

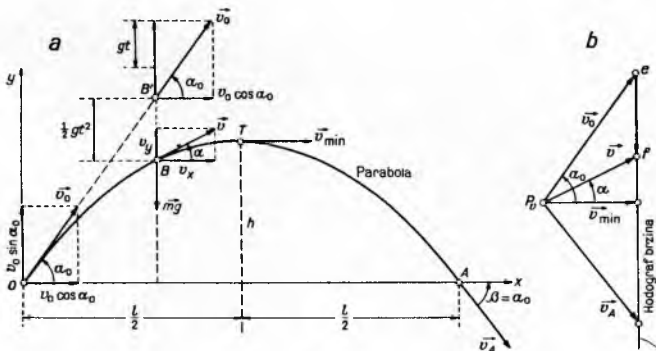
Vanjska balistika

Vanjska balistika bavi se gibanjem projektila od njegovog izlaska iz cijevi vatrenog oružja do udara o prepreku ili do rasprsnuća u uzduhu. Projektil se u tom slučaju giba kroz uzduh pod djelovanjem sile teže i mnogobrojnih složenih aerodinamičkih i drugih utjecaja.

Kad bi Zemlja mirovala i kad ne bi imala svoju atmosferu, putanje takvih projektila mogle bi se matematički lako izraziti. Ali na projektil bačen pod polaznim kutom α_0 djeluju u stvari različite poremećajne sile (otpor uzduha, sila vjetrova, Coriolisova sila itd.). Njihov intenzitet zavisi od brzine, oblika i mase projektila, od gustoće uzduha, od uzdušnih struja u atmosferi i od dužine putanje. Ti poremećajni efekti znatno kompliciraju proračun putanje.

Opći problem vanjske balistike klasičnih projektila sastoji se u iznalaženju zakona po kojemu se kroz otpornu sredinu promjenljive gustoće giba tijelo konstantne mase koje istovremeno brzo rotira. Taj se problem u općem slučaju svodi na integriranje sistema od šest simultanih diferencijalnih jednadžbi: triju jednadžbi gibanja težišta projektila i triju jednadžbi gibanja projektila oko svoga težišta. Proučavanje gibanja projektila u takvom obliku skopčano je s velikim teškoćama. Budući da je za rješavanje većine praktičnih zadataka dovoljno ako se zna translatorno gibanje projektila, proučava se najprije gibanje težišta projektila ne uzimajući u obzir njegovu rotaciju. Pri tom se pretpostavlja da se os projektila poklapa s tangentom na putanju težišta i, osim toga, uzimaju se normalni aerološki i geofizički uvjeti (nepomična atmosfera, Zemlja ravna i nepokretna, ubrzanje sile teže konstantno po pravcu i zavisno samo od visine). Integriranje jednadžbi gibanja težišta projektila uz navedene pretpostavke predstavlja osnovni zadatak klasične balistike, kao jedne od najstarijih grana primijenjene mehanike. Osim toga, zadatak je vanjske balistike da odredi osnovne parametre projektila koji treba projektirati (početnu brzinu, domet, visinu tjemena putanje itd.), zatim sastavljanje tablica gađanja, koje sadrže podatke o elementima putanje projektila, uzimajući u obzir odstupanje meteoroloških i balističkih uvjeta gađanja od normalnih.

Gibanje težišta projektila u praznom prostoru (parabolna teorija). Projektil mase m izbačen je početnom brzinom v_0 pod polaznim kutom α_0 (kutom elevacije) u praznom prostoru (vakuumu). Pretpostavlja se da se projektil giba u blizini Zemljine površine i da je, prema tome, Zemljina gravitacija konstantna. Na težište projektila djeluje, dakle, samo sila teža $G = mg$ (sl. 1).



Sl. 1

Iz razloga simetrije putanja se nalazi u vertikalnoj ravnini kroz v_0 , koja se naziva ravninom gađanja. Početak koordinatnog sistema Oxy predstavlja početni položaj projektila. Pri tom se ne uzima u obzir zakrivljenost Zemljine površine niti konvergencija vertikalna (os y je vertikalna, a pravac osi x je takav da putanja projektila leži u ravnini xy). Kad na projektil ne bi djelovala Zemljina gravitacija, njegovo bi se težište gibalo jednoliko i pravocrtno, tj. gibajući se konstantnom brzinom v_0 prevalilo bi put $OB' = v_0 t$. Zbog djelovanja sile teže smanjuje se u trenutku t vertikalna komponenta $v_0 \sin \alpha_0$ početne brzine za veličinu gt , dok horizontalna komponenta $v_0 \cos \alpha_0$ ostaje nepromijenjena. Prema tome, težište projektila u trenutku t bit će u tački B koja se nalazi na

udaljenosti $\frac{1}{2} g t^2$ ispod tačke B' . U tom položaju vektor brzine \vec{v} zatvara s horizontalom kut α . Diferencijalne jednadžbe gibanja u tom slučaju glase

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg,$$

ili

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

Opće rješenje tog sistema jednadžbi glasi:

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4.$$

Integracione konstante C_1, \dots, C_4 određene su početnim uvjetima, tj. u trenutku $t = 0$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad (\dot{x})_0 = v_0 \cos \alpha_0, \quad (\dot{y})_0 = v_0 \sin \alpha_0.$$

Konačne jednadžbe gibanja u tom slučaju glase

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t, \tag{1}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t. \tag{2}$$

Eliminiranjem t iz tih parametarskih jednadžbi dobiva se jednadžba putanje

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 + \tg \alpha_0 \cdot x. \tag{3}$$

To je jednadžba parabole koja leži simetrično u odnosu na koordinate tjemena putanje, tj. parabole s vertikalnom osi i s konkavnom stranom prema dolje. Ako se pretpostavi da je

$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, vrijednost $\cos \alpha_0$ bit će pozitivna i prema (1) apscisa

x raste s vremenom t , tj. projektil se stalno giba udesno. Za određivanje dometa l treba u gornju jednadžbu uvrstiti $y = 0$, pa slijedi

$$0 = \left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x + \tg \alpha_0 \right) x.$$

Jedno rješenje te jednadžbe, $x = 0$, odgovara početnom položaju projektila, a drugo rješenje

$$x = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0 \tg \alpha_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin (2 \alpha_0) \tag{3a}$$

izražava domet projektila

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin (2 \alpha_0). \tag{4}$$

Ukupno trajanje leta t_A projektila od O do A dobiva se kada se u (1) uvrsti t_A i l :

$$l = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t_A,$$

i odatle

$$t_A = \frac{l}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{v_0^2 \sin (2 \alpha_0)}{g v_0 \cos \alpha_0} = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha_0. \tag{5}$$

Apscisa x_T tjemena T putanje određena je uvjetom

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g x_T}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} + \tg \alpha_0 = 0,$$

tj.
$$x_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin (2 \alpha_0) = \frac{l}{2}, \tag{6}$$

a trajanje leta od O do tjemena T

$$t_T = \frac{v_0}{g} \sin \alpha_0. \tag{7}$$

Prema tome, vrijednosti za domet i ukupno trajanje leta projektila dvaput su veće od vrijednosti za apscisu tjemena putanje i trajanje leta do njega, što mora biti i iz razloga simetrije.

Visina tjemena putanje dobiva se iz (2):

$$h = -\frac{g}{2} t_T^2 + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0. \tag{8}$$

Kombinacijom jednadžbi (4) i (8) nalazi se izraz

$$h = \frac{1}{4} l \tg \alpha_0.$$

Komponente brzine određene su relacijama

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0, \\ v_y &= \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Odatle je

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2g \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t \right)}, \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2gy}, \end{aligned} \quad (10)$$

što znači da brzina (uz danu početnu brzinu) zavisi samo od visine y .

Kut nagiba tangente na putanju u položaju x, y određen je jednačbom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha_0 - gt}{v_0 \cos \alpha_0}. \quad (11)$$

Pri gibanju projektila vektor njegove brzine \vec{v} mijenja se po pravcu i veličini. Ako se iz neke tačke P_v (pola brzina) nanesu vektori brzine koji odgovaraju raznim položajima projektila, onda vrhovi vektora brzina opisuju tzv. *hodograf brzina* koji je u promatranom slučaju pravac. Brzina kojom se tačka e giba po hodografu jednaka je promjeni brzine u jedinici vremena projektila na putanji, tj. njegovu ubrzanju. Najmanja brzina projektila je dakle u tjemenu putanje T , dok su brzine \vec{v}_0 i \vec{v}_k jednake po veličini, ali različite po pravcu. (Indeks k odnosi se na konačno stanje.)

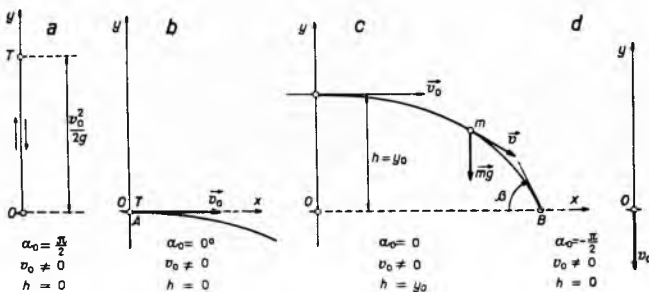
Ako se izraz (5) uvrsti u jednačbe (9) i (11), dobiva se

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = -v_0 \sin \alpha_0 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha_k = -\operatorname{tg} \alpha_0.$$

Specijalni slučajevi. a) $\alpha_0 = +\frac{1}{2}\pi, v_0 \neq 0$ (slučaj *vertikalnog hica uvis*). Jednačbe gibanja svode se na

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$$

Putanja je vertikala kroz O (sl. 2 a). Gibanje je projektila u



Sl. 2

tom slučaju pri penjanju jednoliko usporeno sve dok u trenutku $t_T = v_0/g$ projektil ne dosegne visinu $h = v_0^2/2g$, pa brzina postane $v = 0$. Projektil se zatim spušta jednoliko ubrzano i prolazi kroz početni položaj u trenutku $t_A = 2v_0/g$ istom brzinom v_0 kao pri polasku.

b) $\alpha_0 = 0, v_0 \neq 0$ (slučaj *horizontalnog hica*). Jednačbe gibanja glase

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Putanja tangira os x (sl. 2 b). U slučaju kada je $x_0 = 0$ i $y_0 = h$ (sl. 2 c), jednačbe gibanja su

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminiranjem t dobiva se jednačba putanje (opet parabola)

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Domet OB , tj. vrijednost za x kada je $y = 0$, bit će

$$x_B = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Trajanje leta t_B (vrijednost za t kada je $y = 0$) ne zavisi od v_0 :

$$t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Upadni kut β određen je izrazom

$$\operatorname{tg} \beta = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

c) $\alpha_0 = -\frac{1}{2}\pi, v_0 \neq 0$ (*vertikalni hitac prema dolje*). U tom slučaju je

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t.$$

Putanja je vertikala kroz O (sl. 2 d). Gibanje je jednoliko ubrzano.

Ako je $v_0 = 0$ (*slobodni pad*) jednačbe gibanja svode se na

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Primjena parabolne teorije. S pomoću jednačbi (1) do (11) može se dobiti odgovor na čitav niz pitanja iz balistike u praznom prostoru. Npr., treba naći polazni kut α_0 u slučaju kad je poznata početna brzina v_0 i ako se želi pogoditi tačka A koja leži na horizontali kroz O u određenoj udaljenosti OA . Odgovor na to pitanje daje (4) kad se riješi po $\sin 2\alpha_0$:

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{gl}{v_0^2}.$$

Ako je $v_0 < \sqrt{gl}$, tj. za $gl/v_0^2 > 1$, ne postoji rješenje, jer realna vrijednost sinusa kuta ne može biti veća od 1. To znači da početna brzina v_0 nije dovoljno velika da bi projektil dosegao tačku A .

U slučaju kad je $v_0 > \sqrt{gl}$ ili $gl/v_0^2 < 1$ postoje dva kuta $2\alpha_0'$ i $2\alpha_0''$ između 0 i π kojih je sinus jednak gl/v_0^2 . Ako je 4ϵ njihova razlika, bit će

$$2\alpha_0' + 2\epsilon = \pi/2, \quad 2\alpha_0'' - 2\epsilon = \pi/2,$$

i odatle je

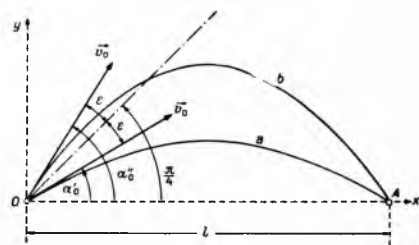
$$\alpha_0' = \frac{\pi}{4} - \epsilon, \quad \alpha_0'' = \frac{\pi}{4} + \epsilon,$$

što znači da postoje dvije putanje (a i b , sl. 3) koje zadovoljavaju postavljeni zahtjev. Putanja s manjim kutom (α_0') zove se putanja neposrednog gadanja, a druga (α_0'') putanja posrednog gadanja.

