Textilwarenkunde, Berlin 1960. — *W. Watson*, Textile design and colour, London [6]1960. — *V. Pušman*, Prepletaji tkanina, Beograd 1962. — *I. Marinc*, Tkanina, Celje 1962. — *V. Pušman*, Prepletaji žakarskih tkanina, Beograd 1963. — *F. Kočevar*, Tekstilne preiskave I, Ljubljana 1963. — *B. Hauptmann*, Gewebetechnik (Bindungslehre), Leipzig 1965. — *Autorenkollektiv*, Gewebetechnik, Leipzig 1965. — *W. Lange*, Prinzipien und Kennziffern der Gewebekonstruktion, Leipzig 1965.

M. Stupica A. Koman

DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA (nacrtna geometrija), nauka koja pomoću slika u ravnini prikazuje geometrijske i praktične tvorevine u prostoru tako da su one određene i po svom obliku, i po svojoj veličini, i po svom položaju. Slike u ravnini su geometrijski crteži, koji su *projekcije* spomenutih tvorevina.

Sigurno je da građevine sačuvane iz starine, kao što su egipatske piramide i grčki hramovi, nisu improvizirane u toku samog građenja, nego je gradnji nesumnjivo prethodila na neki način izražena zamisao u pogledu njihova oblika, položaja i dimenzija. Poznato je da je Salamunov hram građen od komada kamena koji su svi isklesani prije gradnje, a na gradilištu su samo složeni u gotovu građevinu. Bez upotrebe nekih tlocrta i nacrta ne da se gradnja takvih objekata ni zamisliti. Ti tlocrti i nacrti, koji su prema zapisima rimskih pisaca postojali već za rimskog graditelja Vitruviusa, nisu bili izrađeni matematičkom tačnošću, već su to bile uglavnom više ili manje približne skice čitavog objekta i svih njegovih dijelova, pa i najmanjih. Spomenuti rimski graditelj Vitruvius napisao je 10 knjiga o arhitekturi, iz kojih crpemo prve podatke o načinima gradnje u starom vijeku. Najstariji i najzanimljiviji sačuvani tlocrt potječe navodno iz VIII st. Na 4 stope dugom i 3 stope širokom pergamentu prikazao je monah Gernug tlocrt samostana St. Gallen (v. *Arhitektura*, TE 1, str. 354).

U srednjem vijeku tlocrti i nacrti bili su zapravo ili čisti ili nadopunjeni presjeci, koje je svaki graditelj crtao na svoj način, a postupke kojima je do njih dolazio čuvao je redovito kao strogu tajnu.

Svladavši uz velike poteškoće kaos tih heterogenih, stoljećima u primjeni stvaranih metoda, objelodanjuje 1795 Gaspard Monge (1746—1818) svoju »Géométrie descriptive«, kojom stvara novu nauku, deskriptivnu geometriju. Bilo je, istina, i do tada objelodanjenih knjiga u kojima su se autori služili tlocrtom i nacrtom, a za koje bi se moglo reći da su imale deskriptivnogeometrijski sadržaj, npr. knjige o stereotomiji (nauci o klesanju kamena), ali to su sve bile knjige samo za praktičnu stručnu primjenu. I perspektiva — danas kao poglavlje o centralnim projekcijama dio deskriptivne geometrije — ima historiju koja počinje već u starom vijeku, i o njoj su i prije Mongeova vremena napisane knjige (v. poglavlje Centralne projekcije u ovom članku). Ali u njima predmet nije obrađen naučno, već su to bile knjige za praktične potrebe slikara i graditelja. U Mongeovoj »Géométrie descriptive« prvi put je sistematski izložena grafička matematički tačna metoda za rješavanje teoretskih i praktičnih prostornih geometrijskih zadaća. Mongeova »Géométrie descriptive« bila je mnogo godina u rukopisu državna tajna. Tek zakonom o osnutku »École normale« od 30. X 1794. dozvoljeno je na toj školi javno predavati deskriptivnu geometriju, i prvi profesor tog predmeta, Gaspard Monge, mogao je objaviti svoju knjigu. Poslije toga se deskriptivna geometrija naglo širi po čitavoj Evropi. Nekoliko ljudi zaslužnijih za njeno širenje i usavršavanje nosili su ova prezimena: Mannheim, Gournerie, Wiener, Fiedler, Peschka, Loria, Rhon, Papperitz, Müller, Majcen.

Projiciranje. Pod projekcijom jedne tačke A na neku ravninu Π razumijeva se probodište A' jedne zrake koja prolazi tom tačkom (*projicirajuće zrake*) s ravninom Π (*ravninom projekcijâ*). Imamo li neki trokut $A\,B\,C$, pa njegovim vrhovima postavimo zrake okomite na ravninu Π, zvat će se trokut $A'B'C'$ probodištâ tih zraka *okomitom* ili *ortogonalnom projekcijom* tog trokuta na toj ravnini. Ako su projicirajuće zrake kose prema ravnini Π, označuje se trokut probodišta s tim zrakama sa $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ i naziva *kosom projekcijom* trokuta $A\,B\,C$. Prolaze li sve tri projicirajuće zrake jednom tačkom O, dat će dobivena tri probodišta $A_c\,B_c\,C_c$ na ravnini Π *centralnu projekciju* ili *perspektivnu sliku* tog trokuta. Sve projicirajuće zrake koje prolaze tačkama jednog pravca čine *projicirajuću ravninu* (zračnu ravan), koja ravninu projekcija Π siječe u projekciji tog pravca.

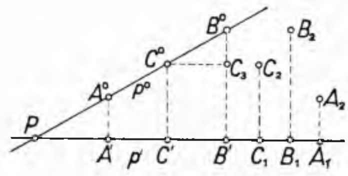
Centralna projekcija lika paralelnog s ravninom projekcija je lik sličan tom liku u prostoru i njemu slično položen; paralelna projekcija takvog lika je lik sukladan s tim likom u prostoru i njemu slično položen. To proizlazi iz činjenice da su paralelni presjeci stošca ili piramide slični i slično položeni likovi, a takvi presjeci valjka ili prizme sukladni i slično položeni likovi.

Okomita projekcija na ravninu. Okomitom projekcijom A' u ravnini projekcijâ nije tačka A u prostoru određena budući da nije poznata njena udaljenost iznad ili ispod te ravnine. Ova se udaljenost može zadati na više načina, i to ili grafički, tj. tako da se ta udaljenost negdje nariše, ili numerički, tj. tako da se uz tu projekciju označi broj jedinica udaljenosti nekog mjerila kojim je ta udaljenost izmjerena.

Kut α što ga okomita projekcija d' neke dužine d na ravninu projekcijâ zatvara s tom dužinom naziva se *priklonim kutom* dužine d prema ravnini projekcijâ. Očito je da će biti $\cos\,\alpha = d' : d$ ili $d' = d\,\cos\,\alpha$. Ako kut α raste, vrijednost njegova kosinusa pada. Izlazi, dakle, da je prikloni kut neke dužine prema ravnini projekcija to veći što mu je kraća okomita projekcija na toj ravnini i obratno. Okomita projekcija pravca okomitog na ravninu projekcijâ ($\alpha = 90°$) bit će tačka, zbog $\cos\alpha = 0$; okomita projekcija paralelne dužine bit će, zbog $\cos 0° = 1$, jednaka toj dužini.

Zada li se neka dužina $A\,B$ u prostoru njenom okomitom projekcijom $A'\,B'$ i udaljenostima $A\,A' = A_1\,A_2$, $B\,B' = B_1\,B_2$ (sl. 1), prava se veličina te dužine može crtanjem u ravnini projekcija dobiti ovako: nepravilan četverokut $A'\,B'\,B\,A$ s dva prava kuta preklopi se (prevali za 90°) oko stranice $A'\,B'$ u ravninu projekcijâ, gdje će tačke A, B pasti u tačke $A°$, $B°$, a stranica će $A°\,B°$ tog prevaljenog četverokuta biti jednaka pravoj veličini dužine $A\,B$. Budući da su stranice $A\,A'$, $A'\,B'$ i $B\,B'$, kao i kutovi $A\,A'\,B' = 90°$ i $B\,B'\,A' = 90°$ poznati, lako je nacrtati taj četverokut, dakle i pravu veličinu dužine $A\,B$. Od sada ćemo svaku tačku P i svaki pravac p prevaljene za 90° (preklopljene) označavati s $P°$, odnosno $p°$. Probodište pravca p dužine $A\,B$ s ravninom projekcija nalazit će se u sjecištu P pravaca p i $p°$, budući da je ta tačka P pri malo prije opisanom preklapanju ostala na miru.

Treba li na projekciji p' pravca p odrediti projekciju tačke C', kojoj je visina $C'\,C$ jednaka dužini $C_1\;C_2$, onda se to čini ovako (sl. 1): na spojnicu $B'\;B°$ nanese se od tačke B' dužina $C_1\;C_2$ do tačke C_3. Tačkom C_3 povučena paralela $C_3\;C° \parallel p'$ siječe dužinu $A°\,B°$ u preklopljenom položaju $C°$ tražene tačke. Okomica $C°\,C'$ siječe pravac p' u traženoj tački C'. Kut $\sphericalangle\, p'\,p°$ je prava veličina priklonog kuta pravca p prema ravnini projekcija.

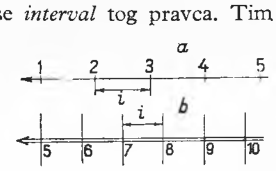


Sl. 1

Takvo prevaljivanje (obaranje) je jedna od temeljnih prostornih operacija kojima je omogućeno grafičko predočivanje prostornih tvorevina u ravnini.

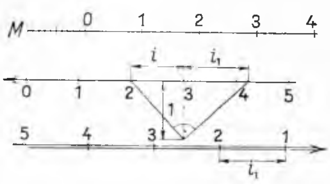
Kotirana projekcija. Udaljenost neke tačke od njene okomite projekcije na ravnini projekcija, izražena brojem jedinica nekog zadanog mjerila, zove se *kota* te tačke. Ako se geometrijske i praktične tvorevine prikazuju tako da su im pojedine tačke određene svojim okomitim projekcijama i kotama, kaže se da se one prikazuju u *kotiranoj projekciji.* Uz svaku sliku u kotiranoj projekciji mora dakle biti zadano i mjerilo da bi tom slikom prikazana tvorevina u prostoru bila određena. Takvo se mjerilo redovito zadaje nekim omjerom; npr. u mjerilu $M = 1 : 100$ bit će svakom jedinicom tog mjerila predočena sto puta veća dužina u prirodi, npr. jednim centimetrom bit će prikazan jedan metar, i to vrijedi ne samo za kote pojedinih tačaka nego i za sve tri dimenzije svakog prikazanog tijela. Drugim riječima, kotiranom projekcijom neke prostorne tvorevine, uz zadano mjerilo $M = 1 : 100$, određena je nova sto puta manja geometrijski slična tvorevina, kojom je ona prva u prostoru potpuno određena.

Pravac se u kotiranoj projekciji prikazuje tako da se na njegovoj projekciji ucrtaju i označe projekcije tačaka koje imaju cjelobrojne kote (sl. 2 a). Razmak i između takvih dviju susjednih projekcija tačaka sa cjelobrojnim kotama zove se *interval* tog pravca. Tim intervalom određen je i tangens n njegovog priklonog kuta prema ravnini projekcije, jer je $n = 1 : i$. Za ovako nacrtanu projekciju pravca kažemo da je *graduirana.* Ako je nagib n (tangens kuta priklona) jednak, recimo, $2 : 5$ na slici mjerila $M = 1 : 100$ s jedinicom 1 cm, bit će interval tog pravca $i = 5 : 2$, dakle 2,5 cm. Iz činjenice da je $i = 1 : n$ izlazi već poznata činjenica da je kotirana projekcija neke dužine to kraća što ona ima veći prikloni kut. Ako je prikloni kut 90°, $n = \infty$, a $i = 0$.



Sl. 2

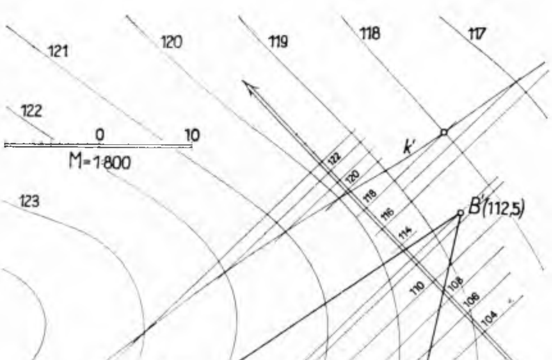
Posve analogno kao pravac prikazuje se u kotiranoj projekciji i ravnina. Pravci ravnine koji su paralelni s ravninom projekcijâ zovu se *slojnice* ili *izohipse* (ili paralele) te ravnine. Ako tačke tih slojnica imaju cjelobrojne kote (sve tačke iste slojnice imaju, dakako, jednake kote), takve se slojnice zovu *glavne slojnice* te ravnine, a sve ostale su njene sporedne slojnice. Pravci ravnine okomiti na slojnicama zovu se *priklonice* (ili nagibnice) te ravnine jer je njihov prikloni kut (odn. nagib) jednak priklonom kutu (nagibu) te ravnine. Okomitim projekcijama svojih slojnica svaka je ravnina, uz zadano mjerilo, u prostoru određena. Budući da su projekcije slojnica okomite na projekcijama priklonica, svaka je ravnina određena graduiranom projekcijom jedne priklonice, koju zovemo *mjerilom nagiba* te ravnine (sl. 2 b). Razmak između projekcija slojnica zovemo intervalom i ravnine, a taj se interval podudara s intervalom njenog mjerila nagiba. Budući da je prikloni kut α nekog pravca p okomitog na ravninu ϱ s priklonim kutom β jednak $\alpha = 90° - \beta$, to je $i = 1 : i_1$, odnosno $n = 1 : n_1$, dakle $i = n_1$, ako su i, i_1 intervali, a n, n_1 nagibi tog pravca i te ravnine. Konstruktivno određivanje intervala i_1 iz intervala i vidi na sl. 3. Iz dosadanjih razmatranja lako se vidi da je svaki pravac ravnine graduiran njenim slojnicama i da dva paralelna pravca imaju paralelne projekcije i jednake intervale a nagnuti su na istu stranu. Budući da je pravac okomit na ravnini okomit i na njenim slojnicama, mora projekcija tog pravca biti okomita na projekcijama tih slojnica, dakle paralelna s njenim mjerilom nagiba. Takav pravac i mjerilo nagiba nagnuti su uvijek na suprotne strane.



Sl. 3

Kotirana projekcija stvorena je uglavnom za grafičko prikazivanje terena i za rješavanje praktičnih zadaća na terenu. One crte na terenu kojih tačke imaju cjelobrojne kote jednakih vrijednosti zovu se slojnice ili izohipse terena. Okomitim projekcijama tih slojnica, nacrtanim u nekom zadanom mjerilu, bit će teren u prostoru određen. Očito je da izbor mjerila ovisi o odnosu između veličine terena koji se želi prikazati i ograničenog opsega papira na kojem se crta. Ako je na papiru uz malo mjerilo prikazan veliki dio terena, neće se crtati projekcije izohipsa za svaki metar visinske razlike, nego se unosi svaka deseta, pedeseta ili stota slojnica. Tri osnovne teoretske zadaće u kotiranoj projekciji koje su potrebne u praktičnoj primjeni za rješavanje problema na terenu jesu ove: 1. određivanje slojnica ravnine zadane trima tačkama, 2. polaganje ravnine zadanog nagiba kroz zadani pravac, 3. povlačenje pravca zadanog nagiba u zadanoj ravnini.

1. *Graduiranje ravnine zadane trima tačkama.* Ta se zadaća rješava tako da se spojnica projekcijâ dviju od zadanih tačaka, recimo A', B', graduira, i onda projekcija treće tačke (C') spoji pravcem s onom tačkom na spojnici A' B' koja ima istu kotu kao tačka C. Tako dobivena spojnica je slojnica tražene ravnine kroz tačku C. Glavne slojnice tražene ravnine su paralelne s tom slojnicom i prolaze tačkama spojnice A' B' koje imaju cjelobrojne kote. Taj ćemo postupak ilustrirati rješenjem jednog praktičnog problema.

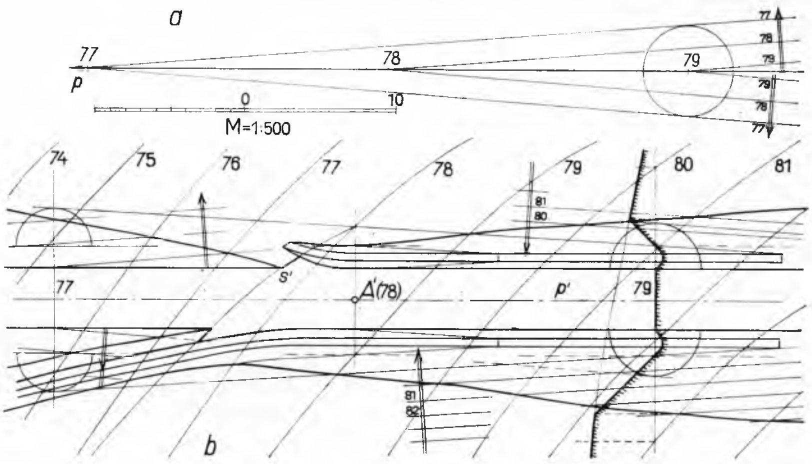


Sl. 4

Na terenu koji je snimljen i zadan na slici 4 slojnicama u mjerilu 1:800 otkrivena je u zemlji naslaga rude. Radi racionalne eksploatacije te rude treba na terenu otkriti jedno ili više mjesta odakle će se kopanjem najlakše i najbrže doprijeti do nje. Da se to postigne, izvrši se na tri razna mjesta bušenje sve do gornje granične plohe sloja rude (na sl. 4 neka su A, B, C tačke na kojima su bušotine probile tu graničnu plohu) i odrede se kote tih triju tačaka. Ravnina tih triju tačaka je gornja granična ploha sloja rude; ako se tom ravninom presiječe teren, bit će od te presječnice k u smjeru priklonica te ravnine najkraći put do tog sloja rude. Neka se bušenjem ustanovilo da su spomenute tri tačke A (117), B (112,5) i C (99).

Zamislimo sada da je ravnina naše slike u visini tačke B (112,5), pa u tu ravninu preklopimo dužinu A C. Kao što znamo, treba postaviti $A'A° = 117 - 112{,}5 = 4{,}5$ i $C'C° = 112{,}5 - 99 = 13{,}5$ jedinica našeg mjerila i $A'A° \parallel C'C° \perp A'C'$. Dužine $A'A°$, $C'C°$ treba međutim nanijeti na različne strane, jer su tačke A, C na različnim stranama ravnine slike. Tačkom u kojoj dužina $A°C°$ siječe projekciju $A'C'$ prolazi projekcija sporedne slojnice 112,5 ravnine tačaka A B C, koja prolazi i tačkom B'. Odredimo li na stranici $A'C'$ projekcije još nekoliko susjednih tačaka s cjelobrojnim kotama, kao što je to učinjeno na sl. 1 s tačkom C, i njima povučemo paralele s projekcijom sporedne slojnice 112,5, bit će to glavne slojnice tražene ravnine. Ostale slojnice možemo nadopuniti prema potrebi pomoću mjerila nagiba, a spojnica sjecišta slojnica jednakih kota terena i ravnine je tražena presječnica k. Na našoj slici je izvučena kotirana projekcija k' te presječnice.

2. *Polaganje ravnine zadanog nagiba zadanim pravcem.* Na sl. 5a zadan je u mjerilu $M = 1 : 500$ pravac p kojemu je nagib $n = 1 : 20$, a njime treba položiti ravninu koja ima nagib $n_1 = 2 : 3$. Na zadanom pravcu označene su tačke 77, 78 i 79 kojima je međusobni razmak $i = 20$ jedinica našeg mjerila, budući



Sl. 5

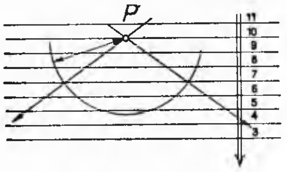
da je $i = 1 : n$. Tim tačkama treba povući paralelne pravce u razmacima $i_1 = 1 : n_1 = 3 : 2 = 1{,}5$ jedinica mjerila; ovi će pravci biti slojnice traženih ravnina. Ako se, recimo, oko tačke 79 opiše kružnica polumjera 3, a iz tačke 77 povuče na tu kružnicu tangenta, bit će ta tangenta slojnica 77 tražene ravnine. Ostalim tačkama (cjelobrojnih kota) pravca p povučene paralele s tom tangentom bit će daljnje slojnice te ravnine budući da je njihov razmak $i_1 = 1{,}5$. Kao što se vidi, postoje dvije takve ravnine.

