i označimo ih sa 0 i 1, možemo svakoj tački T pravca pridijeliti tačno određen realni broj, naime onaj koji daje udaljenost T od 0 mjerenu jedinicom duljine $\overline{01}$; obrnuto, svakom realnom broju na taj način odgovara tačno određena tačka pravca (v. *Analitička geometrija*).

Potencije. Neka je n prirodan broj i a realan broj. Produkt od n faktora jednakih a zove se n-ta *potencija* od a i označuje se sa a^n; a je *osnova* ili *baza*, a n *eksponent* potencije. Posebno je $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$ je *kvadrat* broja a, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ je *kub* broja a. Za $a = 0$ je $0^n = 0$; za $a = 1$ je $1^n = 1$.

Za zbroj i razliku potencija vrijedi

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2);$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\,ab + b^2). \qquad (12)$$

Općenito je

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad (12a)$$

a za neparno n također

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (12b)$$

(Za potenciju zbroja i razlike v. Binomni teorem u ovom članku).

Potencija s eksponentom 0 definira se sa $a^0 = 1$, za svako realno $a \neq 0$. Za negativni cjelobrojni eksponent n definira se (za $a \neq 0$) $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Za računanje sa potencijama s cjelobrojnim eksponentom vrijedi

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r;\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s},\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s};\quad (a^r)^s = a^{r\cdot s};$$
$$a^r \cdot b^r = (ab)^r,\quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r. \qquad (13)$$

Korijeni. Ako je $b^n = a$ (n cio), kaže se da je b jednak n-tom *korijenu* iz a (oznaka: $b = \sqrt[n]{a}$); a je *radikand*, a n *eksponent* korijena. Prijelaz od nekog broja na njegov korijen zove se *radiciranje*. Posebno je $\sqrt[1]{a} = a$. Umjesto $\sqrt[2]{a}$ piše se kraće $\sqrt{a}$. Drugi korijen zove se još i *kvadratni*, a treći *kubni* korijen. Za parni $n \neq 0$, $\sqrt[n]{a}$ uz $a < 0$ nema realne vrijednosti, a uz $a > 0$ ima dvije realne vrijednosti s istom apsolutnom vrijednosti, a suprotnim predznakom (u tom slučaju, ako se želi naročito istaknuti da se pod $\sqrt[n]{a}$ misli na njegovu pozitivnu vrijednost, piše se i $\underset{+}{\sqrt[n]{a}}$, i kaže se da je to *aritmetička* ili *glavna* vrijednost korijena). Za neparni n, $\sqrt[n]{a}$ ima uvijek jednu realnu vrijednost.

Potencija a^r s racionalnim eksponentom $r = \dfrac{m}{n}$, $(m,n) = 1$ definira se sa $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ (ukoliko postoji takav realan broj, tj. ako je $a^m \geqq 0$ ili n neparni broj).

Potencija a^r s iracionalnim eksponentom r pozitivnog realnog broja a definira se kao granica niza pozitivnih vrijednosti od a^{r_i}, kad niz racionalnih r_i teži prema r (v. *Diferencijalni račun*). Za računanje s pozitivnim vrijednostima potencija pozitivnog realnog broja vrijedi (13).

Korijen $\sqrt[r]{a}$ s realnim eksponentom $r \neq 0$ od $a > 0$ definira se sa $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$; isto vrijedi ako je a kakav god realan broj, a $r = \dfrac{m}{n}$ racionalan broj s neparnim m. Za pozitivne vrijednosti korijena pozitivnog radikanda vrijedi

$$\sqrt[r]{a^s} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^s;\quad \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r\cdot s]{a};\quad \sqrt[r]{a}\cdot\sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{ab},\quad \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\frac{a}{b}}. \qquad (13a)$$

Logaritmi. Ako za realne brojeve a, b, c (a, $c > 0$) vrijedi $a^b = c$, kaže se da je b *logaritam* od c po *bazi* a (oznaka: $b = \log_a c$). Logaritam (po danoj bazi) nekog broja (*numerusa*) je dakle broj kojim treba potencirati bazu da bi se dobio numerus. Npr. $\log_2 8 = 3$, $\log_{10} 0{,}1 = -1$. Za svaku bazu a vrijedi $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$. Za bilo koje dvije baze a, b vrijedi

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1;\quad \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a}.$$

Za računanje logaritmima po nekoj čvrstoj bazi vrijedi

$$\log(ab) = \log a + \log b,\quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b \ \left(\text{posebno } \log\frac{1}{a} = -\log a\right);\quad \log a^n = n\cdot\log a,\quad \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\cdot\log a.$$

Znači: logaritam produkta jednak je zbroju logaritama faktora, logaritam kvocijenta jednak je razlici logaritma dividenda i logaritma divizora (logaritam recipročne vrijednosti broja jednak je po apsolutnoj vrijednosti logaritmu tog broja, a predznak mu je suprotan); logaritam potencije jednak je produktu eksponenta i logaritma baze, logaritam korijena jednak je kvocijentu logaritma radikanda i eksponenta korijena.

Logaritmiranjem operacije množenja, dijeljenja, potenciranja i radiciranja prelaze redom u operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Ako dakle treba provesti neki numerički račun s produktima, kvocijentima, potencijama i korijenima danih brojeva, odrede se logaritmi tih brojeva, s njima provedu odgovarajuće jednostavnije operacije, i rezultat (koji je jednak logaritmu rezultata postavljenog zadatka) vrati natrag u područje numerusa (*antilogaritmiranje*).

U praksi se upotrebljavaju *dekadski* ili *Briggsovi logaritmi* s bazom 10. (U posebne svrhe i *prirodni* ili *Napierovi logaritmi* s bazom e = 2,718..., v. *Funkcije, elementarne*). Dekadski logaritam od a označuje se obično sa $\log a$, a prirodni sa $\ln a$ (od: *logarithmus naturalis*). Već prema potrebnoj tačnosti upotrebljavaju se logaritamske tablice na 4, 5, 7 i više decimalnih mjesta.

Za prijelaz od dekadskih logaritama na prirodne i obrnuto vrijedi

$$\ln x = \frac{1}{\log e}\log x \approx 2{,}302\,585\ \log x,$$
$$\log x = \frac{1}{\ln 10}\ln x \approx 0{,}434\,294\ \ln x.$$

Konstanta log e označuje se često sa M.

Na svojstvima logaritama osniva se i logaritamsko računalo.

Dekadski logaritam broja $c > 1$ je pozitivan; napisan kao decimalni razlomak sastoji se od *karakteristike* k (najveći cio broj $\leqq \log c$) i *mantise* m ($m = \log c - k$), koja je pravi decimalni razlomak (manji od 1). Karakteristika logaritma broja koji — predočen u dekadskom sistemu — ima n cijelih mjesta, jednaka je $n - 1$. Npr. (na 5 decimala) $\log 26{,}29 = 1{,}419\,79$; karakteristika je 1, a mantisa 0,419 79. Logaritam pozitivnog broja c manjeg od 1 je negativan; piše se u obliku $\log c = m - k$, gdje je $-k$ negativni cio broj, a m (ne-negativni) decimalni pravi razlomak; $-k$ je opet karakteristika, a m mantisa. Ako c, napisan kao decimalni razlomak, iza decimalnog zareza prije prve (od 0 različite) znamenke ima n nula, bit će $-k = -(n + 1)$. Npr. $\log 0{,}007\,485 = 0{,}874\,19 - 3$; karakteristika je -3, a mantisa 0,874 19.

Interpolacija. Ako su poznati logaritmi brojeva a, b ($a < b$) bit će za logaritam nekog broja c, $a < c < b$, približno $(\log c - \log a) : (\log b - \log a) \approx (c - a) : (b - a)$, dakle $\log c \approx \log a + \dfrac{c - a}{b - a}(\log b - \log a)$. Pogreška ove formule je to manja što je manja razlika $b - a$. Ako je $b - a$ vrlo maleno, ona se može praktički zanemariti. U logaritamskim tablicama redovno se može direktno očitati logaritam danog broja sa k cifara, dok se razlika koja pridolazi od $(k + 1)$-te cifre računa interpolacijom; pri tom su razlike za pojedine vrijednosti od $\log b - \log a$ i za pojedine vrijednosti $(k + 1)$-te cifre obično dane u tablicama pod »P. P.« (*partes proportionales*). Opisana interpolacija je *linearna*, tj. prirasti logaritama uzimaju se razmjerni prirastima numerusa. Pri tačnijem računu provodi se parabolička interpolacija. Ona se u principu sastoji u tome da se dio luka logaritamske krivulje (v. *Funkcije, elementarne*) zamijeni dijelom luka parabole (dok linearnoj interpolaciji odgovara grublja aproksimacija dijela luka logaritamske krivulje odsječkom pravca).

Primjer. Da bi se izračunalo $7{,}6234^{1{,}348} = x$ (logaritamske tablice na 5 decimalnih mjesta), postupa se ovako: $\log x = 1{,}348 \cdot \log 7{,}6234$; $\log\log x = \log 1{,}348 + \log\log 7{,}6234$. Odatle se dobiva

$$\begin{array}{rl} \log 7{,}6234 = & 0{,}882\,13 \\ & \phantom{0{,}882\,}20 \\ \hline & 0{,}882\,15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\log 7{,}6234 = & 0{,}945\,52 - 1 \\ & \phantom{0{,}945\,}25 \\ \hline & 0{,}945\,54 - 1 \\ \log 1{,}348 = & 0{,}129\,69 \\ \hline \log\log x = & 0{,}075\,23 \\ \log x = & 1{,}189\,1 \\ x = & \underline{15{,}46.} \end{array}$$

Sredine. 1. *Aritmetička sredina* brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je broj $a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

2. *Geometrijska sredina* (pozitivnih) brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je broj $g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

3. *Harmonijska sredina* brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je broj $h = n \dfrac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

4. *Kvadratna sredina* brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je broj $s = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$.

Aritmetička sredina pozitivnih brojeva a_i uvijek je veća ili bar jednaka njihovoj geometrijskoj sredini; pri tom jednakost nastupa samo onda ako su svi brojevi a_i jednaki.

Logaritam geometrijske sredine pozitivnih brojeva a_i jednak je aritmetičkoj sredini logaritama od a_i.

Recipročna vrijednost harmonijske sredine brojeva a_i jednaka je aritmetičkoj sredini recipročnih vrijednosti od a_i.

Kvadrat kvadratne sredine brojeva a_i jednak je aritmetičkoj sredini kvadrata brojeva a_i.

Primjer. Za $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$ je aritmetička sredina $a = \frac{1}{3}(6 + 10 + 15) = 10{,}\dot{3}$; geometrijska sredina $g = \sqrt[3]{6 \cdot 10 \cdot 15} \approx 9{,}65$; harmonijska sredina $h = 3 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) = 9$; kvadratna sredina

$$s = \sqrt{\frac{1}{3}(6^2 + 10^2 + 15^2)} \approx 10{,}97.$$

Historijske napomene. Prirodni brojevi nastali su apstrakcijom od procesa brojenja predmeta. Taj proces apstrakcije bio je sigurno dugotrajan, na što npr. ukazuje činjenica da neka primitivna plemena još imaju različite nazive za jednake brojeve, ukoliko njima broje različite kategorije predmeta. Ostaci takve nepotpune apstrakcije pojma broja od prirode predmeta koji se broje nalaze se i u raznim nazivima za pojam množine; kažemo npr. jato ptica, stado ovaca, krdo goveda, roj pčela, čopor vukova itd. Dual, koji je sačuvan u nekim jezicima, ukazuje opet na to da se prvotno množina od dva predmeta smatrala kvalitativno različitom od množine od 3 i više predmeta. Sličnost naziva za iste brojeve srodnih naroda pokazuje da su ovi nazivi nastali vrlo rano, dok su ti narodi još živjeli u zajedničkoj pradomovini. Tolika sličnost postoji inače samo još u nazivima za neke temeljne pojmove koji su također očito nastali vrlo rano, kao npr. majka, sin, sunce, mjesec itd. Brojilo se većinom na prste, ali i štapićima, kamenčićima, školjkama itd. Dekadski sistem (ali bez poziciono pisanog broja) poznavali su npr. već stari Egipćani; oni su imali hijeroglife za dekadske jedinice do $10^5 = 100\,000$ i poseban hijeroglif za »neizrecivo velik« broj. Stari Indijci imali su posebne nazive za vrlo velike brojeve, npr. za 10^{10}. S druge strane, u Evropi se još sredinom XVI st. *milijun* označuje i s »tisuću tisuća«; riječ *milijarda* = 10^9 dobila je današnje značenje u XVI st., a u širu upotrebu došla je tek u XIX st. Poziciono pisanje i računanje brojevima potječe od Indijaca; u Evropu su ga prenijeli Arapi. Stari Grci računali su kamenčićima ili žetonima na računskoj ploči (*abakus*). Sprava za računanje s kuglicama nanizanim na žice potječe od Kineza.

Do cijelih brojeva dovela je potreba da oduzimanje bude uvijek provedivo; poznavali su ih već stari indijski matematičari. Dijeljenje neke cjeline na jednake dijelove dovelo je do racionalnih brojeva. Do iracionalnih brojeva došli su stari grčki matematičari ispitivanjem nesumjerljivih dužina (mjerenje takvih dužina Euklidovim postupkom nikad ne završava, pa je njihov omjer predočen beskonačnim razlomkom), npr. dijagonale i stranice kvadrata. Već je grčki matematičar Eudokso razradio strogu teoriju realnih brojeva (u stvari omjera); moderne teorije realnih brojeva potječu od Dedekinda, Méraya, Cantora i Weierstrassa.

Neka novija shvaćanja. Teorija prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva, kako je gore skicirana, odgovara »klasičnom« shvaćanju. Polazeći od prirodnih brojeva konstruiraju se cijeli, racionalni i realni. U modernijem izlaganju formaliziraju se i prirodni brojevi tako da se (*implicitno*) karakteriziraju sustavom aksioma, npr. (Peano): a) 1 je prirodni broj; b) ako je n prirodni broj, tada je i njegov sljedbenik n' prirodni broj; c) 1 nije sljedbenik ni kojeg prirodnog broja; d) ako su sljedbenici n', m' prirodnih brojeva n, m jednaki, tada su i brojevi n, m jednaki; e) (aksiom potpune indukcije) skup prirodnih brojeva koji sadrži broj 1 i sljedbenika svakog od svojih elemenata iscrpljuje sve prirodne brojeve. Zbrajanje i množenje definira se rekurzivno sa $n + 1 = n'$, $n + m' = (n + m)'$; $n \cdot 1 = n$, $n \cdot m' = n \cdot m + n$. Dalja svojstva prirodnih brojeva izvode se odatle čisto logički, bez pozivanja na njihovu prirodu; pri tom se može poći još i dalje, time da se formalizira i samo logičko izvođenje. Međutim, kako pokazuju novija istraživanja (Gödel, Skolem, Rosser), formalizirani matematičko-logički sistem koji obuhvaća izgradnju elementarne aritmetike prirodnih brojeva nužno je ili kontradiktoran ili nepotpun. Formalna matematičko-logička karakterizacija prirodnih brojeva ne može dakle biti kategorička, tj. postoje različiti »modeli« takve teorije. U tom smislu nije moguće *u potpunosti* aksiomatizirati prirodne brojeve, koji intuitivno čine kategorički sistem. Također unutar takva formaliziranoga matematičko-logičkog sistema nije moguće dokazati njegovu nekontradiktornost.