Granični slučaj je kada je $v_0 = \sqrt{gl}$ ili $gl/v_0^2 = 1$. Tada je $\epsilon = 0, \alpha_0' = \alpha_0'' = \pi/4$, tj. obje putanje se poklapaju.

Iz formule (4) slijedi dalje da je uz datu početnu brzinu v_0 najveći domet l_{\max} određen vrijednošću $\alpha_0 = \pi/4 = 45^\circ$.

Lako se može pokazati još jedno važno geometrijsko svojstvo putanja projektila u praznom prostoru: da različite putanje koje odgovaraju određenoj vrijednosti v_0 imaju za obvojnici parabolu koja ima vertikalnu os i prolazi kroz tačke $(v_0^2/g, 0)$ i $(-v_0^2/g, 0)$, a tjemenu joj leži na osi y na udaljenosti $v_0^2/2g$ (sl. 4).



Sl. 3

Za određivanje obvojnice familije krivulja $y = f(x, \lambda)$, koja zavisi od parametra λ , treba eliminirati parametar λ iz dviju jednačbi

$$y = f(x, \lambda), \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0.$$

Jednačba familije parabolnih putanja glasi

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g x^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0).$$

Uzme li se $\operatorname{tg} \alpha_0$ kao parametar, gornje dvije jednadžbe mogu se napisati u obliku

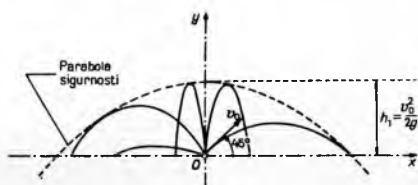
$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0), \quad \frac{\partial y}{\partial (\operatorname{tg} \alpha_0)} = x - \frac{g x^2}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Eliminiranjem $\operatorname{tg} \alpha_0$ dobiva se

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2v_0^2},$$

tj. obvojnica familije parabolnih putanja koje se mijenjaju u zavisnosti od kuta α_0 pri $v_0 = \text{konst.}$ također je parabola. Ta se krivulja naziva *parabolom sigurnosti*, jer projektili izbačeni brzinom v_0 ne mogu dosegnuti nijednu tačku koja se nalazi iznad te krivulje.

Na sličan način može se pokazati da je elipsa geometrijsko mjesto tjemena parabola familije putanja dobivenih promjenom



Sl. 4

kuta α_0 . Naime, ako se na osnovu prethodnih relacija (3a) i (8) koordinate tjemena parabole napišu u obliku

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0 = h_1 \sin 2\alpha_0, \quad (12)$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0 = h_1 \sin^2 \alpha_0 \quad (13)$$

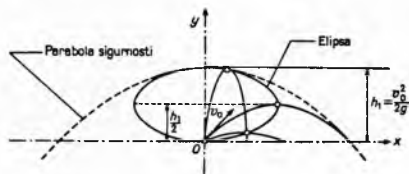
i ova druga jednadžba preinači

$$\left(y - \frac{h_1}{2}\right) = -\frac{h_1}{2} \cos 2\alpha_0, \quad (14)$$

pa iz (12) i (14) eliminira α_0 , dobiva se

$$\frac{\left(y - \frac{h_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2} + \frac{x^2}{h_1^2} = 1.$$

To je jednadžba elipse čije su poluosi h_1 i $\frac{h_1}{2}$, a središte se nalazi u tački $x = 0$, $y = \frac{h_1}{2}$ (sl. 5).



Sl. 5

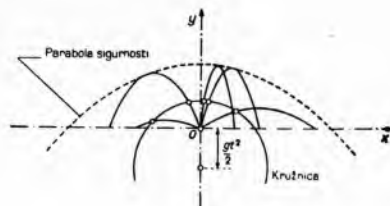
Ako se iz tačke O (početka koordinatnog sistema na sl. 6) istovremeno izbače projektili istom početnom brzinom v_0 pod različitim kutovima prema horizontu, onda će se oni u bilo kojem trenutku nalaziti na kružnici čiji polumjer raste s vremenom. Dokaz slijedi iz parametarskih jednadžbi familije parabolnih putanja:

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{g t^2}{2}.$$

Eliminiranjem α_0 dobiva se

$$x^2 + \left(y + \frac{g t^2}{2}\right)^2 = v_0^2 t^2;$$

a to je jednadžba kružnice polumjera $R = v_0 t$. Središte kružnice leži na osi Oy u tački $y = -\frac{g t^2}{2}$. Prema tome, geometrijsko



Sl. 6

mjesto projektila nakon trajanja leta t u praznom prostoru je kružnica čije središte leži na osi y u tački $y = -\frac{g t^2}{2}$.

Gibanje projektila u otpornoj sredini. Kad se projektil giba kroz uzduh, zakoni dobiveni na osnovu dosadašnje analize više ne vrijede, jer se uzduh opire gibanju projektila, pri čemu taj otpor zavisi prvenstveno od oblika projektila i njegove brzine.

Iskustvo pokazuje da dobiveni rezultati vrijede *približno* za projektil koji se giba kroz uzduh vrlo malom brzinom, tako da je otpor uzduha mnogo manji od težine projektila. To je slučaj npr. pri bacanju kamena s pomoću katapultu. Međutim, u slučaju projektila izbačenog iz vatrenog oružja (početna brzina se kreće u granicama od 500 do 1000 m/sec) ranije dobiveni rezultati su veoma netačni. Otpor što ga uzduh suprotstavlja gibanju takvih projektila često je mnogo veći od njihove težine. Npr. kad se opali uvis puščani metak čija je početna brzina $v_0 = 805$ m/sec, projektil bi teorijski, tj. kad bi se gibao u praznom prostoru,

morao postići visinu $h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{805^2}{2 \cdot 9,807} = 33\,000$ m. Isku-

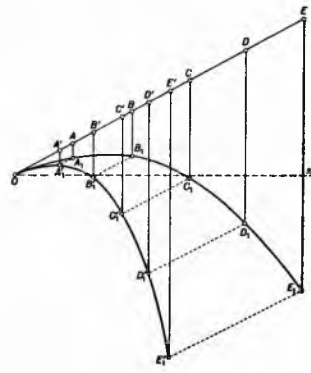
stvo međutim pokazuje da metak postiže visinu od svega oko 3300 m, dakle $\sim 10\%$ teorijske vrijednosti. Puška čiji projektil ima početnu brzinu od $v_0 = 625$ m/sec imala bi teorijski maksimalni dolet (pod kutom $\alpha_0 = 45^\circ$) $l = \frac{v_0^2}{g} = \frac{625^2}{9,807} = 40\,000$ m. U stvari, polazni kut koji odgovara najvećem dometu je $\alpha_0 = 32^\circ$, a dolet iznosi svega oko 4000 m.

Utjecaj otpora uzduha na artiljerijske projektele manji je nego na puščane, jer je masa topovske granate mnogo veća od mase puščanog zrna a početna je brzina za obje vrste projektila približno jednaka. Npr., pri gađanju iz topa kalibra 14 cm pod kutom $\alpha_0 = 10^\circ 15'$ i početnom brzinom $v_0 = 800$ m/sec, projektil bi u praznom prostoru postigao dolet:

$$l = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha_0 = \frac{1}{9,807} \cdot 800^2 \cdot \sin 20^\circ 30' = 23\,000 \text{ m.}$$

Stvarni dolet u uzdužnoj sredini iznosi 8000 m, tj. otprilike jednu trećinu teorijske vrijednosti. Razlika između dvaju rezultata je, očito, manja nego u slučaju puščanog projektila, ali je ipak relativno velika. Prema tome, pri izračunavanju putanje projektila izbačenog iz vatrenog oružja valja voditi računa o otporu uzduha.

Na sl. 7 shematski je prikazana razlika između putanje projektila u praznom prostoru i u otpornoj sredini. U praznom prostoru i kad na njega ne bi djelovala sila teže, projektil bi se gibao jednoliko i pravocrtno po pravcu OE . Tačke A, B, C, D, E na tom pravcu prikazuju za taj slučaj njegove položaje u jednakim vremenskim razmacima, a tačke A', B', C', D', E' odgovaraju njegovim položajima kad bi djelovao



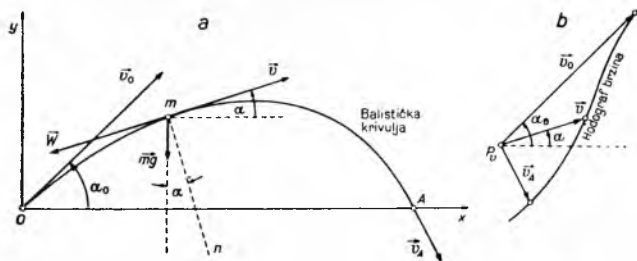
Sl. 7

samo otpor uzduha bez sile teže. Za slučaj da djeluje samo sila teže odgovarajući položaji su označeni sa A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 , a kad istovremeno djeluju sila teže i otpor uzduha projektil bi se nalazio u tačkama $A_1', B_1', C_1', D_1', E_1'$. Vidi se da je odstupanje stvarne putanje projektila od parabole utoliko veće ukoliko je veće smanjenje translatornog gibanja uslijed otpora uzduha, i zato je određivanje tog otpora od najvećeg značenja za proračun balističke putanje projektila. Uvid u teorijsku stranu tog problema dobiva se na osnovu slijedeće analize.

Ako se pretpostavi da je projektil rotaciono tijelo čija se uzdužna os stalno poklapa s pravcem tangente na putanju, onda će iz razloga simetrije otpor uzduha, tj. aerodinamička sila otpora \vec{W} , djelovati također u pravcu tangente, ali u smjeru koji je suprotan smjeru vektora brzine (sl. 8). Njezina veličina je funkcija brzine projektila, tj.

$$W = m \varphi(v),$$

gdje je m masa projektila, a $\varphi(v)$ funkcija koja zavisi od oblika projektila i od otporne sredine. Budući da je otpor uzduha \vec{W} upravljen tangencijalno na putanju, mora težina $m\vec{g}$ projektila u svakom trenutku biti upravljen prema konkavnoj strani putanje.



Sl. 8

Putanja projektila naziva se u tom slučaju *balističkom krivuljom*. Njezina konkavna strana okrenuta je prema dolje.

Projiciranjem vektora $m\vec{g}$ i \vec{W} na os Ox i na normalu n mogu se jednačbe gibanja napisati u obliku

$$m \ddot{x} = -m \varphi(v) \cos \alpha, \quad m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \alpha,$$

gdje je α kut između \vec{v} i Ox , a ρ polumjer zakrivljenosti putanje.

Dijeljenjem sa m i imajući u vidu da je

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d(v \cos \alpha)}{dt},$$

dobiva se

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{dt} = -\varphi(v) \cos \alpha, \quad (15a) \quad \frac{v^2}{\rho} = g \cos \alpha. \quad (15b)$$

Budući da je konkavna strana putanje okrenuta prema dolje, bit će $\frac{d\alpha}{dt}$ uvijek negativno bez obzira na t , dok je $\frac{ds}{dt}$, naprotiv, uvijek pozitivno, i odatle je

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -v \frac{d\alpha}{dt}.$$

Uvrštenjem te vrijednosti u (15b) slijedi

$$-v \frac{d\alpha}{dt} = g \cos \alpha. \quad (16)$$

Iz (15a) i (16) dobiva se

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{v d\alpha} = \frac{\varphi(v)}{g}. \quad (17)$$

Ta diferencijalna jednačba prvog reda određuje *hodograf brzina*, jer ona sadrži samo veličine α i v , koje su polarne koordinate te krivulje (sl. 8 b). Naziva se *jednačbom hodografa*.