Tom teoretskom zadaćom koristimo se pri rješavanju ovakve praktične zadaće: na terenu koji je na sl. 5 b prikazan u mjerilu $M = 1 : 500$ treba provesti ravnu cestu široku 4 m, koja u tački A ima kotu 78, a na lijevu stranu ima pad 5%. Tačkom A povučeni pravac p neka je os ceste. Interval nagiba (5% = 1 : 20) ceste je $i = 20$.

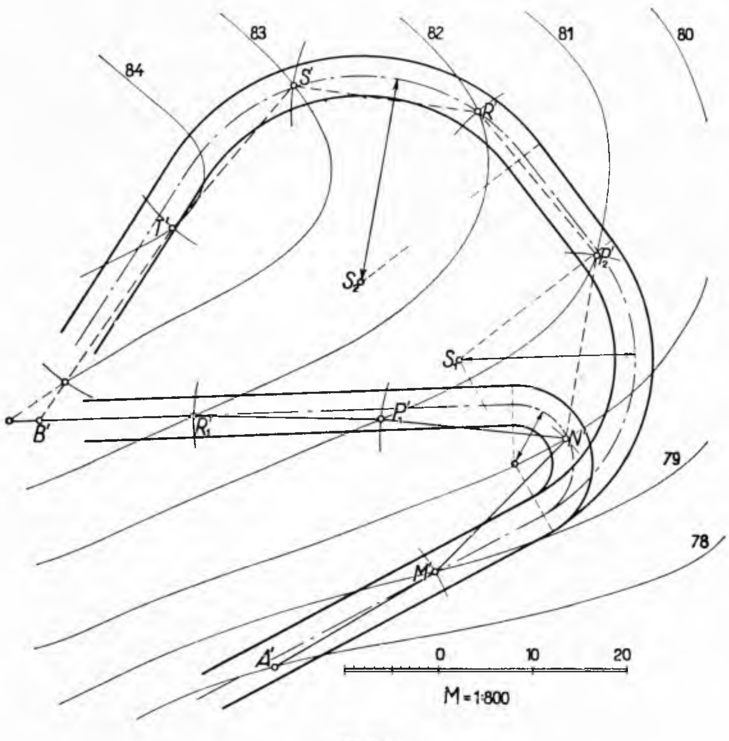
Pošto se nacrta i graduira planum ceste, odrede se na njenim rubovima, pomoću presječnice s ravnine ceste s terenom, tačke koje dijele lijevi dio ceste iz nad terena od desnog dijela u terenu. Duž rubova lijevog dijela ceste trebat će, prema tome, postaviti nasipne ravnine, a duž rubova desnog dijela ceste usječne ravnine. Nagib nasipnih ravnina neka je $n = 2 : 3$, dakle $i = 1{,}5$, a nagib usječnih ravnina $n_1 = 1 : 1$, dakle $i_1 = 1 : 1 = 1{,}00$. Opiše li se oko krajnjih tačaka 79. slojnice planuma ceste kružnica polumjera 2, bit će iz krajnjih tačaka 77 slojnice planuma na istoj strani povučene tangente na te kružnice 77. slojnice traženih nasipnih ravnina. Kao i na sl. 5 a, te ravnine nadopune se ostalim slojnicama i odrede se njihove presječnice s terenom.

Uz rubove ceste, na dijelovima gdje dolaze usjeci, treba postaviti jarke, da se njima odvede voda koja teče niz usječne ravnine i koja bi inače zamuljila cestu. Jarci uz rubove ceste mogu imati svagdje jednaku dubinu ier će imati pad zajedno s cestom. Dubina jarka i širina njegova dna uzima se 0,5 m. Kotirana projekcija jarka izvodi se pomoću tzv. *profila*, tj. okomitog presjeka terena i onog što se na njemu i u njemu nalazi, prevaljenog u ravninu crtnje. Takav profil nacrtan je nakon preklapanja okomitog presjeka ceste i terena oko 79. slojnice u ravninu slike, za koju pretpostavljamo da ima kotu 79. Za nagib usjeka jarka do ceste uzimamo 45°, a s druge strane ide usječna ravnina od dna jarka. Pomoću ovih podataka nadopuni se prevaljeni profil profilom jarka i usječne ravnine. Vrhovima profila vraćenim na trag profilne ravnine prolaze projekcije bridova umetnutog jarka. Uz onaj rub jarka koji nije uz cestu postavlja se sada usječna ravnina zadanog nagiba kao na sl. 5 a. Spojnice sjecišta istoimenih slojnica tih dviju ravnina i terena daju tražene presječnice terena s usječnim ravninama. Da oborinska voda ne bi oštetila donji dio nasipa i nosila prema njemu mulj, ona se odvede tamo gdje nije opasna, time što se jarak donjeg usjeka u udaljenosti od jednog metra od tog nasipa produži dalje po terenu. Uz gornji nasip takav jarak nije potreban jer voda po terenu teče od nasipa.

3. *Povlačenje pravaca zadanog nagiba zadanom tačkom u zadanoj ravnini* (sl. 6 a). Ravnina nagiba $n = 2 : 3$ ($i = 1{,}5$) zadana je u mjerilu $M = 1 : 800$. Zadana tačka P neka je na slojnici 10, a traženi pravci neka imaju nagib $n_1 = 3 : 8$ ($i_1 = 8/3$). Budući da slojnice ravnine graduiraju svaki njen pravac, to treba tačkom P povući pravce tako da oni slojnice zadane ravnine sijeku u tačkama kojima je razmak $i_1 = 8/3$. Ako se prema tome opiše oko tačke P kružnica kojoj je polumjer $3\,i_1 = 3 \cdot 8/3 = 8$, a njena sjecišta sa slojnicom 7 spoje s tačkom P, bit će te spojnice projekcije traženih pravaca. Budući da je udaljenost tih sjecišta do tačke P (10) jednaka 8, bit će razmak između sjecišta te dužine sa slojnicama 7, 8, 9 i 10 jednak 8/3, a to je upravo interval i traženih pravaca.



Sl. 6 a



Sl. 6 b

Analogni postupak praktično se primjenjuje pri rješavanju ovog zadatka (sl. 6 b): na terenu, koji je zadan u mjerilu $M = 1 : 800$, treba ucrtati trasu ceste široke 4 m, koja polazeći od tačke A na slojnici 78 mora proći tačkom B na slojnici 83 (na našoj slici je izvan njenog okvira), a njen uspon ne smije premašiti 5%, tj. $n = 1 : 20$, a $i = 20$. Presiječe li se lukom polumjera $r = 20$ opisanim oko tačke A' slojnica 79 u tački M', bit će spojnica tačaka $A\,M$ na terenu linija koja ima nagib $n = 1 : 20$. Učinivši isto to oko tačke M', dolazi se do tačke N', a preko ove na isti način do daljnjih takvih tačaka P_1', R_1', $\cdots$, ili P_2', R_2', $\cdots$ Budući da svaki takav luk opisan oko jedne tačke na jednoj slojnici siječe iduću slojnicu bar u dvije daljnje tačke, može se od tih idućih tačaka uvijek jedna odabrati tako da spojna slomljena linija idući sve dalje konačno prođe približno tačkom B'. Uz ovakvu slomljenu spojnu liniju nacrta se projekcija trase tražene ceste. Ta se trasa može graduirati tako da njene slojnice prolaze bilo tačno bilo približno dobivenim tačkama na toj slomljenoj spojnoj liniji. Ovako postavljene trase traže se zato što će za njih, uz zadani maksimalni uspon, biti potrebno izgraditi najmanje usjeka i nasipa, dakle će i gradnja takve ceste ili željeznice biti najracionalnija.

U gradnji takvih saobraćajnica može biti zadana i maksimalna zakrivljenost trase na zavojima. Naša trasa duž tačaka A', M', P_1', R_1', $\cdots$ ima nedaleko tačke N' zavoj (cesta je serpentina), kojemu polumjer zakrivljenosti iznosi približno 6 m. Za brzi saobraćaj motornim vozilima ta bi zakrivljenost vjerojatno bila daleko prevelika (polumjer zakrivljenosti premalen). Tome se može doskočiti tako da se od tačke N dalje odabere nova trasa prema drugom sjecištu P_2 na idućoj slojnici 81, a odavde dalje preko tačaka R_2, S i T do tačke B tako da se uz ovu slomljenu približnu os može postaviti 4 m široka cesta s mnogo manjim zakrivljenostima. Na dijelu trase između tačaka N', P_2' iznosi polumjer zakrivljenosti, uz zgodno odabrano središte S_1, $\sim$20 m, a na dijelu trase između tačaka P_2', T', uz središte S_2, $\sim$23 m.

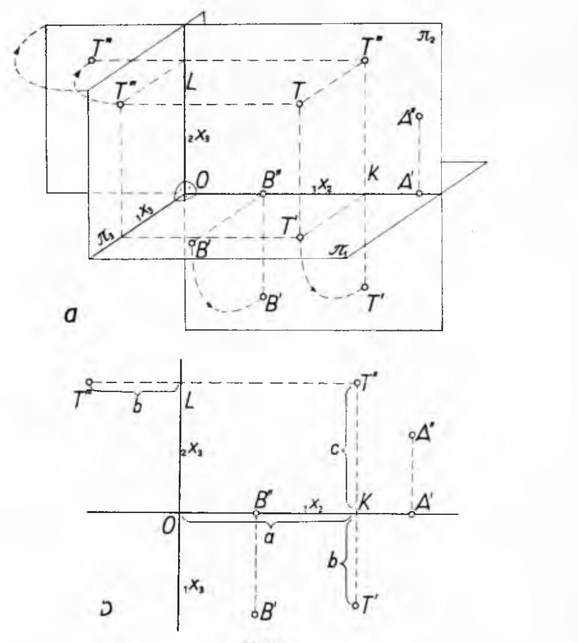
Osim ovdje spomenutih triju terenskih zadaća koje se rješavaju u kotiranoj projekciji, mogu se u toj projekciji riješiti i mnoge druge terenske zadaće, kao npr. najpovoljnije smještanje tunela itd.

ORTOGONALNA PROJEKCIJA

Projiciranje tačke. U kotiranoj projekciji udaljenost tačke od njezine okomite projekcije na ravninu crtnje, kota te tačke, zadaje se numerički. No tačka se u prostoru može zadati i bez takve kote, i to ovako (sl. 7 a): okomito na ravninu crtnje, koja neka bude označena sa Π_2, postavi se još jedna ravnina, koja se označi sa Π_1. Ove dvije ravnine zovu se *nacrtna* i *tlocrtna ravnina*, ili druga i prva ravnina projekcijâ, a njihova presječnica zove se os ${}_1x_2$. Projicira li se sada okomito neka tačka T na ove ravnine Π_1 i Π_2 u tačke T' i T'', bit će tačka T u prostoru tim projekcijama potpuno određena. Tačka T' zove se *tlocrt*, a tačka T'', *nacrt* tačke T.

Spuste li se iz tačaka T', T'' okomice na os ${}_1x_2$, past će nožišta tih okomica u jednu tačku K, jer ta je tačka sjecište osi ${}_1x_2$ s ravninom tačaka T, T', T'', koja je okomita na ravnine Π_1 i Π_2, dakle i na os ${}_1x_2$. Zbog $\Pi_1 \perp \Pi_2$ i $T\,T'' \perp \Pi_2$, $T\,T' \perp \Pi_1$ bit će lik $T\,T''K\,T'$ pravokutnik u kojemu je $T\,T' = T''K$, a $T\,T'' = T'K$, gdje je $T\,T'$ udaljenost te tačke od ravnine Π_1, a $T\,T''$ udaljenost od ravnine Π_2. Zamislimo sada ravninu Π_1 preklopljenu oko osi ${}_1x_2$ u ravninu crtnje Π_2, i to prednju stranu prema dolje. Tačka T' past će u nastavak okomice $T''K$ na os ${}_1x_2$, jer okomica $T'K$ ostaje okomita na os ${}_1x_2$ i poslije tog preklapanja. Ravnina Π_1 ovako preklopljena u ravninu crtnje Π_2 prikazana je na sl. 7 b. Može se zamisliti da su projekcije u ravnini crtnje nastale i tako da je tlocrtna ravnina učinjena ravninom slike, a nacrtna ravnina preložena oko osi ${}_1x_2$ prema natrag. Tačka T nalazit će se tada iznad tačke T' udaljena od nje za duljinu $K\,T'$. Ako se neka tačka A nalazi u ravnini Π_2, očito je da je njen nacrt A'' u toj tački, a tlocrt A' u osi ${}_1x_2$. Isto će tako tlocrt tačke B, koja je u ravnini Π_1, biti u toj tački a njen nacrt u osi ${}_1x_2$. To proizlazi iz činjenice da su ravnine Π_1 i Π_2 jedna na drugoj okomite.

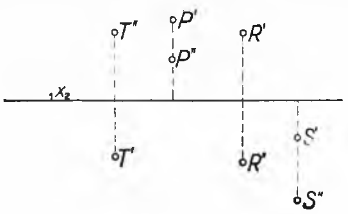
Zada li se neka nova ravnina Π_3 okomita na ravnine Π_1 i Π_2, pa se na nju okomito projicira tačka T u tačku T''', a onda oko njene presječnice (osi) ${}_2x_3$ ta ravnina preklopi zajedno s tačkom T''' nalijevo u ravninu crtnje Π_2, mora se tako preklopljena tačka T''' dati konstruktivno odrediti na sl. 7 b, jer je ona u prostoru uz zadane ravnine Π_1 i Π_2 potpuno određena. Zada li se ravnina Π_3 osju ${}_2x_3$, siječe ravnina tačaka $T''T\,T'''$ os ${}_2x_3$ u tački L, gdje je $T''L \perp {}_2x_3$ i $T'''L \perp {}_2x_3$, dakle pri preklapanju ravnine Π_3 oko osi ${}_2x_3$ tačka T''' pada u nastavak okomice $T''L$ na tu os. Ali kako je $T\,T'' = T'K = T'''L$, dobit će se na sl. 7 b tačka T''' tako da se tačkom T'' povuče okomica na os ${}_2x_3$ i od njenog sjecišta L do tačke T''' nanese dužina $T'K$. Tačka T'''



Sl. 7

zove se *bokocrt* (ili profilna projekcija) tačke T, a ravnina Π_3, naziva se *bokocrtna ravnina* (profilna ravan, profilnica).

Ravnine projekcijâ Π_1 i Π_2 dijele cio prostor na četiri dijela koji se zovu *kvadranti*. Prednjem gornjem kvadrantu daje se oznaka I, stražnjem gornjem oznaka II, stražnjem donjem oznaka III i prednjem donjem oznaka IV. Tačka T (sl. 7 b), koja je u kvadrantu I, ima uz opisano preklapanje tlocrt T' ispod osi ${}_1x_2$ a nacrt T'' iznad te osi. Ako je neka tačka P u kvadrantu II, imat će ona i P' i P'' iznad osi ${}_1x_2$, jer je ona iznad Π_1 ali iza Π_2. Kad je neka tačka R u kvadrantu III, tj. ispod Π_1 i iza Π_2, bit će R' iznad, a R'' ispod osi ${}_1x_2$. Za tačku S u kvadrantu IV, dakle ispod Π_1 i ispred Π_2, bit će S' i S'' ispod osi ${}_1x_2$. Označi li se udaljenost tačke T od ravnine Π_1 sa c, od ravnine Π_2 sa b, a od ravnine okomite na Π_1 i Π_2, koja prolazi nekim ishodištem O, sa a, onda se uz zadanu os ${}_1x_2$ i tačku O tačka T numerički zadaje ovako: $T(a, b, c)$. Duljine a, b, c zovu se *koordinate* tačke T, ako su ravnine Π_1 Π_2, Π_3 koordinatne ravnine. Koordinate



Sl. 8

tačaka ispred ravnine Π_2 i iznad ravnine Π_1 smatramo pozitivnima ($+b$, $+c$), a koordinate na suprotnim stranama negativnima ($-b$, $-c$), dok predznak koordinate a ne može odlučiti o tom u kome će se kvadrantu tačka nalaziti. Koordinate su tačaka T, P, R, S s obzirom na predznake, dakle, ovakve: $T\ (\pm\ a, b, c)$, $P\ (\pm\ a, -b, c)$, $R\ (\pm\ a, -b, -c)$ i $S(\pm\ a, b, -c)$ (sl. 8). Ako je, prema tome, neka tačka ovako numerički zadana njenim koordinatama, odmah će se prema predznacima vidjeti u kojem se kvadrantu ona nalazi.

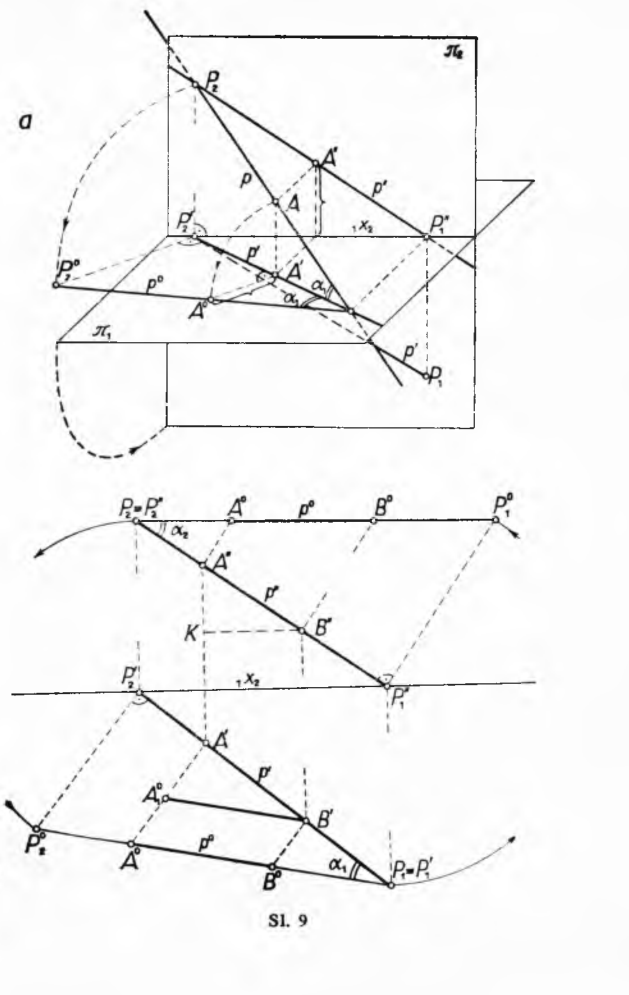
Pravac i dužina. Spuste li se u svima tačkama nekog pravca p okomice na ravnine Π_1 i Π_2, činit će te okomice dvije ravnine, koje se zovu prva i druga *projicirajuća ravnina* (zračna ravan) tog pravca. Presječnica prve s ravninom Π_1 je tlocrt p' pravca p, a presječnica druge s ravninom Π_2 je nacrt p'' tog pravca. Očito je da su projicirajuće ravnine okomite na pridružene ravnine projekcijâ. Budući da probodišta P_1, P_2 pravca p s ravninama Π_1 i Π_2 leže u tim ravninama, bit će nacrt P_1'' prvog probodišta i tlocrt P_2' drugog probodišta u osi ${}_1x_2$ (sl. 9 a). Pretpostavi li se opet da je ravnina Π_1 preložena oko osi ${}_1x_2$ u ravninu crtnje Π_2 (a to će se odsad bez izričitog spominjanja uvijek pretpostaviti), pa se pravac p zada njegovim tlocrtom p' i nacrtom p'', lako se može odrediti njegovo prvo (P_1) i drugo (P_2) probodište (sl. 9 b). U sjecištu $P_1'' = {}_1x_2 \times p''$ postavljena okomica na os ${}_1x_2$ siječe pravac p' u prvom probodištu P_1 (gdje je $P_1 \equiv P_1'$), a u sjecištu $P_2' = {}_1x_2 \times p'$ postavljena okomica na os ${}_1x_2$ siječe pravac p'' u drugom probodištu P_2 (gdje je $P_2 \equiv P_2''$). Dužina $P_1 P_2$ pravca p nalazi se u kvadrantu I, dio tog pravca ispod probodišta P_1 nalazi se u kvadrantu IV, a njegov dio iznad probodišta P_2 u kvadrantu II, što se lako može zaključiti po smještaju prvih i drugih projekcija tačaka tog pravca na spomenutim dijelovima.

Pravci paralelni s ravninom Π_1 imat će tlocrte paralelne s tim pravcima u prostoru, dakle će im nacrti biti paralelni s osi ${}_1x_2$. Analogno vrijedi i za pravce paralelne s ravninom Π_2.