Po jednom drugom, *intuicionističkom*, shvaćanju matematike (Brouwer i njegova škola), priznaje se egzistencija samo onih matematičkih objekata koji se (u principu) mogu efektivno, konačnim brojem koraka (*finitno*) *konstruirati*. Skup svih prirodnih brojeva intuicionistički ne predstavlja aktualno postojeći totalitet na koji bi se uvijek mogli primjenjivati svi principi klasične logike, apstrahirani od operiranja s konačnim skupovima. Tako intuicionisti, razmatrajući skupove koji nisu konačni, ne prihvaćaju općenito princip *tertium non datur*, kao ni ekvivalenciju negacije negacije s afirmacijom. Znatni dijelovi klasične matematike intuicionistički su bez sadržaja ili im je znatno izmijenjen smisao, a oni koji ostaju sačuvani redovito zahtijevaju znatno kompliciranije tretiranje. Intuicionistička matematika ne može se intuicionistički prihvatljivo u potpunosti formalizirati; kriterij dedukcije ovdje nije njena formalno-logička ispravnost, nego intuitivna evidencija. Teorija realnih brojeva u intuicionističkoj matematici bitno se razlikuje od klasične.

Još više nego li Brouwerov intuicionizam udaljuje se od klasičnog shvaćanja Grissova *matematika bez negacije*. Ovdje se odbacuje i upotreba negacije, tako da npr. otpada i indirektno dokazivanje (dokaz *per absurdum*). Matematika koja se na taj način (strogo konstruktivno) može izgraditi još je uža od intuicionističke, a dokazni postupci općenito se još više kompliciraju.

Šire i detaljnije ulaženje u ovu problematiku (kao i diskusija njenih implikacija na filozofiju) ne bi ovdje bilo na mjestu.

LIT.: Više ili manje razrađena teorija realnih brojeva nalazi se u svakom potpunijem udžbeniku više matematike. Sustavnu izgradnju te teorije daje *O. Perron*, Irrationalzahlen, Berlin 1947; — *E. Landau*, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930. — Povijest razrađuje opširno *M. Cantor*, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1901/13. — *J. Tropfke*, Geschichte der Elementar-Mathematik, Leipzig 1921/40. — Logički osnovi obrađeni su u *D. Hilbert* i *P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, Berlin 1934/39. — *S. C. Kleene*, Introduction to metamathematics, New York 1952. — *A. Heyting*, Intuitionism, Amsterdam 1956.

5. Kompleksni brojevi

Kompleksni brojevi su brojevi oblika $a + b\,i$, gdje su a, b realni brojevi, a $i = \sqrt{-1}$ je *imaginarna jedinica*. Dva kompleksna broja $a_1 + b_1 i$, $a_2 + b_2 i$ jednaka su onda i samo onda ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Kompleksni broj $a + b\,i$ za koji je $b = 0$ je realan, a onaj za koji je $a = 0$, *čisto imaginaran.*

Kompleksni se brojevi zbrajaju, odbijaju, množe i dijele prema

$$(a + b\,i) \pm (c + d\,i) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i, \tag{14}$$

$$(a + b\,i)(c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,i, \tag{15}$$

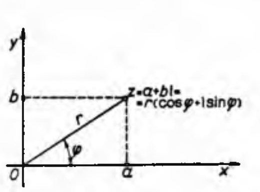
$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + \frac{b\,c - a\,d}{c^2 + d^2}\,i. \tag{16}$$

Modernije se kompleksni brojevi uvode kao (uređeni) parovi (a, b) realnih brojeva; kompleksnom broju $a + b\,i$ odgovara tada par (a, b). Imaginarna jedinica je par $(0, 1)$, a par $(1, 0)$ je realna jedinica. Zbrajanje, odbijanje, množenje, i dijeljenje definira se u skladu sa (14) do (16), a svojstva tako uvedenih kompleksnih brojeva izvode se iz svojstava realnih brojeva.

Unutar kompleksnih brojeva može se bez ograničenja i jednoznačno vršiti zbrajanje, odbijanje i množenje, kao i dijeljenje kompleksnim brojem različitim od nule. Za računanje s kompleksnim brojevima vrijede sva navedena pravila kao i za realne, osim onih koja uključuju nejednakosti. (Za kompleksne brojeve ne definira se relacija $>$, jer se to ne bi moglo provesti u skladu s principom permanencije formalnih zakona koje ta relacija zadovoljava za realne brojeve.) Skup kompleksnih brojeva je *algebarski zatvoren,* tj. svaki polinom (v. Polinomi u ovom članku) s kompleksnim koeficijentima ima unutar skupa kompleksnih brojeva kompleksni korijen.

Apsolutna vrijednost ili *modul* kompleksnog broja $z = a + b$ definira se kao (pozitivan realan broj) $|z| = \underset{+}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Za apsolutne vrijednosti kompleksnih brojeva vrijede pravila (10), kao i za apsolutne vrijednosti realnih brojeva.

Predočivanje kompleksnih brojeva. Kao što se realni brojevi mogu (uzajamno jednoznačno) predočiti tačkama brojevnog pravca, mogu se kompleksni brojevi predočiti tačkama *kompleksne* ili *Gaussove ravnine.* U ravnini se uvede pravokutni koordinatni sistem s jednakim jedinicama (v. *Analitička geometrija*). Os apscisa uzme se kao realna a os ordinata kao (čisto) imaginarna os (sl. 1). Kompleksni broj $z = a + b\,i$ predočen je tada tačkom ravnine apscise a i ordinate b. Time je svakom kompleksnom broju pridružena tačno određena tačka kompleksne ravnine i obrnuto, pa se umjesto o »kompleksnom broju« može govoriti o »tački kompleksne ravnine« i obrnuto. Posebno realnim brojevima odgovaraju tačke na osi apscisa, a čisto imaginarnim tačke na osi ordinata. Nuli odgovara ishodište, (realnoj) jedinici jedinica realne, a imaginarnoj jedinici jedinica imaginarne osi. Mjerni broj r udaljenosti tačke z od ishodišta jednak je modulu $|z|$ kompleksnog broja z.



Sl. 1

Konjugirano kompleksni broj kompleksnog broja $z = a + b\,i$ je broj $\bar{z} = a - b\,i$. Tačke koje u Gaussovoj ravnini predočuju brojeve z i $\bar{z}$ leže simetrično prema njenoj realnoj osi. Za računanje s konjugirano kompleksnim brojevima vrijede pravila

$$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;\ \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Označi li se kut (*argument* od z) između spojnice tačke z s ishodištem kompleksne ravnine i njene pozitivne realne osi sa φ (sl. 1), može se kompleksni broj z predočiti u obliku

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(v. *Trigonometrija*). Za realne brojeve je $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$, za čisto imaginarne $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ili $\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Za prijelaz od oblika $z = a + bi$ na trigonometrijski, i obrnuto, vrijedi

$$r = \underset{+}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\left(= \arc\sin\frac{b}{r} = \arc\cos\frac{a}{r}\right);$$

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi.$$

Za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

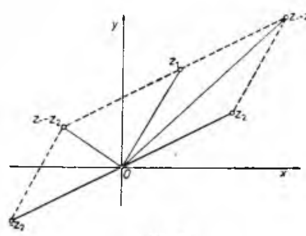
predočenih u trigonometrijskom obliku vrijedi

$$z_1\cdot z_2 = r_1 r_2\,\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

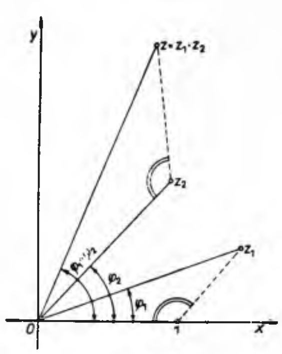
Modul produkta jednak je dakle produktu modula faktora, a njegov argument jednak je zbroju argumenata faktora. Modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dividenda i divizora, a njegov argument jednak je razlici argumenata dividenda i divizora.

Operacije s kompleksnim brojevima predočenim u kompleksnoj ravnini. Ako su z_1, z_2 tačke kompleksne ravnine, dobiva se tačka $z_1 + z_2$ kao krajnja tačka vektorskog zbroja radij-vektorâ koji izlaze iz ishodišta O, a krajnje tačke su im z_1 i z_2 (v. *Vektorski račun*).

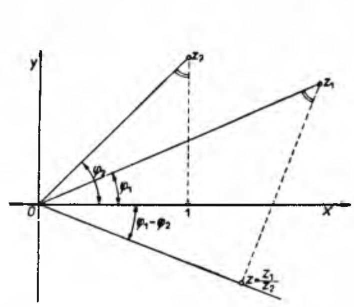


Sl. 2

Analogno vrijedi za razliku $z_1 - z_2$ (sl. 2). Produkt $z_1 \cdot z_2$ brojeva z_1, z_2 dobiva se ovako: nad Oz_2 konstruira se trokut Oz_2z sličan trokutu $O\,1\,z_1$, tako da $\sphericalangle\,(Oz_2,\ Oz)$ bude u pozitivnom smislu nanesen kut φ_1; tada je $z = z_1 \cdot z_2$. Analogna konstrukcija, izvršena »unatrag«, daje kvocijent (sl. 3 i 4).



Sl. 3



Sl. 4

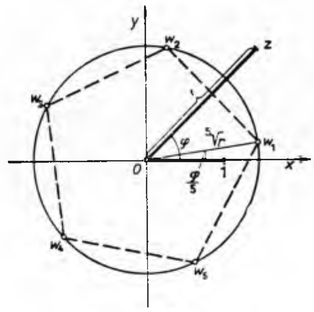
Potenciranje i radiciranje kompleksnih brojeva. Ako je n cio broj, definira se n-ta potencija kompleksnog broja z na isti način kao i za realne brojeve, tj.: $z^0 = 1$, $z^1 = z$, za $n > 1$ je z^n produkt od n faktora jednakih z, za $n < 0$ je $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$. Ako je z dan u trigonometrijskom obliku $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, vrijedi *Moivreova formula za potenciju* kompleksnog broja

$$z^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Za kompleksne brojeve vrijede formule (12), (12a), (12b) kao i za realne. I za cjelobrojne potencije kompleksnih brojeva vrijede formule (13).

Za prirodni broj n definira se n-ti korijen iz kompleksnog broja z kao onaj kompleksni broj w za koji je $w^n = z$. Svaki (od nule različiti) kompleksni broj z ima tačno n među sobom različitih vrijednosti n-tog korijena. Ako je z dan u trigonometrijskom obliku $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, vrijedi *Moivreova formula za korijen* iz kompleksnog broja

$$w_{1,2,\ldots,n} = \sqrt[n]{z} = \underset{+}{\sqrt[n]{r}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right);$$
$$k = 0, 1 \ldots n - 1.$$



Sl. 5

Svih n vrijednosti n-tog korijena iz kompleksnog broja predočeno je u kompleksnoj ravnini vrhovima pravilnog n-terokuta sa središtem u ishodištu; npr. v. sl. 5. Opširnije o tome, kao i za logaritam kompleksnog broja, v. *Funkcije kompleksne varijable.*

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja. Kompleksni broj $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ može se pisati i u obliku $z = r\,e^{i\varphi}$ (v. *Funkcije kompleksne varijable*); za produkt i kvocijent tada vrijedi

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Historijska napomena. Samo ime »imaginarni« pokazuje, da su se isprva imaginarni (i, općenito, kompleksni) brojevi smatrali »zamišljenim« brojevima, kojima ne pripada »realitet« u istom stupnju kao npr. realnim brojevima. Međutim različiti problemi imperativno su tražili uvođenje nekih matematičkih objekata koji se vladaju kao kompleksni brojevi, npr. takvih kojima je kvadrat negativan realan broj. Uvidjelo se također da se u mnogo slučajeva dobiva ispravno rješenje nekog problema u obliku realnog broja nakon što je provedeno neko razmatranje i izvođenje u proširenom području kompleksnih brojeva. Takvim postupcima izvodili su se međutim računi često po čisto formalnoj analogiji prema pravilima za računanje s realnim brojevima. Strogi osnov dobila je teorija kompleksnih brojeva tek shvaćanjem kompleksnog broja kao uređene dvojke realnih brojeva, odnosno, u geometrijskoj interpretaciji, kao tačke kompleksne ravnine.

KOMBINATORIKA

Kombinatorika ispituje izvjesne *komplekse* koji se mogu tvoriti od jednog ili više danih skupova elemenata.

Tvorenje kompleksâ. Skup S_1 neka sadrži m među sobom različitih elemenata a_i, tj. $S_1 = \{a_1\ a_2, \ldots, a_m\}$, a skup S_2 neka sadrži n među sobom različitih elemenata b_j, tj. $S_2 = \{b_1, b_2\ \ldots, b_n\}$. Tada se može tvoriti $m \cdot n$ takvih parova elemenata da svaki par sadržava po jedan element iz S_1 i jedan element iz S_2; to su parovi

$$\begin{array}{llll} a_1 b_1, & a_1 b_2, & \ldots, & a_1 b_n, \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & \ldots, & a_2 b_n, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_m b_1, & a_m b_2, & \ldots, & a_m b_n. \end{array}$$

Isto vrijedi u posebnom slučaju da neki elementi dolaze i u S_1 i u S_2, npr. kad je $S_1 = S_2$, samo tada svaki par treba smatrati uređenim, tj. razlikovati par ab od para ba.

Općenitije, ako imamo m skupova S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, tako da skup S_i sadrži n_i međusobno različitih elemenata a_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, možemo tvoriti $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ takvih uređenih m-torki elemenata $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots a_{mj_m}$ da svaka od njih sadrži po jedan element a_{ij} iz svakog od skupova S_i.

Npr. od 5 plesača i 6 plesačica može se sastaviti $5 \cdot 6 = 30$ plesnih parova. Ako ljude podijelimo u grupe po ovim kriterijima: 1. spolu, 2. bračnom stanju, 3. zanimanju, pa ako po prvom kriteriju razlikujemo 2 slučaja (muško, žensko), po drugom 4 [neoženjen odn. neudata, oženjen odn. udata, rastavljen(a), udovac (ica)], a po trećem 15 slučajeva (profesija), dobit ćemo po takvoj klasifikaciji (uz pretpostavku da se bilo koji slučajevi pojedinih kriterija mogu kombinirati) ukupno $2 \cdot 4 \cdot 15 = 120$ različitih kategorija.

Permutacije. *Permutacija* od n elemenata $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je svaki njihov određeni poredaj $a_{i_1}\ a_{i_2} \ldots a_{i_n}$ (slog). Slog $a_1\ a_2 \ldots a_n$ je *osnovna permutacija* tih elemenata.

Ako su elementi koji se permutiraju *različiti*, pa se označe prirodnim brojevima od 1 do n, može se svaka njihova permutacija $a_{i_1}\ a_{i_2} \ldots a_{i_n}$ pisati u obliku $\binom{i_1\ i_2\ \cdots\ i_n}{1\ \ 2\ \cdots\ n}$; ta shema pokazuje da element označen brojem i_k dolazi na k-tom mjestu niza dane permutacije (u shemi je k ispod i_k). Poređaj stupaca $\binom{i_k}{k}$ u shemi nije bitan; posebno se oni mogu poređati i tako da u gornjem retku sheme dolaze redom prirodni brojevi, npr. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Iz ovakva predočenja permutacije može se ona lako prikazati i kao *produkt ciklusa*. U danoj permutaciji, npr. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, pogleda se najprije koji se broj donjeg retka nalazi ispod broja 1 gornjeg; to je u danom primjeru 5. Zatim se pogleda koji se broj nalazi ispod toga broja (5) gornjeg retka u donjem retku; to je ovdje 6. Postupak se nastavlja dok se ne dođe u donjem retku do broja kojim se počelo u gornjem, (tj. 1); tako se dobiva *ciklus* 1—5—6—3—1. Analogno se nastavlja s preostalim stupcima sheme, dok se ne iscrpe čitava shema; na taj način raspada se dana permutacija u produkt ciklusa (1563) (27) (4). Permutacija koja se sastoji od jednoga jedinog ciklusa zove se *ciklička*.