Ako se pretpostavi da je poznato rješenje $v(\alpha)$ te jednačbe koje zadovoljava početni uvjet $\alpha = \alpha_0, v = v_0$, mogu se odrediti vrijednosti t, x i y . U tu svrhu se iz (16) dobije

$$dt = -\frac{v d\alpha}{g \cos \alpha}.$$

Množenjem te jednačbe sa $\dot{x} = v \cos \alpha$, a zatim sa $\dot{y} = v \sin \alpha$, dobivaju se relacije

$$dx = -\frac{v^2}{g} d\alpha, \quad dy = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \alpha d\alpha.$$

Integriranjem tih triju jednačbi u granicama ($t = 0, x = 0, y = 0, \alpha = \alpha_0$) i (t, x, y, α) slijedi:

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v(\alpha) d\alpha}{\cos \alpha}, \quad (18) \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(\alpha) d\alpha, \quad (19)$$

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(\alpha) \operatorname{tg} \alpha d\alpha. \quad (20)$$

Na taj su način vrijednosti t, x, y izražene u zavisnosti od parametra α .

Prema tome, problem izračunavanja putanje projektila u promatranom slučaju svodi se na integriranje jednačbe hodografa (17) i na izračunavanje integrala (18), (19) i (20). Najveća poteškoća leži u integriranju jednačbe hodografa. U tu svrhu se primjenjuju različite metode, kao npr. metoda razvijanja u red (kada je α_0 malen) ili metoda rastavljanja putanje na odsječke, u kojem se slučaju funkcija $\varphi(v)$ zamjenjuje približnim izrazom koji bi omogućio integriranje jednačbe (17). Na osnovu tako dobivenih rezultata mogu se za svako vatreno oružje izračunati tablice gađanja koje sadrže glavne karakteristike putanje i projektila u zavisnosti od zadanih podataka.

Otpor uzduha u balistici. Pri gibanju projektila uzduh apsorbira znatan dio njegove kinetičke energije. Ta se energija troši na prevodenje uzduha u naročito stanje gibanja koje se manifestira više ili manje u obliku šuma, zujanja, praska i sl. Zbog trošenja energije smanjuje se brzina projektila. Sila koja na taj način prouzrokuje usporenje gibanja projektila zove se otpor uzduha. Proučavanje te aerodinamičke sile zadire duboko u područje aerodinamike velikih brzina. Otpor uzduha za tijelo određenog oblika zavisi od dimenzija tijela, brzine gibanja v , viskoziteta uzduha μ , gustoće ρ i brzine zvuka a u uzduhu. Za kuglu promjera d koja se nalazi u uzdušnoj struji zakon otpora uzduha može se na osnovu jednostavnih teorijskih razmatranja izraziti u obliku

$$W = c_w \frac{\rho}{2} v^2 F,$$

gdje je c_w koeficijent uzdušnog otpora i $F = \frac{\pi d^2}{4}$ (površina pre-

sjeka). Kad bi koeficijent c_w bio konstantan, imali bismo kvadratni zakon otpora. U stvari se c_w mijenja u zavisnosti od ρ, v, d itd., i to na način koji je prethodno nepoznat. Može se pokazati da c_w može biti samo funkcija dvaju brojeva: Reynoldsova

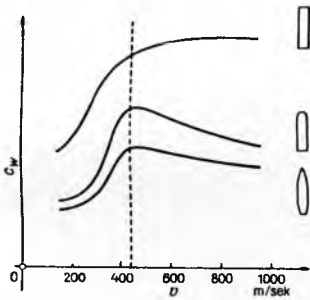
broja $Re = \frac{v d \rho}{\mu} = \frac{v d}{\nu}$ (gdje je $\nu = \mu/\rho$ tzv. kinematički visko-

zitet) i Machova broja $Ma = v/a$. Prvi izražava utjecaj viskoziteta na aerodinamičke sile i jedan je od kriterija aerodinamičke sličnosti, koja zahtijeva proporcionalnost dužina, sila i vremena. Machov broj je drugi kriterij sličnosti, koji karakterizira elastičnost fluida. Za brzine koje u balistici dolaze u obzir, utjecaj Reynoldsova broja je neznatan (5...10 %). Zato se opći izraz za otpor uzduha obično piše u obliku

$$W = F \frac{\rho v^2}{2} c_w \left(\frac{v}{a} \right).$$

I ovdje je W proporcionalan v^3 , ali c_w nije konstanta kao u slučaju $v \ll a$, nego je funkcija od v/a . Oblik funkcije c_w zavisi od oblika projektila i mora se odrediti eksperimentalnim putem.

Pri istraživanju utjecaja brzine projektila na otpor uzduha ustanovljeno je eksperimentalnim putem da eksponent faktora brzine v u izrazu za otpor uzduha zavisi od brzine projektila. Za brzine od oko 150-250 m/sek otpor uzduha približno je proporcionalan kvadratu brzine, kao što je to općenito pretpostavio već I. Newton u svojoj formuli; za brzine između 250 i 400 m/sek vrijednost eksponenta znatno raste i postiže maksimalnu vrijednost za brzinu ~ 430 m/sek, za veće brzine se opet približava po asimptoti vrijednosti 2. Na sl. 9 je grafički prikazana zavisnost koeficijenta otpora uzduha c_w od brzine projektila, i to za projektele različitog oblika. Vidi se da u blizini brzine zvuka ($Ma \approx 1$) otpor uzduha za sva tri oblika naglo raste, a zatim se za donja dva oblika (s oštrim i zaobljenim vrhom) otpor postepeno smanjuje, dok se u slučaju cilindričnog projektila otpor uzduha i dalje povećava. Smanjenje otpora u prvom slučaju pripisuje se utjecaju oblika vrha projektila. Prema tome, otpor uzduha naglo raste kad se brzina projektila približava brzini zvuka (~ 340 m/sek), što znači da je brzina zvuka kritična brzina za otpor uzduha. Budući da brzina zvuka zavisi od temperature fluida, jasno je da i funkcija $\varphi(v)$ zavisi od temperature uzduha. Međutim, taj se utjecaj temperature pri rješavanju glavnog problema vanjske balistike ne uzima u obzir, nego se razmatra u okviru tzv. sekundarnih problema.



Sl. 9

Tri osnovna faktora određuju otpor uzduha pri gibanju projektila velikom brzinom: viskoznost, stvaranje vrtloga pri optjecanju projektila i pojava udarnog vala (Machova balističkog vala). Viskoznost izaziva otpor trenja i utječe na stvaranje vrtloga i odvajanje graničnog sloja (*otpor oblika*) pri optjecanju tijela. Ukoliko je veći Ma utoliko je manji utjecaj viskoznosti, a utoliko je veći utjecaj stlačivosti na karakter strujanja. Za $Ma > 1$ nastupaju posve nove aerodinamičke pojave, pa prema tome vrijede i novi zakoni uzdušnog otpora.

Pri gibanju projektila nastaje lokalno zgušnjavanje uzduha na čeonj površini projektila. Budući da je uzduh elastična sredina, ta se lokalna zgušnjavanja prenose u vidu valova na okolnu uzdušnu masu. Svako beskonačno malo zgušnjavanje uzduha rasprostire se u otpornoj sredini brzinom zvuka, koja je određena relacijom

$$a = \sqrt{k g R T},$$

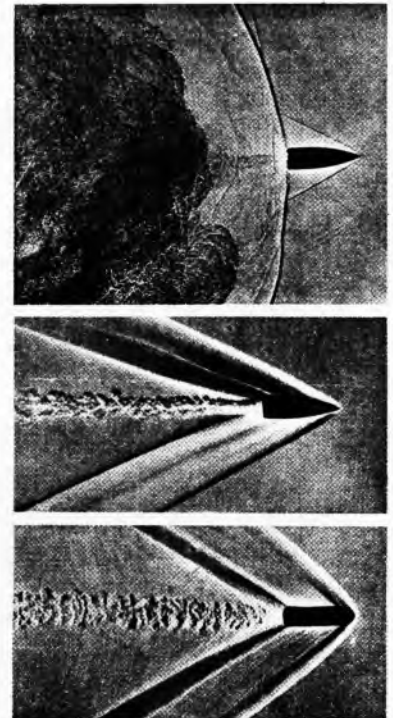
gdje je k eksponent adijabate, g ubrzanje sile teže, R plinska konstanta i T apsolutna temperatura. Uzme li se za uzduh $k = 1,4$, dobiva se za normalne uvjete ($T = 273^\circ K$)

$$a = 340,2 \text{ m/sek.}$$

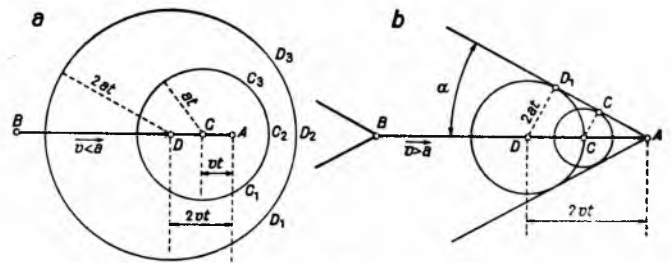
Valne pojave koje prate gibanje projektila kroz uzduh karakterizirane su pojavom čeonog balističkog vala (*Machova vala*) i sekundarnih valova koji nastaju na račun kinetičke energije projektila. Naime, projektil pri gibanju izaziva u okolnoj sredini, osim uzajamnog trenja čestica uzduha, valovito gibanje uzduha ispred sebe i iza sebe, slično kao što brod stvara valove na mirnoj vodenoj površini po kojoj se giba. Kao što pramac broda prouzrokuje poznati pramčani val, a iza krme se pojavljuje vrtložno gibanje vodenih masa, tako i ispred vrha projektila nastaje zgušnjavanje uzduha, koje se širi u svim pravcima, dok se na njegovom zadnjem kraju uzduh razrjeđuje. Uslijed toga nastaje «*usisavanje*» okolnog uzduha, a to također pojačava valno gibanje. Takve uzdušne valove prvi je fotografskim putem snimio njemački fizičar E. Mach (1872), po kome je i nazvan Machov balistički val. Sl. 10 a prikazuje snimak valnih pojava u slučaju kad je puščani projektil izašao iz cijevi brzinom od ~ 880 m/sek i bio na udaljenosti od ~ 35 cm ispred usta cijevi. Vidi se da barutni plinovi, koji izlaze iz cijevi velikom brzinom, izazivaju jako zgušnjavanje uzduha ispred cijevi. Taj se val širi na sve strane brzinom zvuka i izaziva akustičnu pojavu koja se obično naziva pucnjem. Budući

da je u tom slučaju $v > a$, prednji dio projektila je ispred pucnja na ustima cijevi, a od njegovog vrha se širi čeon balistički val koji izaziva praskavi zvuk. Budući da se balistički val giba s projektilom, njegov praskavi zvuk stiže do uha promatrača koji se nalazi na pravcu gađanja prije nego pucanj što nastaje na ustima cijevi. Na sl. 10 b prikazan je snimak sličnog puščanog projektila na većoj udaljenosti od cijevi, a sl. 10 c pokazuje valne pojave u slučaju puščanog projektila sa zaobljenim vrhom i početnom brzinom od ~ 640 m/sek. Vidi se da se osim čeonog balističkog vala, koji ima oblik konusa, na zadnjem kraju projektila pojavljuje sličan repni val, a istovremeno i vrtložni trag iza projektila.

Nastajanje tih valnih pojava prikazano je shematski na sl. 11. Pretpostavlja se da se projektil (prikazan na sl. 11a linijom BA) giba u naznačenom smjeru brzinom $v = a/2$. U tom slučaju pojavljuje se ispred vrha projektila u A val zgušnjavanja, čiji je polumjer još jednak nuli. Trenutak prije toga tačka A bila je u C . Val zgušnjavanja koji je tamo nastao proširio se u međuvremenu dvostrukom brzinom, tj. brzinom zvuka, tako da je polumjer njegove valne plohe dvaput veći od CA , tj. $CC_1 = CC_2 = CC_3 = 2 AC$. Još trenutak prije bila je tačka A u D i odgovarajući val zgušnjavanja proširio se u sfernu plohu $D_1 D_2 D_3 \dots$ polumjera $DD_1 = DD_2 = DD_3 = 2 DA$. Na sličan način širi se i val razrjeđivanja na zadnjem kraju projektila.



Sl. 10



Sl. 11

Ako je $v > a$, valovi zgušnjavanja ne gibaju se više ispred projektila, nego ga prate u obliku konusnih valova. Na sl. 11b prikazan je slučaj kada je $v = 2a$. Nalazi li se vrh projektila u promatranom trenutku u A , bio je on u trenutku prije toga u

C . Polumjer sfernog vala koji polazi iz C ima vrijednost $\frac{CA}{2}$, i ako je vrh projektila dva trenutka prije toga bio u D , polumjer njegovog vala zgušnjavanja bio je $\frac{DA}{2}$ itd. Elementarni valovi

zgušnjavanja koji na taj način nastaju u pojedinim položajima vrha projektila imaju zajednički omotač u obliku konusa (*Machov konus*). Iz slike se vidi da je $\sin \alpha = a/v$, što slijedi iz činjenice da se čeon val širi iz D u D_1 u istom vremenu u kome se vrh projektila giba iz D u A . Za širenje repnog vala vrijede u prin-

cipu ista razmatranja, iako se uslijed efekta usisavanja iza projektila vrh konusnog omotača donekle deformira.