Prava veličina dužine $P_1 P_2$ na sl. 9 b može se konstruktivno odrediti tako da se prva projicirajuća ravnina pravca p zamisli prevaljena oko pravca p' u ravninu Π_1, gdje će pravac p pasti u pravac p° (v. sl. 9 a). Tačka P_1' ostat će pri tom na miru, a tačka P_2 past će u tačku P_2° na okomici postavljenoj u tački P_2' na pravac p'. Pri tom mora, prema tome, biti $P_2 P_2' = P_2' P_2^\circ$ jer je $P_2^\circ P_2' P_1$ prevaljeni položaj pravokutnog trokuta $P_2 P_2' P_1$, dakle je $P_2^\circ P_1$ prava veličina dužine $P_2 P_1$. Na posve isti način može se prava veličina te dužine dobiti i preklapanjem druge projicirajuće ravnine u ravninu Π_2 oko pravca p''. Kut α_1 što ga zatvaraju pravci p°, p' prava je veličina priklonog kuta pravca p prema ravnini Π_1 (*prvi prikloni kut*). Isto tako je α_2 *drugi prikloni kut* tog pravca.

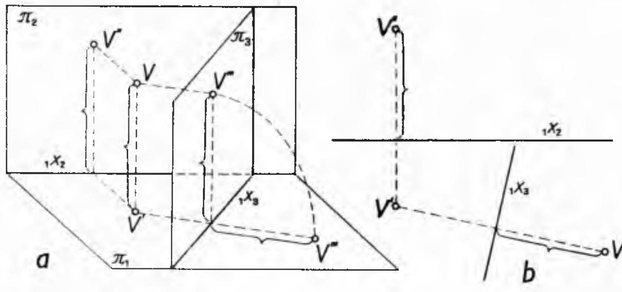
Ako je na pravcu p zadana neka tačka A, past će ona pri preklapanju prve projicirajuće ravnine u tačku A° na pravcu p°; udaljenost $A' A^\circ \perp p'$ bit će jednaka udaljenosti tačke A'' od osi ${}_1x_2$, jer je to udaljenost tačke A od ravnine Π_1 (v. sl. 9 a). Jesu li zadane projekcije dviju tačaka A, B (sl. 9 b), kojima je u prostoru određena dužina $A B$, dobit će se prava veličina te dužine (odabrana je na pravcu p) tako da se prevali prva projicirajuća ravnina te dužine u ravninu Π_1 oko njenog tlocrta, i nacrta prevaljeni položaj $A' B' B^\circ A^\circ$ projicirajućeg četverokuta $A' B' B A$. Zbog $A A' \perp A' B'$ i $B B' \perp A' B'$ bit će i $A' A^\circ \perp A' B'$ i $B'B^\circ \perp A'B'$, a kolike su dužine $A'A^\circ$ i $B'B^\circ$ zna se otprije. Stranica $A^\circ B^\circ$ prevaljenog četverokuta je prema tome prava veličina dužine $A B$. Ova prava veličina mogla bi se dobiti i preklapanjem druge projicirajuće ravnine te dužine u ravninu Π_2, gdje bi to bila stranica $A^\circ B^\circ$ preklopljenog četverokuta $A'' B'' B^\circ A^\circ$. Budući da je dužina AB odabrana na pravcu p, produljena dužina $A^\circ B^\circ$ prolazi tačkama P_1 i P_2, a analogno tome dogodit će se i pri preklapanju u nacrtnu ravninu Π_2.

Povuče li se tačkom B'' paralela s osi ${}_1x_2$ i njome presiječe spojnica $A'A''$ u tački K, pa dužina $A''K$ nanese od tačke A' na okomicu $A'A^\circ$ do tačke A_1°, dat će dužina $B'A_1^\circ$ opet pravu veličinu dužine $A B$, budući da je $A_1^\circ B' \# A^\circ B^\circ$. Za ovako dobivenu pravu veličinu kaže se da je dobivena pomoću *diferencionog trokuta* $A K B$. Zada li se tlocrtom i nacrtom neki trokut u prostoru, odredila bi se njegova prava veličina tako da se na opisani način odredi prava veličina njegovih stranica i pomoću njih sastavi trokut. Ako se dva pravca sijeku u prostoru, tj. ako oni imaju jednu zajedničku tačku, spojnica će tlocrta i nacrta te tačke biti okomita na osi ${}_1x_2$. Obrnuto, dva se pravca u prostoru sijeku onda ako je spojnica sjecišta njihovih tlocrta i nacrta okomita na osi ${}_1x_2$. Ako su dva pravca paralelna u prostoru, onda će, kako je već rečeno, i njihove istoimene projekcije biti paralelne.



Sl. 9

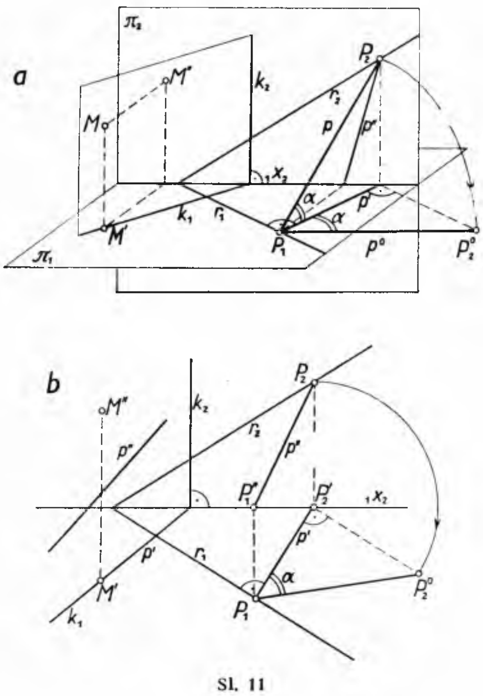
Stranocrt. Na sl. 7 a i b zadata je, osim ravnina Π_1, Π_2, i ravnina $\Pi_3 \perp {}_1x_2$. Uzmimo sada (sl. 10 b) da ravnina Π_3 stoji okomito samo na ravnini Π_1, a određena je osju ${}_1x_3$ u toj ravnini.



Sl. 10

Osim toga neka je zadana tačka V svojim tlocrtom V' i nacrtom V''. Projicira li se tačka V okomito na ravninu Π_3 u tačku V''', bit će zbog $V V'' \| \Pi_1$ i $V V''' \| \Pi_1$ udaljenosti tačaka V'' i V''' od ravnine Π_1 jednake $V'V$, dakle jednake među sobom (sl. 10 a). Preklopi li se sada ravnina Π_3 zajedno s tačkom V''' oko osi ${}_1x_3$ u ravninu Π_1, past će tačka V''' na okomicu spuštenu iz tačke V' na os ${}_1x_3$, a bit će udaljena od te osi toliko koliko je od osi ${}_1x_2$ udaljena tačka V''. Preklopi li se, dalje, ravnina Π_1 oko osi ${}_1x_2$ u ravninu crtnje Π_2, dobiva se *stranocrt* V''' tačke V na ravninu Π_3 kao što je nacrtano na sl. 10 b.

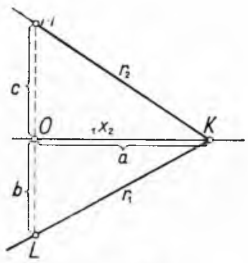
Ravnina. Projiciraju li se sve tačke neke ravnine na neku drugu ravninu, pokrit će te projekcije čitavu tu drugu ravninu. Ravnina se dakle ne može zadati svojim projekcijama. Ali ravnina može biti zadana trima tačkama, tačkom i pravcem ili dvama pravcima koji se sijeku ili su paralelni. Pomoću ovakvih elemenata, odnosno njihovih tlocrta i nacrta, zadaje se ravnina u ortogonalnoj projekciji. Najzgodniji način zadavanja ravnine je pomoću dvaju pravaca koji se sijeku, a uzimaju se baš ona dva u kojima ta ravnina siječe ravnine Π_1 i Π_2. Te se presječnice zovu prvi i drugi *trag* te ravnine (sl. 11 a). Budući da dva pravca kao što su prvi i drugi trag ravnine mogu biti i projekcije nekog pravca u prostoru koji siječe os ${}_1x_2$, dogovoreno je da će se prvi i drugi trag ravnine označavati malim slovom, recimo r, ovako: r_1, r_2. Kad bi ta dva pravca bila označena sa r', r'', njima bi bio određen pravac u prostoru. Očito je $r_1 \equiv r_1'$ i $r_1'' \equiv {}_1x_2$, kao i $r_2 \equiv r_2''$ i $r_2' \equiv {}_1x_2$, ali to se na temelju dogovora radi jednostavnosti tako ne opisuje.



Sl. 11

Ako je ravnina zadana tragovima k_1, k_2 okomita na ravninu Π_1 (sl. 11 a), projicirat će se svaka tačka te ravnine u njen prvi trag k_1, jer prve projicirajuće zrake svih tih tačaka leže u toj ravnini. Budući da su ova ravnina i ravnina Π_2 okomite na ravninu Π_1, to je presječnica k_2 (drugi trag) okomita na ravninu Π_1, dakle i na os ${}_1x_2$ (sl. 11 b). Sve što se nalazi u takvoj ravnini, npr. tačka M i pravac p, ima svoj tlocrt u njenom prvom tragu k_1. Analogno će i ravnina okomita na ravninu Π_2 imati prvi trag okomit na osi ${}_1x_2$.

Numerički se neka ravnina zadaje slično kao tačka. Zada li se neka ravnina R trima brojkama a, b, c, koje se pišu ovako: $R\,(a, b, c)$, onda je (sl. 12) $a = OK$ udaljenost sjecišta K tragova r_1 i r_2 od nekog ishodišta O, $b = OL$ udaljenost tačke L traga r_1 ispod ishodišta O, a $c = OM$ udaljenost tačke M traga r_2 iznad ishodišta O. Budu li ti brojevi negativni, te se duljine prenose na suprotnu stranu.

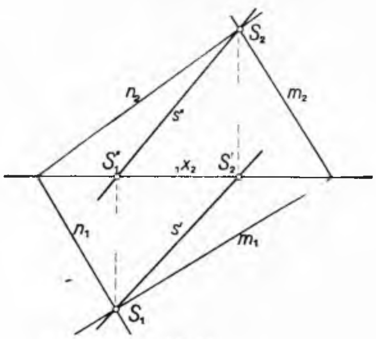


Sl. 12

Ako se pravac nalazi u nekoj ravnini, on siječe sve pravce te ravnine, dakle i njene tragove. Neka su ti tragovi r_1, r_2 (v. sl. 11 a). Sjecišta P_1, P_2 pravaca p u toj ravnini s njenim tragovima probodišta su i tog pravca s ravninama Π_1, Π_2, jer su to zajedničke tačke tog pravca i tih ravnina. Vidimo, dakle, da se pravac nalazi u nekoj ravnini onda kada mu se prvo probodište nalazi u prvom tragu, a drugo u drugom tragu. Pravci u ravnini koji su paralelni s njenim prvim tragom, dakle s ravninom Π_1, zovu se *sutražnice prve skupine* (ili horizontale). Tlocrti su im, dakako, paralelni s prvim tragom, a druga im je projekcija paralelna s osi ${}_1x_2$. Analogno vrijedi za *sutražnice druge skupine* (ili frontale), koje su paralelne s drugim tragom. Projekcije neke tačke koja leži u ravnini određuju se obično tako da se nacrtaju projekcije jednog pravca u toj ravnini koji prolazi tom tačkom. Ako je zadana prva projekcija takve tačke, druga će njena projekcija ležati na nacrtu takvog pravca, dakle će time biti određena. Analogno se radi ako je zadana druga projekcija tačke. Obično se za tu svrhu služimo sutražnicama, jer su to pravci u ravnini kojima se najlakše crtaju projekcije.

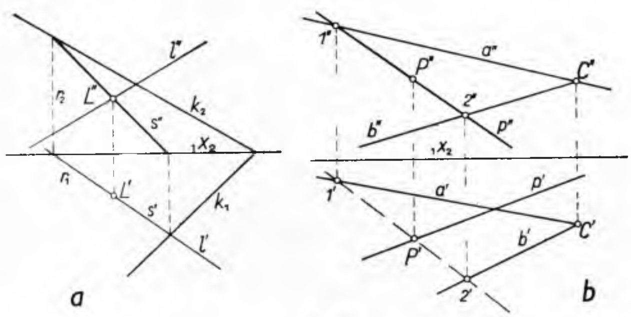
Pravci ravnine okomiti na prvi trag zovu se *priklonice* (nagibnice) prve skupine, a pravci okomiti na drugi trag, priklonice druge skupine. Budući da se svaki pravi kut kojemu je jedan krak u ravnini projekcija okomito na tu ravninu projicira u pravi kut, to će i tlocrti priklonica prve skupine biti okomiti na prvom tragu ravnine ($p' \perp r_1$ i $p \perp r_1$ (v. sl. 11 a i b). Iz toga izlazi da se prikloni kut te ravnine prema ravnini Π_1 podudara s prvim priklonim kutom priklonice prve skupine. Analogno, dakako, vrijedi i za priklonice druge skupine. Prvi prikloni kut ravnine zadane tragovima r_1, r_2 dobit će se prema tome tako da se njena prva priklonica p zajedno s prvim i drugim probodištem P_1, P_2 zamišlja preklopljena oko tlocrta p' te priklonice u ravninu Π_1, pa nacrta preklopljeni trokut $P_2'P_1P_2^\circ$. Kut $\measuredangle\, P_2'P_1P_2^\circ \equiv p'p^\circ$ je traženi prikloni kut (v. sl. 11 b). Posve analogno se konstruira i drugi prikloni kut.

Presječnica dviju ravnina i probodište pravca s ravninom. Neka su dvije ravnine zadane tragovima m_1, m_2 i n_1, n_2 (sl. 13). Presječnica s tih dviju ravnina je pravac koji leži u jednoj i u drugoj ravnini, dakle mu je prvo probodište (prodor) S_1 u prvim tragovima m_1 i n_1 obiju ravnina, dakle u sjecištu tih tragova, a drugo probodište S_2 u sjecištu drugih tragova tih ravnina. Budući da su i nacrt S_1'' prvog probodišta i tlocrt S_2' drugog probodišta u osi ${}_1x_2$, lako je nacrtati tlocrt $s' = S_1 S_2'$ i nacrt $s'' = S_2 S_1''$ presječnice s.



Sl. 13

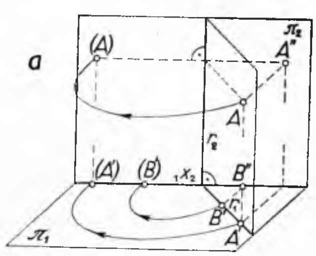
Zadajmo ravninu tragovima k_1, k_2 i neki pravac l po volji njegovim tlocrtom l' i nacrtom l'' (sl. 14 a). Kako da se odredi tlocrt L' i nacrt L'' probodišta L pravca l sa zadanom ravninom? Prvom projicirajućom ravninom pravca l, koja neka ima tragove r_1, r_2, presiječe se zadana ravnina u presječnici s ($l' \equiv s' \equiv r_1$), koja pravac l siječe u tački L. Budući da je tačka L na pravcu s, dakle u zadanoj ravnini, i na pravcu l, to je ona traženo probodište. U sjecištu nacrtâ $l'' \times s''$ nalazi se nacrt L'' te tačke, a njen je tlocrt L' na l' gdje, je $L'\,L'' \perp x$.

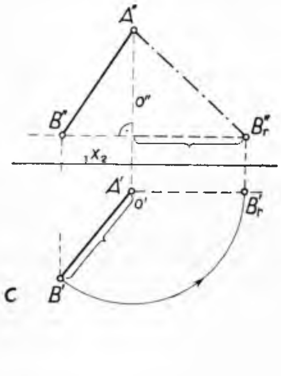


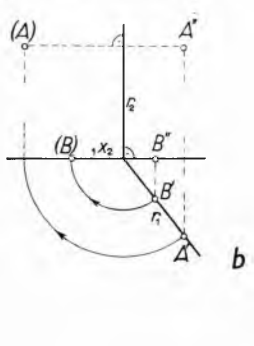
Sl. 14

Ako je ravnina zadana pravcima a, b koji se sijeku u tački C (sl. 14 b) i ako je zadan neki pravac p, pa se traži probodište pravca i ravnine, zamišljamo tim pravcem opet postavljenu zgodnu ravninu, recimo okomitu na Π_2. Čitava ta ravnina projicira se na Π_2 u p''. Tamo gdje spojnica probodišta *1*, *2* pravaca a, b s tom ravninom siječe pravac p u toj ravnini, nalazi se probodište P pravca p s ravninom pravaca a, b. Budući da su nacrti *1''*, *2''* sjecišta pravca p'' s pravcima a'', b'', lako im se mogu odrediti tlocrti *1'*, *2'*, a prema tome i tlocrt P' traženog probodišta. Tlocrtom P' određen je i nacrt P'' tog probodišta.

Rotacija. Putuje li neka tačka po kružnici čija je ravnina okomita na pravcu koji prolazi njenim središtem, onda kažemo da ta tačka *rotira* oko tog pravca, i taj se pravac naziva *os rotacije*. U ravnini okomitoj na Π_1 a zadanoj tragovima r_1, r_2 zadane su



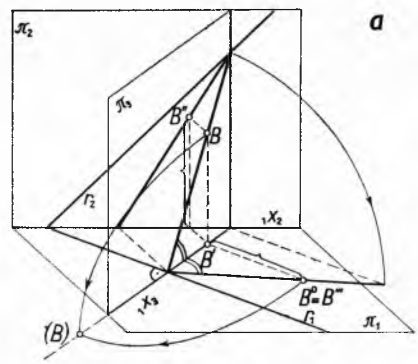


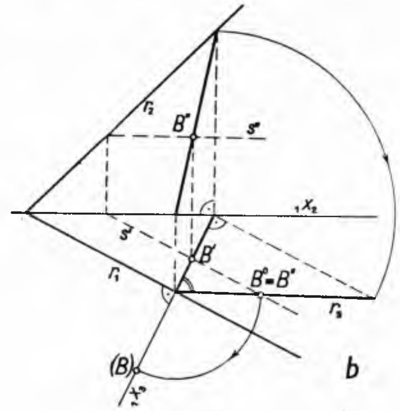


Sl. 15

tačke A, B, od kojih je tačka B u Π_1 (tragu r_1, sl. 15 a i b). Rotiraju li se te tačke oko traga r_2 u ravninu Π_2, putovat će zbog $r_2 \perp \Pi_1$ tačka A po kružnici paralelnoj sa Π_1, a tačka B po kružnici koja leži u Π_1. Obje se te kružnice u tlocrtu vide u naravnoj veličini, a njihova sjecišta (A), odnosno (B) s ravninom Π_2 bit će položaj tačaka A, B zarotiranih u tu ravninu.

Pomoću rotacije može se vrlo jednostavno odrediti i prava veličina neke dužine. Dužina $A\,B$ neka je zadana svojim tlocrtom $A'B'$ i nacrtom $A''B''$ (sl. 15 c). Tačkom A spusti se okomica o na ravninu Π_1 i oko te okomice rotira ta dužina u položaj paralelan s ravninom Π_2. Zbog $A\,B_r \parallel \Pi_2$ bit će nacrt $A''B_r''$ ove zarotirane dužine $A\,B_r$ jednak njenoj pravoj veličini. Pri toj rotaciji tačka A ostaje na miru, a tačka B putuje po kružnici paralelnoj s ravninom Π_1, koja se (kružnica) u nacrtu projicira u paralelu sa osi $_1x_2$. Postavi li se $A'\,B_r \parallel {}_1x_2$, bit će $A''B_r''$ tražena dužina. Ovaj se postupak može pojednostavniti tako da se na paralelu s osi $_1x_2$ povučenu tačkom B'' nanese od pravca o'' duljina $A'B'$ do tačke B_r''.



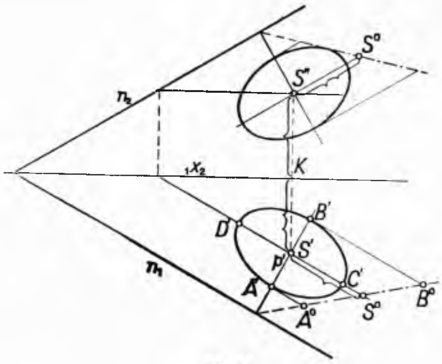


Sl. 16

U ravnini zadanoj tragovima r_1, r_2 nalazi se tačka B, kojoj su projekcije nacrtane pomoću sutražnice prve skupine. Treba tu tačku rotirati oko prvog traga u ravninu Π_1 (sl. 16 a i b). Ravnina kružnice po kojoj će putovati tačka B pri toj rotaciji, koja je ravnina okomita na trag r_1, dakle i na Π_1, može se smatrati stranocrtnom ravninom Π_3. Ta je ravnina određena osju $_1x_3 \perp r_1$, koja prolazi tačkom B', tako da ovdje imamo analogan slučaj kao s tačkom B na sl. 15 b, samo namjesto ravnine Π_1 imamo sada ravninu Π_3. Preloži li se ravnina Π_3 u ravninu Π_1, past će tačka B' u tačku B''' (na tragu r_3), gdje će biti $B'\,B''' \perp {}_1x_3$ i dužina $B'\,B'''$ jednaka udaljenosti nacrta B'' od osi $_1x_2$. Tačka (B), u kojoj ta kružnica rotacije tačke B oko traga r_1 siječe os $_1x_3$, jest tražena prevaljena tačka. Budući da je ravnina Π_3 ravnina rotacije tačke B, može se namjesto B''' pisati i $B°$, a r_3 je preložena priklonica prve skupine i treći trag. Pomoću ovakve rotacije mogu se konstruirati projekcije bilo kojeg pravilnog lika u bilo kojoj ravnini.