Broj P_n permutacija od n različitih elemenata jednak je produktu prvih n prirodnih brojeva: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; kraće se taj produkt označuje sa $n!$ (čitaj: *n faktorijela*). Isto toliko postoji različitih numeracija od n elemenata brojevima od 1 do n.

Npr. od 5 plesača i 5 plesačica može se na $5! = 120$ načina sastaviti 5 plesnih parova. Dužnosti predsjednika, potpredsjednika, tajnika i blagajnika mogu se na 4 člana odbora podijeliti na $4! = 24$ načina. 10 gostiju može se u hotelu sa 10 jednokrevetnih soba razmjestiti na $10! = 3\,628\,800$ načina.

Ako je n dovoljno veliko, $n!$ postaje veće i raste brže od potencije n^k s po volji velikim (čvrsto odabranim) eksponentom k.

Ako je n velik broj, direktno izračunati $n!$ je tegobno; redovno će tada zadovoljiti približna *Stirlingova formula*: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Apsolutna pogreška te aproksimacije s rastućim n raste u beskonačnost, ali relativna opada prema nuli.

Broj $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ permutacija od n elemenata među kojima postoje skupine od $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jednakih, iznosi $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$. Isto toliko postoji numeracija danih elemenata brojevima od 1 do n (ako ne smatramo različitim numeracije koje se razlikuju jedino u tome što su jednakim elementima na različit način pridruženi isti brojevi; drugim riječima, ako se ne obaziramo na permutacije oznaka jednakih elemenata).

Npr. u kupe s 8 sjedišta moguće je 3 putnika razmjestiti na $P_8(5) = \frac{8!}{5!} = 336$ načina (jer 5 prekobrojnih sjedišta ostaje prazno).

Ako u osnovnoj permutaciji jednaki elementi (ukoliko ih ima) dolaze svi neposredno jedan iza drugog, mogu se sve permutacije danog skupa elemenata ovako *leksikografski poređati*: od dviju permutacija kojih se nizovi poklapaju u prvih k ($k \geqq 0$) elemenata, *viša* je ona, kojoj se $(k+1)$-ti element nalazi više desno u osnovnoj permutaciji. Najniža je dakle osnovna permutacija, a najviša je permutacija $a_n a_{n-1} \ldots a_1$. Npr., leksikografski poređane permutacije elemenata a, b, c jesu *abc, acb, bac, bca, cab, cba*; leksikografski poređane permutacije elemenata a, a, b, b jesu *aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa*.

Dva elementa a_j, a_k su u *inverziji* u danoj permutaciji ako je u toj permutaciji njihov međusobni položaj suprotan položaju u osnovnoj permutaciji. *Broj inverzija* neke permutacije je broj parova elemenata koji su u njoj u inverziji. Permutacija je *parna (tâka)* ili *neparna (liha)* prema tome da li je njen broj inverzija paran ili neparan broj. Među $n!$ permutacija od $n > 1$ različitih elemenata polovina ih je parnih a polovina neparnih. Npr. permutacija *bdaec* elemenata $\{a, b, c, d, e\}$ je parna, jer sadrži 4 inverzije: *ba, da, bc, ec*.

Kombinacije. *Kombinacija bez ponavljanja od n (različitih) elemenata* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *r-tog razreda* ($r \leqq n$) je svaka skupina od r tih elemenata. Kombinacija bez ponavljanja može pojedini od danih elemenata sadržavati najviše jedanput, tj. ona ga može sadržavati ili ne sadržavati, ali ga ne može sadržavati u više primjeraka. Kad je riječ o kombinaciji, ne obaziramo se na poređaj elemenata: dvije kombinacije koje sadrže iste elemente smatraju se jednakim, bez obzira na to da li se poređaji tih elemenata za obje kombinacije poklapaju ili ne.

Broj kombinacija bez ponavljanja od n elemenata r-tog razreda jednak je $K_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$; taj se broj kraće označuje sa $\binom{n}{r}$ (čitaj: n povrh r; v. Svojstva binomnih koeficijenata u ovom članku).

Npr. od 14 kandidata moguće je sastaviti reprezentaciju od 11 igrača na $K_{14}^{11} = \binom{14}{11}$ načina (ne gledajući na mjesta koja će pojedini igrači zauzimati u reprezentaciji).

Kombinacija s ponavljanjem od n (različitih) elemenata $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *r-tog razreda* je svaka skupina od ukupno r tih elemenata, u kojoj, međutim, pojedini elementi mogu nastupiti i više puta. I za kombinacije s ponavljanjem irelevantan je poređaj elemenata: dvije kombinacije koje sadrže iste elemente, i to tako da svaki od tih elemenata u obje kombinacije dolazi u jednakom broju primjeraka, smatraju se jednakim, bez obzira na to da li se poređaji elemenata za obje kombinacije poklapaju ili ne.

Broj kombinacija s ponavljanjem od n elemenata r-tog razreda jednak je $K'^r_n = \binom{n+r-1}{r}$.

Npr. od 30 slova abecede možemo sastaviti $K'^2_{30} = \binom{31}{2} = 465$ monograma od po dva slova (ako ne smatramo različitim monograme koji se razlikuju samo u poretku slova). Ako za kvartet dolaze u obzir 3 instrumenta, moguće je (u principu) sastaviti orkestar na $K'^3_4 = \binom{3+4-1}{4} = 15$ načina.

Ako se unutar svake kombinacije elementi poređaju prema nekom osnovnom poređaju, mogu se kombinacije (sa ili bez ponavljanja) leksikografski poređati posve analogno kao permutacije. Na primjer, $\binom{4}{2} = 6$ kombinacija bez ponavljanja drugog razreda od 4 elementa $\{a, b, c, d\}$, leksikografski poređane, jesu *ab, ac, ad, bc, bd, cd*; $\binom{5}{2} = 10$ kombinacija s ponavljanjem istih elemenata: *aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd*.

4. Varijacije. *Varijacija bez ponavljanja od n (različitih) elemenata* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *r-tog razreda* je svaka uređena skupina (slog) od r ($r \leqq n$) tih elemenata. Varijacija bez ponavljanja može pojedini od danih elemenata sadržavati najviše jedanput. Poređaj elemenata za varijaciju je bitan: dvije varijacije koje sadržavaju iste elemente ali različito poređane smatraju se različitim. Posebno su varijacije bez ponavljanja od n elemenata n-tog razreda upravo permutacije tih elemenata.

Broj varijacija bez ponavljanja od n elemenata r-tog razreda jednak je $V_n^r = \binom{n}{r} \cdot r! = \frac{n}{(n-r)!}$. Isto toliko ukupno postoji različitih numeracija od po r između n danih elemenata brojevima od 1 do r.

Npr., ako uzmemo u obzir i mjesta koja će pojedini igrači zauzimati, moguće je od 14 igrača sastaviti reprezentaciju od 11 njih na $V_{14}^{11} = \frac{14!}{3!}$ načina.

Varijacija s ponavljanjem od n (različitih) elemenata r-tog razreda je svaka uređena skupina od ukupno r tih elemenata, u kojoj, međutim, pojedini elementi mogu nastupiti i više puta. I kod varijacija s ponavljanjem poređaj elemenata je bitan: dvije varijacije koje sadržavaju iste elemente, i to tako da svaki od tih elemenata u obje varijacije dolazi u jednakom broju primjeraka, smatraju se jednakim samo onda ako se za obje varijacije poklapaju i poređaji elemenata.

Broj varijacija s ponavljanjem od n elemenata r-tog razreda jednak je $V'^r_n = n^r$. Isto toliko ukupno postoji različitih numeracija od po najviše r između n danih elemenata brojevima od 1 do r, ako dopustimo da pojedini elementi budu numerirani i s više brojeva.

Varijacije sa ponavljanjem i bez ponavljanja mogu se leksikografski poređati analogno kao i permutacije.

Npr. n-teroznamenkasto predočenje prirodnog broja u decimalnom sustavu je varijacija s ponavljanjem n-tog razreda od 10 znamenaka $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Ako monograme koji se razlikuju u poretku slova smatramo različitim, možemo od 30 slova abecede sastaviti $V'^2_{30} = 900$ monograma od po 2 slova. Od dvaju osnovnih Morseovih znakova · i — može se sastaviti $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ (v. Geometrijski red u ovom članku) znakova sastavljenih od najviše n osnovnih. Lokoti sa šifrom sadrže obično 4 koluta sa po 10 znamenaka i mogu se otvoriti samo ako je na svakom kolutu postavljena ispravna znamenka; postoji dakle $V'^4_{10} = 10\,000$ mogućih šifara za takve lokote. Listići sportske kladionice sadrže redovno 12 pitanja, od kojih na svako treba odgovoriti bilo sa »1« (pobjeda domaćeg kluba), bilo sa »2« (pobjeda gostiju), bilo sa »X« (neodlučan rezultat); postoji dakle $V'^{12}_3 = 3^{12} = 531\,441$ mogućnosti ispunjavanja listića. $\frac{3!}{1!} = 6$ varijacija bez ponavljanja drugog razreda od 3 elementa a, b, c, leksikografski poredane, jesu *ab, ac, ba, bc, ca, cb*. $3^2 = 9$ varijacija s ponavljanjem istih elemenata jesu *aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc*.

REDOVI

Aritmetički redovi. *(Obični) aritmetički red* ili *aritmetička progresija (prvog reda)* je zbroj oblika $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} + a_n$ u kojem je razlika d između dva susjedna člana konstantna, tj. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$. U aritmetičkom redu svaki je član (osim prvog i posljednjeg) aritmetička sredina članova neposredno ispred i iza njega, tj. $a_m = \frac{1}{2}(a_{m-1} + a_{m+1})$.

Za opći član aritmetičkog reda vrijedi $a_m = a_1 + (m-1)\,d$, a zbroj S_m prvih m članova jednak je

$$S_m = \frac{m}{2}(a_1 + a_m) \quad \text{ili} \quad S_m = m\left(a_1 + \frac{m-1}{2}d\right).$$

Npr. zbroj prvih m prirodnih brojeva

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \tfrac{1}{2}\, m\,(m+1).$$

Aritmetičke progresije višeg reda. Zbroj oblika $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, za koji razlike $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$ daju redom članove (običnog) aritmetičkog reda (aritmetičke progresije 1. reda), zove se *aritmetička progresija 2. reda.* Općenito, ako razlike susjednih članova danog reda daju redom članove aritmetičke progresije k-tog reda, dani red je *aritmetička progresija* $(k+1)$-tog reda.

Označe li se razlike $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$ članova reda $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ redom sa $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_{n-1}$, zatim razlike $\Delta a_2 - \Delta a_1, \Delta a_3 - \Delta a_2, \ldots$ redom sa $\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \ldots$, pa $\Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1, \Delta^2 a_3 - \Delta^2 a_2, \ldots$ redom sa $\Delta^3 a_1, \Delta^3 a_2, \ldots$ itd., bit će dani red aritmetička progresija k-tog reda, ukoliko je $\Delta^k a_1 = \Delta^k a_2 = \Delta^k a_3 = \ldots$, tj. ako je k-ta razlika danog reda konstantna.

Članovi aritmetičke progresije k-tog reda određeni su potpuno sa $a_1, \Delta a_1, \Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^k a_1$. Za m-ti član takva reda vrijedi (za značenje simbola $\binom{n}{r}$ v. Kombinacije i Binomni teorem u ovom članku):

$$a_m = a_1 + \binom{m-1}{1}\Delta a_1 + \binom{m-1}{2}\Delta^2 a_1 + \binom{m-1}{3}\Delta^3 a_1 + \ldots + \binom{m-1}{k}\Delta^k a_1.$$

Zbroj prvih m članova iznosi

$$S_m = m\,a_1 + \binom{m}{2}\Delta a_1 + \binom{m}{3}\Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{m}{k+1}\Delta^k a_1.$$

U oba izraza proteže se zbroj samo na članove s koeficijentima $\binom{n}{r}$ za koje je $n \geqq r$.

Redovi kvadrata i kuba prirodnih brojeva su posebni slučajevi aritmetičke progresije višeg (2. i 3.) reda. Vrijede formule:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{1}{6}\, m\,(m+1)(2m+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \frac{1}{4}\,[m(m+1)]^2.$$

Geometrijski redovi. *Konačni geometrijski red* (ili *konačna geometrijska progresija*) je zbroj oblika $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, u kojem je kvocijent q između dva susjedna člana konstantan, tj. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. U geometrijskom redu svaki je član (osim prvog i posljednjeg) po apsolutnoj vrijednosti geometrijska sredina članova neposredno ispred i iza njega, tj. $|a_m| = \sqrt{a_{m-1} \cdot a_{m+1}}$.

Za opći član geometrijskog reda vrijedi $a_m = a_1 \cdot q^{m-1}$, a zbroj S_m prvih m članova (za $q \neq 1$) jednak je

$$S_m = a_1 \frac{1-q^m}{1-q} \quad \text{ili} \quad S_m = \frac{a_1 - a_m q}{1-q}.$$

Primjer. Prema legendi tražio je izumitelj šahovske igre za nagradu onoliko zrna žita koliko bi ih trebalo da se na prvo šahovsko polje stavi 1 zrno, na drugo 2, na treće 4 itd. (na svako iduće polje dvostruko od onog koliko ih je bilo na prethodnom, sve do posljednjeg polja šahovske ploče. Rezultat je

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Primjer ilustrira i brzinu porasta potencije 2^n.

Beskonačni geometrijski red (ili *beskonačna geometrijska progresija*) je izraz oblika $\sum_{i=1}^{\infty} a \cdot q^{i-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^m + \ldots$ Tvori li se niz parcijalnih suma tog reda (tj. niz kojem su elementi sve duži početni komadi tog reda), bit će taj niz za $|q| < 1$ konvergentan s limesom $\frac{a}{1-q}$ (v. *Diferencijalni račun*), pa se kaže da je tada i beskonačni geometrijski red *konvergentan* i da mu je *zbroj* $S = \frac{a}{1-q}$. Ako je $|q| \geqq 1$, beskonačni geometrijski red je divergentan.

Primjeri. 1. *Zenonov paradoks.* Brzonogi Ahilej (A.) takmiči se u trčanju s kornjačom (K.). K. ima prednost od m jedinica duljine, a A. je n puta brži od K. Dok A. pretrči udaljenost m, odmakla je K. za $\frac{m}{n}$; dok A. pretrči i tu dužinu, odmakla je K. za $\frac{m}{n^2}$ itd. »Dakle«, A. ne može stići K. Elementarno rješenje paradoksa je u tome što je ukupni put $m + \frac{m}{n} + \frac{m}{n^2} + \ldots$ konačan, iako se »sastoji od beskonačno mnogo dijelova«, i iznosi $\frac{m}{1-\frac{1}{n}} = \frac{nm}{n-1}$, pa će ga A. prijeći u konačnom vremenu i toga časa stići (a zatim prestići) K. Ulaženje u dublju problematiku tog paradoksa ne bi ovdje bilo na mjestu.

2. S pomoću beskonačnog geometrijskog reda može se svaki beskonačni periodski decimalni razlomak predočiti u obliku običnog razlomka. Npr.,

$$2{,}3\dot{4}\dot{7} = 2{,}347\,474\,7\ldots = 2{,}3 + \frac{47}{10^3} + \frac{47}{10^5} + \frac{47}{10^7} + \ldots =$$

$$= 2{,}3 + \frac{47}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{2324}{990}.$$

Kamatni račun. Ako se početnoj *glavnici* g pribroje *p-postotne kamate* $\frac{p}{100}g$, dobije se nova vrijednost glavnice $g_1 = g\left(1 + \frac{p}{100}\right) = gq$. Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ zove se *kamatni faktor.*

Glavnica početne vrijednosti g, kojoj se nakon prve godine pribroje p-postotne kamate (tako da naraste na g_1), zatim se druge godine pribroje p-postotne kamate na g_1 itd., narast će nakon n godina na vrijednost $g_n = gq^n$. [Uz obično ukamaćivanje, gdje se ne računaju i kamate na kamate, bilo bi $g_n = g\left(1 + n\frac{p}{100}\right)$].