Pojave strujanja uzduha oko projektila u letu veoma su složene i zato teorija nije još u stanju da u analitičkom obliku obuhvati sve faktore koji izazivaju otpor uzduha pri $v > a$. Zato se zakon otpora uzduha u balistici određuje empirijski u aerotunelima za nadzvučne brzine (v. *Aerotunel*).

Gibanje projektila oko svog težišta. Pri razmatranju osnovnog problema vanjske balistike, koji se odnosi samo na gibanje težišta projektila, zanemaruje se u prvoj aproksimaciji gibanje projektila oko njegova težišta. U stvari, pri letu zrna koje rotira velikom kutnom brzinom ω pojavljuje se giroskopski efekt, uslijed čega os projektila nastoji da zadrži svoju orijentaciju u prostoru, a istovremeno se putanja projektila iskrivljuje djelovanjem Zemljine gravitacije. Prema tome, os projektila se ne poklapa s tangentom na putanju. Uslijed istovremenog djelovanja otpora uzduha nastaje dvostruka rotacija projektila, koja je u uskoj vezi s problemom stabiliziranja projektila na putanji.

Kad bi se projektil gibao u praznom prostoru, početni uvjet na ustima cijevi bili bi određeni početnom brzinom \vec{v}_0 njegova težišta S i trenutnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$ rotacije oko težišta, pri čemu se pravac vektora \vec{v}_0 i $\vec{\omega}$ približno poklapa s uzdužnom osi projektila. Putanja težišta projektila je parabola i jedina vanjska sila je njegova težina $\vec{m}g$. Na osnovu zakona kinetičkog momenta (v. *Mehanika*), uzevši težište projektila kao tačku referencije, gibanje projektila oko težišta S isto je kao da je težište nepomično. Glavne su osi inercije s obzirom na S : os vlastite rotacije projektila z i dvije okomite osi x i y koje prolaze kroz S i kruto su vezane za projektil (sl. 12 a). Označuju li A, B, C glavne momente inercije, slijedi iz razloga simetrije da je $A = B$, a iz oblika projektila da je $A > C$. S druge strane, dinama vanjskih sila svodi se na težinu projektila $\vec{m}g$, jer je $\vec{M}_S = 0$. Prema tome, rotacija projektila oko njegova težišta je progresivna precesija (v. *Mehanika*), pri čemu se os pomične aksoida poklapa s osi rotacije projektila. Dva slučaja su moguća:

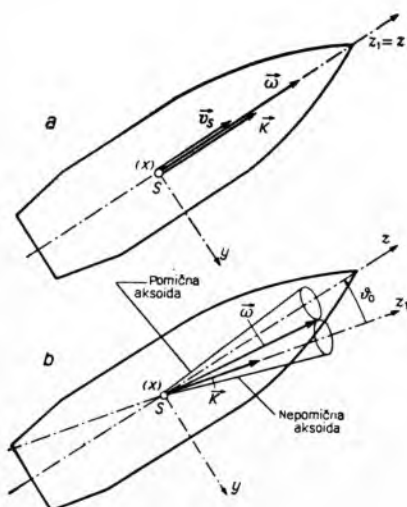
a) Idealni slučaj, kada se pri izlasku projektila iz cijevi vektor ω trenutno poklapa s osi rotacije z projektila. U tom je slučaju na početku gibanja:

$$p = q = 0, \quad r = \omega,$$

gdje su p, q, r projekcije vektora $\vec{\omega}$ na osi x, y, z , i odatle slijedi:

$$K_x = Ap = 0, \quad K_y = Bq = 0, \quad K_z = Cr = C\omega,$$

gdje K_x, K_y, K_z označuju projekcije kinetičkog momenta \vec{K} projektila na iste osi. Prema tome, vektor \vec{K} leži na osi z i zbog toga se os z poklapa s nepomičnom osi z_1 , tj. kut nutacije ϑ_0 jednak je nuli (sl. 12 a). Budući da os z_1 ne mijenja svoj pravac u prostoru, slijedi da projektil za vrijeme gibanja rotira jednoliko oko svoje osi rotacije, koja ne mijenja svoju orijentaciju u prostoru.

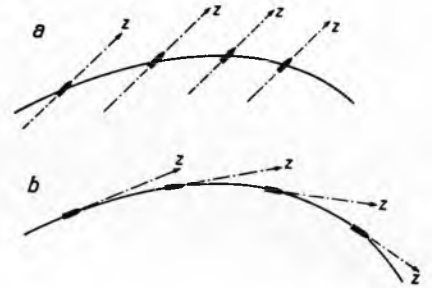


Sl. 12

b) Slučaj kada vektor trenutne vlastite rotacije pri izlasku iz cijevi zatvara vrlo mali kut s osi vlastite rotacije z . Taj se slučaj u praksi redovno pojavljuje. Na početku gibanja projektila u

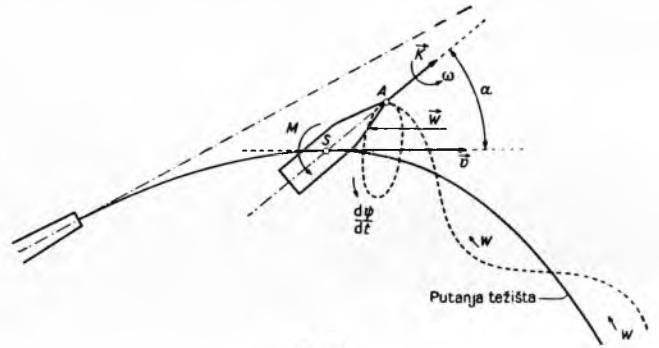
tom slučaju imaju p i q vrlo male vrijednosti u poređenju sa r .

To vrijedi i za K_x i K_y u odnosu na K_z . Kinetički moment \vec{K} , a prema tome i pravac nepomične osi z_1 , zatvaraju s osi z vrlo mali kut ϑ_0 . Projektil dakle vrši progresivnu precesiju, pri čemu obje aksoida (pomična i nepomična) imaju vrlo male kutove u svojim vrhovima (sl. 12 b). Odatle slijedi da u slučaju gibanja projektila u praznom prostoru os z_1 , a prema tome i os z koja sa z_1 zatvara vrlo mali kut, postepeno se sve više udaljuje od tangente na putanju težišta projektila, pri čemu se pravac osi z_1 ne mijenja. To znači da bi projektil, bačen iz cijevi vatrenog oružja u praznom prostoru, zadržao pravac svoje uzdužne osi paralelno s uzdužnom osi cijevi. Drugim riječima: na raju svoje parabolne utanje morao bi udariti u zemlju svojim zadnjim dijelom (sl. 13 a). U stvari, to se ne događa, nego projektil u pravilu udari vrhom u zemlju, a to se pripisuje djelovanju otpora uzduha.



Sl. 13

Naime, pri gibanju projektila kroz otpornu sredinu pojavljuju se normalna i tangencijalna naprezanja kojima uzduh djeluje na svaki element površine projektila. Ta naprezanja u svakom trenutku rektificiraju pravac osi rotacije projektila tako da ona zadržava približno pravac tangente na putanju (sl. 13 b). Ta se rektifikacija može poboljšati većom brzinom rotacije projektila i pogodnim



Sl. 14

izborom njegova oblika. Sl. 14 prikazuje projektil koji u nekom trenutku zatvara kut α s tangentom na putanju. Pretpostavi li se da vektor \vec{W} prikazuje rezultantu otpora uzduha koji djeluje na prednji dio projektila, onda ta sila proizvodi moment M s obzirom na težište S . Vektor tog momenta \vec{M} sastavlja se s vektorom kinetičkog momenta \vec{K} projektila prema pravilu paralelograma, što ima za posljedicu da vektor \vec{K} rotira oko tangente na putanju u smislu naznačene strelice. Prema tome, zbog istovremenog djelovanja \vec{K} i \vec{M} , os projektila vrši precesiju oko tangente na putanju. To doduše ne mora biti regularna precesija, ali u cjelini dobiva se vijčano (helikoidalno) gibanje vrha projektila na putanji, jer tangenta u toku gibanja stalno mijenja svoj pravac. Pogodnim izborom konstrukcije projektila i brzine rotacije može se kut α održati u uskim granicama. Odatle se vidi da gibanje projektila oko njegova težišta predstavlja izvanredno složen problem.

Unutarnja balistika

Unutarnja balistika, u užem smislu, proučava procese u cijevi vatrenog oružja od trenutka zapaljenja barutnog punjenja do izlaska projektila iz cijevi. Pretvaranje čvrstog pogonskog goriva u vrlo vruće plinove pod velikim pritiskom predstavlja kemijski proces, a pretvaranje energije plinova u kinetičku ener-

giju projektila je termodinamički i mehanički proces. Prema tome, termodinamika i mehanika su dvije glavne naučne discipline na kojima se temelji unutarnja balistika.

Problematika unutarnje balistike svodi se obično na proučavanje glavnog problema (iz zadanih podataka o pogonskom gorivu, projektilu i cijevi treba odrediti pritisak barutnih plinova i brzinu projektila u cijevi) i sekundarnih problema (gibanje barutnih plinova, elastične deformacije cijevi, opterećenje projektila pri gibanju kroz cijev, zagrijavanje cijevi i sl.). Radi lakšeg proučavanja tih veoma složenih problema razmatra se najprije proces izgaranja baruta u prostoru konstantnog volumena (u tzv. manometarskoj bombi). Taj dio unutarnje balistike zove se *pirostatika*. Zatim se proučava izgaranje u prostoru promjenljivog volumena (*pirodinamika*), tj. kada barutni plinovi pokreću projektil u cijevi. Glavni problem — izgaranje baruta pod promjenljivim visokim pritiskom — nije još do danas dovoljno istražen. Zato se unutarnja balistika mora često zadovoljiti pretpostavkama kojima se stvarni problem svodi na uprošćeni.

Barut kao izvor energije. Kao izvor energije kojom se ostvaruje gibanje projektila upotrebljavaju se danas samo «malodimni» baruti, tj. baruti koji pri izgaranju ne daju mnogo čvrstih ostataka nego razvijaju gotovo isključivo plinove CO , CO_2 , H_2 , H_2O i nešto CH_4 . Uglavnom se primjenjuju nitrocelulozni i nitroglicerinski baruti. U prvima je nosilac energije nitroceluloza, a drugi sadrže pored nitroceluloze kao drugu energetski aktivnu materiju nitroglicerina $\text{C}_3\text{H}_5(\text{ONO})_2$.

Pri proučavanju glavnog problema unutarnje balistike neophodno je potrebno poznavati fizičkokemijske i balističke karakteristike baruta. Najvažnija fizičkokemijska karakteristika baruta je količina topline Q_0 , koja se oslobađa pri izgaranju 1 kg baruta. Veća količina topline daje višu temperaturu i omogućuje izvršenje većeg mehaničkog rada. Daljnja fizičkokemijska karakteristika je volumen plinova V_0 (volumen pri izgaranju 1 kg baruta, reduciran na pritisak od 760 mm i temperaturu 0°C), zatim temperatura izgaranja T_0 i gustoća baruta δ (specifična masa suhe barutne tvari). U balističke karakteristike baruta ubrajaju se: «sila» baruta f (naziv odomačen po tradiciji u unutarnjoj balistici, prema francuskom «force») ili tačnije specifični rad baruta (rad koji mogu izvršiti barutni plinovi pri izgaranju 1 kg baruta), kovolumen η (teorijski specifični volumen barutnih plinova na apsolutnoj temperaturi $T = 0$), brzina izgaranja baruta (pod pritiskom od 1 atm) i oblik i dimenzije barutnih zrnaca.