Tlocrt i nacrt kružnice u nekoj ravnini mogu se, međutim, konstruirati i bez prevaljenog položaja. Npr., treba odrediti tlocrt i nacrt kružnice u ravnini tragova n_1 i n_2, ako joj je središte tačka

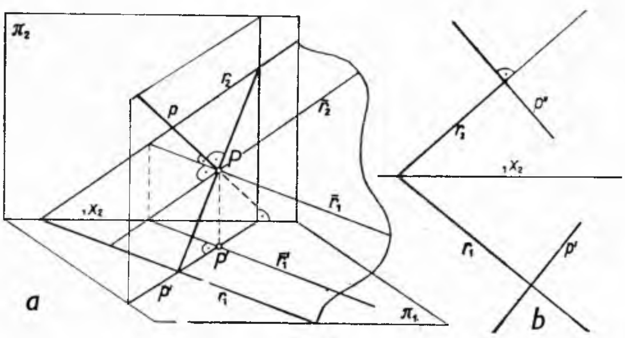
S u toj ravnini (sl. 17). Tlocrt S' i nacrt S'' određeni su pomoću sutražnice prve skupine. Ortogonalna projekcija kružnice je, kao što je poznato, elipsa, koju je lako konstruirati ako joj je poznata velika i mala os. Promjer na sutražnici prve skupine projicira se na Π_1 u pravoj veličini jer je paralelan s tom ravninom. Promjer na priklonici prve skupine imat će najkraći tlocrt jer je to pravac zadane ravnine koji ima najveći prikloni kut. Budući da je, nadalje, tlocrt priklonice prve skupine okomit na tlocrtu sutražnice prve skupine, izlazi da će tlocrt promjera na priklonici i promjera na sutražnici biti velika i mala os tlocrta kružnice.



Sl. 17

Prevali li se, dakle, pomoću $S'S^\circ = S''K$ i $S'S^\circ \parallel n_1$ priklonica p u ravninu Π_1, dobiva se pravac p°, pa ako se na njega prenese $S^\circ A^\circ = r$ i $S^\circ B^\circ = r$ (polumjer kružnice), bit će $A'B'$ mala os tlocrta kružnice. Velika je os $C'D' = 2\,r$. Na jednak se način pomoću sutražnice i priklonice druge skupine konstruira nacrt te kružnice.

Okomitost pravca i ravnine. Neka je zadana ravnina svojim tragovima r_1, r_2. Projekcijama p', p'' treba zadati pravac p okomit na toj ravnini. Pretpostavimo da je na sl. 18 a pravac p okomit na ravnini tragova r_1, r_2 i da probada tu ravninu u tački P. Povuče

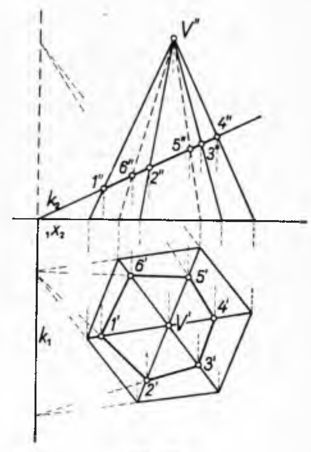


Sl. 18

li se tačkom P paralela $\bar{r}_1 \parallel r_1$, činit će ona s pravcem p pravi kut, jer je pravac p okomit na toj ravnini, dakle i na svakom njenom pravcu. Pravi se kut projicira okomito na ravninu kao pravi kut onda ako mu je bar jedan krak paralelan s tom ravninom. Zbog $\bar{r}_1 \parallel r_1 \parallel \Pi_1$ projicirat će se dakle i pravi kut pravaca $\bar{r}_1$, p na Π_1 kao pravi. Ali budući da je $\bar{r}_1 \parallel r_1$, dakle i $\bar{r}_1 \parallel r'_1$ ($\equiv r_1$), bit će i $p' \perp r_1$. Isto se tako može dokazati pomoću pravca $\bar{r}_2 \parallel r_2$ da je i $p'' \perp r_2$ (sl. 18 b).

PRESJECI

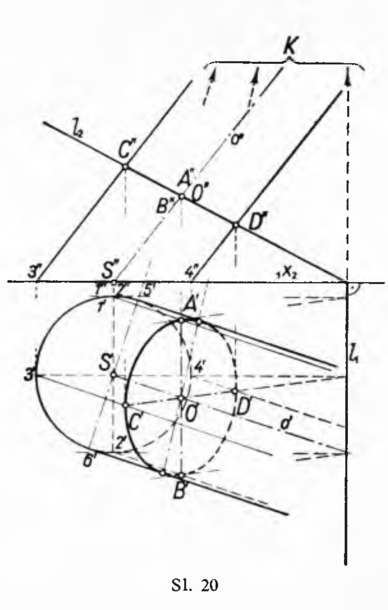
Presjek piramide. Presjeci tjelesa najlakše se konstruiraju ako je ravnina presjeka okomita na Π_1 ili na Π_2. Čitav presjek projicira se u tom slučaju u prvi, odnosno drugi trag te ravnine. Neka je pravilan šesterokut u ravnini Π_1 osnovka uspravne pravilne piramide kojoj je tačka V vrh (sl. 19). Tlocrt V' bit će u središtu osnovke, a nacrt osnovke u osi $_1x_2$. Tragovima k_1, k_2 ($k_1 \perp {}_1x_2$) neka je određena ravnina okomita na Π_2. Presječni nepravilni šesterokut *1 2 3 4 5 6*, kojemu su vrhovi *1, 2, 3, 4, 5, 6* sjecišta pobočnih bridova te piramide s ravninom presjeka, projicira se na ravninu Π_2, u dužinu $1''\,4''$ na drugom tragu k_2. Pomoću okomica spuštenih na os $_1x_2$ iz nacrta tih vrhova do odgovarajućih tlocrta pobočnih bridova dobiva se tlocrt $1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'$ tog presječnog šesterokuta. Za tačnije određenje tog tlocrta može poslužiti činjenica da se produžena stranica presječnog šesterokuta i produžena osnovka pobočnog trokuta piramide na kojoj se ta stranica nalazi sijeku u prvom tragu k_1, budući da ta stranica presječnog šesterokuta leži na presječnici ravnine svog pobočnog trokuta i ravnine presjeka.



Sl. 19

Presjek valjka. Kao daljnji primjer presjeka odaberimo presjek kosog kružnog valjka s osnovkom u Π_1 ravninom okomitom na Π_2. Takav će presjek biti elipsa. Kružnica u ravnini Π_1, sa središtem S, neka je osnovka kosog kružnog valjka kojemu je pravac o os. Projekcije izvodnica tog valjka paralelne su dakako s istoimenim projekcijama te osi, jer su ta os i te izvodnice i u prostoru paralelne. Na sl. 20 nacrtani su tlocrt i nacrt takvog valjka (njegove konturne izvodnice) i ravnina presjeka okomita na Π_2 njenim tragovima l_1 ($\perp {}_1x_2$) i l_2. Konturne izvodnice nacrta imaju svoja nožišta u tačkama *3, 4*, gdje će biti $3'\,4' \parallel {}_1x_2$. Promjer osnovke okomit na promjeru *3 4* neka je promjer *1 2*, kojemu je nacrt tačka $1''$, $2''$ na osi $_1x_2$. Nacrti izvodnica kojima su nožišta tačke *1, 2* podudaraju se s nacrtom o'' osi o. Dirne ravnine valjka duž izvodnica tačaka *1, 2* paralelne su s dijametralnom ravninom valjka koja prolazi tačkama *3, 4*, a dirne ravnine duž izvodnica tačaka *3, 4* paralelne su s dijametralnom ravninom tačaka *1, 2*. Izvodnice tačaka *1, 2* neka ravninu presjeka probadaju u tačkama A, B, a izvodnice tačaka *3, 4* u tačkama C, D. Budući da obje dijametralne ravnine sadržavaju os o, imat će dužine $A\,B$ i $C\,D$ zajedničko središte O. Iz opisane paralelnosti spomenutih dirnih i dijametralnih ravnina izlazi da će tangente presječne elipse u tačkama A, B biti paralelne s dužinom $C\,D$, a tangente te elipse u tačkama C, D bit će paralelne s dužinom $A\,B$. Izlazi dakle da su dužine $A\,B$, $C\,D$ par konjugiranih promjera presječne elipse. Budući da polovišta dužina i paralelni pravci ostaju takvi u svakoj paralelnoj projekciji, to će i tlocrti $A'\,B'$, $C'\,D'$ biti par konjugiranih promjera tlocrta presječne elipse. Njen nacrt je dakako dužina $C''\,D''$. Ako se spojnica dirališta $5'$, $6'$ osnovke s tlocrtnim konturnim izvodnicama produži do prvog traga l_1, a dobiveno sjecište K spoji s tlocrtom središta O, sjeći će ta spojnica konturne izvodnice tlocrta u tačkama koje su na presječnoj elipsi; te su tačke, dakle, konturne tačke tlocrta presječne elipse. Spomenuta je spojnica naime presječnica dijametralne ravnine tlocrtnih konturnih izvodnica s presječnom ravninom.

Presjek kosog kružnog valjka s osnovkom u Π_1 općom ravninom svodi se na ovdje izvedeni slučaj pomoću stranocrtne ravnine okomite na prvi trag presječne ravnine. Presjek valjka 2. stupnja ravninom istovrstan je uvijek s osnovkom tog valjka, tj. svi presjeci hiperbolnog valjka su hiperbole, svi presjeci



Sl. 20

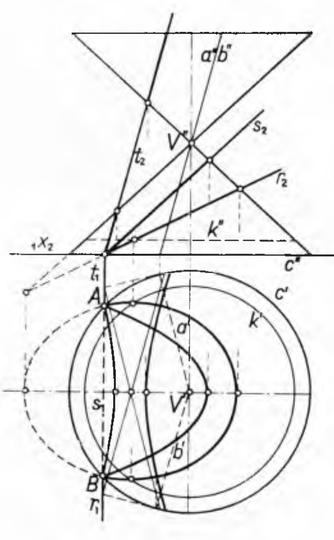
parabolnog valjka su parabole, a svi presjeci kosog i uspravnog kružnog valjka su elipse ili kružnice.

Presjeci stošca. Stožac 2. stupnja možemo presjeći u svakoj od četiri poznate krivulje 2. stupnja (kružnici, elipsi, hiperboli i paraboli), jer ravnina presjeka može biti paralelna s dvije, s jednom ili ni s jednom realnom izvodnicom tog stošca, koje tu ravninu probadaju u dvije, u jednoj ili ni u jednoj realnoj neizmjerno dalekoj tački presječne krivulje (v. *Analitička geometrija*).

Na sl. 21 zadan je tlocrtom i nacrtom uspravan kružni stožac s osnovkom u Π_1, a vrhom u tački V. Ravnine okomite na Π_2 zadane tragovima (r_1, r_2), (s_1, s_2), (t_1, t_2) neka imaju zajednički prvi trag $r_1 \equiv s_1 \equiv t_1$. Drugi trag r_2 ravnine tragova r_1, r_2 postavljen je tako da ta ravnina siječe sve izvodnice stošca u konačnosti, dakle će presječna krivulja s tom ravninom biti elipsa. Sjecišta konturnih izvodnica nacrta stošca s presječnom ravninom bit će tjemena na velikoj osi presječne elipse, kojoj je ta os paralelna s Π_2. Njena mala os projicira se prema tome na Π_2 u projekciju središta te elipse. Postavi li se tim središtem ravnina paralelna s Π_1, sjeći će ona zadani stožac u kružnici paralelnoj s Π_1 na kojoj će biti tjemena male osi presječne elipse. Budući da je ta mala os paralelna s Π_1, projicirat će se velika i mala os na ravninu Π_1 u veliku i malu os tlocrta presječne elipse.

Trag s_2 presječne ravnine tragova s_1, s_2 odabran je tako da bude paralelan s lijevom konturnom izvodnicom nacrta stošca. Ova je ravnina paralelna prema tome s tom i samo s tom izvodnicom tog stošca, dakle će njena presječna krivulja imati jednu neizmjerno daleku tačku, tj. ta je krivulja parabola. Sjecište desne konturne izvodnice nacrta s tom ravninom je tjeme te parabole, os joj je paralelna s lijevom konturnom izvodnicom nacrta. Tjeme i os presječne parabole projiciraju se na Π_1 u tjeme i os tlocrta te parabole jer je tangenta parabole u tjemenu paralelna s Π_1. Ovim tjemenom i osi, kao i presječnim tačkama A, B traga s_1 s osnovkom c, tlocrt je presječne parabole određen, pa se može nacrtati.

Drugi trag t_2 presječne ravnine tragova t_1, t_2 postavljen je tako da ta ravnina siječe donji i produženi gornji dio zadanog stošca. Presječna krivulja raspada se ovdje u dva dijela, dakle može biti samo hiperbola. Ravnina položena vrhom V paralelno s ravninom presjeka siječe taj stožac u izvodnicama a, b, na kojima se nalaze neizmjerno daleke tačke presječne hiperbole. U

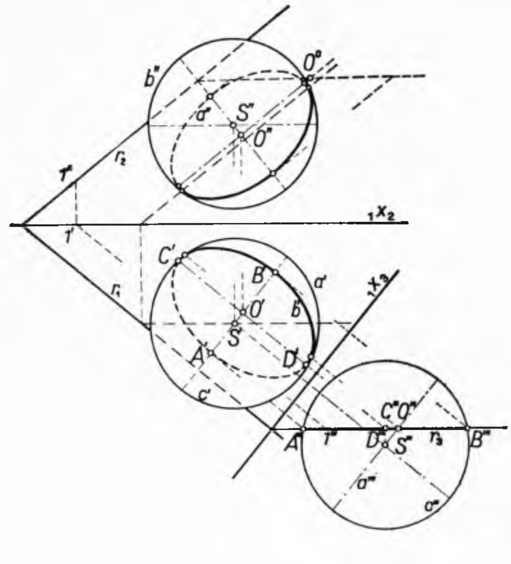


Sl. 21

nožištima tih izvodnica povučene tangente na osnovku c prvi su tragovi dirnih ravnina stošca duž izvodnica a, b. Presječnice tih ravnina s presječnom ravninom tragova t_1, t_2 asimptote su presječne hiperbole, budući da one hiperbolu diraju u njenim neizmjerno dalekim tačkama. Tjemena te hiperbole nalaze se i ovdje na nacrtnim konturnim izvodnicama, a ta tjemena, os i asimptote projiciraju se na Π_1 u tjemena, os i asimptote tlocrta presječne hiperbole. Tjemenima i asimptotama ta je hiperbola određena, a osim toga prolazi ona i tačkama A, B.

Presjeci stošca općim ravninama svode se na ovakve slučajeve pomoću zgodno odabrane stranocrtne ravnine.

Kugla i njen presjek. Budući da je kugla geometrijsko mjesto tačaka koje su od njenog središta jednako daleko, bit će svi njeni ravninski presjeci kružnice, a tlocrt i nacrt te kugle bit će kružnice polumjera jednakih polumjeru te kugle.



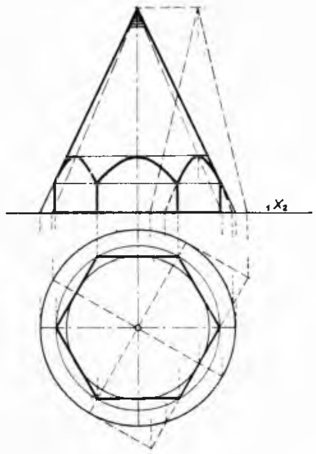
Sl. 22

Na sl. 22 zadana je kugla središta S svojim projekcijama i jedna kosa ravnina svojim tragovima r_1, r_2. Treba odrediti tlocrt i nacrt presječne kružnice. Postavi li se pomoću stranocrtne osi $_1x_3$ stranocrtna ravnina Π_3 okomito na prvi trag r_1 presječne ravnine, projicirat će se čitava ta ravnina sa svime što se u njoj nalazi u njen treći trag r_3 u ravnini Π_3. Taj trag r_3, koji je i priklonica prve skupine, dobiva se u preloženom položaju tako da se odredi stranocrt bilo koje tačke te ravnine (npr. tačke *1* na drugom tragu), jer i taj stranocrt ($1'''$) leži u trećem tragu r_3. Stranocrt kugle je kružnica c''' polumjera opet jednakog polumjeru te kugle sa središtem u stranocrtu S''' središta kugle S. Nacrtna konturna kružnica kugle označena je sa b, tlocrtna sa a, a stranocrtna sa c. Očito je $a \parallel \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$ i $c \parallel \Pi_3$. Stranocrt presječne kružnice bit će dužina $A'''B'''$ na tragu r_3, gdje se tačke A''' B''' nalaze na stranocrtnoj konturnoj kružnici c'''. Budući da su te tačke najniža i najviša tačka presječne kružnice s obzirom na ravninu Π_1, bit će dužina $A\,B$ promjer presječne kružnice koji leži na jednoj priklonici prve skupine presječne ravnine. Promjer $C\,D$ okomit na promjeru $A\,B$ te kružnice ležat će, prema tome, na sutražnici prve skupine. Budući da je središte O presječne kružnice nožište okomice spuštene na ravninu presjeka iz središta S, bit će $S'\,O' \perp r_1$, $S''\,O'' \perp r_2$ i $S'''\,O''' \perp r_3$, pa je lako odrediti sve tri projekcije središta O. Tlocrti $A'\,B'$, $C'\,D'$ okomitih promjera $A\,B$, $C\,D$ bit će, zbog $C\,D \parallel \Pi_1$, mala i velika os tlocrta presječne kružnice, koji je, kao što je poznato, elipsa. Nacrti promjera $A\,B$, $C\,D$ dali bi par konjugiranih promjera nacrta presječne kružnice. Na sl. 22 određen je međutim taj nacrt na isti način kao na sl. 17, jer je poznat nacrt središta i polumjer presječne kružnice. Sutražnica druge skupine u kojoj ravnina presjeka siječe ravninu nacrtne konturne kružnice b siječe tu kružnicu u konturnim tačkama nacrta presječne kružnice. Ovakve konturne tačke u tlocrtu dobivene su analogno pomoću presječne sutražnice prve skupine presječne ravnine i ravnine konturne kružnice a. Presjek kugle ravninom okomitom na Π_1 i Π_2 riješen je također na sl. 22, budući da bi se u takvim slučajevima projekcija na Π_3 nalazila na Π_1, odnosno na Π_2.

PRODORI

Prodori tjelesa određuju se tako da se traže probodišta bridova ili izvodnica jednog tijela s drugim i obrnuto, a dobivene tačke spoje. Probodišta pravca s tijelom dobit će se tako da se tim pravcem položi zgodno odabrana ravnina kojom se siječe to tijelo. Ako se radi o stošcima ili valjcima 2. stupnja kojima su osnovke kružnice, treba spomenute ravnine odabrati tako da one ta tijela sijeku ili u izvodnicama ili u kružnicama paralelnim sa Π_1 ili Π_2. Kugla će se uvijek sjeći u takvim kružnicama. Sjecišta pravca s tom presječnom linijom su tražena probodišta.

Na sl. 23 konstruiran je prodor koaksijalno postavljenih tijelesa: uspravnog kružnog stošca i pravilne šesterostrane prizme s osnovkama u Π_1. Budući da su ravnine pobočaka prizme okomite na Π_1, tlocrt te prizme ujedno je i tlocrt čitavog prodora. Kako



Sl. 23

su ravnine pobočaka prizme osim toga paralelne s osi stošca, dakle s dvije njegove dijametralno smještene izvodnice, bit će presjeci tih pobočaka s tim stošcem dijelovi hiperbola. Cio prodor bit će dakle slomljena linija koja se sastoji od šest posve jednakih dijelova jednakih hiperbola. Zbog simetričnog smještaja tih dvaju tijela bit će polovišta stranica tlocrta prizme tlocrti tjemena spomenutih hiperbola. Pomoću izvodnica stošca koje tim tjemenima prolaze lako je odrediti njihove nacrte, a pojednostavnjuje to činjenica da su sva ta tjemena jednako visoko iznad Π_1. Probodišta pobočnih bridova prizme sa stošcem također su jednako visoko iznad Π_1, tako da su nacrtom jednoga određeni nacrti i ostalih pet. Nacrti tih probodišta leže na nacrtu kružnice stošca kojoj tlocrt prolazi tlocrtom pobočnih bridova prizme. Nacrti ostalih tačaka prodorne linije mogu se dobiti pomoću paralelnih kružnih presjeka stošca s osnovnom ravninom Π_1. Budući da je svaka dijametralna ravnina prizme paralelna s dvije njene pobočne ravnine, lako je odrediti i asimptote opisanih hiperbola (v. sl. 23). Odbaci li se gornji dio prizme i donji dio stošca, ostaje poznati oblik strojem zašiljene šesterostrane olovke.