Ako su poznate veličine g_n, q, n, nalazi se g prema formuli $g = g_n \cdot \frac{1}{q^n}$. Ako je poznato g, g_n, n, nalazi se q prema $q = \sqrt[n]{\frac{g_n}{g}}$. Ako je poznato g, g_n, q, nalazi se n prema $n = \frac{1}{\log q}(\log g_n - \log g)$. [Za obično ukamaćivanje odgovarajuće formule redom glase $g = g_n \Big/ \left(1 + n\frac{p}{100}\right)$, $p = \frac{100}{n} \cdot \frac{g_n - g}{g}$, $n = \frac{100}{p} \cdot \frac{g_n - g}{g}$].

Ako se kamate ne pribrajaju glavnici svake godine nego svakog m-tog dijela godine $\left(\text{s postotkom } \frac{p}{m}\right)$, bit će konačna vrijednost glavnice nakon n ukamaćivanja $\left(\frac{n}{m} \text{ godina}\right)$ $g_n = g \cdot q^n$, gdje je $q = 1 + \frac{p}{100\,m}$.

Primjeri. 1. Glavnica od 10 000 d naraste uz (godišnje) ukamaćivanje od 5% nakon 10 godina na vrijednost $g_{10} = 10\,000\text{ d} \cdot 1{,}05^{10} = 16\,289$ d. (Uz obično ukamaćivanje na 15 000 d). Ista glavnica naraste uz polugodišnje ukamaćivanje (s pojedinim ukamaćivanjem od 2,5%) u isto vrijeme (10 god.) na $g_{20} = 10\,000\text{ d} \cdot 1{,}025^{20} = 16\,386$ d. (Uz obično ukamaćivanje na 15 000 d.)

2. Glavnica koja uz (godišnje) ukamaćivanje od 3% nakon 20 god. treba da naraste na 100 000 d, mora imati početnu vrijednost $g = 100\,000\text{ d} \cdot \frac{1}{1{,}03^{20}} = 55\,368$ d. (Uz obično ukamaćivanje 62 500 d.)

3. Glavnica od 20 000 d, koja (uz godišnje ukamaćivanje) nakon 4 godine treba da naraste na 22 500 d, mora se ukamaćivati uz kamatni faktor $q = \sqrt[4]{\frac{22\,500}{20\,000}} \approx 1{,}03$, dakle uz postotak 3%. (Uz obično ukamaćivanje 3,1%.)

4. Glavnica od 10 000 d podvostručit će se uz (godišnje) ukamaćivanje od 4% nakon $n = \frac{1}{\log 1{,}04}(\log 20\,000 - \log 10\,000) = 17{,}7$, dakle nakon 18 godina. (Uz obično ukamaćivanje 25 god.).

Binomni teorem i svojstva binomnih koeficijenata. Ako je n prirodan broj, a a i b su realni ili kompleksni brojevi, vrijedi *binomni teorem*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n;$$

u kraćoj oznaci [uz definiciju $\binom{n}{0} = 1$] :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

[za značenje simbola $\binom{n}{r}$ v. Kombinacije u ovom članku].

Posebno je

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab^2 + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Binomni teorem vrijedi i u slučaju da a i b nisu brojevi nego bilo kakvi matematički objekti za koje su definirane jednakost i operacije zbrajanja i množenja tako da su te operacije komutativne i asocijativne i da je množenje distributivno prema zbrajanju (npr. polinomi, v. Polinomi u ovom članku).

Brojevi $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, koji kao koeficijenti dolaze u binomnom teoremu, zovu se *binomni koeficijenti*. Za njih vrijedi da je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, pa su simetrično položeni koeficijenti na desnoj strani binomnog teorema međusobno jednaki. Vrijede također i ove jednakosti:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}; \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots +$$
$$+ \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Na prvoj se osniva *Pascalov trokut* binomnih koeficijenata

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . &
\end{array}$$

u kojem je svaki broj jednak zbroju gornjih njemu susjednih, a n-ti redak daje redom koeficijente binomnog teorema za eksponent $n-1$.

Za binomne koeficijente vrijede ove nejednakosti: za parno n

$$1 = \binom{n}{0} < \ldots < \binom{n}{\frac{n}{2}-2} < \binom{n}{\frac{n}{2}-1} < \binom{n}{\frac{n}{2}} >$$
$$> \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \binom{n}{\frac{n}{2}+2} > \ldots > \binom{n}{n} = 1,$$

a za neparno n

$$1 = \binom{n}{0} < \ldots < \binom{n}{\frac{n-5}{2}} < \binom{n}{\frac{n-3}{2}} < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} =$$
$$= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \binom{n}{\frac{n+3}{2}} > \binom{n}{\frac{n+5}{2}} > \ldots > \binom{n}{n} = 1.$$

Za svaki prirodni broj n je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \ldots (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

DETERMINANTE

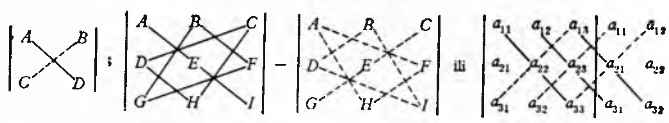
Pod *determinantom*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\text{kraće: } D = |a_{nn}|)$$

razumije se vrijednost sume $\sum \varepsilon a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$, gdje je $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ neka permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$, ε je 1 ili -1, prema tome da li je permutacija $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ parna ili neparna (v. Permutacije u ovom članku), a sama suma proteže se preko članova sa svih $n!$ mogućih permutacija drugih indeksa faktora. [Vidi dalje primjere (b) i (c)]. Elementi a_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ u shemi determinante mogu biti realni ili kompleksni brojevi (općenitije, kakvi god matematički objekti za koje su definirane jednakost i operacije zbrajanja i množenja tako da su te operacije komutativne i asocijativne, da je množenje distributivno prema zbrajanju, da za zbrajanje postoji neutralni element i da za svaki element a postoji i element $-a$. Na pr. a_{ik} mogu biti cijeli brojevi, racionalni brojevi, polinomi, realne [v. *Diferencijalni račun*] ili kompleksne funkcije [v. *Funkcije kompleksne varijable*]). Determinanta koje shema elemenata ima n redaka (i n stupaca) zove se determinanta *n-tog reda*. Dijagonala a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} sheme elemenata determinante D zove se njena *glavna dijagonala*, a dijagonala a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\ldots$, a_{n1} je njena *sporedna dijagonala*. Npr.

$$|a_{11}| = a_{11}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Posebno determinante 2. i 3. reda možemo računati prema shemama:



1 2 3

Shema 1 pokazuje da od produkta elemenata na mjestima A, D treba odbiti produkt elemenata na mjestima B, C, shema 2, da od zbroja produkata elemenata na potezima AEI, BFG, CDH treba odbiti produkte na potezima CEG, BDI, AFH. Shema 3, po kojoj su prva dva stupca determinante još jednom napisana (ili zamišljena) desno od nje, pokazuje puno izvučenim potezima produkte koje treba tvoriti i zbrojiti ih, a crtkano izvučenim potezima produkte koje treba tvoriti i odbiti od ranijih (*Sarrusovo pravilo*).

Kad ne postoji mogućnost zabune, govori se umjesto o »shemi elemenata determinante D« kraće o »determinanti D«.

Svojstva determinanata. 1. Determinanta ne mijenja vrijednost ako joj se shema elemenata preklopi preko glavne dijagonale, tj. ako joj se reci (redom kako dolaze) zamijene stupcima (redom kako dolaze).

2. Ako su svi elementi nekog retka (stupca) determinante jednaki nuli, determinanta je jednaka nuli.

3. Ako se u determinanti među sobom zamijene 2 retka (stupca), ona mijenja predznak.

4. Ako su u determinanti dva retka (stupca) jednaka, ona je jednaka nuli.

5. Ako se svi elementi nekog retka (stupca) determinante pomnože istim faktorom k, i vrijednost determinante množi se sa k.

6. Ako su elementi nekog retka (stupca) determinante redom proporcionalni elementima nekog drugog retka (stupca), ona je jednaka nuli.

7. Ako su elementi jednog (jedinog) retka (stupca) determinante zbrojevi od po 2 člana, determinanta je jednaka zbroju dviju determinanata, od kojih prva u tom retku (stupcu) sadržava prve, a druga druge članove (dok su ostali reci [stupci] isti kao u zadanoj determinanti).

$$\text{Npr.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Ako se elementima nekog retka (stupca) determinante pribroje odgovarajući elementi nekoga drugog retka (stupca)

pomnoženi istim faktorima k, determinanta ne mijenja vrijednost.

Množenje determinanata. Ako su $D_1 = |a_{nn}|$, $D_2 = |b_{nn}|$ dvije determinante n-tog reda, pa se tvori determinanta $D_3 = |c_{nn}|$ tako da se uzme $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, bit će $D_3 = D_1 . D_2$. Također, umjesto da se prema gornjoj formuli računaju elementi c_{ik} kao sume produkata odgovarajućih elemenata i-tog retka od D_1 i k-tog stupca od D_2 (množenje »redaka sa stupcima«), mogu se tvoriti i determinante D_4, D_5, D_6 tako da se (respektivno) množe reci s recima, stupci s recima ili stupci sa stupcima; u svakom slučaju bit će $D_4 = D_5 = D_6 = D_3 = D_1 . D_2$ (tj. vrijednosti tih četiriju determinanata bit će sve jednake produktu vrijednosti determinante D_1 i D_2, iako im se sheme elemenata općenito neće poklapati).

Npr. uz $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -14$ bit će

$$D_3 = \begin{vmatrix} -17 & 19 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = D_4 = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = D_5 = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -14 & -14 \end{vmatrix} = D_6 =$$
$$= \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = 28 = (-2) \cdot (-14).$$

Razvoj determinante po recima ili stupcima. Ako je $D = |a_{nn}|$ determinanta n-tog reda, bit će za $i, k = 1, 2, \ldots, n$

$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} A_{jk}$, gdje je A_{rs} sa $(-1)^{r+s}$ pomnožena determinanta, čiju shemu elemenata dobivamo brisanjem r-tog retka i s-tog stupca od D; A_{rs} se zove *algebarski komplement* elemenata a_{rs} determinante D. Determinanta je dakle jednaka zbroju produkata elemenata nekog njenog retka (ili stupca) s odgovarajućim algebarskim komplementima.

Tako se npr. razvijanjem po trećem retku dobiva

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanta D oblika

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kojoj su svi elementi iznad (ili ispod) glavne dijagonale jednaki nuli, ima vrijednost jednaku produktu svojih dijagonalnih elemenata: $D = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}$.

Obrubljene determinante su determinante oblika

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & z \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_{11} & x_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_{n1} & x_{n2} \\ y_{11} & \ldots & y_{1n} & z_{11} & z_{12} \\ y_{21} & \ldots & y_{2n} & z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}, \text{ itd.};$$

to su dakle determinante u shemi kojih smatramo posljednjih m ($m = 1, 2, \ldots$) redaka i stupaca »rubom«. Svaka determinanta može se shvatiti kao obrubljena determinanta i kao takva *razviti po rubu*. Za obrubljene determinante D_1 s *jednorednim* i *jednostupčanim rubom* vrijedi razvoj

$$D_1 = z D - \sum_{i,k} A_{ik} x_i y_k; \; i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje je D determinanta koja se dobiva brisanjem ruba (posljednjeg retka i stupca) od D_1, a A_{ik} je algebarski komplement od a_{ik} u D.

Primjer: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{i,k=1,\ldots,n} A_{ik}.$

Laplaceov razvoj determinante. Ako u determinanti D n-tog reda odaberemo m redaka (ili m stupaca), $m < n$, možemo D razviti *po tim recima (stupcima)* na ovaj način: Najprije tvorimo svih $\binom{n}{m}$ (vidi Kombinacije u ovom članku) determinanata D_m kojih se sheme elemenata mogu dobiti brisanjem po $n-m$ stupaca (redaka) u shemi elemenata što je čine odabrani reci (stupci). Svakoj takvoj determinanti D_m pridružimo njoj *adjungiranu subdeterminantu* (ili *minor*) D_{n-m} ($n-m$)-tog reda, koju dobivamo ako u determinanti D brišemo one retke i stupce kojih elementi ulaze u D_m. Pomnoži li se D_{n-m} sa $(-1)^s$, gdje je s zbroj indeksa redaka i stupaca koji ulaze u D_{n-m}, dobiva se *algebarski komplement* minora D_{n-m}. Zadana determinanta D može se tada predočiti u obliku zbroja svih $\binom{n}{m}$ produkata njenih minora D_m (iz odabranih m redaka [stupaca]) s odgovarajućim pridruženim algebarskim komplementom. (Za $m = 1$ ovo se reducira na razvoj determinante po elementima nekog retka ili stupca.)

Npr. razvojem po prvom i trećem retku dobiva se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$
$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Recipročna determinanta $\overline{D}$ determinante D je determinanta koje su elementi algebarski komplementi A_{ik} elemenata a_{ik} od D:

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vrijednost recipročne determinante jednaka je $\overline{D} = D^{n-1}$, gdje je n red determinante D.

Neke specijalne determinante. 1. *Vandermondeova determinanta* je determinanta oblika

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

u njoj su elementi i-tog retka ($i = 1, 2, \ldots, n$) potencije s rastućim eksponentom (od 0 do $n-1$) elementa a_i. Takva determinanta može se predočiti kao produkt svih razlika $a_j - a_k$ s $j > k$:

$$\begin{aligned} D = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot \\ \cdot (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_2) \cdot \\ \cdot (a_4 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_3) \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot (a_n - a_{n-1}) = \prod_{j>k} (a_j - a_k). \end{aligned}$$

2a. *Simetrična determinanta* je determinanta u kojoj su elementi smješteni simetrično prema glavnoj dijagonali jednaki, tj. $a_{ik} = a_{ki}$. Recipročna determinanta simetrične determinante također je simetrična.

Simetrična determinanta kojoj su elementi realni brojevi, a dijagonalni elementi oblika $a_{ii} + x$, $i = 1, 2, \ldots, n$, izjednačena s nulom daje *sekularnu jednadžbu*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijena lijeva strana je polinom (v. Polinomi u ovom članku) n-tog stupnja u x; svi su korijeni toga polinoma realni brojevi. Isto (realnost korijena) vrijedi i onda ako su (općenitije) a_{ik} i a_{ki} konjugirano kompleksni brojevi, tj. ako shema elemenata determinante čini hermitsku matricu (v. Specijalne kvadratne matrice u ovom članku).

2b. *Antisimetrična* (ili *kososimetrična*) determinanta je determinanta u kojoj se elementi smješteni simetrično prema glavnoj dijagonali razlikuju samo u predznaku: $a_{ik} = -a_{ki}$. Elementi glavne dijagonale antisimetrične determinante jednaki su nuli.

Antisimetrična determinanta neparnog reda uvijek ima vrijednost 0. Antisimetrična determinanta parnog reda može se uvijek predočiti u obliku kvadrata polinoma svojih elemenata (v. Polinomi u ovom članku).

Tako je npr. za red 2 i 4

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = a_{12}^2; \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

MATRICE

Pravokutna shema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{kraće: } A = [a_{ik}])$$

elemenata a_{ik}, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$ zove se *matrica* (tih elemenata). Posebno, ako je $m = n$, matrica je *kvadratna* (reda n). Elementi a_{ik} mogu biti realni ili kompleksni brojevi (općenitije, kakvi god matematički objekti za koje su definirane jednakost i operacije zbrajanja i množenja i za koje te operacije — općenito govoreći — imaju analogna svojstva kao za racionalne brojeve. Npr. a_{ik} mogu biti kvocijenti polinoma [v. Polinomi u ovom članku] ili realne ili kompleksne funkcije definirane na nekom segmentu [v. *Diferencijalni račun*]).