Vrijednosti fizičkokemijskih i balističkih karakteristika baruta navedene su u sljedećoj tablici:

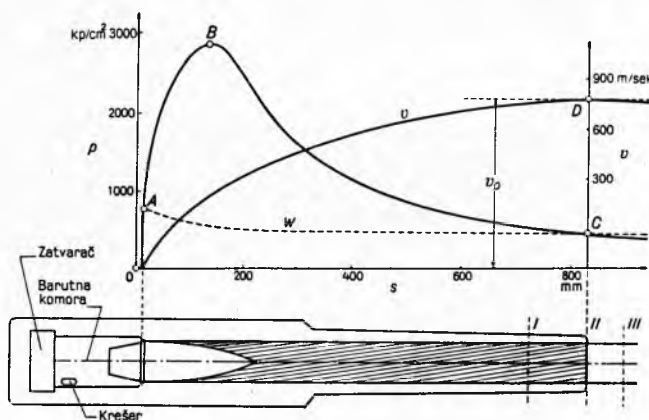
Karakteristika	Nitrocelulozni barut	Nitroglicerinski barut
Količina topline Q_0 , kcal/kg	810...910	1100...1210
Volumen plinova V_0 , dm ³ /kg	910...970	800...860
Temperatura izgaranja T_0	2500...2800°C	3000...3500°C
Gustoća baruta δ , kg/dm ³	1,56...1,62	1,56...1,66
«Sila» baruta f , kp dm/kg	800 000...950 000	900 000...1 150 000
Kovolumen η , dm ³ /kg	0,88...0,96	0,78...0,90
Brzina izgaranja, mm/sek	0,060...0,090	0,100...0,200

Prema hipotezi G. Pioberta (1793—1871), na kojoj se zasniva moderna unutarnja balistika, barutna zrnca (čestice) izgaraju po paralelnim slojevima od vanjske površine prema unutarnjosti. Pod brzinom izgaranja razumijeva se linearna brzina kojom se rasprostire reakcija eksplozivnog raspadanja baruta. Ona zavisi od fizičkokemijskih svojstava i od pritiska barutnih plinova.

Otpori u cijevi vatrenog oružja. Kad se opali metak u cijevi vatrenog oružja, zbiva se proces pretvaranja kemijske energije akumulirane u barutnom punjenju u toplinu i mehanički rad barutnih plinova pri njihovoj ekspanziji. Pri tom se ta energija transformira: 1. u kinetičku energiju projektila i cijevi, 2. u rad urezivanja vodećeg bakarnog prstena projektila u žljebove cijevi, 3. u rad svladavanja trenja i otpora uzduha u cijevi, 4. u rad za svladavanje vanjskog barometarskog pritiska, 5. u toplinu koja se predaje cijevi i projektilu, 6. u toplinu koju sadrže barutni plinovi pri izlasku iz cijevi, 7. u rad utrošen na vibracije i elastične

deformacije cijevi i sl. Poželjno je da se što veći dio toplinske energije oslobodene pri izgaranju barutnog punjenja pretvori u kinetičku energiju translacije projektila u cijevi vatrenog oružja, a djelomice i u kinetičku energiju njegove rotacije, koja je potrebna radi stabilnosti projektila na putanji u uzduhu. Međutim, znatan dio te energije troši se i na tzv. sekundarne radove, koji su manje ili više neodređeni, i zato se ne može postići egzaktno rješenje balističkog problema. Glavni zadatak u unutarnjoj balistici svodi se uglavnom na određivanje rada utrošenog na translaciono gibanje projektila u cijevi.

Pritisak barutnih plinova u cijevi. Kad bi se barutno punjenje moglo trenutno pretvoriti u plinove, krivulja pritiska barutnih plinova, od trenutka paljenja do trenutka kada projektil napušta cijev, bila bi, teorijski, vrlo približno adijabatska krivulja i vrlo slična krivulji koja pokazuje smanjenje potencijala gravitacionog polja sila. U stvari, potrebno je stanovito vrijeme za izgaranje barutnog punjenja, a osim toga projektil pri svom gibanju u cijevi mora svladati različite otpore. Zbog toga maksimalni pritisak barutnih plinova nastaje tek kada projektil prevali stanoviti dio puta u cijevi (sl. 15). Najmanji pritisak vlada u času kada projektil napušta cijev. Prema tome, postoji određeni odnos između barutnog punjenja, pritiska barutnih plinova i duljine cijevi.



Sl. 15

Budući da raspadanje baruta traje neko vrijeme, projektil polazi iz stanja mirovanja prije nego što se završi izgaranje baruta. Time se povećava volumen, ali još ne u mjeri dovoljnoj da spreči daljnji porast pritiska (do vrijednosti $p_{\max} \approx 3000 \text{ kp/cm}^2$). Kako pri tom brzina projektila stalno raste, povećava se naglo i volumen plinova, stvaranje plinova se do kraja izgaranja baruta smanjuje, uslijed čega se sada pritisak u cijevi smanjuje približno po zakonu adijabate plinskog stroja. Pri tom zidovi cijevi preuzimaju znatnu količinu toplinske energije plinova. Na slici su prikazani dijagrami p, s i v, s koji ilustriraju proces u topovskoj cijevi. Tačka A označuje pritisak koji je potreban da se projektil, svladavši otpore trenja i svoju inerciju, pokrene iz stanja mirovanja. Zatim se krivulja p udaljuje od vertikalne osi i naglo raste do B (p_{\max}). Kad počne ekspanzija plinova, vrijednosti p se smanjuju i krivulja se asimptotski približava horizontalnoj osi.

Iz dijagrama v, s vidi se da p_{\max} ne mijenja svoju vrijednost kad se duljina cijevi mijenja (presjeci I, II, III). Ali duljina cijevi ima utjecaj na brzinu kojom projektil napušta cijev. Brzina je u početku jednaka nuli, a zatim se pod pritiskom barutnih plinova postepeno povećava i postiže maksimum u tački D, koja odgovara presjeku cijevi u kome su pritisak plinova i otpori trenja izjednačeni. Krivulja W prikazuje promjenu otpora koji djeluju na projektil; ona ima svoj početak u A i zatim polagano pada, jer se do tada bakarni prsten ureže u žljebove i projektil počinje svoje translaciono i rotaciono gibanje. Krivulja W je dalje uglavnom paralelna s horizontalnom osi i u tački C siječe krivulju p . Iza toga su otpori veći od pritiska plinova, što znači da bi se projektil od tada počeo usporavati kad bi duljina cijevi bila veća. Prema tome, najveću brzinu projektil ima u presjeku II (tačka D), a zatim se ona smanjuje. Iz praktičnih razloga cijevi vatrenih oružja gotovo uvijek imaju manju duljinu od one koja odgovara v_{\max} .

Činjenica da je brzina istjecanja plinova iz cijevi oko 2,5 puta veća od brzine projektila koristi se često za smanjenje trzanja topovske cijevi s pomoću tzv. *usne kočnice*. S pomoću tog uređaja, koji je montiran na ustima cijevi, mijenja se pravac istjecanja barutnih plinova za 120°–180° i time proizvodi tzv. trzanje plinskog mlaza, koje ima smjer suprotan smjeru trzanja cijevi pri izbacivanju projektila iz nje. »Bestrajna« vatrena oružja eliminiraju trzanje djelovanjem jednog dijela plinskog mlaza, koji se izbacuje natrag.

Barutni plinovi u cijevi vatrene oružja moraju osim svoje inercije svladati i inerciju projektila i inerciju mase uzduha između vrha projektila i ustiju cijevi. Ovaj posljednji utjecaj je za oružje s kratkom cijevi beznačajan i zato se obično zanemaruje. Kad su cijevi dugačke, mora se i o tom faktoru voditi računa, naročito ako je početna brzina projektila mnogo veća od brzine zvuka, jer se u tom slučaju ta masa uzduha ne samo ubrzava nego se i komprimira. Činjenica da se time stvara u cijevi »čep« komprimiranog uzduha znatno komplicira eksperimentalno određivanje početne brzine.

Odstalih gubitaka energije valja spomenuti još i onaj što nastaje protjecanjem plinova između projektila i cijevi, zatim uslijed trzanja i zagrijavanja cijevi. Ova posljednja pojava ne samo da apsorbira dio energije nego i povećava gubitak uslijed protjecanja plinova između projektila i cijevi. Odatle se vidi da postoje mnogobrojni faktori koji su u uzajamnoj vezi i čiji se utjecaj ne može tačno izračunati.

Osnovne jednadžbe unutarnje balistike. Glavni problem unutarnje balistike može se detaljnije definirati ovako:

Ako su za neko vatreno oružje zadani kalibar, duljina cijevi, volumen barutne komore, težina projektila, tip i težina barutnog punjenja, treba odrediti: a) trajanje izgaranja barutnog punjenja, b) trajanje gibanja projektila kroz cijev vatrene oružja, c) pritisak barutnih plinova i d) početnu brzinu projektila. Od tih podataka najvažniji su maksimalni pritisak barutnih plinova i početna brzina projektila. Oni se mogu odrediti eksperimentalnim putem. Navedeni problemi svode se na tri jednadžbe, koje su poznate pod nazivima: *jednadžba energije*, *jednadžba izgaranja goriva* i *jednadžba gibanja*.

Izvođenje jednadžbe energije zasniva se na van der Waalsovoj jednadžbi

$$p = \frac{RT}{c - \eta} - \frac{b}{c^2},$$

gdje je p pritisak barutnih plinova, T apsolutna temperatura, R plinska konstanta, c specifični volumen plina, η kovolumen, a b konstanta zavisna o sastavu barutnih plinova. Drugi član na desnoj strani može se zanemariti jer je na visokim temperaturama koje se pri izgaranju baruta razvijaju specifični volumen plina vrlo velik u poređenju sa b . Prema tome, jednadžba stanja barutnih plinova može se napisati u obliku:

$$p = \frac{RT}{c - \eta}.$$

Pretpostavimo li da u zatvorenom prostoru volumena c' izgara $\bar{\omega}$ kg baruta, specifični je volumen plinova

$$c = \frac{c'}{\bar{\omega}}.$$

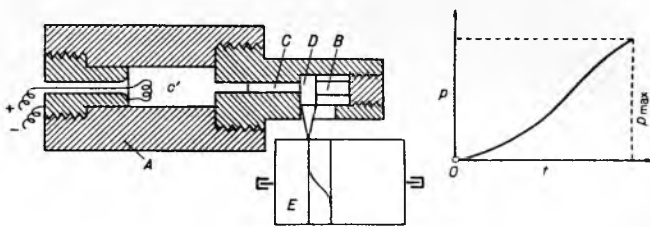
Pri porastu temperature T povećava se i pritisak p , i kada T dobije maksimalnu vrijednost $T_{\max} = T_0$ (temperatura izgaranja), onda će i pritisak p dobiti najveću moguću vrijednost p_{\max} , tj.

$$p_{\max} = \frac{RT_0}{\frac{c'}{\bar{\omega}} - \eta}.$$

Za svaki tip baruta umnožak RT_0 ima konstantnu vrijednost, koja se obično obilježava simbolom f (*sila* baruta). Odnos $\bar{\omega}/c'$, tj. masa baruta po jedinici volumena prostora u kojemu izgara, naziva se *gustoćom punjenja*. Označimo li taj odnos sa Δ , dobivamo jednadžbu (*Noble-Abelovu jednadžbu*) veoma jednostavnog oblika:

$$p_{\max} = f \frac{\Delta}{1 - \eta \Delta}.$$

Vrijednosti f i η određuju se na osnovu zakona $p = f(t)$, koji se dobiva statičkim pokusom u manometarskoj bombi (sl. 16). Ona se sastoji od masivnog čeličnog cilindra A , zatvorenog na oba kraja i snabdjevenog uređajima za električno paljenje i za automatsko registriranje pritiska plinova koji pri izgaranju baruta u prostoru konstantnog volumena c' sabijaju bakarni cilindrić B posredstvom lakog klipa C . Pisaljka D registrira na vrpici rotirajućeg valjka E postepena gnječena bakarnog cilindrića. Poseban uređaj služi za registriranje vremena. Na osnovu tih podataka može se pomoću taražnih tablica neposredno odrediti pritisak u svakom trenutku za vrijeme izgaranja baruta (dijagram p, t). Budući da Noble-Abelova jednadžba sadrži dvije nepoznanice, treba izvršiti dva pokusa u bombi s dvije različite gustoće punjenja Δ_1 i Δ_2 , pri čemu se dobiju dvije odgovarajuće maksimalne vrijednosti p_{\max} , pa se tada iz dviju jednadžbi mogu naći vrijednosti f i η .



SI. 16

Manometarska bomba je izum francuskog balističara P. M. Vieillea, koji je pronalazač bezdimnog baruta i tvorac suvremene unutarnje balistike.