Prodor kugle i valjka. Na sl. 24 a zadane su projekcije polukugle i uspravnog kružnog valjka paralelnog s osi $_1x_2$. Taj valjak neka dira kuglu u njenoj najvišoj tački iznad Π_1. Dvije plohe 2. stupnja prodiru se u prostornoj krivulji 4. reda prve vrste. Ako se takve plohe diraju u jednoj tački, imat će prodorna krivulja u toj tački dvostruku tačku. Ako se takve plohe diraju u dvije tačke, raspast će se prodorna krivulja 4. reda u dvije krivulje 2. stupnja, jer neraspadnuta prostorna krivulja 4. reda ne može imati dvije dvostruke tačke.

Tačke prodorne krivulje na sl. 24 a određuju se tako da se oba tijela sijeku ravninama paralelnim ili sa Π_1 ili sa Π_2, jer će te ravnine u oba slučaja sjeći valjak u izvodnicama, a kuglu u kružnicama koje se projiciraju u kružnice. Ravnina paralelna s Π_1 neka siječe valjak u izvodnicama i, i_1 a kuglu u kružnici polumjera r. Ova kružnica i te izvodnice imaju svoj nacrt u drugom tragu presječne ravnine. Presječna kružnica projicira se na Π_1 u naravnoj veličini, a tlocrti i', i_1' izvodnica i, i_1 rastavljeni su i paralelni s osi $_1x_2$. Pretpostavimo da je zajednička simetralna ravnina obaju tijela nacrtna ravnina, a ravnina osnovke valjka da je bokocrtna ravnina, tj. produženi nacrt osnovke valjka je os $_2x_3$. Bokocrt osnovke bit će kružnica opisana oko polovišta njenog nacrta s polumjerom tog valjka, a bokocrti i_1''', i''' izvodnica i, i_1 tačke su na toj kružnici. Ako se udaljenost tačke i_1''', odnosno i''' od osi $_2x_3$ nanese na jednu i drugu stranu osi $_1x_2$, koja je simetrala tlocrta obaju naših tijela, i dobivenim tačkama povuku paralele s osi $_1x_2$, bit će to tlocrti i_1', i' izvodnica i, i_1. U sjecištima tlocrta tih izvodnica s tlocrtom presječne kružnice nalaze se tlocrti $2'$, $8'$ tačaka 2, 8 presječne krivulje. Na slici 24 uzeta je samo lijeva polovica valjka, a nacrti obiju dobivenih prodornih tačaka 2, 8 padaju zajedno, jer je ravnina Π_2 zajednička simetralna ravnina obaju tijela. Analognim postupkom, odabirući nove presječne ravnine paralelne sa Π_1, može se odrediti po volji velik broj tačaka prodorne krivulje.

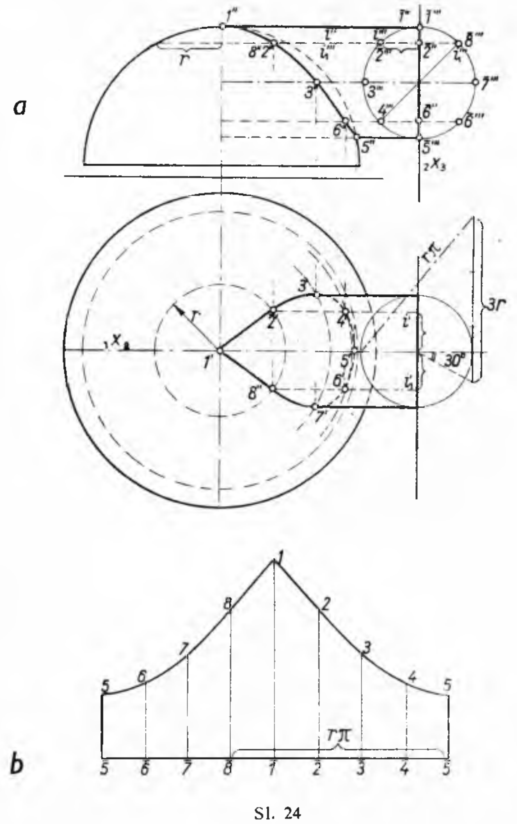
Kad bi namjesto kugle bio na slici uspravan kružni stožac s osnovkom u Π_1, dobio bi se prodor tijela na posve jednak način.

Kad se takvi prodori praktično primjenjuju, npr. u gradnji parnih kotlova, treba obično konstruirati i plašt valjka zajedno s prodornom krivuljom.

Plašt uspravnog kružnog valjka je pravokutnik kojemu su dvije suprotne stranice jednake opsegu osnovke a dvije visini valjka. Opseg osnovke može se približno izračunati jer je poznat polumjer, ali može se i aproksimativno konstruirati npr. pomoću poznate konstrukcije Kochanskoga. Nacrtajmo, prema tome, razvijenu osnovku koja leži u ravnini Π_3, a koju smo tačkama $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$ i $\bar{8}$ razdijelili na osam jednakih dijelova tako da tačka $\bar{1}$ bude na izvodnici dvostruke tačke prodorne krivulje. Na okomice postavljene u tim tačkama na razvijenu osnovku nanijete su prave udaljenosti tačaka $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ i 8 prodorne krivulje od razvijene osnovke. Spojnica tako dobivenih tačaka $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ razvijena je prodorna krivulja na tom plaštu (sl. 24 b). Prave veličine dužina $\bar{1}\,1$, $\bar{2}\,2$ itd. vide se u nacrtu, $\bar{1}\,1 = \bar{1}''\,1''$, $\bar{2}\,2 = \bar{2}''\,2''$, itd., jer su sve te dužine paralelne s nacrtnom ravninom.

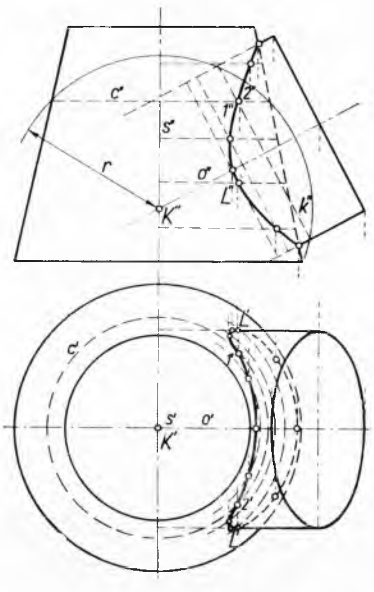
Prodor stošca i valjka. Na sl. 25 zadan je prikraćen uspravan kružni stožac s osnovkom u Π_1 i uspravan kružni valjak paralelan s ravninom Π_2 i kos prema ravnini Π_1, čija os o siječe os s prikraćenog stošca u tački K. Treba odrediti prodor tih dvaju tijela.

Prodor kugle s uspravnim kružnim valjkom ili stošcem, ako im os prolazi središtem te kugle, raspast će se u dvije kružnice kojih su ravnine okomite na osi tog stošca, odnosno valjka. Opiše li se, prema tome, oko sjecišta K neka kugla, recimo polumjera r, prodirat će ona stožac u kružnici c a valjak u kružnici k, i te



Sl. 24

će se kružnice sjeći u dvije realne tačke *1, 2*. Budući da se te dvije tačke nalaze, osim na kugli, i na stošcu i na valjku, one su tačke prodorne krivulje tih dvaju tijela. Budući da su osi *o, s* paralelne s ravninom Π_2, bit će projekcije c'', k'' kružnica *c, k* na tu ravninu dužine u čijem sjecištu će biti nacrt $1''$, $2''$ obiju spomenutih tačaka *1, 2* prodorne krivulje. Na našoj slici potražili smo prodor samo desnog gornjeg dijela valjka; preostale dvije prodorne kružnice kugle s valjkom i stošcem nisu uzete u obzir jer bi njihova sjecišta bile tačke onog dijela prodorne krivulje koji nama ne treba. Cijela prodorna krivulja tih dvaju tijela, kad bi se valjak produžio, sastojala bi se od dva dijela. Dirna kugla stošca sa središtem u *K* prodire valjak u kružnici koja u dvije tačke dira prodornu krivulju. Nacrt tih tačaka je tačka L''. Pomoću tlocrta prodornih



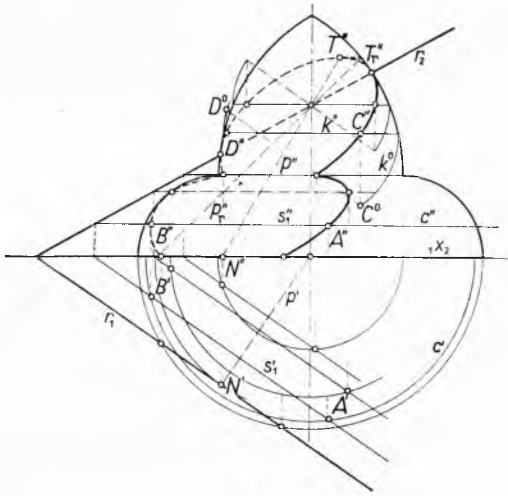
Sl. 25

kružnica (*c*) kugala i stošca, koje se na Π_1 projiciraju kao kružnice, mogu se odrediti tlocrti pojedinih tačaka prodorne krivulje, dakle i njen cio tlocrt.

ROTACIONE PLOHE

Zavrti li se neka krivulja oko nekog pravca, opisat će ta krivulja rotacionu plohu kojoj je taj pravac os. Ako se namjesto krivulje zavrti pravac koji niti os siječe niti je s njom paralelan, opisat će on tzv. rotacioni jednoplošni hiperboloid. Kružnice dobivene presijecanjem rotacione plohe ravninama okomitim na os zovu se *paralele* te plohe, a krivulje dobivene presijecanjem rotacione plohe ravninama koje sadrže os zovu se *meridijan* te plohe. Rotacione plohe zadaju se obično tako da im os bude okomita na Π_1, a određene su meridijanom paralelnim s ravninom nacrta. Ovakav meridijan je konturni meridijan nacrta plohe, a njen se tlocrt sastoji od pramena koncentričnih kružnica, koje su tlocrti paralela. Dirna ravnina rotacione plohe u jednoj njenoj tački određena je tangentama paralele i meridijana koji tom tačkom prolaze, a te su tangente sutražnica i priklonica prve skupine takve dirne ravnine. Sve dirne ravnine rotacione plohe duž jedne paralele omataju uspravan kružni stožac. Rotacione plohe nastale rotacijom kružnice oko jednog pravca njene ravnine koji ne prolazi njenim središtem u praksi se najviše upotrebljavaju, a zovu se *torusi*, ili *anuloidi.*

Presjek rotacione plohe. Na sl. 26 zadana je rotaciona ploha sastavljena od dijelova dvaju torusa i ravnina određena tragovima r_1, r_2. Treba odrediti presjek zadanog tijela tom ravninom. Tijelo je postavljeno tako da mu os bude u ravnini Π_2, a nacrtat će se samo nacrt presjeka. Pojedine tačke presječne krivulje dobit će se tako da se ravninama paralelnim sa Π_1 siječe ploha u paralelama (*c*), a presječna ravnina u sutražnicama prve skupine (s_1). Sjecišta (*A, B*) tih sutražnica i paralela u svakoj takvoj ravnini leže na presječnoj krivulji. Budući da se tlocrti presječnih paralela u tlocrtu vide kao kružnice, a tlocrti sutražnica

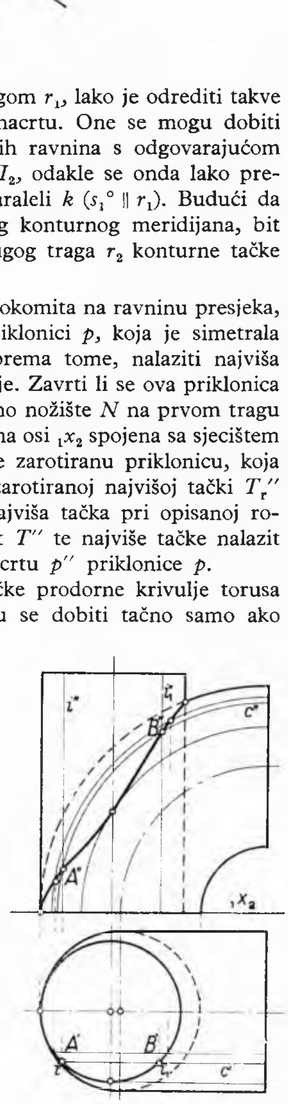


Sl. 26

prve skupine su paralelni s prvim tragom r_1, lako je odrediti takve tačke u tlocrtu, a prema tome i u nacrtu. One se mogu dobiti i preklapanjem spomenutih presječnih ravnina s odgovarajućom paralelom i sutražnicom u ravninu Π_2, odakle se onda lako prenesu u nacrt. Vidi tačke *C, D* na paraleli *k* ($s_1{}^\circ \parallel r_1$). Budući da drugi trag r_2 leži u ravnini nacrtnog konturnog meridijana, bit će u sjecištima tog meridijana i drugog traga r_2 konturne tačke presječne krivulje u nacrtu.

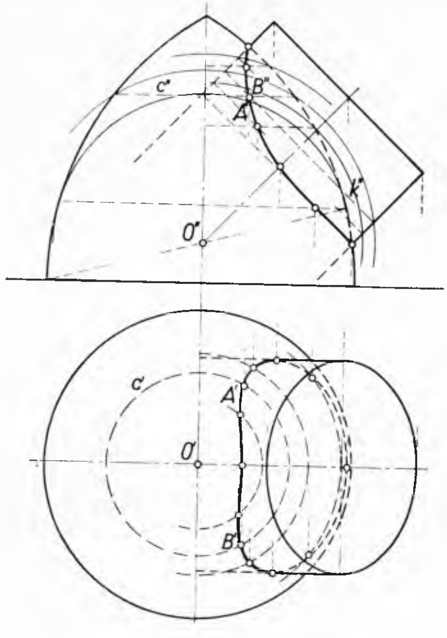
Postavi li se kroz os tijela ravnina okomita na ravninu presjeka, sjeći će ona tu ravninu u njenoj priklonici *p*, koja je simetrala presječne krivulje. Na njoj će se, prema tome, nalaziti najviša (i najniža, ako postoji) tačka te krivulje. Zavrti li se ova priklonica oko osi u ravninu Π_2, putovat će njeno nožište *N* na prvom tragu po kružnici u Π_1 do osi ${}_1x_2$. Ta tačka na osi ${}_1x_2$ spojena sa sjecištem osi zadane plohe i te priklonice daje zarotiranu priklonicu, koja nacrtni konturni meridijan siječe u zarotiranoj najvišoj tački T_r'' presječne krivulje. Budući da ova najviša tačka pri opisanoj rotaciji putuje po jednoj paraleli, nacrt T'' te najviše tačke nalazit će se na nacrtu te paralele i na nacrtu p'' priklonice *p*.

Prodor valjka s torusom. Tačke prodorne krivulje torusa s uspravnim kružnim valjkom mogu se dobiti tačno samo ako se osi tih tijela sijeku, ili su paralelne, ili su mimosmjerne i okomite. Na sl. 27 zadana je četvrtina torusa kojemu je os okomita na Π_2 i uspravan kružni valjak kojemu je os okomita na Π_1 a osnovka mu je u Π_1. Os torusa leži u ravnini Π_1. Ravnine okomite na os torusa paralelne su s osi valjka (paralelne sa Π_2), pa sijeku torus u kružnicama (*c*), a valjak u izvodnicama (*i*, i_1). Sjecišta (*A, B*) tih izvodnica i kružnica (paralela) u istoj pomoćnoj presječnoj ravnini su tačke prodorne krivulje jer se nalaze na objema plohama. Nacrti presječnih paralela su kružnice u naravnoj veličini, a nacrti izvodnica valjka su okomice na osi ${}_1x_2$. Tlocrti tih izvodnica su tačke na osnovici valjka, a tlocrti presječnih paralela dužine paralelne s osi ${}_1x_2$ i jednake promjeru tih paralela. Na sl. 27 uzimane su dakako samo četvrtine tih paralela na četvrtini zadanog torusa. Sjecišta (A'', B'') nacrta (i'', i_1'') tih izvodnica i kružnice c'' su tačke nacrta prodorne krivulje. Budući da je zajednička simetralna ravnina torusa i valjka paralelna sa Π_2, padaju po dvije tačke prodorne krivulje u nacrtu zajedno.



Sl. 27

Na sl. 28 zadan je dio torusa (samo iznad ravnine Π_1) kojemu je os okomita na Π_1 i uspravan kružni valjak paralelan s ravninom Π_2 a kos prema ravnini Π_1. Osi tih tijela sijeku se u tački *O*, a njihova ravnina je zajednička simetralna ravnina tih tijela. Budući da je ta ravnina paralelna s ravninom Π_2, bit će u sjecištima nacrtnih konturnih linija najviša i najniža tačka prodorne linije, a u svakoj tački nacrta nalazi se nacrt dviju tačaka te krivulje. Tačke prodorne

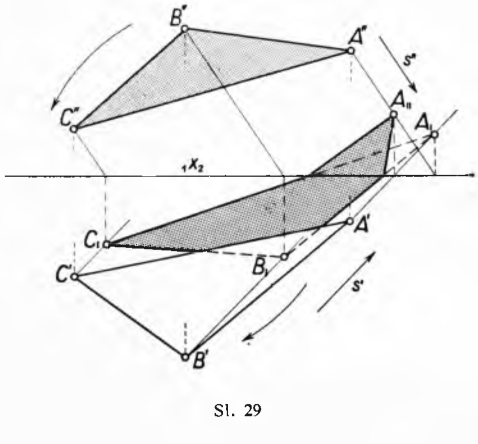


Sl. 28

krivulje dobiju se ovdje posve analogno kao na sl. 25. Oko središta O po volji opisana kugla prodire rotacionu plohu u kružnici c, a valjak u kružnici k, pa se te dvije kružnice sijeku u tačkama A, B prodorne krivulje. Nacrt A'', B'' tih tačaka je u sjecištu nacrta c'', k'' kružnica c, k, a njihovi tlocrti A', B' leže na tlocrtu c' kružnice c, koji se zbog $c \parallel \Pi_1$ vidi u pravoj veličini. Odabiranjem daljnjih kugala opisanih oko središta O dobiju se istim postupkom ostale tačke prodorne krivulje.

SJENE

Osvijetli li se neki predmet bilo kakvom rasvjetom, bit će ona strana njegove površine s koje dolazi rasvjeta osvijetljena, a druga će strana biti u sjeni. Kažemo da se neosvijetljeni ili osjenjeni dio površine nalazi u *samosjeni* ili u *vlastitoj sjeni.* Granična crta između osvijetljenog i osjenjenog dijela površine zove se *rastavnica* tog tijela. Zrake svjetla koje udaraju na tijelo ne odlaze dalje. Stoga, ako se negdje u blizini tijela nalazi neka ravnina, ona će biti osvijetljena samo zrakama koje su mimo tijela prošle, dok će onaj dio ravnine na koji bi, da tijela nema, pale zrake koje su se na tijelu zaustavile, ostati taman. Taj se tamni dio ravnine zove *bačena sjena* tijela; on je ograničen bačenom sjenom rastavnice. Bačena sjena tijela, ili nekog lika, može pasti i na neko drugo tijelo ili lik, a jedan dio te sjene može pasti i na samo to tijelo, ako je ono takva oblika da je to moguće.



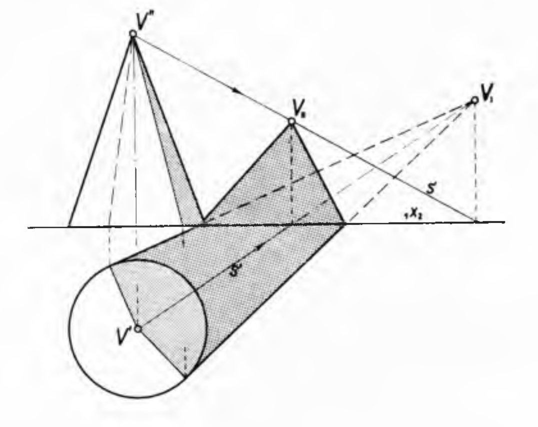
Sl. 29

Rasvjeta može biti paralelna i centralna. Paralelna rasvjeta zadaje se tlocrtom i nacrtom jedne zrake (pravcem i smjerom dolaženja), a centralna rasvjeta zadaje se tlocrtom i nacrtom izvora svjetla, za koji se pretpostavlja da je tačka.