Ako se želi istaći da matrica A ima m redaka i n stupaca (kao gore), upotrebljava se i oznaka $A = [a_{mn}]$ ili kraće A_{mn}. Umjesto uglatih zagrada upotrebljavaju se i okrugle, ili dvostruki ravni potez : $A = (a_{mn}) = \|a_{mn}\|$.

Pod *determinantom* (kvadratne) *matrice* A razumije se determinanta koja ima istu shemu elemenata kao i A: $|[a_{nn}]| = |a_{nn}|$. Matrica A s determinantom različitom od nule zove se *regularna*; ako je $|A| = 0$, matrica A je *singularna.*

Rang r matrice A je red determinante $\neq 0$ najvišeg reda čija se shema elemenata može dobiti (eventualnim) brisanjem redaka i stupaca u shemi matrice A. Rang r kvadratne regularne matrice reda n jednak je n; za singularnu je rang $r < n$. Jedina matrica A_{mn} ranga 0 je 0_{mn}, tj. matrica kojoj su svi elementi jednaki nuli (*nulmatrica*).

Za određivanje ranga konkretno dane matrice A_{mn} postupa se ovako: najprije se (brisanjem redaka i stupaca od A) potraži shema elemenata sadržana u A koje je determinanta $D \neq 0$. (Takva determinanta uvijek postoji čim je $A \neq 0_{mn}$, jer npr. sam element $a_{ik} \neq 0$ matrice A ima determinantu reda 1 $|a_{ik}| = a_{ik} \neq 0$. Zatim se, ako je k red determinante D, izračuna vrijednost svih determinanata D_i reda $k + 1$, kojih su sheme elemenata sadržane u A i kojima je D subdeterminanta. Ako su sve ove determinante $D_i = 0$, rang matrice A je k; u suprotnom slučaju postupak se ponavlja s jednom od determinanata $D_i \neq 0$ reda $k + 1$. Postupak mora završiti bilo da jednom dođemo do leterminante D reda r za koju su sve proširene determinante D_i reda $r + 1$ (konstruirane kako je naprijed opisano) jednake nuli, bilo da uopće nema takvih determinanata D_i (ako je r jednak manjem od brojeva m, n redaka i stupaca od A); rang matrice A tada je jednak r.

Primjeri. 1. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

je determinanta (gornji lijevi ugao) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; obrubljena determinanta D_1 determinante D,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$ Kako su sve obrubljene determinante D_i determinante D_1 koje možemo tvoriti iz sheme elemenata dane matrice jednake nuli, naime

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

matrica A je ranga 3.

2. Za matricu $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ je $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, pa je njen rang 2.

Računanje s matricama. Dvije matrice A_{mn}, B_{mn} smatraju se jednakima samo onda ako su im odgovarajući elementi jednaki: $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$. Matrična jednakost $A_{mn} = B_{mn}$ ekvivalentna je dakle sa $m \cdot n$ jednakosti među elementima matrica.

Za matrice se definiraju ove operacije: 1. zbrajanje, 2. množenje s brojem (*skalarom*) i 3. množenje.

1. Zbrajati se mogu samo matrice s istim brojem redaka m i istim brojem stupaca n. Za takve matrice $A = [a_{mn}]$, $B = [b_{mn}]$ definira se $A + B = C = [c_{mn}]$, gdje je $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Npr. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & -8 \end{bmatrix}$.

Za zbrajanje matrica vrijedi komutativnost i asocijativnost. Nadalje, za svaki par m, n postoji odgovarajuća nulmatrica 0_{mn}, koja je neutralni element za zbroj matrica s m redaka i n stupaca: $A_{mn} + 0_{mn} = 0_{mn} + A_{mn} = A_{mn}$. Također za svaku matricu $A_{mn} = [a_{mn}]$ postoji (jednoznačno određena) matrica $B_{mn} = -A_{mn} = [-a_{mn}]$, za koju je $A_{mn} + B_{mn} = 0_{mn}$. Oduzimanje se definira s $A_{mn} - B_{mn} = A_{mn} + (-B_{mn})$.

2. Matrica $A = [a_{mn}]$ množi se brojem (skalarom) s tako da joj se svaki element pomnoži tim brojem: $sA = [s \cdot a_{mn}]$.

Npr. $3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix}$.

Množenje matrica skalarom je distributivno prema zbrajanju matrica: $s(A + B) = sA + sB$, distributivno prema zbrajanju skalara: $(s + z)A = sA + zA$, i asocijativno prema množenju skalara: $sz \cdot A = s \cdot zA$. Posebno je $0 \cdot A_{mn} = 0_{mn}$, $1 \cdot A = A$.

Za determinantu produkta skalara i kvadratne matrice vrijedi $|sA_{nn}| = s^n|A|$.

3. Množiti se mogu samo dvije matrice A_{mn}, B_{rp} od kojih druga ima toliko redaka koliko prva ima stupaca (tj. za koje je $m = n$). Za takve matrice $A = A_{mn}$, $B = B_{np}$ definira se $A \cdot B = C = [c_{mp}]$, gdje je $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$, tj. element u i-tom retku i k-tom stupcu produkta jednak je *nutarnjem produktu* (v. *Vektorski račun*) i-tog retka prvog faktora s k-tim stupcem drugog. (Usp. i Množenje determinanata u ovom članku.)

Npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$.

Za množenje matrica vrijedi asocijativnost, distributivnost prema zbrajanju i *permutabilnost* prema množenju skalarom: $s \cdot AB = sA \cdot B = A \cdot sB$. Komutativnost za množenje općenito ne vrijedi, čak i ako su matrice kvadratne istog reda pa dopuštaju množenje u oba moguća poretka za faktore. Npr. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nadalje je $A_{mn} \cdot 0_{np} = 0_{mn} \cdot A_{np} = 0_{mp}$. Među matricama (npr. kvadratnim reda $n \geqq 2$) postoje *djelitelji nule,* tj. produkt dviju takvih matrica može biti nulmatrica, a da nijedan od faktora nije nulmatrica; npr. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Za (kvadratne) matrice n-tog reda postoji *jedinična matrica* $E_{nn} = E$, u kojoj su svi elementi glavne dijagonale (njene sheme elemenata) jednaki 1, a ostali jednaki 0, i koja je neutralni element za množenje: $AE = EA = A$.

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanata faktora: $|AB| = |A| \cdot |B|$; isto vrijedi i za više faktora. Produkt regularnih matrica je regularna matrica. Produkt u kojem je bar jedan faktor singularna matrica jest singularna matrica. Za svaku regularnu matricu A postoji (jednoznačno određena) njoj inverzna matrica (v. dalje) $B = A^{-1}$ za koju je $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Potenciranje (kvadratne) matrice A definira se sa $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$; $A^{n+1} = A^n \cdot A$ za svaki prirodni broj n. Ako je matrica A regularna, definira se i $A^{-n} = (A^{-1})^n$ za svaki prirodni broj n. Za računanje s potencijama matrice vrijedi

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}, \ (A^m)^n = A^{mn}$$

za sve brojeve m, n za koje je potencija definirana.

Množenje matrica po blokovima. Ravnim potezima između pojedinih redaka i stupaca može se matrica podijeliti na blokove; npr.

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Treba li pomnožiti dvije matrice, mogu se one najprije podijeliti na blokove i zatim množiti »po blokovima« kao da su blokovi elementi matrice (množenje i zbrajanje blokova provodi se kao množenje i zbrajanje matrica). Naravno da podjela na blokove mora biti takva da je množenje odgovarajućih blokova uopće moguće. Za naprijed navedene matrice A, B dobilo bi se npr.

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 \\ A_3B_1 + A_4B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \\ \hdashline 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matričnom računu srodno je računanje s *krakovijanima* (Banakiewicz). I krakovijani su pravokutne sheme elemenata, ali je za njih množenje definirano s pomoću množenja stupaca jednog faktora stupcima drugog faktora; to ima za posljedicu izvjesne prednosti što se tiče shematiziranog numeričkog računanja. Svojstva krakovijana slijede iz odgovarajućih svojstava matrica; no kako su manje jednostavna, za opća teoretska ispitivanja krakovijani nisu tako prikladni kao matrice.

Relacije među matricama. 1. Matrice A, B su *permutabilne* ako komutiraju, tj. ako je $AB = BA$. Polinomi (v. Polinomi u ovom članku) iste matrice (ili permutabilnih matrica) su permutabilne matrice. Ako je A permutabilno sa B i C, onda je permutabilno i s produktom BC.

2. (Kvadratne) *matrice* A, B su *slične* ako postoji matrica X takva da je $XAX^{-1} = B$. Sličnost matrica je relacija ekvivalencije, tj. ona je *refleksivna* (A je slično A), simetrična (ako je A slično B, onda je B slično A) i *tranzitivna* (ako je A slično B i B slično C, tada je A slično C).

Trag $\tau(A)$ matrice A je zbroj njenih dijagonalnih elemenata: $\tau(A) = \sum_i a_{ii}$. Za trag vrijedi: $\tau(sA) = s \cdot \tau(A)$, $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$.

Karakteristični polinom $\varphi_A(\lambda)$ (kvadratne) matrice A je polinom (v. Polinomi u ovom članku) $|\lambda E - A|$. Korijeni λ_i karakterističnog polinoma $\varphi_A(\lambda)$, tj. rješenja jednadžbe $\varphi_A(\lambda) = 0$ (v. Algebarske jednadžbe u ovom članku) zovu se *svojstvene vrijednosti* matrice A (u literaturi gdjekad i *vlastite vrijednosti*); višestruki takvi korijeni su njene višestruke svojstvene vrijednosti. Slične matrice imaju isti karakteristični polinom i iste svojstvene vrijednosti. Zbroj svojstvenih vrijednosti matrice s elementima koji su kompleksni (posebno npr. realni) brojevi jednak je tragu te matrice.

Hamilton-Cayleyev stavak: Svaka (kvadratna) matrica poništava svoj karakteristični polinom, tj. $\varphi_A(A) = 0$.

Npr. za $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ je $\varphi_A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12(\lambda^0)$;

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 = \tau(A) \cdot \varphi_A(A) = A^2 - A - 12\,E =$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Danoj matrici pridružene matrice. 1. *Transponirana matrica* A' matrice $A = [a_{ik}]$ je matrica $[a_{ki}]$, tj. transponiranjem prelaze reci u stupce i obrnuto (za kvadratne matrice transponiranje se svodi na preklapanje sheme elemenata matrice oko njene glavne dijagonale). Za transponiranje vrijede pravila

$$A'' = A, \; (A + B)' = A' + B', \; (sA)' = s \cdot A', \; (AB)' = B'A'.$$

2. Matrici $A = [a_{ik}]$ (s elementima koji su kompleksni brojevi) *konjugirana matrica* $\overline{A}$ je matrica $[\bar{a}_{ik}]$, tj. konjugiranjem prelazi svaki element matrice u njemu konjugirano kompleksni. Za konjugiranje vrijede pravila

$$\overline{\overline{A}} = A, \; \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}, \; \overline{sA} = \overline{s} \cdot \overline{A}, \; \overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \; \overline{A'} = (\overline{A})'.$$

3. Regularnoj matrici $A = [a_{ik}]$ *inverzna matrica* A^{-1} (v. naprijed Računanje s matricama, 3.) je matrica $[b_{ik}]$, gdje je $b_{ik} = \frac{1}{|A|} A_{ki}$ (A_{ki} je algebarski komplement elementa a_{ki} matrice A, v. naprijed Determinante). Za invertiranje matrica vrijede pravila

$$(A^{-1})^{-1} = A, \; (sA)^{-1} = s^{-1} \cdot A^{-1}, \; (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$
$$(A')^{-1} = (A^{-1})', \; (\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}.$$

Ako su A, B permutabilne matrice, onda su svake dvije od matrica A, A^{-1}, B, B^{-1} permutabilne.

4. (Regularnoj) matrici A *kontragredijentna matrica* A^* je matrica $\overline{A}'^{-1}$. Za kontragredijentne matrice vrijede pravila

$$A^{**} = A, \; (AB)^* = A^* B^*.$$

Specijalne kvadratne matrice. 1. Matrica je *dijagonalna* ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale (njene sheme elemenata) jednaki nuli.

1a. Dijagonalna matrica je *skalarna* ako su joj svi dijagonalni elementi jednaki. Skalarna matrica $S = [s_{ik}]$ sa $s_{ii} = s$ može se predočiti u obliku $S = sE$, pa je $SA = AS = sA$.

1b. Dijagonalna matrica, kojoj su dijagonalni elementi kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti $= 1$, zove se *fazna*.

2a. Matrica A je *simetrična* ako je $A = A'$, tj. ako se poklapa sa svojom transponiranom matricom. Zbroj simetričnih matrica je simetrična matrica. Produkt permutabilnih simetričnih matrica (posebno, potencija simetrične matrice) je simetrična matrica.

2b. Matrica A je *antisimetrična* (ili *kososimetrična*) ako je $A = -A'$.

Svaka (kvadratna) matrica A može se (jednoznačno) predočiti kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice: $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$.

3a. Matrica A je *hermitska*, ako je $A = \overline{A'}$ (tj. $A' = \overline{A}$), ako joj se dakle transponirana matrica poklapa s konjugiranom. Zbroj hermitskih matrica je hermitska matrica. Produkt permutabilnih hermitskih matrica (posebno, potencija hermitske matrice) je hermitska matrica.

3b. Matrica A je *antihermitska* ako je $A = -\overline{A'}$.

Svaka (kvadratna) matrica kojoj su elementi kompleksni brojevi može se (jednoznačno) predočiti kao zbroj jedne hermitske i jedne antihermitske matrice: $A = \frac{1}{2}(A + \overline{A'}) + \frac{1}{2}(A - \overline{A'})$.

4. Matrica A je *ortogonalna* ako je $AA' = E$ (tj. $A' = A^{-1}$), ako joj se dakle inverzna matrica poklapa s transponiranom. Inverzna matrica ortogonalne i produkt ortogonalnih matrica su ortogonalne matrice.

5. Matrica A je *unitarna* (ili *hermitski ortogonalna*) ako je $A\overline{A'} = E$ (tj. $\overline{A'} = A^{-1}$ ili $A = A^*$), ako se dakle poklapa sa sebi kontragredijentnom matricom. Inverzna matrica unitarne i produkt unitarnih matrica su unitarne matrice. Matrica $U = (E - iA)\,(E + iA)^{-1}$ je unitarna tačno onda kad je A hermitska.

6. Matrica A je *involutivna* ako je $A^2 = E$.

7. Matrica A je *idempotentna* ako je $A^2 = A$. Za idempotentnu matricu A za svaki prirodni broj n vrijedi $A^n = A$. Jedina regularna idempotentna matrica n-tog reda je E_{nn}.

SISTEMI LINEARNIH JEDNADŽBI

Jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

gdje su veličine a_i i b zadane, a x_i su nepoznate veličine (*nepoznanice*), zove se *linearna jednadžba* (sa n nepoznanica). Veličine a_i, b mogu biti realni ili kompleksni brojevi (ili općenitiji matematički objekti kakvi su npr. bili naprijed opisani kao mogući elementi matrica). Veličine b zovu se i *slobodni* ili *apsolutni članovi*.

Sistem od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica zove se sistem od n jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Sistem vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljava sve jednadžbe sistema (I) [tj. koji uvršten u lijeve strane jednadžbi (I) daje tim stranama vrijednost jednaku vrijednosti desne strane] zove se *rješenje* (sistema linearnih jednadžbi). Riješiti sistem (I) znači naći sva njegova rješenja.