Ustanovljeno je da Noble-Abelova jednadžba vrijedi za pritiske u granicama od 1200 do 4500 kp/cm². Uvođenjem još nekih faktora dobiva se *Résalova jednadžba održanja energije*

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{p(c - \alpha_y \bar{\omega})}{\gamma - 1} = f \frac{\bar{\omega} y}{\gamma - 1}, \quad (21)$$

gdje je v brzina projektila, γ odnos specifičnih toplina plinova, y sagorjeli dio barutnog punjenja $\bar{\omega}$, α_y specifični volumen baruta, koji je linearna funkcija od y ($\alpha_y \approx \text{konst}$), a μ fiktivna masa:

$$\mu = m k \left(1 + \lambda \frac{\bar{\omega}}{mg} \right),$$

pri čemu je m masa projektila, g ubrzanje sile teže, a k i λ su empirijski koeficijenti u kojima je obuhvaćen utjecaj zanemarenih sekundarnih gubitaka energije.

Jednadžba izgaranja goriva (*Charbonnierova jednadžba*) glasi

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \varphi(y) p^k, \quad (22)$$

gdje je y sagorjeli dio barutnog punjenja $\bar{\omega}$, koji zavisi od oblika zrna barutnog punjenja. Prema tome je \dot{y} kubna (volumenska) brzina izgaranja, tj. dio prvobitnog punjenja koji izgori u jedinici vremena. Faktor p je trenutni pritisak barutnih plinova, $\varphi(y)$ neka funkcija od y koja se određuje eksperimentalnim putem, a $k \approx 1$.

Jednadžba gibanja (II Newtonov aksiom) glasi:

$$\mu \frac{dv}{dt} = s p, \quad (23)$$

gdje $s = \frac{\pi a^2}{4}$ označuje površinu kružnog presjeka šupljine cijevi promjera a . Budući da plinovi zauzimaju cilindrični volumen

$$c = c' + s x,$$

pri čemu x označuje put projektila, dobiva se deriviranjem tog izraza još jedna diferencijalna jednadžba koja je potrebna za određivanje nepoznatih veličina:

$$\frac{dc}{dt} = s \frac{dx}{dt} = s \dot{x} = s v. \quad (24)$$

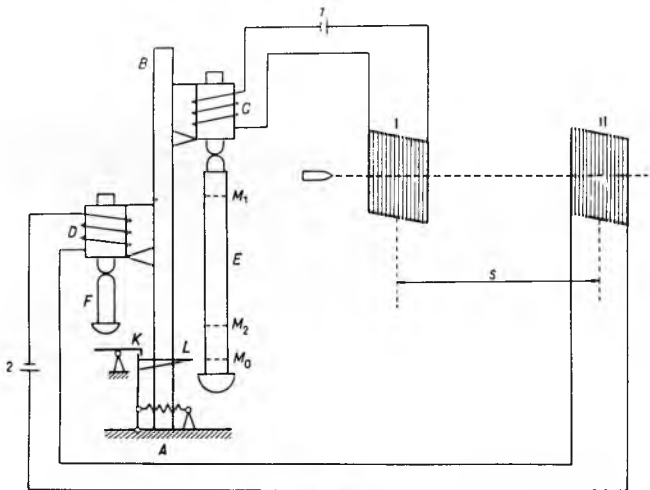
Jednadžbe (21), (22), (23) i (24) čine sistem diferencijalnih jednadžbi glavnog problema unutarnje balistike. One sadrže pet promjenljivih y, t, p, v, c . Njihovo rješavanje sastoji se, dakle, u određivanju zavisnosti četiriju promjenljivih od pete, npr. zavisnosti y, t, p, v od c . Te jednadžbe daju samo približno rješenje glavnog problema, tj. one određuju gibanje kroz cijev projektila fiktivne mase bez trenja, pri čemu je jedina ubrzavajuća sila aksijalni pritisak plinova koji nastaju izgaranjem baruta po geometrijskom zakonu.

Postoji nekoliko metoda za rješavanje tog sistema diferencijalnih jednadžbi (metode numeričke integracije, empirijske metode, metode balističke sličnosti itd.).

Ekperimentalna balistika

Ekperimentalna balistika primjenjuje metode tehničke fizike za empirijsko određivanje brzine i trajanja leta projektila, za mjerenje broja okretaja projektila, pritiska i temperature u cijevi vatrenog oružja, otpora pri gibanju projektila kroz cijev, kao i mnogih drugih veličina unutarnje i vanjske balistike. Pri tom se primjenjuju fotografske i kinematografske metode, koje pomoću kratkih radio-bljeskova i rendgenskih bljeskova omogućavaju proučavanje brzih procesa na području unutarnje i vanjske balistike. Nove teorijske spoznaje i napredak na području elektronike imali su za posljedicu da su na području ove grane balistike postignuti veoma značajni rezultati.

Za mjerenje početne brzine v_0 , koja je osnovni element unutarnje i vanjske balistike, najčešće se upotrebljava *Le Boulengéov električni kronograf* (sl. 17), koji omogućava mjerenje vremenskih razmaka od $\sim 1/5 \dots 1/1000$ sekunde. Na vertikalnom stupu AB pričvršćena su dva elektromagneta C i D , koji pridržavaju dva željezna štapa E i F . Baterije I i 2 daju potrebnu struju za gornji i donji strujni krug. Kad projektil probije žičanu mrežu okvira I , prekida se struja u I i štap E slobodno pada. Pri prolazu projektila kroz okvir II ponavlja se sličan proces. Pri tom štap F udara na polugu K , koja odapinje oprugu noža L , a ovaj ureže crticu M_1 na štapu E koji se nalazi u stanju padanja. Da bi se odredilo vrijeme koje je proteklo između prolaza projektila kroz I i II , treba na štapu E najprije urezati nultu crticu M_0 , što se postiže kad se rukom pritisne na polugu K . Zatim treba obilježiti i crticu M_2 , koja bi se dobila kada bi razmak između I i II bio jednak nuli, tj. kad se oba strujna kruga istovremeno prekinu. Mjerenjem raz-



Sl. 17

maka $M_0M_1 = H_1$ i $M_0M_2 = H_2$ mogu se iz zakona slobodnog pada naći odgovarajuće vrijednosti t_1 i t_2 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} \quad \text{i} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2H_2}{g}}$$

i odatle trajanje leta projektila

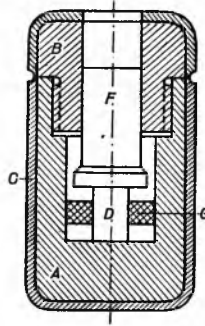
$$t = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} - \sqrt{\frac{2H_2}{g}}$$

Srednja brzina na putu s između I i II određena je relacijom

$$v = \frac{s}{t}$$

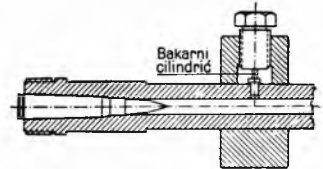
Pri proučavanju zakona izgaranja baruta i gibanja projektila kroz cijev, koji se proces zbiva u vremenskom razmaku od svega nekoliko tisućinki sekunde, od posebnog je interesa poznavanje maksimalnog pritiska i odgovarajućeg položaja projektila u cijevi.

Za mjerenje pritiska u cijevi vatrenog oružja primjenjuju se uglavnom mehaničke i električne metode. Od mehaničkih najširu primjenu ima metoda koja se zasniva na mjerenju pritiska s pomoću trajnih deformacija tijela izloženog pritisku. Na tom se principu temelji *Nobleov krešerni aparat* (krešer, engl. crusher, od to crush, gnječiti), koji je shematski prikazan na sl. 18. Tijelo aparata je od čelika (A i B) i obloženo bakarnom košuljicom C . U unutarnjosti se nalazi bakarni cilindrić D (crusher), koji je posredstvom čeličnog klipa F izložen djelovanju pritiska barutnih plinova, a centriran je gumenim prstenom G . Aparat se stavlja u barutnu komoru (v. sl. 15) ili na dno čahure (u topovskim



Sl. 18

cijevima). Kad se opali metal, aparat izleti iz cijevi nekoliko metara, zatim se iz njega izvadi bakarni cilindrić i izmjeri njegova deformacija. Iz stepena deformacije određuje se, s pomoću taražnih tablica, maksimalni pritisak. Na sl. 19 shematski je prikazan uređaj za mjerenje pritiska u puščanoj cijevi, koji se zasniva na istom principu. U tom slučaju aparat se montira na cijev koja je probušena okomito na njezinu uzdužnu os. Tačniji rezultati postižu se kad je aparat montiran iznad barutne komore, pri čemu se u zidovima čahure mora prethodno izbušiti rupa za prolaz plinova iz čahure u krešerni aparat. Krešerni aparati bili su gotovo isključivo u upotrebi sve do oko 1940, kada su ih zamijenili *piezoelektrični uređaji*, koji se zasnivaju na piezoelektričnim svojstvima nekih kristala (turmalina, kvarca). Takvi se uređaji u principu sastoje npr. od turmalinskog diska, u kome se pod djelovanjem pritiska barutnih plinova pojavljuju električne struje čiji je intenzitet proporcionalan pritisku.



Sl. 19

RAKETNA BALISTIKA

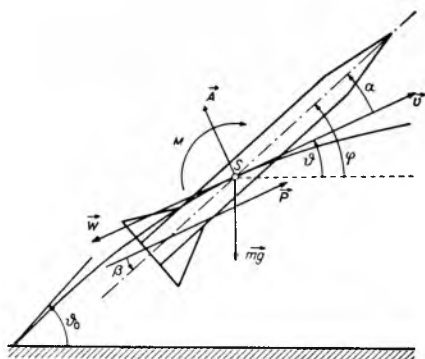
Raketna balistika (*raketodinamika*) proučava zakone gibanja raketnih projektila. Znatno se razlikuje od balistike klasičnih projektila, izbačenih iz cijevi vatrenog oružja. Prije svega, masa običnih artiljerijskih projektila i avionskih bombi ostaje konstantna za vrijeme leta, a masa raketnih projektila naglo se smanjuje za vrijeme pogonskog perioda rakete zbog izgaranja pogonskog goriva. Osim sile teže i otpora uzduha na raketni projektil djeluje na početnom dijelu njegove putanje još i reaktivna sila (potisak) pogonskog sistema, koja je u pravilu promjenljive veličine, bar u početku i na kraju izgaranja pogonskog goriva. Zato se pri proračunu putanje takvog projektila moraju uzeti u obzir još i ta dva nova faktora. Kod tzv. *dirigiranih* raketnih projektila postavlja se zahtjev da se putanja može po potrebi mijenjati u svakom trenutku, pa se pojavljuje problem upravljanja odnosno vođenja, a u vezi s tim i problem stabilnosti projektila na putanji. Oblik i dimenzije raketnih projektila igraju veliku ulogu zbog pojave aerodinamičkih sila pri njihovom gibanju velikim brzinama kroz atmosferu. Konačno, takvi projektili mogu biti opremljeni i krilima, slično kao avioni. U tom se slučaju problem znatno komplicira i dobrim dijelom prelazi u područje aerodinamike, napose u regionima troposfere. Prva dva faktora, promjenljiva masa rakete i promjenljivi potisak, mogu se teorijski i eksperimentalno odrediti u zavisnosti od vremena i uvrstiti u diferencijalne jednadžbe gibanja takvih projektila. Utjecaj aerodinamičkih sila određuje se eksperimentalno u aerodinamičkim tunelima za nadzvučne brzine.

Rješenje dobivenog sistema jednadžbi izvodi se s pomoću metoda numeričke integracije slično kao i u balistici klasičnih projektila, pri čemu se u velikoj mjeri primjenjuju elektronička računala.

Suprotno običnom projektilu, koji svoje totalno ubrzanje dobiva u početku gibanja u vrlo malom dijelu sekunde, raketa ima prednost da postepeno dobiva potrebna ubrzanja na relativno velikom dijelu svoje putanje. Na dalekometnim raketnim projektilima reaktivna sila služi prvenstveno da se projektil u što kraćem vremenu dovede na što veću visinu. U tu svrhu projektil polazi vertikalno uvis i tek nakon kraćeg vremena postepeno skreće s vertikalne putanje, tako da npr. u slučaju jednostepene balističke rakete pri kraju izgaranja pogonskog goriva tangenta na putanju težišta projektila, odnosno uzdužna os projektila, zatvara kut od $\sim 45^\circ$ s horizontalnom ravninom. Npr. njemačka balistička raketa A-4 (poznata pod oznakom V-2) polazila je pod kutom od 90° . Nakon 65 sekundi, koliko je prosječno trajalo izgaranje pogonskog goriva, raketa je postigla visinu od ~ 36 km i imala nagib od $\sim 45^\circ$ i brzinu približno 1600 m/sec. Od tog trenutka raketa se gibala kao običan projektil u veoma razrijeđenoj atmosferi i postizala domet od ~ 320 km u vremenu od ~ 5 minuta. Ordinata tjemena putanje iznosila je ~ 80 km (približno $1/4$ dometa), tj. kao pri gibanju u vakuumu.