Sjena trokuta. Na sl. 29 zadani su: trokut $A\,B\,C$ projekcijama $A'\,B'\,C'$, $A''\,B''\,C''$ i paralelna rasvjeta projekcijama s', s'' zrake s. Treba odrediti sve sjene. Ako se vrhovima A, B, C povuku zrake svjetla i odrede njihova probodišta A_1, B_1, C_1 s ravninom Π_1, bit će trokut $A_1\,B_1\,C_1$ bačena sjena trokuta $A\,B\,C$ na ravnini Π_1. Kako je sjena A_1 vrha A na ravnini Π_1 iza ravnine Π_2, ta je sjena samo zamišljena, jer sjena na ravninu Π_1 može postojati samo do osi ${}_1x_2$, gdje joj se je ispriječila ravnina Π_2. Bačena sjena se na tu ravninu penje lomeći se na osi ${}_1x_2$. Spoji li se bačena sjena A_{II} tačke A na ravnini Π_2 sa sjecištima osi ${}_1x_2$ s dužinama $A_I\,B_I$ i $A_I\,C_I$, dobit će se granica bačene sjene trokuta $A\,B\,C$ na ravnini Π_2.

Očito je da je jedna strana trokuta $A\,B\,C$ osvijetljena a druga u samosjeni, pa se to mora na projekcijama tog trokuta i označiti. Neka je smjer gledanja na ravnine Π_1 i Π_2 identičan sa smjerom projiciranja na te ravnine. Budući da su projicirajuće zrake tačke B od te tačke do ravnina Π_1 i Π_2 na različnim stranama trokuta $A\,B\,C$, to će se u tlocrtu i nacrtu toga trokuta vidjeti različne njegove strane. Odavde izlazi da će jedna projekcija tog trokuta biti osvijetljena a druga u samosjeni. Hoće li se u tlocrtu i nacrtu vidjeti ista strana ili različne strane trokuta, to zaključujemo prema tome da li opis vrhova po abecednom redu teče u istom ili u različitom smislu u tlocrtu i nacrtu. Na sl. 29 teče taj opis u različitom smislu, pa se u tlocrtu i nacrtu vide različite strane. Budući da je, nadalje, tlocrt B' tačke B ispred tlocrta $A'C'$ stranice $A\,C$ a bačena sjena B_I te tačke ispred bačene sjene $A_I\,C_I$ te stranice, vidi se u tlocrtu osvijetljena strana a u nacrtu osjenjena. Vlastita i bačena sjena šrafiraju se ili bojadišu po jakosti u omjeru 1 : 3.

Sjena stošca. Sve zrake svjetla koje diraju stožac čine dvije njegove dirne ravnine duž dviju izvodnica koje će biti sastavni dio rastavnice tog stošca. Bačene sjene tih rastavnica na Π_1 i Π_2 padaju u prve i druge tragove dirnih ravnina.

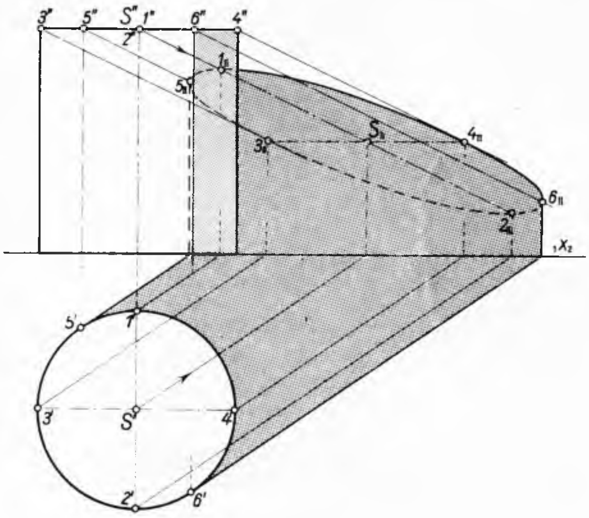


Sl. 30

Na sl. 30 zadan je svojim tlocrtom i nacrtom uspravan kružni stožac kojemu je osnovka u Π_1. Rasvjeta je zadana zrakom koja prolazi vrhom V tog stošca. Treba odrediti sve sjene.

Povuku li se iz bačene sjene V_I vrha V na ravninu Π_1 tangente na osnovku, bit će te tangente prvi tragovi onih dirnih ravnina stošca koje prolaze kroz zraku svjetla položenu vrhom V. Ti su tragovi, prema tome, bačena sjena jednog dijela rastavnice stošca na ravnini Π_1; njihova dirališta na osnovci spojena s vrhom daju izvodnice kojih su ti tragovi bačene sjene i koje su, prema tome, dio rastavnice. Ostatak rastavnice je dio kružnice osnovke na osvijetljenom dijelu plašta. Budući da je bačena sjena V_I vrha V iza ravnine Π_2, lomi se bačena sjena tog stošca na osi ${}_1x_2$ i završava u bačenoj sjeni V_{II} vrha V na ravnini Π_2. Sjene kosog kružnog stošca konstruiraju se na posve jednak način kao sjene uspravnog kružnog stošca.

Sjene valjka. Na sl. 31 zadan je svojim tlocrtom i nacrtom uspravan kružni valjak s jednom osnovkom u Π_1. Središtem



Sl. 31

S gornje osnovke prolazi zadana zraka s. Neka se odrede sve sjene.

Budući da valjak možemo smatrati stošcem s neizmjerno dalekim vrhom na njegovoj osi, bačena sjena tog vrha na Π_1 nalazi se neizmjerno daleko na zraci s' koja prolazi tlocrtom S' središta gornje osnovke. Zraka s' je također bačena sjena osi valjka, tangente povučene usporedno sa s' na tlocrt valjka granice su, dakle, njegove bačene sjene na Π_1. Ta sjena ide kao realna do osi $_1x_2$, a ondje se lomi i prelazi na ravninu Π_2. Dirališta $5'$, $6'$ tangenata na tlocrt valjka tlocrti su izvodnica na rastavnici.

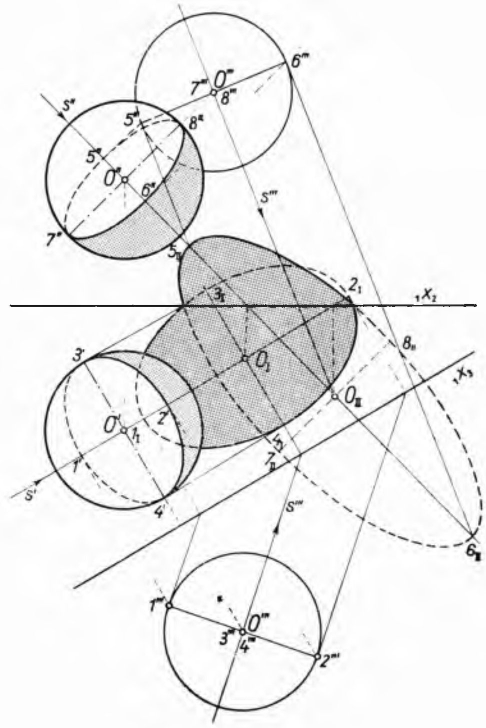
Bačenu sjenu valjka na ravnini Π_2 završava bačena sjena gornje osnovke. Budući da su bačene sjene paralelnih pravaca paralelni pravci, a bačena sjena središta svake dužine pada, kad je rasvjeta paralelna, u središte njezine bačene sjene, bit će bačena sjena jednog okomitog para promjera gornje osnovke na ravninu Π_2 par konjugiranih promjera njene bačene sjene. Na slici 31 odabrani su promjeri $1\,2 \perp \Pi_2$ i $3\,4 \parallel \Pi_2$. Bačene sjene $1_{II}\,2_{II} \parallel s''$ i $3_{II}\,4_{II} \parallel {_1x_2}$ takav su konjugirani par. Bačene sjene izvodnica rastavnice na ravninu Π_2 su okomite na osi $_1x_2$ a diraju bačenu sjenu osnovke u bačenim sjenama 5_{II}, 6_{II} njihovih tačaka $5, 6$ na gornjoj osnovci. Granicu bačene sjene valjka na ravnini Π_2 čini bačena sjena dijela gornje osnovke od tačke 5 preko tačaka 1, 4 do tačke 6, jer je taj dio gornje osnovne kružnice dio rastavnice. Dio donje osnovke od nožišta rastavnih izvodnica na suprotnu stranu $(5', 3', 2', 6')$ dio je rastavnice na donjoj osnovci jer je gornja osnovka osvijetljena a donja u samosjeni.

Sjena kosog kružnog valjka s osnovkom u Π_1 određuje se na isti način kao sjena uspravnog, samo je njegova bačena sjena na Π_1 paralelna s bačenom sjenom njegove osi na toj ravnini.

Sjena kugle. Na sl. 32 zadana je kugla svojim tlocrtom i nacrtom i zraka svjetla koja prolazi njenim središtem O. Treba odrediti sve sjene. Sve zrake svjetla koje diraju kuglu čine uspravan kružni dirni valjak koji je dira duž glavne kružnice okomite na zraci svjetla. Ta je glavna kružnica rastavnica kugle. Ako se, prema tome, postavi stranocrtna ravnina Π_3 paralelno sa zrakama svjetla a, recimo, okomito na Π_1 ($_1x_3 \parallel s'$), pa odredi treća projekcije kugle i zrake s (O''', s'''), bit će stranocrt rastavnice kugle promjer $1'''\,2'''$ stranocrta kugle okomit na stranocrtnu zraku s''', jer je ravnina rastavnice okomita na ravninu Π_3. Odaberu li se na rastavnici kugle okomiti promjeri $1\,2$, $3\,4$ tako da promjer $1\,2$ leži u priklonici prve skupine a promjer $3\,4$ u sutražnici prve skupine ravnine rastavnice, bit će tlocrti $1'\,2'$, $3'\,4'$ tih promjera, koji se lako mogu dobiti iz stranocrta i bez tragova ravnine rastavnice, mala i velika os tlocrta rastavnice. Bačene sjene tih promjera $1_I\,2_I$, $3_I\,4_I$ na ravnini Π_1, koje se pomoću stranocrta također lako mogu odrediti, daju veliku i malu os bačene sjene te rastavnice, odnosno kugle, na ravninu Π_1, budući da zbog $3\,4 \parallel \Pi_1$ i $3\,4 \perp 1\,2$ ostaje $1_I\,2_I \perp 3_I\,4_I$. Realna sjena na ravnini Π_1 ide dakako samo do osi $_1x_2$. Tu se ona lomi i prelazi na ravninu Π_2. Nacrt i bačena sjena rastavnice na Π_2 konstruirani su na posve jednak način kao u tlocrtu, pomoću stranocrtne ravnine $\Pi_3 \perp \Pi_2$ i $\Pi_3 \parallel s$ ($_2x_3 \parallel s''$), pri čemu su odabrani okomiti promjer $5\,6$, $7\,8$ rastavnice koji leže u priklonici i sutražnici druge skupine ravnine rastavnice. Na sl. 32 prolazi ravnina $\Pi_3 \perp \Pi_2$ središtem O kugle.

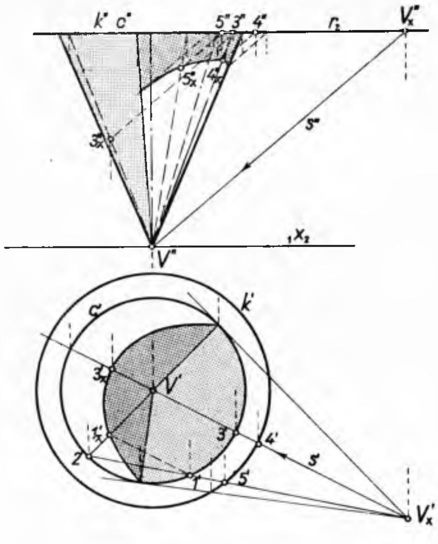
Metoda vraćanja. Kad se konstruiraju sjene jednog tijela ili lika bačene na drugo tijelo, upotrebljava se obično tzv. metoda vraćanja: na jednoj ravnini projekcija (Π_1 ili Π_2) konstruira se bačena sjena onog tijela ili lika koji baca sjenu i bačena sjena drugog tijela, na koje pada sjena, sa svim njegovim bridovima, ako ih ima. U tačkama u kojima bačena sjena prvog tijela siječe bačene sjene bridova, izvodnica ili kružnica drugog tijela povuku se zrake svjetla natrag do tih bridova, izvodnica ili kružnica na tijelu. Tako dobivene tačke na drugom tijelu, spojene, daju bačenu sjenu prvog tijela na drugom. Ako sjene padaju na ravninu Π_1, vraćanje se izvodi u tlocrtu pomoću tlocrtnih zraka na tlocrt drugog tijela, a pomoću okomica na os $_1x_2$ prenosi se sve u nacrt. Isto tako to može dakako biti u nacrtu. Ravnina na koju se baca jedna i druga sjena ne mora uvijek biti Π_1 ili Π_2; to može biti i bilo koja druga za konstruktivne svrhe pogodna ravnina.

Sjena šupljeg stošca. Svojim tlocrtom i nacrtom zadan je na sl. 33 šupalj uspravan kružni stožac kojemu je uz rub izvađene osnovke u njenoj ravnini s vanjske strane pričvršćen kružni vijenac. Vanjski rub vijenca je kružnica k, a unutarnji njegov rub je osnovna kružnica c stošca. Vrh V tog stošca nalazi se u Π_1, a osnovka mu je paralelna sa Π_1 i zadana je tragom $r_2 \parallel {_1x_2}$. Rasvjeta je zadana zrakom s koja prolazi vrhom V. Rastavnica stošca dobit će se tako da se odredi probodište V_* zrake s s ravninom osnovke i tom tačkom povuku tangente na osnovku. Dirališta tih tangenata, spojena s vrhom, daju izvodnice na rastavnici stošca. Budući da je desni dio osnovne kružnice između izvodnica rastavnice sastavni dio rastavnice, bacat će on sjenu u šupljinu stošca. Ta će se sjena vidjeti u tlocrtu jer se u tlocrtu vidi u unutarnjost stošca. Zamišljena sjena stošca bačena na ravninu njegove osnovke u suprotnom smjeru od smjera rasvjete sastojala bi se od osnovne kružnice c, koja je sama svoja bačena sjena, i spojnicâ njenih tačaka s tačkom V_*, koja je sjena vrha bačena na tu ravninu. Spoji li se nožište 2 jedne izvodnice s tačkom V_*, može se ta spojnica smatrati bačenom sjenom izvodnice $2\,V$ na ravnini osnovke. Ako se sjecištem 1 osnovke c i spomenute spojnice povuče zraka svjetla i njom presiječe u tački 1_* izvodnica $2\,V$, bit će 1_* sjena tačke 1 bačena u šuplji stožac. Na slici 33 izveden je taj konstruktivni postupak samo u tlocrtu. Sjena 3_* bačena u



Sl. 32

šuplji stožac tačkom *3*, u kojoj prva projicirajuća ravnina zrake *s* vrha *V* siječe osnovnu kružnicu *c*, naći će se tako da se tom projicirajućom ravninom presiječe stožac u izvodnici na šupljem rasvijetljenom dijelu, pa zrakom tačke *3* ta izvodnica presiječe. To sjecište je tražena tačka 3_*. Budući da se tlocrt te izvodnice poklapa s tlocrtom zrake *s*, odredit će se najprije nacrt $3_*''$ tačke 3_*, a onda njen tlocrt $3_*'$. Sjena kružnice *c* bačena u šupljinu stošca dio je elipse, jer se može smatrati dijelom prodorne krivulje zadanog stošca i kosog kružnog valjka što ga čine zrake svjetla koje prolaze tačkom osnovne kružnice *c*. Ta se prodorna krivulja raspada u kružnicu *c* i još jednu elipsu, jer je ona četvrtog reda.



Sl. 33

Bačena sjena u šupljini stošca konstruirana je samo u tlocrtu jer se u nacrtu ona ne vidi.

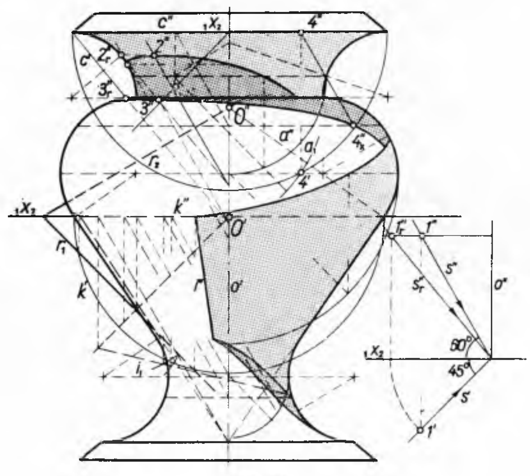
Onaj dio stošca koji je u šupljini osjenjen, s vanjske strane je osvijetljen. Dio vanjskog ruba kružnog vijenca (kružnica *k*) bacat će sjenu na taj s vanjske strane osvijetljeni dio stošca. Odaberimo bilo koju izvodnicu stošca na tom izvana osvijetljenom dijelu, recimo neka to bude izvodnica *1 V*. Spojnica $1\,V_*$ je bačena sjena te izvodnice na ravninu kružnice *k*, a ta je kružnica u svojoj ravnini sama svoja bačena sjena. Zraka svjetla koja prolazi sjecištem *5* kružnice *k* i spojnice $1\,V_*$ sjeći će izvodnicu *1 V* u bačenoj sjeni 5_* tačke *5* na tu izvodnicu. Odabere li se vidljiva rastavnica u nacrtu i nacrtna konturna osvijetljena izvodnica, mogu se i na njima odrediti tačke bačene sjene na isti način. Najvišu tačku 4_* bačene sjene daje tačka *4* kružnice *k*, koja je u prvoj projicirajućoj ravnini zrake *s* vrha *V*. Budući da ova projicirajuća ravnina siječe stožac u izvodnici *3 V*, nalazit će se tačka 4_* na toj izvodnici. Kako se ova bačena sjena vidi samo u nacrtu, ona je samo u nacrtu i konstruirana.

Sjene rotacione plohe. Na sl. 34 zadana je rotaciona ploha sastavljena od triju prikraćenih stožaca i dijelova triju torusa, od kojih su dva konkavna a jedan je konveksan. Smjer zraka svjetla čini u tlocrtu s osi $_1x_2$ 45°, a u nacrtu 60°. Treba konstruirati sve sjene tog tijela, i to samo u nacrtu.

Radi pojednostavnjenja konstruktivnog postupka pretpostavit će se da se os tijela nalazi u ravnini Π_2, a smjer osi $_1x_2$ da je okomit na toj osi, tj. tlocrti svih paralela tog tijela bit će koncentrične kružnice.

Kružnicu u kojoj dio srednjeg konveksnog dijela torusa neprekinuto prelazi u prikraćeni stožac označimo sa *k*. Nacrt *k''* te kružnice neka bude i os $_1x_2$, tj. pretpostavimo da kružnica *k* leži u ravnini Π_1. Zamislimo sada u naš prikraćeni stožac spuštenu kuglu koja ga dira duž kružnice *k*. Duž kružnice *k* dirat će ta kugla i srednji torus, jer se duž nje diraju torus i stožac. Rastavnice oblih tijela mogu se smatrati geometrijskim mjestom dirališta ravnina paralelnih sa zrakama svjetla. Iz toga slijedi da će rastavnica stošca, torusa i kugle prolaziti istom tačkom kružnice *k*, jer sva tri ova tijela imaju duž te kružnice zajedničke dirne ravnine. Budući da se središte *O* dirne kugle nalazi u ravnini Π_2, prolazit će njime drugi trag $r_2 \perp s''$ ravnine rastavnice. Njegovim sjecištem sa osi $_1x_2$ prolazi prvi trag $r_1 \perp s'$ te ravnine, i taj trag kružnicu *k* siječe u tačkama kojima prolaze rastavnice kugle, stošca i torusa. Te tačke spojene s vrhom zadanog stošca daju njegove rastavnice, koje su izvučene do donje prelazne kružnice u donji konkavni torus. Tačke rastavnice na bilo kojoj paraleli triju zadanih torusa traže se na posve jednak način, jer se duž svake paralele može umetnuti zamišljena dirna kugla i prvim tragom ravnine njene rastavnice presjeći ta paralela u tačkama rastavnice. Duž najužih i najširih paralela diraju rotacionu plohu uspravni kružni valjci, pa se ta činjenica upotrebljava pri određivanju tačaka rastavnice na tim paralelama. Tj., tlocrtom zrake svjetla dira se tlocrt tih paralela i dobivena dirališta su tražene tačke u tlocrtu. Nacrt je dakako na okomici.