Ako je determinanta sistema (tj. determinanta kojoj je shema elemenata dana koeficijentima a_{ik} nepoznanica x_k) različita od nule,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

vrijedi *Cramerovo pravilo:* Sistem linearnih jednadžbi (I) ima (tačno jedno) rješenje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koje je dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje je D_k determinanta koju dobivamo ako u shemi elemenata od D k-ti stupac zamijenimo desnim stranama danog sistema (I).

U posebnom slučaju, ako su u (I) sve desne strane b_i jednake nuli (*homogeni* sistem), a $D \neq 0$, (jedino) rješenje sistema (I) jest vrijednost 0 za sve nepoznanice (*trivijalno rješenje*).

Primjeri. 1. Za sistem

$$\begin{aligned} x + 4y - z + u &= -5 \\ -3x - y + 2z \quad &= -3 \\ 2x + 3y + 3z + u &= 0 \\ -7y \quad -3u &= 6 \end{aligned}$$

je determinanta sistema $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$, pa je rješenje dano sa

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad u = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -5 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Za sistem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ -x \quad + 4z &= 0 \\ 5x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

je $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -60 \neq 0$, pa je $x = y = z = 0$.

Opći sistem od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica (m može biti $=$ ili $\gtrless n$)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

zove se *rješiv* ako postoji (bar jedan) sistem vrijednosti (rješenje) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljava svih m gornjih jednadžbi.

Kronecker-Capellijev teorem: Sistem od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica rješiv je onda i samo onda ako matrica koeficijenata sistema i ista matrica proširena stupcem desnih strana sistema tj. matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A_b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

imaju isti rang (v. naprijed Matrice).

Rješenje sistema (II) (postoji i) jednoznačno je onda i samo onda ako je rang matrice A koeficijenata nepoznanica jednak broju n nepoznanica (broju stupaca od A).

Pri ispitivanju konkretnog sistema jednadžbi teorem se primjenjuje ovako: najprije se nađe rang r matrice A i jedna determinanta $D \neq 0$ reda r u A (tj. čija shema elemenata preostaje eventualnim brisanjem redaka i stupaca od A). Zatim se nađu vrijednosti svih determinanata D_i reda $r + 1$ čija shema elemenata preostaje eventualnim brisanjem redaka i stupaca matrice A_b (ali ne posljednjeg stupca), a kojima je D subdeterminanta. Drugim riječima, determinante D_i su one determinante koje nastaju proširenjem determinante D posljednjim stupcem matrice A_b i jednim od redaka A_b (koji ne ulazi u D). Ako su sve te determinante $D_i = 0$, sistem je rješiv; inače nema rješenja.

Primjeri. 1. Sistem

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -8 \\ 3x + y &= 10 \\ -x + 2y &= 6 \\ 5x - y &= -14 \end{aligned}$$

je rješiv, jer su matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 6 \\ -5 & -1 & -14 \end{bmatrix} \text{ istog ranga 2, budući da je}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 10 \\ -5 & -1 & -14 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Sistem

$$\begin{aligned} -x + 2y + z + u &= 4 \\ 3x \quad + 2z - 3u &= 0 \\ x + 4y + 4z - u &= 3 \end{aligned}$$

nema rješenja jer matrica

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ ima rang 2, a matrica } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{rang 3.}$$

Kronecker-Capellijev teorem daje samo kriterij za *postojanje* rješenja. Efektivno nalaženje rješenja provodi se ovako:

Neka je zadan rješiv sistem (II) s matricom A koeficijenata nepoznanica i neka je A ranga r. Neka je $D \neq 0$ jedna determinanta reda r sa shemom elemenata iz A. Iz sistema (II) odabere se onih r jednadžbi kojih koeficijenti ulaze u D; taj sistem neka bude označen sa (II'). Sva rješenja sistema (II) dobivaju se onda tako da se nepoznanicama kojih koeficijenti ne ulaze u D (njih $n-r$) pridijele vrijednosti po volji, a vrijednosti ostalih r nepoznanica odrede se onda iz (II') po Cramerovu pravilu. (U tome smislu dani sistem (II) ima ∞^{n-r} rješenja.)

Primjer. Sistem od 3 jednadžbe sa 3 nepoznanice

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= -1 \\ -3x + 7y - 11z &= 11 \end{aligned}$$

je rješiv jer su obje matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 7 & -11 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 7 & -11 & 11 \end{bmatrix}$$

ranga 2. Budući da je npr. (gornji lijevi ugao matrice koeficijenata) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, uzimaju se kao odgovarajući sistem (II') prve dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= -1, \end{aligned}$$

pa je, ako se za vrijednost od z uzme broj z_0 po volji,

$$\begin{aligned} x + y &= 3z_0 + 3 \\ 3x - 2y &= -z_0 - 1, \end{aligned}$$

odakle je $x = z_0 + 1$, $y = 2z_0 + 2$. Sva rješenja sistema (II) dana su dakle sa $x = z_0 + 1$, $y = 2z_0 + 2$, $z = z_0$, gdje je z_0 broj po volji.

Homogeni sistem linearnih jednadžbi (III) je takav sistem (II) u kojem su sve desne strane jednake nuli:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Homogeni sistem uvijek je rješiv. Trivijalno rješenje je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ako je rang r matrice A koeficijenata nepoznanica sistema (III) jednak broju nepoznanica n, trivijalno rješenje ujedno je i jedino rješenje; za $r < n$ postoje i netrivijalna rješenja. Posebno, homogeni sistem od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica ima netrivijalna rješenja onda i samo onda ako je determinanta koeficijenata nepoznanica jednaka nuli. Ako je u sistemu (III) $m < n$, sistem sigurno ima netrivijalna rješenja.

Za poseban sistem (III) u kojem je $m = n - 1$, a rang matrice A koeficijenata nepoznanica je $r = n - 1$, vrijedi: Označi li se sa D_i determinanta čija se shema elemenata dobiva brisanjem i-tog stupca od A, bit će sva rješenja sistema (III) dana sa $x_i = k\,D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gdje je k (za sve i jednak) broj po volji; tu su dakle sva rješenja sistema proporcionalna, tj. za svaki sistem rješenja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi $x_1 : x_2 : \ldots : x_n = D_1 : D_2 : \ldots : D_n$ (v. naprijed Omjeri i razmjeri).

Primjer. Sva rješenja sistema

$$\begin{aligned} 6x - y + 2z - 3u &= 0 \\ 4x + 6y - z + 2u &= 0 \\ -x + y - 3z + u &= 0 \end{aligned}$$

dana su sa $x = 2k$, $y = -3k$, $z = 0 \cdot k = 0$, $u = 5k$, gdje je k broj po volji, tj. sa $x : y : z : u = 2 : -3 : 0 : 5$.

Za svaki se sistem (II) kaže da je (III) njemu pridruženi reducirani sistem. Ako je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jedno (čvrsto odabrano) rješenje od (II), a $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ poprima vrijednosti svih rješenja reduciranog sistema (III), tada $x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n$ poprima vrijednosti svih rješenja od (II).

Za praktičko, numeričko rješavanje sistema jednadžbi bit će direktna upotreba determinanata (već u slučaju 4 jednadžbe sa 4 nepoznanice) redovno manje spretna. Tu su znatno pogodniji drugi postupci, npr. Gaussov algoritam (v. *Numeričke, grafičke i instrumentalne metode računanja*).

POLINOMI

Izraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ zove se *polinom* (u jednoj varijabli x). Koeficijenti a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, polinoma mogu biti realni ili kompleksni brojevi (ili općenitiji matematički objekti kakvi su npr. bili naprijed opisani kao mogući elementi matrica). Dva polinoma jednaka su samo ako su im svi odgovarajući koeficijenti jednaki. Eksponent n najviše potencije x^n od x kojoj je koeficijent a_n različit od nule ujedno je *stupanj* polinoma. (Polinomu 0, kojem su svi koeficijenti nule, ne pridjeljuje se stupanj.) Kraće se polinom označuje sa $f(x)$, $g(x)$ itd.

Operacije s polinomima. Polinomi se *zbrajaju* tako da se zbroje odgovarajući koeficijenti; ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $\quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \ldots b_1 x + b_0$, i $n > m$, može se $g(x)$ pisati u obliku

$b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, gdje je $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{m+1} = 0$, pa je tada $f(x) + g(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$.
Stupanj zbroja polinoma je manji ili najviše jednak većem od stupanja pribrojnika (ili je zbroj jednak 0).

Oduzimanje polinoma definira se analogno, tj. za $f(x) = \Sigma a_i x^i$, $g(x) = \Sigma b_i x^i$ je $f(x) - g(x) = \Sigma (a_i - b_i) x^i$. Za stupanj razlike vrijedi analogno što i za stupanj zbroja.

Množenje polinoma definira se ovako: Ako je

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + \ldots + b_0,$$

stavlja se

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

gdje je

$$c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \ldots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0.$$

Stupanj produkta polinoma jednak je zbroju stupanja faktora. Produkt bilo kojeg polinoma s polinomom 0 jednak je 0.

Npr. za $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x^3 - 2x$ je $f(x) + g(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, $f(x) - g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 2$, $f(x) \cdot g(x) = 4x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x$.

Za operacije s polinomima vrijedi komutativnost i asocijativnost zbrajanja i množenja i distributivnost množenja prema zbrajanju. Polinom 0 je neutralni element za zbrajanje, a 1 za množenje. Zbroj, razlika i produkt polinoma uvijek jednoznačno postoje.

Dijeljenje polinoma. Za polinom $f(x)$ kaže se da je djeljiv s polinomom $g(x)$ $\big($a za $g(x)$ da dijeli $f(x)\big)$ ako postoji takav polinom $h(x)$ da je $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Za bilo koja dva polinoma $f(x)$, $g(x)$, $(g(x) \neq 0)$, postoje jednoznačno određeni polinomi $q(x)$ i $r(x)$ takvi da se $f(x)$ može predočiti u obliku $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, i da je bilo stupanj od $r(x)$ manji nego stupanj od $g(x)$, bilo $r(x) = 0$. $f(x)$ je djeljiv sa $g(x)$ onda i samo onda ako je $r(x) = 0$.

Za zadane $f(x)$ i $g(x)$ mogu se $q(x)$ i $r(x)$ odrediti algoritmom dijeljenja s ostatkom, kako pokazuje primjer:

$\big(f(x) = 4x^5 - 5x^2 + 7,\ g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x\big)$:

$$\begin{array}{l}
(4x^5 \qquad\qquad\qquad - 5x^2 \quad + 7) : (x^3 - 3x^2 + 4x) = 4x^2 + 12x + 20 \\
\underline{\pm 4x^5 \mp 12x^4 \pm 16x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad 12x^4 - 16x^3 - 5x^2 \quad + 7 \\
\qquad\quad \underline{\pm 12x^4 \mp 36x^3 \pm 48x^2 \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 20x^3 - 53x^2 \quad + 7 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 20x^3 \mp 60x^2 \pm 80x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x^2 - 80x + 7,
\end{array}$$

dakle $q(x) = 4x^2 + 12x + 20$, $r(x) = 7x^2 - 80x + 7$. Postupak teče ovako: Najprije se pogleda koliko se puta najviši član (član s najvećim eksponentom veličine x) polinoma $g(x)$ (ovdje x^3) nalazi u najvišem članu polinoma $f(x)$ (ovdje $4x^5$); time se dobiva najviši član polinoma $q(x)$ (ovdje $4x^2$). S tako dobivenim članom pomnoži se $q(x)$ i dobiveni produkt (ovdje $4x^5 - 12x^4 + 16x^3$) oduzme od $f(x)$. Sada se ponovi postupak, s time što ulogu polinoma $f(x)$ preuzima dobivena razlika (ovdje $12x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 7$); postupak se ponavlja dok se ne dobije bilo razlika nula, bilo razlika čiji je stupanj manji od stupnja polinoma $g(x)$ (ako je n stupanj polinoma $f(x)$, a m stupanj polinoma $g(x)$, to mora nastupiti najkasnije nakon $n - m + 1$ koraka).

Najveća zajednička mjera (NZM) $M = \big(f(x), g(x)\big)$ dvaju polinoma $f(x), g(x)$ je polinom s kojim su oba dana polinoma djeljiva i koji je djeljiv sa svakim polinomom koji dijeli i $f(x)$ i $g(x)$. Za više polinoma $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, NZM $M = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ definira se analogno. NZM polinoma određena je jednoznačno s tačnošću do konstantnog faktora, tj. ako je $h(x)$ NZM nekih polinoma, onda je i $k \cdot h(x)$ (gdje je k konstanta različita od 0 po volji) NZM tih polinoma.

$M = \big(f(x), g(x)\big)$ nalazi se ovako: Najprije se nađu $q_1(x)$ i $r_1(x)$ tako da je $f(x) = g(x)\, q_1(x) + r_1(x)$ (v. naprijed), zatim $q_2(x)$ i $r_2(x)$ tako da je $g(x) = r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x)$, pa $q_3(x)$ i $r_3(x)$ tako da je $r_1(x) = r_2(x)\, q_3(x) + r_3(x)$ itd. Postupak se nastavlja dotle dok se ne dobije neki $r_{k+1}(x) = 0$ (što mora nastupiti, jer s rastućim i opada stupanj od $r_i(x)\big)$. Tada je $M = r_k(x)$. $M = \big(f(x), g(x), h(x)\big)$ nalazi se kao $\big((f(x), g(x), h(x)\big)$, tj. najprije se nađe NZM $z(x)$ od $f(x)$ i $g(x)$ a zatim NZM od $z(x)$ i $h(x)$. Analogno se postupa i s većim brojem polinoma.

Ako je $M = \big(f(x), g(x)\big) = d(x)$, postoje takvi polinomi $u(x)$ i $v(x)$ da je $f(x)\, u(x) + g(x)\, v(x) = d(x)$. Može se postići da je pri tom stupanj od $u(x)$ manji nego stupanj od $g(h)$, a stupanj od $v(x)$ manji nego stupanj od $f(x)$.

Ako je NZM dvaju polinoma $f(x), g(x)$ konstanta $k \neq 0$ (polinom stupnja 0), kaže se da su polinomi $f(x)$, $g(x)$ *relativno prosti*. Dva polinoma $f(x)$ i $g(x)$ su relativno prosta onda i samo onda ako postoje polinomi $u(x)$ i $v(x)$ takvi da je $f(x)\, u(x) + g(x)\, v(x) = 1$.

Polinom $f(x)$ je *reducibilan* (u nekom području brojeva iz kojeg su njegovi koeficijenti, npr. realnih ili kompleksnih brojeva), ako se može predočiti u obliku $f(x) = g(x)\, h(x)$ tako da su $g(x)$ i $h(x)$ polinomi (s koeficijentima iz tog područja brojeva) i da stupnjevi od $g(x)$ i $h(x)$ budu manji nego stupanj od $f(x)$ (tj. tako da ni $g(x)$ ni $h(x)$ nije polinom stupnja 0). Ako to nije moguće, polinom je (u tom području brojeva) *ireducibilan.*

Polinom ireducibilan u nekom području brojeva može biti reducibilan u nekom proširenom području brojeva. Na pr. $x^2 + 1$ je ireducibilan u području realnih brojeva, ali je reducibilan u području kompleksnih brojeva, jer je $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$; polinom $x^4 + 1$ je ireducibilan u području racionalnih brojeva, ali je reducibilan u području realnih brojeva, jer je $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

Svaki polinom s realnim koeficijentima (stupnja $\geqq 1$) može se (jednoznačno do konstantnih faktora) predočiti kao produkt linearnih i (u području realnih brojeva ireducibilnih) kvadratnih faktora (tj. polinoma stupanja 1 i 2 s realnim koeficijentima). Svaki polinom s kompleksnim koeficijentima (stupnja $\geqq 1$) može se (jednoznačno do konstantnih faktora) predočiti kao produkt linearnih faktora (polinoma stupnja 1) s kompleksnim koeficijentima.