Terestrička balistika rakete proučava gibanje rakete u Zemljinom gravitacionom polju. Ako raketa ima mali domet (artiljerijske rakete za taktičke svrhe) proučava se samo gibanje njenog težišta uz ostale osnovne pretpostavke klasične balistike, tj. da Zemlja miruje i da je njezina površina ravna, zatim da se raketa giba u homogenom polju Zemljine gravitacije ($g = \text{konst.}$) itd. U početku gibanja na raketu djeluje, osim Zemljine gravitacije i otpora uzduha, još i potisak raketnog motora. Nakon izgaranja goriva raketa se dalje giba po zakonima klasične balistike u otpornoj sredini.

Na sl. 20 prikazano je djelovanje sila pri gibanju rakete *malog dometa* za vrijeme pogonskog perioda. Prema tome, vrijede osnovne pretpostavke kao i u klasičnoj balistici. U težištu S rakete djeluju: 1. vlastita težina mg , 2. uzgon A ($\perp W$), 3. otpor uzduha W ($\parallel v$), 4. moment M uslijed djelovanja peraja stabilizatora i 5. potisak P raketnog motora, za koji se ovdje pretpostavlja da je konstantan.



Sl. 20

Uzdužna os rakete zatvara sa pravcem sile P kut β , sa pravcem brzine v kut α , a sa horizontalom kut $\varphi = \alpha + \beta$. Diferencijalne jednadžbe gibanja težišta S rakete u tom slučaju glase

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= P \cos(\alpha - \beta) - mg \sin \vartheta - W, \\ m v \frac{d\vartheta}{dt} &= P \sin(\alpha - \beta) - mg \cos \vartheta + A, \\ m i^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= P \delta - M, \end{aligned}$$

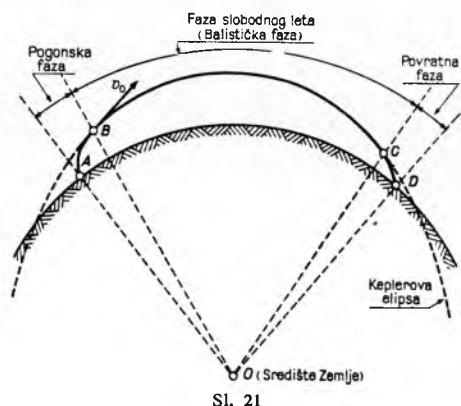
gdje je i polumjer inercije rakete s obzirom na poprečnu os kroz težište, δ krak sile P s obzirom na težište S rakete, a A i W su aerodinamičke sile, koje zavise od kuta α . Ako stabilizatorske peraje nisu tačno poravnane, uzgon A i moment M neće posve nestati ni u slučaju kada je $\alpha = 0$. To odstupanje može se kompenzirati

uvođenjem popravnog kuta γ tako da A i M nestaju kada je $\alpha = \gamma$. Veličine A , W i M određene su izrazima

$$\begin{aligned} A &= c_A \rho v^2 d^2 \sin(\alpha - \gamma), \\ W &= c_W \rho v^2 d^2, \\ M &= c_M \rho v^2 d \sin(\alpha - \gamma), \end{aligned}$$

gdje je ρ gustoća uzduha, d srednji promjer rakete, a c_A , c_W i c_M su koeficijenti uzgona A , otpora W i momenta M .

Putanje raketa malog dometa imaju nisko tjeme ($\rho \approx \text{konst.}$), najveća brzina $v_{\text{max}} = v_0$ relativno je mala i zbog toga se uzima da su koeficijenti c_A , c_W i c_M konstantne veličine. Osim toga, masa goriva takvih raketa mnogo je manja od mase raketa, tako da se promjena mase rakete za vrijeme leta može zanemariti ($m \approx \text{konst.}$), a trajanje izgaranja goriva je veoma malo (oko $1/8$ sek, a kod dalekometnih raketa može trajati i nekoliko minuta). Na osnovu tih



Sl. 21

pretpostavki može se s pomoću gornjih diferencijalnih jednadžbi odrediti putanja težišta rakete.

Putanje *dalekometnih* raketnih projektila leže najvećim dijelom u vrlo visokim regionima atmosfere, dakle u »praznom«
prostoru, dometi i visine tjemena putanje iznose od nekoliko stotina do nekoliko tisuća kilometara i zato se mora uzeti u obzir Zemljina zakrivljenost i njezina vlastita rotacija, kao i nehomogenost polja sile teže. Početni dio takve putanje je zapravo normalna (»klasična«) putanja projektila u otpornoj sredini, iza njega slijedi drugi dio u obliku luka elipse, čiji se jedan fokus nalazi u Zemljinom središtu. Treći, završni dio te putanje odnosi se na period vraćanja projektila u Zemljinu atmosferu (sl. 21). Prema tome, pri proračunu putanje takvih projektila moraju se uzeti u obzir svi navedeni utjecaji. Upravljanje raketom je moguće samo za vrijeme pogonske faze. Tačka A označuje mjesto lansiranja, B je položaj rakete kada prestaje rad pogonskog sistema, C označuje ponovno ulaznje rakete u Zemljinu atmosferu, a tačka D cilj. Diferencijalna jednadžba gibanja rakete u vektorskom obliku glasi u tom slučaju

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = u_1 \frac{dm}{dt} + \vec{W} - m g_0 R^2 \frac{\vec{r}}{r^3} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) - p S \frac{u_1}{u_1}, \quad (25)$$

a zakon po kome se mijenja masa rakete

$$m(t) = m_0 - \int_0^t f(t) dt.$$

U jednadžbi (25) u_1 označuje relativnu brzinu plinskih čestica pri istjecanju iz sapnice rakete, v je brzina rakete, W otpor uzduha, p razlika pritiska plinskog mlaza na izlazu iz sapnice i vanjskog pritiska, S površina izlaznog presjeka mlaznice. Vektorski produkt $-2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{F}_{\text{cor}}$ je Coriolisova sila inercije, gdje $\vec{\omega}$ označuje kutnu brzinu rotacije Zemlje. Treći član na desnoj strani jednadžbe izražava centrifugalnu silu inercije, a u posljednjem je obuhvaćena potrebna korektura za pravac i intenzitet potiska raketnog motora. Otpor uzduha je definiran izrazom

$$\vec{W} = -c_W \rho F (\vec{v} - \vec{u})^2 \cdot \frac{\vec{v} - \vec{u}}{v - u} = -c_W \rho F (v - u) \cdot (\vec{v} \times \vec{u}),$$

gdje je \vec{u} brzina uzduha u odnosu na Zemlju, tako da je $\vec{v} - \vec{u}$ brzina rakete u odnosu na uzduh, ρ gustoća uzduha, F površina srednjeg presjeka rakete, a c_w bezdimenzionalni koeficijent otpora, koji zavisi od oblika rakete, njezine brzine i stanja (temperature i gustoće) uzduha. To stanje je karakterizirano nizom bezdimenzionalnih grupa, od kojih su najvažnije Reynoldsov broj Re i Machov broj Ma . Vrijednost koeficijenta c_w određuje se na osnovu eksperimentalnih podataka vanjske balistike. Numeričkim integriranjem odgovarajućih skalarnih diferencijalnih jednačbi gibanja rakete može se odrediti putanja njenog težišta.

Kozmička balistika rakete proučava gibanje u međuplanetnskom prostoru. Kada raketa dospje u prostor izvan Zemljine atmosfere, podvrgnuta je djelovanju gravitacionih sila Zemlje, Mjeseca i Sunca (problem četiriju tijela nebeske mehanike) i djelovanju potiska raketnih motora. U stanovitom području oko Zemlje može se zanemariti djelovanje gravitacionih polja ostalih planeta Sunčeva sistema.

Pri proučavanju gibanja kozmičke rakete uzima se za ishodište koordinatnog sistema $Oxyz$ središte Zemlje, a osi upravljene k zvijezdama nekretnicama. Neka je \vec{r} vektor položaja rakete, \vec{r}_S i \vec{r}_M vektori položaja Sunca i Mjeseca, a m_Z , m_S i m_M mase Zemlje, Sunca i Mjeseca. Izabrani koordinatni sistem nije inercijalan, ali ukoliko on ne rotira, postoji samo sila inercije prenosnog gibanja uslijed ubrzanog gibanja ishodišta koordinatnog sistema:

$$\vec{L}_p = -m\vec{a}_0.$$

Ubrzanje Zemljinog središta \vec{a}_0 određuje se iz jednačbe

$$m_Z \vec{a}_0 = \gamma \frac{m_S m_Z}{r_S^3} \vec{r}_S + \gamma \frac{m_M m_Z}{r_M^3} \vec{r}_M,$$

koja izražava gibanje Zemlje pod djelovanjem gravitacionih sila Sunca i Mjeseca. Prema tome, prenosna sila inercije je definirana izrazom

$$\vec{L}_p = -m\gamma \left(\frac{m_S}{r_S^3} \vec{r}_S + \frac{m_M}{r_M^3} \vec{r}_M \right).$$

Jednačba gibanja materijalne tačke promjenljive mase (v. *Mehanika*)

$$m \frac{dv}{dt} = F + u_1 \frac{dm}{dt}$$

dobiva u promatranom slučaju, gdje je F rezultanta gravitacionih sila Zemlje, Sunca i Mjeseca, kao i sila inercije, ovakav oblik:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = & -\gamma \frac{m_Z}{r^3} \vec{r} - m_S \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_S}{(r - r_S)^3} + \frac{\vec{r}_S}{r_S^3} \right] - \\ & - \gamma m_M \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_M}{(r - r_M)^3} + \frac{\vec{r}_M}{r_M^3} \right] + \frac{u_1}{m} \frac{dm}{dt}. \end{aligned} \quad (26)$$

Položaj Sunca i Mjeseca za vrijeme gibanja rakete može se tačno izračunati ako su $r_S(t)$ i $r_M(t)$ zadane funkcije vremena. Na taj način, kada je poznat zakon djelovanja potiska rakete, tj. \vec{u}_1 (vektor relativne brzine istjecanja plinskog mlaza), i zakon promjene mase rakete $m(t)$, desna strana jednačbe gibanja je poznata funkcija \vec{r} i t , a te se jednačbe mogu integrirati približnom metodom. Gibanje rakete određeno je početnim uvjetima, i to tačkom u kojoj raketa postiže orbitu i početnom brzinom:

$$(\vec{r})_{t=t_0} = \vec{r}_0 \quad \text{ i } \quad (\dot{\vec{v}})_{t=t_0} = \vec{v}_0. \quad (27)$$

Za polaznu tačku, koja je određena vektorom \vec{r}_0 , pretpostavlja se da se nalazi izvan Zemljine atmosfere. Gibanje rakete sa Zemljine površine do tog položaja određeno je vektorskom diferencijalnom jednačbom (25).

Specijalni slučaj je *gibanje satelitske rakete*, koja se giba na relativno malim udaljenostima od Zemljine površine (nekoliko stotina kilometara), tako da se može zanemariti djelovanje Mjesečeva i Sunčeva gravitacionog polja, pri čemu se vektor potiska

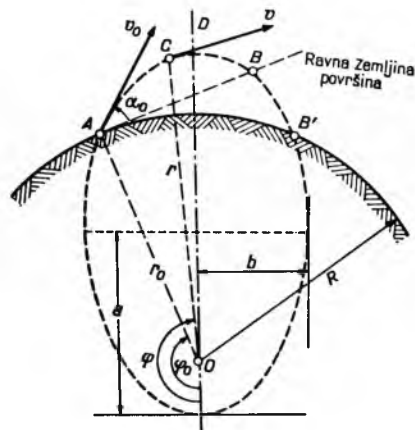
poklapa s pravcem vektora brzine rakete. U tom slučaju jednačba gibanja (26) dobiva oblik

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\lambda}{r^3} \vec{r} + f(t) \frac{\vec{v}}{v},$$

gdje je λ konstanta ($\lambda = \gamma m_Z$), $f(t)$ zadana funkcija vremena koja izražava veličinu potiska reduciranu na jedinicu mase. Putanja rakete je tada ravna krivulja koja leži u ravnini kroz vektore \vec{r}_0 i \vec{v}_0 . Ako u nekom trenutku t_1 potisak prestane djelovati, putanja rakete prelazi u krivulju drugog reda (čunjosjek), čiji su elementi određeni položajem i brzinom u trenutku t_1 , tj. $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ i $\vec{v}_1 = \dot{\vec{v}}(t_1)$, a fokus leži u ishodištu koordinatnog sistema. Jednačba putanje rakete, koja se u tom slučaju giba pod djelovanjem samo Zemljine gravitacije, glasi:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (28)$$

gdje je r udaljenost rakete od Zemljina središta, koje je ujedno pol polarnog koordinatnog sistema, a ϵ ekscentricitet čunjosjeka. U slučaju eliptične putanje rakete za polarnu os se uzima velika os elipse (pravac OD), a φ je kut između vektora položaja \vec{r} i polarne osi (sl. 22). Iz slike se vidi utjecaj Zemljine zakrivljenosti



Sl. 22

na domet rakete. Tačka B' leži niže od tačke B , a time se domeć povećava.