Sve zrake svjetla koje diraju rotacionu plohu čine valjak čije konturne izvodnice nacrta diraju konturu nacrta te rotacione plohe. Konturne tačke rastavnice u nacrtu dobit će se, prema tome, tako da se nacrtom zrake svjetla dira nacrtna kontura rotacione plohe, pa će dirališta biti tražene tačke. Najviša i najniža tačka rastavnice nalaze se u onim tačkama meridijana paralelnog sa zrakama svjetla u kojima zrake svjetla diraju taj meridijan. Te se tačke konstruiraju tako da se opisani meridijan zarotira oko osi tijela u položaj paralelan s ravninom Π_2, odnosno, u našem slučaju, u tu samu ravninu, a zajedno s njim se rotira i jedna zraka koja tu os siječe. Zarotirani meridijan pada u konturni meridijan nacrta, a nacrt zarotirane zrake konstruira se negdje sa strane oko osi o_1 paralelne s osi *o* našeg tijela. Radi jednostavnosti uzimamo zraku koja siječe os $_1x_2$ u istoj tački kao os o_1. Tačka *1* na toj zraci putuje po kružnici paralelnoj sa Π_1 do tačke $1_2''$ u ravnini Π_2, dok zajednička tačka osi o_1, osi $_1x_2$ i naše zrake ostaje na miru. Spojnica s_r'' tog sjecišta s tačkom $1_r''$ je nacrt tražene zarotirane zrake, s kojom je paralelan nacrt svake zrake zarotirane oko osi *o* u ravninu Π_2 ili ravninu paralelnu s njom. Ako se, prema tome, na konturni meridijan nacrta povuče tangenta paralelna sa s_r'', pa diralištem $2_r''$ povuče nacrt paralele, nalazit će se na tom nacrtu paralele nacrt *2''* najviše tačke *2* rastavnice. Tačkom $2_r''$ povučena tangenta je zarotirana zraka koja siječe os *o* tijela, dakle nacrtom tog sjecišta prolazi nacrt te zrake prije rotacije, pa se na njezinom nacrtu nalazi nacrt *2''* najviše tačke *2* rastavnice; zbog toga ju je lako konstruktivno odrediti.



Sl. 34

Bačenu sjenu na tom rotacionom tijelu dat će donji kružni rub *c* gornjeg završnog prikraćenog stošca. Najviša tačka *3* bačene sjene nalazi se u istoj meridijanskoj ravnini u kojoj je i najviša tačka rastavnice, a dobit će se pomoću iste, već opisane rotacije. Tačka kružnice *c* kojoj sjena pada u najvišu tačku *3* bačene sjene, nakon rotacije pada u krajnju lijevu tačku nacrta *c''* kružnice *c*. Ako se tom tačkom povuče zraka s_r'' i njom presiječe konturni meridijan nacrta pa tim sjecištem $3_r''$ povuče okomica na *o''*, nalazit će se na toj okomici (paraleli) nacrt *3''* najviše tačke *3* bačene sjene. Ali ta se tačka nalazi i na zraci *s''*, povučenoj sjecištem nacrta osi *o* i spomenute zrake s_r'', pa ju je lako odrediti.

Bačene sjene ostalih tačaka kružnice c određuju se metodom vraćanja. Ravninu kružnice c smatrajmo ravninom Π_1, tako da je ta kružnica sama svoja bačena sjena u toj ravnini. Sjena neke paralele, recimo a, bačena na ravninu Π_1 bit će kružnica a_1 polumjera jednakog polumjeru te paralele. Tačkama (4) u kojima ta kružnica siječe kružnicu c povuku se zrake svjetla, i one tu paralelu sijeku u tačkama (4_*) krivulje bačene sjene. Ta sjecišta $(4')$ dobit će se u tlocrtu, a njihovim nacrtima $(4'')$ u osi ${}_1x_2 \equiv c''$ povučene nacrtne zrake sijeku nacrt a'' paralele a u nacrtima $(4_*'')$ traženih tačaka. Osim ove bačene sjene postoji i bačena sjena rastavnice i prikraćenog srednjeg stošca na donjem konkavnom torusu. Ta se sjena dobije tako da se odredi bačena sjena i_I te rastavnice na ravnini kružnice k, pa ova bačena sjena presiječe bačenim sjenama paralelâ spomenutog donjeg konkavnog torusa. Na isti način kao gore vraćaju se dobivena sjecišta na te paralele, gdje tako dobivene tačke leže na bačenoj sjeni rastavne izvodnice i.

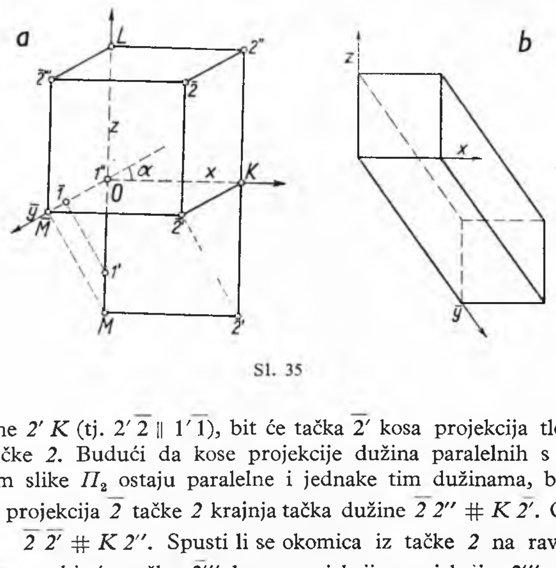
Izvodnice rastavnice gornjeg i donjeg završnog prikraćenog stošca nisu u nacrtu vidljive, pa zato nisu ni nacrtane.

KOSA PROJEKCIJA

Sjena nekog predmeta bačena na ravninu projekcija može se smatrati i kosom projekcijom tog predmeta na tu ravninu. Kad bi osim kose projekcije predmeta na takvoj ravnini bila zadana i njegova okomita projekcija i kad bi osim toga bio određen i smjer kosog projiciranja, predmet bi tom kosom projekcijom bio potpuno određen i po obliku i po veličini i po smještaju.

U daljnjim razmatranjima o kosoj projekciji uzet će se ravnina Π_2 kao ravnina slike, a kose projekcije neke tačke A i nekog pravca a označit će se sa $\bar{A}$, odnosno $\bar{a}$. Na sl. 35 zadane su ravnine Π_1 i Π_2, pri čemu je kao uvijek ravnina Π_1 oko osi ${}_1x_2$ preložena u Π_2. Osim toga tačkom O na osi x povučena je okomica y na ravninu Π_2 (ta okomica je u Π_1) i okomica z na ravninu Π_1 (ona je u Π_2). Ova tri pravca mogu se smatrati osima x, y, z pravokutnog prostornog koordinatnog sistema s ishodištem u O. Odabere li se sada smjer kosog projiciranja tako da nacrt tog smjera čini sa osi x kut α, projicirat će se os y u tom smjeru na ravninu Π_2 u pravac $\bar{y}$, koji izlazi iz ishodišta O, a čini s osi x kut α. Ako se neka tačka 1 osi y projicira na pravcu $\bar{y}$ u tačku $\bar{1}$ tako da je $\bar{1}\,O = \frac{1}{2}\cdot 1'O$, onda je kotangens priklonog kuta φ zrake kosog projiciranja prema ravnini slike Π_2 jednak $\frac{1}{2}$. Vrijednost tog kotangensa, odnosno omjera kose projekcije $\bar{1}\,O$ dužine $1\,O$ prema njenoj pravoj veličini $(\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2})$, zove se *prikrata* kose projekcije. Kutom α i prikratom smjer je kosog projiciranja prema tome određen.

Na sl. 35 a zadana je tlocrtom i nacrtom neka tačka 2 tako da je ona jednako daleko od ravnina $x\,y \equiv \Pi_1$, $x\,z \equiv \Pi_2$ i $y\,z \equiv \Pi_3$, a spojnica $2'2''$ siječe os x u tački K. Povuče li se tačkom K pravac $\bar{2}\,K \parallel \bar{y}$ i na njega od tačke K do tačke $\bar{2}$ nanese polovica



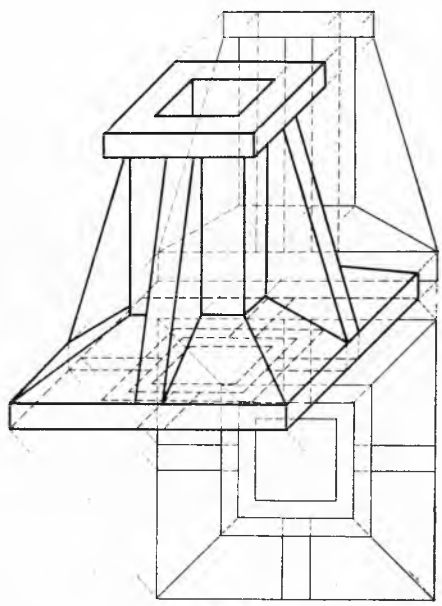
Sl. 35

dužine $2'\,K$ (tj. $2'\,\bar{2} \parallel 1'\,\bar{1}$), bit će tačka $\bar{2}'$ kosa projekcija tlocrta $2'$ tačke 2. Budući da kose projekcije dužina paralelnih s ravninom slike Π_2 ostaju paralelne i jednake tim dužinama, bit će kosa projekcija $\bar{2}$ tačke 2 krajnja tačka dužine $\bar{2}\,2'' \;\#\; K\,\bar{2}'$. Očito je i $\bar{2}\,\bar{2}' \;\#\; K\,2''$. Spusti li se okomica iz tačke 2 na ravninu $\Pi_3 \equiv y\,z$, bit će tačka $\bar{2}'''$ kosa projekcija projekcije $2'''$ tačke 2 na tu ravninu. Kao što je određena kosa projekcija tačke 2, tako se može odrediti kosa projekcija svake tačke koja je zadana svojim tlocrtom i nacrtom. Odrede li se na osima z i y tački K analogne tačke L, M, dobit će se kosa projekcija kocke kojoj pobočni kvadrati uz ishodište O leže u ravninama $x\,y$, $x\,z$ i $y\,z$, a tačka 2 joj je vrh nasuprot ishodištu O. Kosa projekcija pobočke te kocke u ravnini $x\,z$ i s njom paralelna pobočka bit će kvadrati u pravoj veličini, jer jedna od njih leži u ravnini slike a druga je s njom paralelna.

Slika kocke na sl. 35 a može se nacrtati tako da tačka $\bar{2}$ bude ili vidljiva ili nevidljiva. U prvom slučaju imamo *pogled odozgo*, a u drugom slučaju *pogled odozdo*. Od ovih dvaju može se uzeti bilo koji, jer je konstruktivni postupak u oba slučaja isti. U prvom je slučaju kocka koso projicirana i gledana odozgo dolje i zdesna nalijevo, a u drugom slučaju odozdo gore i slijeva nadesno. Na sl. 35 a prikazan je prvi slučaj. U kosoj projekciji nekog praktičnog objekta može se odabrati jedan ili drugi pogled, već prema tome koja se strana želi vidjeti.

Kutom α i prikratom je smjer kosog projiciranja određen, a taj kut i ta prikrata mogu se uzeti po volji, ali se u praksi ne smiju uzimati tako da slika dobije neprirodan izgled, kao npr. kosa projekcija kocke na sl. 35 b. Najprirodnije slike se dobiju uz prikratu $\frac{1}{2}\cdots\frac{2}{3}$ i kut $\alpha = 30\cdots45°$.

Na sl. 36 nacrtana je kosa projekcija praktičnog objekta koji je zadan tlocrtom i nacrtom, na isti način kako je to učinjeno

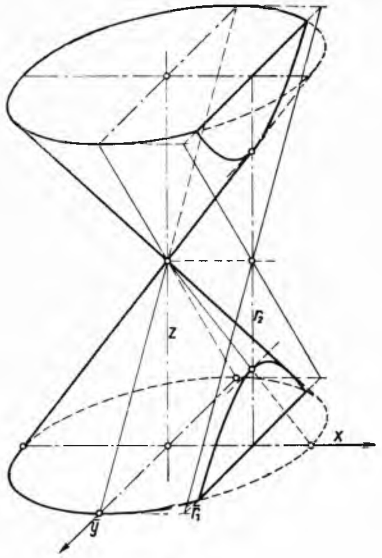


Sl. 36

s tačkom 2 na sl. 35. Prikrata je $\frac{2}{3}$ a kut $\alpha = 45°$. Odabran je pogled odozgo.

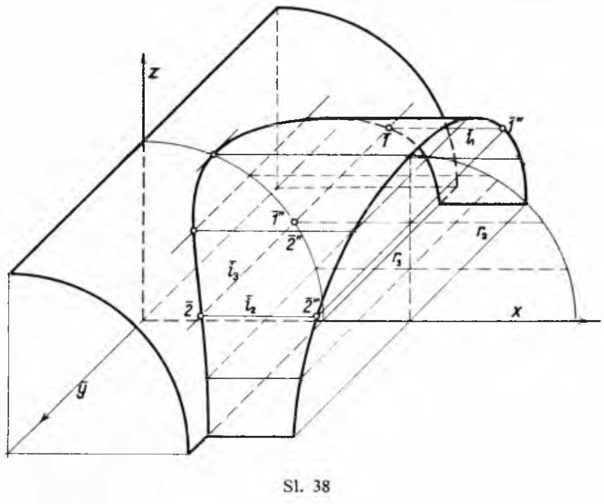
Budući da su kose projekcije paralelnih pravaca paralelni pravci a kose projekcije polovištâ dužinâ su polovišta kosih projekcija tih dužina, bit će kosa projekcija okomitog para promjera kružnice par konjugiranih promjera elipse u koju se kružnica koso projicira. Kad se crtaju kose projekcije kružnica paralelnih s koordinatnim ravninama, odabrat će se dakako njihovi promjeri paralelni s koordinatnim osima.

Na sl. 37 zadana je kosa projekcija uspravnog kružnog stošca produženog preko vrha; os se stošca poklapa s osi z, a donja osnovka mu leži u ravnini $x\,y$. Prikrata je $\frac{2}{3}$ a kut $\alpha = 45°$. Tragovima $r_2 \perp x$ i $r_1 \parallel y$ zadana je kosa projekcija ravnine paralelne s osima y, z kojom treba presjeći taj stožac. Pri crtanju gornje i donje osnovke stošca, koje su jednako daleko od vrha, uzeti su njihovi promjeri u osima x, y dolje, a paralelno s njima gore. Budući da je presječna ravnina paralelna s izvodnicama stošca u ravnini $y\,z$, bit će traženi presjek hiperbola. Postave li se duž izvodnica u ravnini $y\,z$ dirne ravnine, sjeći će one, kao što je poznato, ravninu presjeka u asimptotama presječne hiperbole. Te su asimptote sa spomenutim izvodnicama paralelne i prolaze sjecištima traga r_1 s prvim tragovima dirnih ravnina. Ti prvi tragovi diraju osnovku u nožištima spomenutih izvodnica u ravnini $y\,z$. U sjecištima presječne ravnine s osnovkama stošca nalaze se četiri tačke presječne hiperbole, a u sjecištima drugog traga r_2 s izvodnicama stošca u ravnini $x\,z$ nalaze se tjemena te hiperbole. Kosim projekcijama asimptota i kosim projekcijama spomenutih tačaka kosa je projekcija presječne hiperbole određena i ona se može nacrtati. Pojedine tačke te hiperbole mogu se dobiti i pomoću probodišta pojedinih izvodnica s ravninom presjeka.



Sl. 37

Radi što jednostavnijeg konstruktivnog postupka pri crtanju kose projekcije nekog tijela, može se uzeti i prikrata 1, tj. sve dimenzije u smjeru osi y mogu se prenositi u pravoj veličini. Na sl. 38 zadan je nacrt četvrtine šupljeg valjka kojemu je os os y i jedan šuplji poluvaljak manjeg polumjera kojemu je os os x. Oba su tijela iznad ravnine $x\,y$. Treba konstruirati kosu



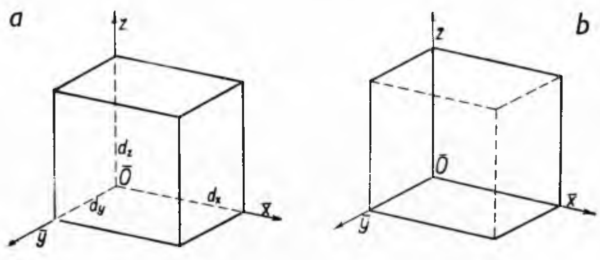
Sl. 38

projekciju prodora tih dvaju tijela s pogledom odozgo uz prikratu 1 i $\alpha = 45°$. Nacrtani nacrt je kosa projekcija presjeka tih tijela s ravninom $x\,z$. Presijeku li se oba ova valjka ravninama usporednim s ravninom $x\,y$, sjeći će se dobivene presječne izvodnice u tačkama prodorne krivulje. Neka je $r_2 \parallel x$ drugi trag takve pomoćne ravnine koja siječe osnovku užeg poluvaljka u tragu r_3. Kosa projekcija tog traga siječe kosu projekciju osnovke u tačkama $1'''$, $2'''$ kojima prolaze kose projekcije presječnih izvodnica i_1, i_2 tog valjka i te ravnine. Sjecištem $1''$, $2''$ traga r_2 s osnovkom šireg četvrtvaljka u ravnini $x\,z$ prolazi presječna izvodnica i_3 tog četvrtvaljka i naše pomoćne ravnine. Sjecišta $1, 2$ tih triju izvodnica su tačke prodorne krivulje. Slika je izvučena s pogledom odozgo.

KOSA AKSONOMETRIJA

Kad smo crtali kosu projekciju nekog predmeta, zamišljali smo taj predmet vezan uz koordinatni sistem $O(x, y, z)$, koji smo onda zajedno s promatranim predmetom koso projicirali na koordinatnu ravninu $x\,z$. Zamislimo sada taj koordinatni sistem, zajedno s predmetom koji je uz njega vezan, postavljen u prostoru bilo kako s obzirom na ravninu slike, i sve to koso projicirajmo na tu ravninu. Takva slika predmeta bit će nacrtana u *kosoj aksonometriji*. Crtanje slika raznih predmeta u kosoj aksonometriji počiva na *Pohlkeovu stavku* koji glasi: Ako su u ravnini nacrtane tri nejednake dužine koje izlaze iz jedne tačke a sve tri ne leže na jednom pravcu, onda se te dužine mogu smatrati kosom projekcijom triju jednakih negdje u prostoru smještenih dužina, koje izlaze iz jedne tačke i među sobom su okomite. Takvu tvorevinu zvat ćemo *pravilnim pravokutnim trokrakom*.

Ako se, prema tome, povuku jednom tačkom $\bar{O}$ tri pravca $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ po volji (sl. 39 a) i na svaki od njih nanese bilo kakva dužina od tačke O, mogu se te dužine smatrati kosom aksonometrijskom slikom nekog pravilnog pravokutnog trokraka, odnosno pravokutnog prostornog koordinatnog sistema $O(x, y, z)$, gdje su krajnje tačke tih triju po volji odabranih dužina slike jediničnih tačaka na osima x, y, z, uz jednake jedinice u prostoru. Pretpostavi li se da su te tri jedinične dužine bridovi kocke vrha O, lako je nacrtati sliku čitave te kocke (sl. 39 b). Da ta slika kocke bude prirodna, treba slike bridova na osima x, z uzeti približno jednake, a sliku brida na osi y približno za pola manju od spomenutih dviju. Kad se odabira slika $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ osiju x, y, z, treba još uzeti da je $\sphericalangle\, x\,z$ jednak 120···130°, a $\sphericalangle\, y\,z$ da bude 130···140°.



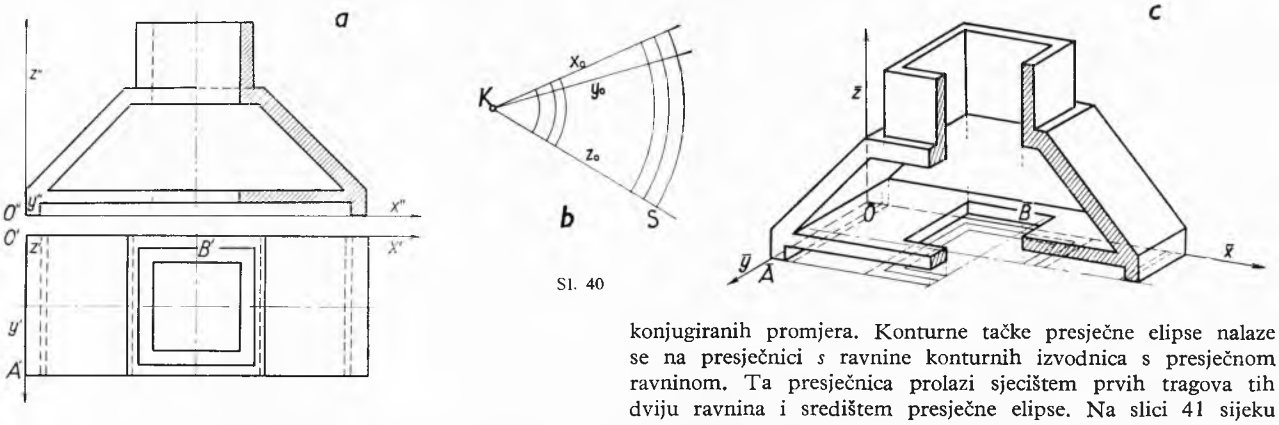
Sl. 39

Držeći se tih uvjeta dobit će se u kosoj aksonometriji prirodan izgled slika. Kao u kosoj projekciji, mogu se i u kosoj aksonometriji slike predmeta crtati s pogledom odozgo (sl. 39 a), ili s pogledom odozdo (sl. 39 b).