Korijeni polinoma. Ako se namjesto varijable x u polinomu $f(x)$ uvrsti neka vrijednost (broj) x_0, poprimit će polinom vrijednost $f(x_0)$. Ako je $f_1(x) + f_2(x) = s(x)$, $f_1(x) - f_2(x) = d(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x) = p(x)$, bit će $f_1(x_0) + f_2(x_0) = s(x_0)$, $f_1(x_0) - f_2(x_0) = d(x_0)$, $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) = p(x_0)$, tj. vrijednost zbroja, razlike i produkta polinoma (za neku vrijednost x_0 varijable x) jednaka je (respektivno) zbroju, razlici i produktu vrijednosti polinoma (za tu vrijednost x_0 varijable x).

Vrijednost x_0 varijable x, za koju je $f(x_0) = 0$, zove se *korijen* ili *nultačka* polinoma $f(x)$. Ako je x_0 korijen polinoma $f(x)$, $f(x)$ je djeljiv s polinomom stupnja 1 $x - x_0$. Obrnuto, ako je $f(x)$ djeljiv sa $x - x_0$, x_0 je korijen polinoma $f(x)$. Ako je x_0 korijen polinoma $f(x)$ a nije korijen kvocijenta $f(x) : (x - x_0)$, zove se x_0 *jednostruki korijen* ili *jednostruka nultačka* polinoma $f(x)$; inače se govori o *višestrukom korijenu* ili *višestrukoj nultački*, i to: ako je $n - 1$ najveći prirodni broj takav da je x_0 korijen polinoma $f(x) : (x - x_0)^{n-1}$, x_0 je n-struki korijen polinoma $f(x)$.

Osnovni teorem algebre: Svaki polinom stupnja $n > 0$ s kompleksnim (posebno, npr. realnim) koeficijentima ima u području kompleksnih brojeva korijen. Ako korijene brojimo po njihovoj višestrukosti, ima polinom n-tog stupnja s kompleksnim koeficijentima tačno n korijena.

Ako je $x_0 = a + bi$ kompleksni korijen polinoma $f(x)$ s realnim koeficijentima, onda je i konjugirano kompleksni broj $a - b$ i korijen polinoma $f(x)$.

Polinom s realnim koeficijentima neparnog stupnja ima bar jedan realni korijen.

Neka je $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima u kojem je koeficijent najvišeg člana jednak 1. Korijeni polinoma $f(x)$ neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (eventualni m-terostruki korijen uzet je m puta). Tada vrijede *Vietine formule*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = a_{n-2},$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_0,$$

tj. ako se tvore sve kombinacije r-tog razreda (v. naprijed Kombinacije) od n korijena i u svakoj pomnože članovi pa zbroje tako dobiveni produkti, dobiveni zbroj jednak je $(-1)^r$ puta koeficijent a_{n-r} polinoma.

Kvocijenti polinoma mogu se tvoriti od polinoma analogno kao što se od cijelih brojeva tvore racionalni (v. naprijed Racionalni brojevi). Dva takva kvocijenta $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ $(g(x) \neq 0$, $g_1(x) \neq 0)$ jednaka su onda i samo onda ako je $f(x)\, g_1(x) = g(x) f_1(x)$. Za kvocijente polinoma definira se zbroj i produkt formalno isto onako kao i za racionalne brojeve. Vrijede također analogna pravila za računanje.

Svaki kvocijent polinoma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ jednak je nekom kvocijentu polinoma $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ u kojem su brojnik i nazivnik relativno prosti.

Kvocijent polinoma je *pravi* ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Svaki kvocijent polinoma $\frac{f(x)}{g(x)}$ može se predočiti kao zbroj polinoma $h(x)$ (kvocijenta polinoma s nazivnikom 1) i pravog kvocijenta polinoma $\frac{r(x)}{g(x)}$; $h(x)$ i $r(x)$ nalaze se iz predočenja $f(x) = g(x)\,h(x) + r(x)$ kako je naprijed opisano.

Svaki pravi kvocijent polinoma $\frac{f(x)}{g(x)}$, gdje su koeficijenti polinoma $f(x)$, $g(x)$ realni brojevi, može se *rastaviti na parcijalne razlomke*, tj. može se predočiti u obliku zbroja kvocijenata polinoma koji su bilo takvi da im je brojnik konstanta a nazivnik potencija linearnog polinoma, bilo takvi da im je brojnik linearni polinom a nazivnik potencija (u području realnih brojeva ireducibilnog) kvadratnog polinoma. (Pobliže o tome v. *Integralni račun*, Integracija razlomljene racionalne funkcije.)

Polinomi od 2 varijable *x*, *y su izrazi oblika* $\sum a_{ik}\, x^i y^k$. Dva takva polinoma jednaka su samo ako su im odgovarajući koeficijenti a_{ik} jednaki. Zbrajanje i množenje definira se na prirodan način, kao i za polinome jedne varijable, tako da ostanu sačuvani zakoni komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. Polinom od 2 varijable može se srediti po potencijama jedne ili druge varijable; time on postaje polinom 1 varijable, kojemu su koeficijenti polinomi druge varijable.

Npr. $3x^3y^2 + 5x^2y - 3x^2y^2 + 4xy^2 - 2xy + 3 = (3x^3 - 3x^2 + 4x)y^2 + (5x^2 - 2x)y + 3 = (3y^2 + 5y)\,x^3 - 3y^2 \cdot x^2 + (4y^2 - 2y)\,x + 3$.

Od polinoma dviju varijabli mogu se tvoriti *kvocijenti polinoma dviju varijabli* analogno kao od polinoma jedne varijable. Na analogni način uvode se i polinomi i kvocijenti polinoma više varijabla.

Simetrični polinomi. Polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od *n* varijabli zove se *simetričan* ako se ne mijenja kako god permutirali tih *n* varijabla, tj. ako ostane jednak bez obzira na to kakvu permutaciju $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pn} \end{pmatrix}$ izvršimo s varijablama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Sve su lijeve strane Vietinih formula simetrični polinomi u $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tih *n* simetričnih polinoma zovu se *elementarni simetrični polinomi* u $x_1, \ldots, x_n$. Vrijedi stavak: Svaki simetrični polinom u $x_1, \ldots, x_n$ može se (jednoznačno) predočiti u obliku (s koeficijentima iz područja brojeva iz kojih su i koeficijenti danog simetričnog polinoma).

Primjeri. Označi li se $x_1 + x_2 + x_3$ sa S_1, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ sa S_2, $x_1x_2x_3$ sa S_3 (S_1, S_2, S_3, su svi elementarni simetrični polinomi od 3 varijable x_1, x_2, x_3), tada je npr.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2,$$
$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 = S_1S_2 - 3S,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3.$$

ALGEBARSKE JEDNADŽBE

Algebarsku jednadžbu dobivamo ako vrijednost nekog polinoma $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_o$ (v. naprijed Polinomi) izjednačimo s nulom. Algebarske jednadžbe su dakle oblika

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o = 0.$$

Varijabla polinoma je *nepoznanica* jednadžbe. Riješiti algebarsku jednadžbu znači naći sve one vrijednosti x_i nepoznanice x koje zadovoljavaju tu jednadžbu, tj. za koje njena lijeva strana poprima vrijednost $f(x_i) = 0$. x_i su tada *rješenja* (ili *korijeni*) algebarske jednadžbe; to su dakle korijeni polinoma $f(x)$. Rješenje jednadžbe je jednostruko ili višestruko prema tome da li je to jednostruki ili višestruki korijen njene lijeve strane.

Sistem algebarskih jednadžbi dobivamo ako vrijednosti nekoliko polinoma (jedne ili više varijabla) izjednačimo s nulom. *Rješenje* sistema algebarskih jednadžbi je svaki takav slog vrijednosti varijabla što ulaze u dane polinome (nepoznanica sistema) koji zadovoljava sve jednadžbe sistema, tj. za koji lijeva strana svake jednadžbe sistema poprima vrijednost 0. (U posebnom slučaju, kad su sve jednadžbe 1. stupnja, radi se o sistemu linearnih jednadžbi; o tome v. naprijed.)

Ako je dana algebarska jednadžba $f(x) = a_nx^n + \ldots a_0 = 0$ s *cjelobrojnim* koeficijentima a_i potencija nepoznanice, mogu se oni njeni korijeni koji su *racionalni* brojevi (ako takvih ima) naći ovim postupkom; Pogleda se kojim je sve cijelim brojevima b_i djeljiv koeficijent a_0 i kojim je sve cijelim brojevima c_j djeljiv koeficijent a_n. Tada su sva racionalna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ sadržana među razlomcima $\frac{b_i}{c_j}$ u kojima su b_i i c_j relativno prosti; da li je pojedini takav racionalni broj zaista korijen jednadžbe $f(x) = 0$ provjerava se neposrednim uvrštavanjem u $f(x)$.

Primjer. Dana je algebarska jednadžba $9x^4 + 39x^3 - 27x^2 + 13x - 10 = 0$. Mjere od 9 su $\pm 1, \pm 3, \pm 9$, a mjere od -10 su $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Treba dakle ispitati razlomke $\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}; \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}; \pm 5, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{9}; \pm 10, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{10}{9}$. Provjeravanjem nalazimo da zaista zadovoljavaju $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -5$.

Razmatrat će se potanje samo neke algebarske jednadžbe i neki sistemi algebarskih jednadžbi s kompleksnim (ili, posebno, realnim) koeficijentima (iako neki od rezultata vrijede i u općenitijim slučajevima).

Kvadratna jednadžba je oblika $a x^2 + b x + c = 0$, $a \neq 0$. Rješenja su za realne a, b, c dana sa

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right).$$

Izraz pod znakom korijena, tj. $D = b^2 - 4ac$, zove se *diskriminanta* kvadratne jednadžbe. Ako je diskriminanta pozitivna, jednadžba ima 2 različita realna rješenja; uz diskriminantu $= 0$ jednadžba ima jedno (dvostruko) realno rješenje: uz negativnu diskriminantu, dva konjugirana kompleksna rješenja.

Ako su koeficijenti a, b, c kompleksni brojevi, bit će rješenja dana sa $x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$; uz diskriminantu različitu od 0 dobit će se 2 različita kompleksna rješenja, a uz $D = 0$ je $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Dvije vrijednosti od $\sqrt{b^2 - 4ac}$ nalaze se pomoću Moivreove formule (v. naprijed Potenciranje i radiciranje kompleksnih brojeva) ili postupkom kakav je opisan dalje ispred primjera 4.

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ zadovoljavaju jednakosti $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$ (v. Vietine formule); također je $a x^2 + b c + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

U posebnom slučaju, kad je $c = 0$, kvadratna jednadžba raspada se u dvije linearne i ima rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Primjeri. 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$. $D = 1 > 0$; $x_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25 - 24})$; $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. 2) $4x^2 + 12x + 9 = 0$. $D = 0$; $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$. 3) $x^2 - 10x + 29 = 0$. $D = -16 < 0$; $x_{1,2} = 5 \pm 2\,\mathrm{i}$.

Za slučaj kompleksnih koeficijenata, kad je i D kompleksni broj $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$ ($\beta \neq 0$), može se $\sqrt{D} = \sqrt{\alpha + \beta\,\mathrm{i}} = W = \gamma + \delta\,\mathrm{i}$ umjesto po Moivreovoj formuli računati i prema

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\,,\quad \delta_{1,2} = \frac{\beta}{2\gamma_{1,2}}\left(= \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right);$$

tada su vrijednosti od $\sqrt{D}$: $w_1 = \gamma_1 + \delta_1\,\mathrm{i}$, $w_2 = -w_1 = \gamma_2 + \delta_2\,\mathrm{i}$.

4. $x^2 + (1 + 4\,\mathrm{i})\,x + (-7 + 23\,\mathrm{i}) = 0$. $x_1 = 3 - 5\,\mathrm{i}$, $x_2 = -4 + \mathrm{i}$.

Nejednadžba oblika $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$ s realnim koeficijentima zove se *kvadratna nejednadžba*. Njena rješenja su svi oni realni x za koje je vrijednost lijeve strane nejednadžbe pozitivna. Označe li se rješenja jednadžbe $a x^2 + b x + c = 0$ sa x_1, x_2, vrijedi za rješenja x zadane nejednadžbe:

	$a > 0$	$a < 0$
$x_1 \leq x_2$; x_1, x_2 realni	$x < x_1$ ili $x_2 < x$	$x_1 < x < x_2$
x_1, x_2 nisu realni	$-\infty < x < +\infty$	nema rješenja

Nejednadžba $a x^2 + bx + c < 0$ ekvivalentna je s nejednadžbom $-a x^2 - b x - c > 0$.

Kubna jednadžba je oblika $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$. Koeficijenti a, b, c, d neka su kompleksni brojevi. Supstitucijom $x = y - \frac{b}{3a}$ jednadžba se svodi na (*skraćeni*) oblik

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdje se $p = \frac{1}{3a^2}(3ac - b^2)$, $q = \frac{1}{27a^3}(2b^3 - 9abc + 27a^2 d)$.

Rješenja y_i te jednadžbe nalaze se prema *Cardanovim formulama*:

$$y_1 = \alpha + \beta, \; y_2 = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2, \; y_3 = \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon,$$

gdje je

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \; \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,i,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \; \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \left(= -\frac{p}{3\alpha}\right).$$

Budući da treći korijen ima tri kompleksne vrijednosti, postoje po 3 mogućnosti za odabiranje vrijednosti α i β; one međutim nisu neovisne, nego treba β — uz odabrani α — odabrati tako da bude $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$. Rješenja x (zadane) neskraćene kubne jednadžbe dobivaju se u obliku $x_i = y_i - \frac{b}{3a}$.

Ako su koeficijenti skraćene kubne jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ realni brojevi, vrijedi ova trihotomija:

a) Ako je *diskriminanta* $D = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$ *skraćene kubne jednadžbe* negativna, jednadžba ima jedno realno i dva konjugirano kompleksna rješenja. Uzmemo li za α i β realne vrijednosti trećih korijena, dano je realno rješenje sa $x_1 = \alpha + \beta$, a konjugirano kompleksna rješenja dana su sa $x_{2,3} = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{3}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,i$.

b) Ako je diskriminanta jednaka 0, jednadžba ima 3 realna rješenja, od kojih je jedno dvostruko: $x_1 = 2\alpha$, $x_{2,3} = -\alpha$, gdje je α realna vrijednost od $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$.

c) Ako je diskriminanta pozitivna, jednadžba ima 3 (različita) realna rješenja. Praktičko rješavanje takve kubne jednadžbe po Cardanovoj formuli nije zgodno, jer za nalaženje realnih rješenja treba računati kompleksne vrijednosti trećeg korijena iz kompleksnog broja (npr. po Moivreovoj formuli). U ovom slučaju ne može se uopće rješenje opće kubne jednadžbe dobiti u obliku korijena iz realnih izraza algebarski sagrađenih od koeficijenata jednadžbe; slučaj $D > 0$ zove se odatle *casus irreducibilis*.

Za približno numeričko rješavanje kubne jednadžbe v. *Numeričke, grafičke i instrumentalne metode računanja.*

Primjeri. 1. $x^3 + 6x^2 - 12x - 112 = 0$. Supstitucijom $x = y - 2$ izlazi $y^3 - 24y - 72 = 0$. $D = -(1296 - 512) = -784$, $\sqrt{-D} = 28$. $y_1 = \sqrt[3]{36 + 28} + \sqrt[3]{36 - 28} = 4 + 2 = 6$, $y_{2,3} = -3 \pm \sqrt{3}\,i$. Rješenja zadane kubne jednadžbe su $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -5 \pm \sqrt{3}\,i$.