Ako je $\epsilon = 0$, putanja je kružnica, za $\epsilon < 1$ putanja je elipsa, za $\epsilon = 1$ parabola, a za $\epsilon > 1$ hiperbola. Za $\epsilon = 0$ bit će $\alpha_0 = 0$ ili $\alpha = \pi$. Prema tome, *prva kozmička brzina* (cirkularna brzina, brzina kruženja) rakete na Zemljinoj površini bit će

$$v_I = v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = \sqrt{g_0 r_0} = \sqrt{9,81 \cdot 6.37 \cdot 10^6} \text{ m/sek} = 7900 \text{ m/sek},$$

gdje je $\mu = g r_0^2$. Putanja je elipsa ako je $\epsilon < 1$, tj. ako je zadovoljen uvjet

$$v_0 < \sqrt{2 \frac{\mu}{r_0}} = \sqrt{2 g_0 r_0},$$

što znači da će putanja rakete biti elipsa ako je brzina

$$v_0 < \sqrt{2 g_0 r_0} = 11\,180 \text{ m/sek}.$$

U slučaju kada je $v_0 = 11\,180$ m/sek ($\epsilon = 1$) putanja je parabola i tada se brzina $v_0 = v_{II}$ naziva *drugom kozmičkom brzinom* ili *brzinom oslobađanja*. Za $v_0 > 11\,180$ m/sek putanja je hiperbola. U tablici 1 naznačene su vrijednosti v_I za različite visine kruženja, a u tablici 2 vrijednosti v_I i v_{II} za nekoliko prirodnih nebeskih tijela. Sl. 23 prikazuje putanje dalekometne rakete u zavisnosti od brzine v_0 pri konstantnom kutu $\varphi_0 = 30^\circ$. Pri brzini $v_0 \geq v_{II}$ raketa se više ne vraća na Zemlju.

Parabolu koja je određena uvjetom $\epsilon = 1$ ne treba zamijeniti parabolom koja u klasičnoj balistici vrijedi za kosi hitac u polju Zemljine gravitacije, u kome je vektor ubrzanja konstantan po veličini i pravcu (homogeno gravitaciono polje).

Pri letu umjetnog Zemljinog satelita po eliptičnoj putanji trajanje jednog obilaska oko Zemlje određeno je relacijom (koja se zasniva na trećem Keplerovom zakonu)

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{r_0 \sqrt{g_0}}$$

u kojoj je a velika poluos elipse.

Tablica 1

Visina iznad Zemlje u km	200	300	400	500	1000	3000	5000
v_I u m/sek	7791	7732	7675	7619	7356	6525	5924

Tablica 2

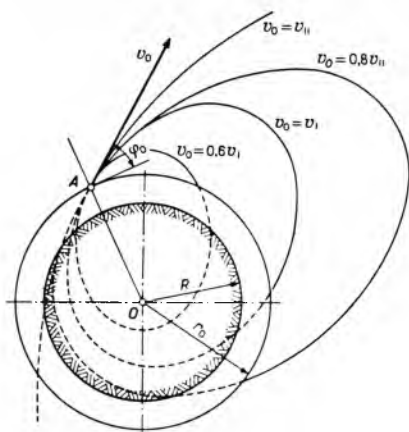
Nebesko tijelo	Polumjer km	Ubrzanje na površini m/sek ²	v_I m/sek	v_{II} m/sek
Zemlja	6 370	9,81	7 900	11 180
Mjesec	1 740	1,61	1 678	2 370
Mars	3 385	3,62	3 554	5 030
Sunce	695 300	273,0	436 400	618 200

Opseg eliptične putanje dobiva se iz izraza

$$O \approx 2\pi a \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right).$$

Brzina satelita na eliptičnoj putanji stalno oscilira između najveće vrijednosti v_P u najbližoj tački (perigeju) i najmanje v_A u najudaljenijoj tački (apogeju). Npr. u slučaju »Sputnika I« (lansiranog 4. X 1957) elementi njegove eliptične putanje imali su vrijednosti: $\epsilon = 0,048$, $r_P = 6598$ km, $r_A = 7267$ km, $r_m = a = 6932$ km, $v_P = 7,970$ km/sek, $v_A = 7,210$ km/sek i $T = 95$ min 48,5 sek.

Ukupno trajanje kruženja umjetnih satelita je ograničeno, jer iako je otpor uzduha na njihovim putanjama veoma malen, njihova se brzina ipak postepeno smanjuje. Odlučujući utjecaj pri tom ima otpor uzduha na visini perigeja. Uslijed toga se vrijednosti ϵ , p , a , b , r_A smanjuju, veličina v_A raste, dok se r_P praktički ne mijenja. Srednja brzina satelita na njegovoj putanji raste, a trajanje jednog obilaska se smanjuje. U slučaju »Sputnika I« smanjenje trajanja obilaska iznosilo je $\Delta T = 2,28$ sek dnevno, a ukupno trajanje kruženja oko 90 dana.



Sl. 23

Drugi specijalni slučaj je gibanje rakete prema Mjesecu sa zadatkom da raketa padne na određeno mjesto na površini Mjeseca. Neka su ξ , η , ζ koordinate tačke na Mjesecu koju treba pogoditi. Gibanje težišta Mjeseca po putanji oko Zemlje i njegova vlastita rotacija (period te rotacije jednak je trajanju Mjesečevog obilaska oko Zemlje) poznati su, i prema tome koordinate ξ , η , ζ , mogu se izračunati kao funkcije vremena u nekom vremenskom intervalu:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t).$$

Pretpostavlja se da su te funkcije poznate i da je zadana tačka u kojoj raketa prelazi na svoju kozmičku putanju, kao i početna brzina v_0 (na kraju pogonskog perioda leta). Prema tome, treba od početnih uvjeta (27) po volji izabrati dvije komponentne brzine, na pr. v_{0x} i v_{0y} ($v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$). Vrijeme t_1 udara rakete u cilj nije unaprijed određeno.

Numeričkim integriranjem jednadžbi gibanja (26), pri čemu se ne uzima u obzir reaktivna sila (potisak), dobivaju se funkcije $x = x(t; v_{0x}, v_{0y})$; $y = y(t; v_{0x}, v_{0y})$; $z = z(t; v_{0x}, v_{0y})$ u kojima konstante v_{0x} i v_{0y} imaju proizvoljne vrijednosti.

Zapravo se pri numeričkom integriranju dobiva familija funkcija vremena, i to za svaki par numeričkih vrijednosti v_{0x} , v_{0y} funkcija $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$. Pogodak u cilj u trenutku t_1 znači da su zadovoljene tri jednadžbe

$$\begin{aligned} x(t_1; v_{0x}, v_{0y}) &= \xi(t_1), \\ y(t_1; v_{0x}, v_{0y}) &= \eta(t_1), \\ z(t_1; v_{0x}, v_{0y}) &= \zeta(t_1), \end{aligned}$$

iz kojih se mogu naći vrijednosti v_{0x} , v_{0y} , t_1 . Na taj je način određeno svih šest veličina početnih uvjeta (27), pa se sada numeričkim integriranjem jednadžbi (26) za interval $t < t_0$ može izračunati putanja rakete koja treba da brzinom v_0 stigne u položaj r_0 (izvan Zemljine atmosfere).

Prvo uspješno lansiranje rakete na Mjesec ostvareno je 12. IX 1959 u SSSR (»Lunik II«), a 4. X 1959 lansirana je prva međuplanetarna automatska stanica (»Lunik III«), koja je izvršila let oko Mjeseca i snimila drugu stranu Mjeseca. Dalji velik napredak na području kozmičke balistike bila su prva uspješna lansiranja kozmičkih sondi u međuplanetarni prostor u blizinu Venere i Marsa, koja su ostvarena u SSSR i USA 1961—63. Time se otvaraju dalje velike perspektive u proučavanju planeta Sunčeva sistema i dalekih dubina svemira.

LIT.: C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Berlin 1925. — L. Hänert, Geschütz und Schuß, Berlin 1935. — J. M. Шапоро, Внешняя баллистика, Москва 1946. — J. Marinković, Unutrašnja balistika, Beograd 1950. — J. Trivunac, Predavanja iz spoljne balistike, Beograd 1951. — J. Marinković, Balistika, u Vojnoj enciklopediji, sv. 1, Beograd 1958. — R. E. Kutterer, Ballistik, Braunschweig 1959. — J. P. Hagen, Ballistics, exterior, i W. Ley, Ballistics, interior, u Mc Graw-Hill Encyclopedia of Science and Technology, New York 1960.

D. Ba.

BARIJ (barijum, Ba, at. br. 56, at. tež. 137,34), metalni element koji spada među rasprostranjenije u Zemljinoj kori (sa 0,04% zauzima po rasprostranjenosti šesnaesto mjesto među elementima a među metalima deseto). Tehnički važni su gotovo samo njegovi spojevi.

U početku XVII st. cipelar-alkemičar Casciarola našao je kraj Bolonje kamen težac (barit) i s njime vršio pokuse; otkrio je da taj kamen grijan s organskim tvarima dobiva sposobnost da svijetli u mraku (bolonjski ili bononski svijetleći kamen). A. G. Marggraf je 1750 iz barita dobio sumpornu kiselinu, ali je tek Gahn 1779 utvrdio da je njegova baza različita od vapna i identična s onom koju je Scheele pronašao i nazvao terra ponderosa. Withering je 1782 otkrio u prirodi barijev karbonat u obliku minerala koji je kasnije po njemu prozvan witherit (viterit). Davy je 1808 elektrolizom malo ovlaženog hidroksida na živinju katodi dobio barijev amalgam; prilično čisti metalni barij iz amalgama dobio je tek A. A. Guntz (1901).

Prirodni barij je smjesa 7 izotopa (u zagradama udio u atomskim procentima): ^{130}Ba (0,102), ^{132}Ba (0,098), ^{134}Ba (2,42), ^{136}Ba (6,59), ^{138}Ba (7,81), ^{137}Ba (11,32) i ^{138}Ba (71,66). U periodnom sistemu elemenata barij se nalazi u grupi IIa (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra) te je u svojim spojevima (s malobrojnim izuzecima) divalentan.

Elektronska konfiguracija spoljnih ljusaka barijeva atoma je ova: $4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^2$. Ioni su mu bezbojni, pa su mu bezbojni i spojevi ukoliko u njihov sastav ne ulaze i obojeni ioni. Za barijeve spojeve karakteristične su crte dužine vala 5242 i 5137 Å u zelenom dijelu plamenog spektra, a u lučnom spektru crte dužine vala 4934 i 4689 Å. Barijeve soli bojadišu Bunsenov plamen žutozeleno, što je za njih karakteristično u odsutnosti bora i fosfora.

Barit (težac), barijev sulfat, danas je jedini tehnički važni mineral barija; iz njega se u tehnici dobivaju praktično svi drugi barijevi spojevi, a služi kao važna nemetalna ruda i za druge svrhe. Udio viterita, prirodnog barijeva karbonata, u proizvodnji barijevih ruda postao je u svjetskom mjerilu beznačajan.

Barit se pojavljuje u pločastim rompskim kristalima i bijelim ili žućkastim sitnozrnatim, vlaknastim, gustim ili zemljastim agregatima; manje čist može biti i crvenkaste, plavičaste, sive ili tamnosive boje. Tvrdoća po Mohsu mu je 3,0...3,5, d 4,3...4,6.