2. $4x^3 - 3x + 1 = 0$. $p = -\frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$; $D = 0$. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}$.

Nejednadžba oblika $ax^3 + bx^2 + cx + d > 0$, $a \neq 0$, s realnim koeficijentima zove se *kubna nejednadžba*. Njena rješenja x (koja lijevoj strani nejednadžbe daju pozitivnu vrijednost) nalaze se ovako (x_1, x_2, x_3 su rješenja kubne jednadžbe $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$):

	$a > 0$	$a < 0$
$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$; x_1, x_2, x_3 realni	$x_1 < x < x_2$ ili $x_3 < x$	$x < x_1$ ili $x_2 < x < x_3$
x_1 realan; x_2, x_3 nisu realni	$x_1 < x$	$x < x_1$

Nejednadžba $ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$ ekvivalentna je sa $-ax^3 - bx^2 - cx - d > 0$.

Bikvadratna jednadžba ili *jednadžba 4. stupnja* je oblika $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$. Koeficijenti $a, \ldots, e$ neka su kompleksni brojevi. Supstitucijom $x = y - \frac{b}{4a}$ jednadžba se svodi na (skraćeni) oblik $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, gdje su p, q i r izrazi u a, b, c, d, e. Skraćena jednadžba rješava se (*Ferrari*) ovako: Uvođenjem pomoćnog parametra η jednadžba se napiše u obliku

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \eta\right)^2 - \left[2\eta y^2 - qy + \left(\eta^2 + p\eta - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0.$$

Zatim se nađe takva vrijednost η da izraz u uglatoj zagradi bude puni kvadrat, tj. da diskriminanta tog izraza, shvaćenog kao kvadratnog izraza u y, bude jednaka 0:

$$q^2 - 4 \cdot 2\eta\left(\eta^2 + p\eta - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0.$$

Neka je η_0 jedno od rješenja ove kubne jednadžbe u η. Gornja skraćena jednadžba 4. stupnja raspada se tada na dvije kvadratne jednadžbe

$$y^2 - \sqrt{2\eta_0}\,y + \left(\frac{p}{2} + \eta_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\eta_0}}\right) = 0,$$

$$y^2 + \sqrt{2\eta_0}\,y + \left(\frac{p}{2} + \eta_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\eta_0}}\right) = 0;$$

2 puta po 2 rješenja ovih jednadžbi daju 4 rješenja y_i skraćene jednadžbe 4. stupnja, odakle se oduzimanjem $\frac{b}{4a}$ nalaze 4 rješenja x_i zadane bikvadratne jednadžbe.

Praktičko rješavanje jednadžbi 4. stupnja opisanim postupkom redovno nije zgodno; za praksu će najčešće biti prikladnija neka aproksimativna metoda rješavanja (v. *Numeričke, grafičke i instrumentalne metode računanja*).

Jednadžbe 5. i višeg stupnja ne mogu se u općem slučaju riješiti tako da tražena vrijednost nepoznanice bude predočena s pomoću izraza sastavljenog od koeficijenata jednadžbe i operacija zbrajanja oduzimanja, množenja, dijeljenja i korijenovanja (s cjelobrojnim eksponentom korijena). (Za neke specijalne slučajeve v. dalje Binomne, trinomne i recipročne jednadžbe.) Za praktičko rješavanje v. *Numeričke, grafičke i instrumentalne metode računanja.*

Binomne jednadžbe su oblika $ax^n + b = 0$, $a \neq 0$, n prirodni broj, a, b kompleksni brojevi. Sva rješenja (njih n) među sobom su različita i dana sa $x_{1,2\ldots n} = \sqrt[n]{\frac{b}{-a}}$ (osim za $b = 0$, kad postoji n-terostruko rješenje $x = 0$) i nalaze se s pomoću Moivreove formule (v. naprijed Potenciranje i radiciranje kompleksnih brojeva).

U pojedinim slučajevima jednostavnije je binomnu jednadžbu rješavati tako da se njena lijeva strana predoči u obliku produkta polinomâ nižeg stupnja, čime se dana jednadžba raspada na dvije ili više jednadžbi nižeg stupnja.

Primjeri. 1. $8x^3 + 27 = 0$. Jednadžba se može pisati u obliku (v. naprijed Potencije) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) = 0$, pa bilo koji od faktora lijeve strane mora biti jednak 0, što daje rješenja $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_{2,3} = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{27}\,i)$.

2. $x^4 + 1 = 0$ može se pisati u obliku $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = 0$, pa su rješenja $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$, $x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$.

Trinomne jednadžbe su oblika $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$, n prirodni broj, a, b, c kompleksni brojevi, a svode se supstitucijom $x^n = y$ na kvadratnu jednadžbu $ay^2 + by + c = 0$.

Primjer. Bikvadratna jednadžba $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ svodi se sa $x^2 = y$ na $y^2 - 5y - 36 = 0$, odakle je $y = 9$, $y = -4$, pa su rješenja dane jednadžbe $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2i$.

Recipročne ili simetrične jednadžbe su oblika $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$. Koeficijenti su kompleksni brojevi u kojima je bilo za sve $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_i = a_{n-i}$, bilo za sve i $a_i = -a_{n-i}$. Ako je x_0 rješenje recipročne jednadžbe, onda je i $\frac{1}{x_0}$ rješenje iste jednadžbe.

a) *Kubna recipročna jednadžba* je oblika $ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$. Rješava se tako da se lijeva strana napiše u obliku $(x \pm 1)[a(x^2 \mp x + 1) + bx] = 0$, čime se kubna jednadžba raspada na linearnu $x \pm 1 = 0$ i kvadratnu $ax^2 + (b \mp a)x + a = 0$.

b) *Recipročna jednadžba 4. stupnja* je oblika $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ili oblika $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$. Prvi se rješava tako da se lijeva strana napiše u obliku $(x - 1) \cdot [a(x + 1)(x^2 + 1) + bx(x + 1)] = 0$, čime se dana jednadžba raspada na jednadžbe $x - 1 = 0$, $ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b)x + a = 0$; druga je kubna recipročna jednadžba i rješava se prema a). Drugi oblik recipročne jednadžbe 4. stupnja rješava se tako da se stavi $x + \frac{1}{x} = y$, što daje $ay^2 + by + (c - 2a) = 0$; rješenja $y_{1,2}$ te kvadratne jednadžbe uvrste se redom u kvadratnu jednadžbu $x^2 - xy + 1 = 0$, odakle se dobivaju 4 rješenja za dane recipročne jednadžbe.

c) *Recipročna jednadžba 5. stupnja* je oblika $ax^5 + bx^4 + cx^3 \pm \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0$. Rješava se tako da se lijeva strana napiše u obliku $(x \pm 1)[a(x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1) + bx(x^2 \mp x + 1) + cx^2] = 0$, čime se zadana recipročna jednadžba raspada na jednadžbe $x \pm 1 = 0$ i $ax^4 + (b \mp a)x^3 + (a \mp b + c)x^2 + (b \mp a)x + a = 0$; druga je recipročna jednadžba 4. stupnja, pa se rješava prema b).

Sistem kvadratne i linearne jednadžbe sa 2 nepoznanice $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, $gx + hy + k = 0$, koeficijenti kompleksni brojevi, rješava se tako da se iz linearne jednadžbe jedna nepoznanica izrazi s pomoću druge, uvrsti u kvadratnu, i riješi dobivena kvadratna jednadžba s jednom nepoznanicom; odgovarajuća vrijednost druge nepoznanice dobije se iz linearne jednadžbe.

Sistem od dvije kvadratne jednadžbe sa 2 nepoznanice rješava se tako da se iz jedne jednadžbe jedna nepoznanica izrazi s pomoću druge i uvrsti u drugu jednadžbu; time se zadani sistem svodi na rješavanje jedne jednadžbe 4. stupnja s jednom nepoznanicom.

Sistem od dvije homogene kvadratne jednadžbe sa 2 nepoznanice je oblika $a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1 = 0$, $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2 = 0$. Rješava se tako da se najprije uvede pomoćna nepoznanica z sa $y = zx$, što za z daje kvadratnu jednadžbu $d_2(a_1 + b_1z + c_1z^2) - d_1(a_2 + b_2z + c_2z^2) = 0$. Rješenja z_1, z_2 uvrste se redom u $x^2(a_1 + b_1z + c_1z^2) + d_1 = 0$ ili u $x^2(a_2 + b_2z + c_2z^2) + d_2 = 0$; odatle se dobivaju 4 rješenja za nepoznanicu x. Odgovarajuće vrijednosti nepoznanice y nalaze se tada iz jedne od jednadžbi zadanog sistema.

LIT. Od novijih prikaza klasične algebre: *O. Perron*, Algebra, Berlin 1951. — *А. Г. Курош*, Курс высшей алгебры, Moskva 1956. — Za modernu algebru: *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra. Berlin 1937. — *G. Birkhoff* i *S. Mac Lane*, A survey of modern algebra, New York 1958. — *N. Jacobson*, Lectures in abstract algebra, New York 1951/3. — Najmodernija djela: *N. Bourbaki*, Algèbre, Paris 1948/55; *C. Chevalley*, Fundamental concepts of algebra, New York 1956.

V. De.

ARMIRANI BETON, kombinacija dva materijala, betona i čelika, kojom se postiže povećanje moći nošenja betonskih konstruktivnih elemenata ili konstrukcija.

Ta su dva materijala po svojim osobinama sasvim različita: beton je složen od agregata, cementa i vode, elastičan samo za kratkotrajna opterećenja, a čelik je jedinstven materijal s određenim fizičkim osobinama, elastičan u određenim granicama za sve vrste naprezanja. Saradnju ta dva tako različita materijala omogućuju ove njihove osobine: 1) beton i čelik imaju gotovo isti koeficijent termičkog izduženja, 2) beton se pri stvrdnjavanju skuplja i time izaziva izvestan pritisak po obimu čeličnih šipki kojima je armiran, pa se tako postiže prisnost dodira između betona i čelika, 3) beton prianja u izvesnoj meri za čelik, čime se postiže prenošenje napona na čelik i obratno, 4) beton, svojom alkalnom reakcijom i ne dopuštajući pristup vazduha, zaštićuje čelik od rđanja.

PODLOGE ZA PRORAČUNAVANJE

Naponi i deformacije. Spoljni uticaji koji naprežu neki konstruktivni element izazivaju u njemu unutrašnje sile. Te su unutrašnje sile po preseku raspoređene i po nekom određenom zakonu. Kao karakteristično unutrašnje opterećenje uzima se opterećenje na jedinicu površine i naziva se *napon*. Naponi su *normalni* ili *smičući*, prema tome da li su upravni na presek ili padaju u sam presek. Normalni naponi su ili *zatezanja* ili *pritisci*. Smičući se naponi razlikuju prema pravcima njihova delovanja. U armiranom betonu pritisak se obično označava kao pozitivan napon, a zatezanje kao negativan; to je, inače, stvar konvencije. Prema izabranom koordinatnom sistemu i znacima normalnih napona dobijaju se znaci i za smičuće napone.

Svaki napon izaziva deformaciju materijala. Zatezanja izazivaju izduženja — dilatacije; pritisci izazivaju skraćenja — negativne dilatacije. Smičući naponi izazivaju relativna pomeranja dva uzastopna preseka. Kad se ovo relativno pomeranje podeli sa dužinom između posmatranih preseka, dobija se ugao deformacije, odnosno smicanje posmatranih preseka. Često se čuje u praksi za smičući napon skraćen izraz *smicanje*, kao što se za normalne napone govori kratko: *pritisak* i *zatezanje*.

Dijagrami napona i deformacija. Algebarski izraz za napon jest

$$\sigma = \frac{P}{F}. \qquad (1)$$

P je sila, izražena u kilopondima ili u megapondima, F je površina preseka na koji deluje sila P, izražena u kvadratnim centimetrima ili metrima. Prema tome se za napon σ piše da je u kp/cm² ili Mp/m². Svaki napon prati odgovarajuća deformacija. Prizmatičan štap dužine l skraćuje se ili izdužuje pod delovanjem napona pritiska, odnosno zatezanja σ za dužinu Δl. Ukupna je dužina posle naprezanja štapa $l + \Delta l$. Odnos $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ je *specifična deformacija*, ili, skraćeno, samo deformacija. Δl se naziva *izduženje* ili *skraćenje* štapa, prema tome da li su naponi zatezanja ili pritisci. Veza između napona i deformacija utvrđena je opažanjima i izražena *Hookeovim zakonom* proporcionalnosti između ovih veličina

$$\varepsilon = \alpha\sigma = \frac{1}{E}\sigma. \qquad (2)$$

Young je konstantu proporcionalnosti izrazio formulom $\alpha = \frac{1}{E}$. Konstanta E naziva se *modul elastičnosti*. Ona ima dimenzije napona i predstavlja idealizovani napon koji bi udvostručio osnovnu dužinu prizmatičkog štapa. To se vidi iz (2), jer je $\varepsilon = 1$ kada je $\sigma = E$, a $\varepsilon = 1$ daje $\Delta l = l$. Pritisnut štap bi pod dejstvom napona $\sigma = E$ trebalo da izgubi dužinu. To je, prirodno, samo ilustracija.

Presek napregnutoga prizmatičkog štapa menja svoje dimenzije pod dejstvom zatezanja, odnosno pritiska; presek se »skuplja«, odnosno »bubri«. Ovu je pojavu definisao Poisson: poprečna kontrakcija pod dejstvom zatezanja, odnosno poprečna dilatacija pod dejstvom pritiska, iznosi m-ti deo od podužnih deformacija. Tako je $\varepsilon_p = \frac{\varepsilon}{m}$. Uobičajenija je oznaka $\mu = \frac{1}{m}$. μ se naziva Poissonov koeficijent, a m Poissonov broj.

Na sl. 1a prikazan je dijagram σ, ε za čelik. Dijagram je u oblasti važenja proporcionalnosti (Hookeova zakona) prava linija, od O do P. Tačka P naziva se *granica proporcionalnosti*. Od tačke P do tačke E dijagram je krivolinijski, ali se prilikom rasterećenja ovaj krivolinijski odnos zadržava. Tačka E bi trebalo da se nalazi na onom graničnom mestu gde bi, posle rasterećenja, krivolinijski deo dijagrama bio napušten i kazaljka koja u hidrauličkim presama za oglede crta dijagram σ, ε po pravoj se vratila na neki drugi početak O', ali tako da je $\overline{OO'} = 0$. Ovakva fizički definisana granica elastičnosti tehnički je teško odredljiva. Zato je izabrana za granicu elastičnosti ona tačka kod koje veličina $\overline{OO'} = \varepsilon_E$, plastična deformacija, iznosi 0,2%. Posle tačke E povratne su deformacije pravolinijske i paralelne sa OP. Deformacija ε_{pl} je plastična i ona ostaje i posle rasterećenja. Šipka je posle rasterećenja duga $l_q = l + \Delta l = l(1 + \varepsilon_{pl})$. Da bi se dobio utisak o veličini Δl, uzima se da je $\varepsilon_{pl} = 0{,}08$, pa je $l_q = 1{,}08\, l$. Za tačku E dužina iznosi $l_{qE} = 1{,}002\, l$.

Modul elastičnosti dat je po Youngu sa $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$. U elastičnom delu on je prikazan sa tg $\psi_0 = E$.

Deformacija između A i A' zove se *zona razvlačenja*. Posle tačke A' nastaje *zona očvršćavanja*, jer materijal pokazuje povećanje čvrstoće sa rašćenjem deformacija. Teme krive L označava početak loma epruvete; konačan prekid je kod B. Od L do B kriva pada;