Ako je zadan neki objekt njegovim tlocrtom i nacrtom, tačno dimenzioniranima u nekom zadanom mjerilu, koje može biti zadano i grafički, možemo metodom koordinata nanijeti u kosu aksonometrijsku sliku koordinatnog sistema $\bar{O}$ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ svaku tačku isto takvog objekta, ako se zadaju tri po volji velike dužine d_x, d_y, d_z, koje će se smatrati slikama jediničnih dužina na osima x, y, z. U tlocrtu i nacrtu zadanog objekta treba ovaj smjestiti u zgodno odabrani koordinatni sistem, da bi prenošenje tačaka iz koordinatnog sistema u tlocrtu i nacrtu u koordinatni sistem kose aksonometrijske slike bilo što jednostavnije. Pri crtanju kosih aksonometrijskih slika kružnicâ koje leže u ravninama $x\,y$, $x\,z$, $y\,z$, ili su s njima paralelne, uzimat će se njihovi promjeri paralelni s osima x, y, z, jer su oni među sobom okomiti, pa će njihove slike biti parovi konjugiranih promjera slika tih kružnica.

Namjesto dužina d_x, d_y, d_z mogu se zadati i omjeri njihovih duljina, npr. $d_x : d_y : d_z = 9 : 8 : 10$. Pomoću tih omjera mogu se konstruktivno odrediti prikrate svake dužine na bilo kojoj osi, ili paralelne sa ma kojom osi. Kako se to izvodi vidjet će se na sl. 40 c.

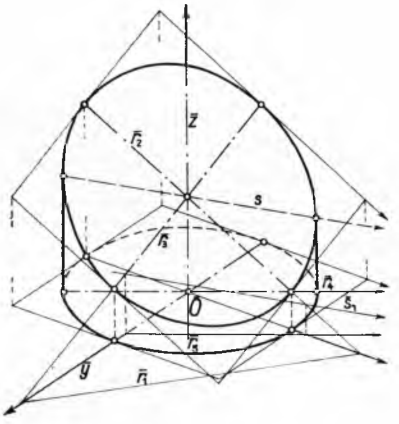
Na sl. 40 a zadan je tlocrtom i nacrtom stalak od lijevanog željeza, kojemu ćemo izrezati desnu donju četvrtinu. U tlocrtu i nacrtu zadano je ishodište O i zgodno smještene osi x, y, z. Slike $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ osi x, y, z zadajmo po volji, držeći se uvjeta pri-



Sl. 40

rodnog izgleda slike, a slike jediničnih dužina na slikama osi neka su zbog oblika objekta zadane ovako $d_x : d_y : d_z = 9 : 8 : 10$.

Oko krajnje tačke K poluzrake z° opisan je na sl. 40 c kružni luk kojemu je polumjer jednak deset bilo kakvih jedinica. Od sjecišta S na toj poluzraci nanesene su na taj luk tetive duge 9 i 8 tih istih jedinica, a krajnje tačke spojene su s tačkom K. Dobivene poluzrake označene su sa x° i y°. Odluči li se da se koordinate z sa sl. 40 a prenose na sl. 40 b u istoj veličini, prenijet će se koordinate x i y sa prve na drugu sliku ovako: u šestar se uzme širina tlocrta $O'A'$ zadanog objekta na osi y, pa se oko tačke K opiše tim polumjerom luk do zrake y°. Duljina tetive tog luka od zrake z° do zrake y° bit će jednaka duljini slike tē dužine na osi $\bar{y}$. Isto tako se kružnim lukom polumjera $O'B'$, opisanim oko K od zrake z° do zrake x°, dobiva polovina duljine slike na osi $\bar{x}$. Analognim prenošenjem svih ostalih tačaka tlocrta sa sl. 40 a na kosu aksonometrijsku sliku $\overline{x\,y}$ ravnine $x\,y$ na sl. 40 b dobit će se slika tlocrta zadanog objekta. Prenošenjem visina pojedinih tačaka zadanog objekta sa sl. 40 a na sl. 40 b, gdje će slike tih visina biti na paralelama sa slikom $\bar{z}$ osi z, bit će sastavljena kosa aksonometrijska slika zadanog objekta.



Sl. 41

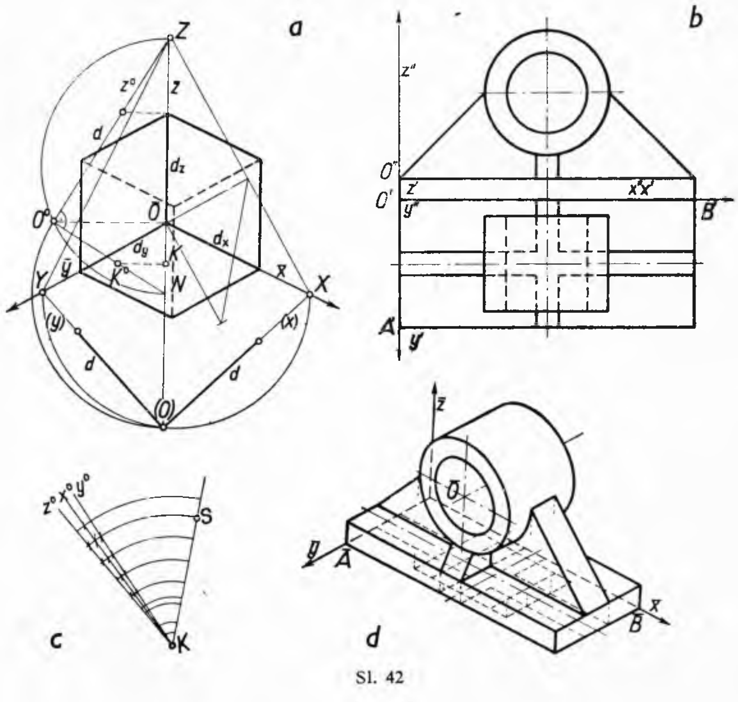
Na sl. 41 nacrtana je u kosoj aksonometriji slika uspravnog kružnog valjka kojemu je osnovka u ravnini $x\,y$, a os mu se poklapa sa osi z. Slike para promjera osnovke okomitih na osima x,y (par konjugiranih pomjera) odabrane su po volji, jer se to na temelju Pohlkeova stavka može učiniti. Osim toga je slikama $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ tragova u ravninama $x\,y$, $x\,z$ i $y\,z$ zadana i jedna ravnina. Neka se odredi slika presjeka te ravnine sa zadanim valjkom.

Pobočne ravnine dirne kvadratne prizme tog valjka, koje su paralelne s ravninama $x\,z$ i $y\,z$, diraju taj valjak u izvodnicama koje leže u ravninama $x\,z$ i $y\,z$. Budući da te dvije ravnine čine okomit dijametralni par, bit će u slikama $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ tragova r_2, r_3 par konjugiranih promjera slike presječne elipse. Presječnice s pobočnim ravninama spomenute dirne prizme bit će tangente u krajnjim tačkama tog para konjugiranih promjera. Konturne tačke presječne elipse nalaze se na presječnici s ravnine konturnih izvodnica s presječnom ravninom. Ta presječnica prolazi sjecištem prvih tragova tih dviju ravnina i središtem presječne elipse. Na slici 41 sijeku se prvi tragovi tih dviju ravnina daleko, pa je ravnina presjeka presječena najprije ravninom paralelnom s ravninom konturnih izvodnica valjka (trag $\bar{r}_4 \parallel \bar{r}_5$). Tražena presječnica s, koja prolazi središtem presječne elipse, paralelna je s dobivenom presječnicom s_1.

Radi jednostavnijeg konstruktivnog postupka u kosoj aksonometriji može se omjer prikrata na osima x, y, z uzeti $1 : 1 : 1$. U tom se slučaju sve tri dimenzije prenose na kosu aksonometrijsku sliku bez prikrata, direktno sa zadanih tlocrta, nacrta ili bokocrta.

ORTOGONALNA AKSONOMETRIJA

Projicira li se koordinatni sistem $O\,(x, y, z)$ i uz njega povezani objekt okomito na ravninu slike, bit će taj objekt prikazan u ortogonalnoj aksonometriji. Neka su na sl. 42 a zrake $\overline{O\,x}$, $\overline{O\,y}$, $\overline{O\,z}$ ortogonalne projekcije koordinatnog sistema na ravninu slike, a njegove osi x, y, z neka tu ravninu probadaju u tačkama X, Y, Z. Budući da se ovdje radi o okomitom projiciranju, a ravnina $x\,y$ je okomita na osi z, mora biti $\bar{z} \perp X\,Y$, jer je $X\,Y$ trag ravnine $x\,y$ u ravnini slike, a $\bar{z}$ projekcija na nju okomitog pravca. Isto tako je $Y\,Z \perp \bar{x}$ i $X\,Z \perp \bar{y}$. Trokut $X\,Y\,Z$ zove se *tračni trokut* osnog križa. Opiše li se oko dužine $X\,Y$ polukružnica i ona produženom osi $\bar{z}$ presiječe u tački (O), bit će ova tačka ishodište O prevaljeno oko traga $X\,Y$ u ravninu slike, budući da je $(O)\,X \equiv (x) \perp (O)\,Y \equiv (y)$; dakle su i (x), (y) prevaljene osi x, y. Sjecište N traga $X\,Y$ s okomicom $O\,(O)$ je središte te rotacije. Prevali li se pravokutni trokut $N\,O\,Z$ oko stranice $N\,Z$ u ravninu slike, pada preložena tačka O° na polukružnicu opisanu oko promjera $N\,Z$ jer je $N\,O \perp O\,Z$, dakle i $N\,O^\circ \perp O^\circ Z \equiv z^\circ$.



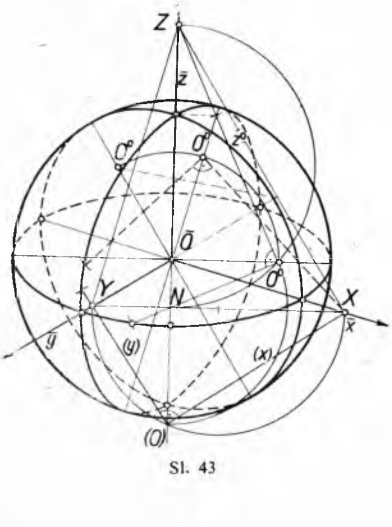
Sl. 42

Očito je $N(O) = N O^\circ$, jer je to ista dužina dva puta preložena. Od tačke (O) na osi (x), (y) i od tačke O° na os z° nanesena je neka dužina d, pa su određene njezine projekcije d_x, d_y, d_z na slikama $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ osi. Smatraju li se ove dužine, koje izlaze iz tačke O, slikama bridova kocke kojoj je ishodište O jedan od vrhova, vrlo je lako nacrtati i sliku čitave te kocke. Ta kocka, kao i slika svakog drugog objekta u ortogonalnoj aksonometriji, može biti izvučena s pogledom odozgo ili s pogledom odozdo. Na sl. 42 a izvučena je slika kocke s pogledom odozdo. Lijepe i prirodne slike dobivaju se u ortogonalnoj aksonometriji ako je $\sphericalangle\, x z$ oko 110°, a $\sphericalangle\, y z$ 120···130°.

Tlocrtom i nacrtom zadan je na sl. 42 b jednostavniji ležaj, koji treba prikazati u ortogonalnoj aksonometriji uz osni križ zadan na sl. 42 a. Taj objekt treba zamisliti smješten u koordinatni sistem $O(x, y, z)$ onako kako je to učinjeno na sl. 42 b. Na sl. 42 d nacrtana je najprije ortogonalna aksonometrijska slika tog osnog križa, u koju je onda smještena slika zadanog predmeta. Sve dužine paralelne s osima x, y, z prikraćene su na toj slici u istom omjeru u kojemu su dužine d_x, d_y, d_z prikraćene prema dužini d. Konstruktivno se to izvršava ovako: oko tačke K jedne poluzrake s na sl. 42 c opisan je luk s polumjerom d, koji tu poluzraku siječe u tački S. Ako se taj luk sada presiječe lukovima oko tačke S, a polumjerâ jednakih d_x, d_y, d_z, i dobivene tačke spoje s tačkom K, dat će spojnice x°, y°, z° zrake pomoću kojih se konstruiraju prikrate. Opiše li se npr. oko K luk s polumjerom $O'A'$ jednakim dužini OA na osi y sl. 42 b, onda je duljina tetive na tom luku između zrakâ s, y° jednaka duljini aksonometrijske slike $\bar{O}\bar{A}$ dužine OA na osi $\bar{y}$ sl. 42 d. Učini li se to isto s lukom polumjera $O'B'$, bit će duljina $\bar{O}\bar{B}$ na sl. 42 d jednaka duljini tetive tog luka između zrakâ s i x°. Na isti se način određuju slike tačaka tlocrta čitavog objekta. Ako li se u tačkama slike tog tlocrta na sl. 42 d nanesu paralele s osi $\bar{z}$, pa na njih istim načinom pomoću zrake z° prikraćene visine tačaka tog objekta iznad ravnine nacrta, bit će sastavljena čitava ortogonalna aksonometrijska slika tog objekta.

Slike kružnica koje leže u ravninama paralelnim s ravninom $x z$ (elipse) određene su slikama njihovih promjera paralelnih s osima $\bar{x}$, $\bar{z}$, koje će slike dati par konjugiranih promjera slika tih kružnica. U ortogonalnoj aksonometrijskoj slici kružnice lako se nacrtaju velika i mala os, jer je velika os jednaka pravoj veličini promjera i paralelna s tragom ravnine u kojoj se nalazi, a mala je os projekcija promjera u priklonici te ravnine. Npr. $\bar{O}\,K$ na sl. 42 a je mala poluos slike kružnice središta $\bar{O}$ u ravnini $\bar{x}\,\bar{y}$, a polumjera jednakog dužini $O^\circ K^\circ$.

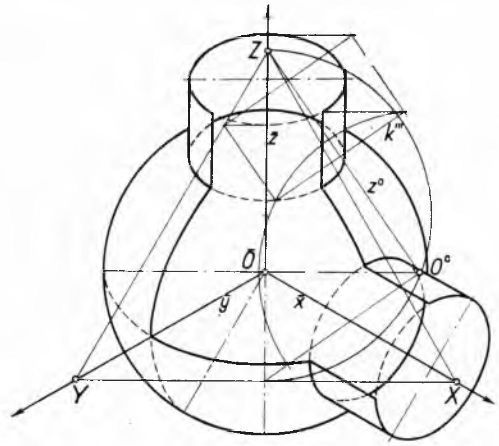
Kad bi sl. 42 b bila dimenzionirana tako da bi numerički bila označena duljina svakog njenog brida, mjerena jedinicama nekog mjerila (recimo u centimetrima), onda bi se našle prikrate za jedinicu tog mjerila na osima $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, kao što je to učinjeno za dužinu d, pa bi se sastavila mjerila za sliku svake osi posebno. Pomoću tih mjerila mogla bi se metodom koordinata na sl. 42 d nacrtati slika bilo koje tačke zadanog objekta, prenoseći je sa sl. 42 b, dakle i nacrtati slika čitavog objekta.



Sl. 43

Kugla. Kako je poznato, okomita je projekcija kugle na neku ravninu kružnica kojoj je polumjer jednak polumjeru kugle. Ortogonalna aksonometrijska slika kugle bit će dakle kružnica. Na sl. 43 zadana je ortogonalna aksonometrijska slika kugle sa središtem u ishodištu O koordinatnog sistema koji je u prostoru određen tračnim trokutom $X\ Y\ Z$. Slike presječnih kružnica te kugle s koordinatnim ravninama dobit će se tako da se odrede probodišta osi x, y, z s tom kuglom (vidi kako je dobivena dužina d_z na sl. 42 a). Slike dobivenih probodišta krajnje su tačke parova konjugiranih promjera elipsi koje su slike presječnih kružnica. Velika os slike presječne kružnice s ravninom $x y$ paralelna je s tragom $X\ Y$ i jednaka promjeru kugle. Slika promjera te kružnice na priklonici $\bar{O}\,N$, koja je mala os te elipse, dobije se pomoću preklopljenog položaja $O^\circ N$ priklonice, na kojoj se taj promjer vidi u pravoj veličini. Posve jednako crtaju se slike presječnih kružnica i s preostalim dvjema koordinatnim ravninama.

Uz koordinatni sistem kojemu je tračni trokut istostran (tj. gdje su sve tri prikrate jednake) zadana je ortogonalna aksonometrijska slika kugle iz koje izlaze valjci polumjera jednakih polovici polumjera te kugle, a kojih se osi poklapaju s osima

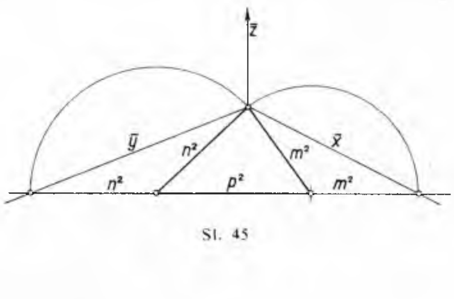


Sl. 44

x i z (sl. 44). Od tih valjaka crtan je samo gornji dio iznad ravnine slike, a izrezana je i prednja osmina čitavog tog sastavljenog objekta. Pretpostavimo da je projicirajuća ravnina osi $\bar{z}$ stranocrtna ravnina ($z \equiv {}_2x_3$). Tačka O° bit će tada stranocrt središta kugle a z° stranocrt osi z. Prodorna kružnica k zadane kugle s valjkom kojemu se os poklapa s osi z projicira se na ovu stranocrtnu ravninu kao tetiva k''' stranocrta kugle, jednaka polumjeru te kugle. Stranocrt gornje osnovke tog valjka dužina je paralelna i jednaka stranocrtu donje prodorne kružnice. Budući da stranocrti tih kružnica leže na priklonicama svojih ravnina, koje prolaze središtima tih kružnica, bit će slike promjera na tim priklonicama male osi slika kružnica. Budući da je velika os tih slika paralelna s tragom ravnine, koji je paralelan s tragom $X\ Y$, i jednaka pravoj veličini promjera, dakle jednaka pravoj veličini stranocrta promatranih kružnica, lako je nacrtati ortogonalnu aksonometrijsku sliku tih kružnica.

Slika drugog valjka mogla bi se nacrtati na posve jednak način kao prvog, sa projicirajućom ravninom osi x kao stranocrtnom ravninom. Ali to nije potrebno jer su, zbog jednakih prikrata na sve tri osi, slike obaju valjaka jednake, pa sliku sa osi $\bar{z}$ treba samo prenijeti na os $\bar{x}$. Zbog istog razloga bit će i slike dijelova presjeka zadane kugle s ravninama $x y$ i $y z$ jednake, a mala os slike presjeka s ravninom $x z$ također je jednaka malim osima slika prvih dvaju presjeka. Na slici 44 izvučeni su samo oni dijelovi tih triju presjeka kojima je ograničena izbačena osmina objekta kao cjeline.

Ortogonalna aksonometrijska slika nekog predmeta može se nacrtati i uz dane omjere prikrata d_x, d_y, d_z neke dužine d na

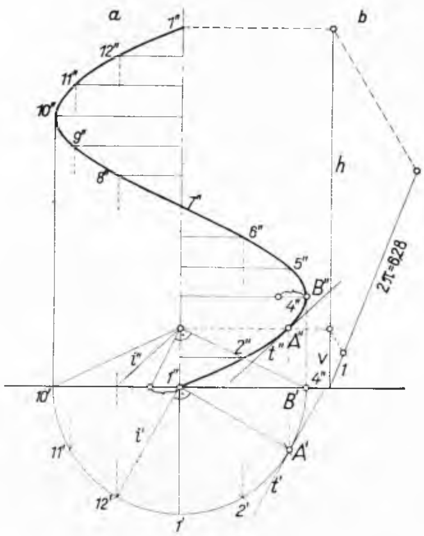


Sl. 45

osima x, y i z. Neka je, recimo, $d_x : d_y : d_z = m : n : p$. Ako se sastavi trokut kojemu su stranice jednake kvadratima duljina m, n, p u bilo kakvim jedinicama mjerila, pa na produženu osnovku (p^2) nanesu, kao na sl. 45, od vrhova desno i lijevo stranice m^2, n^2, dat će spojnice dobivenih tačaka s vrhom ($n^2 \times m^2$) slike $\bar{x}$, $\bar{y}$ osi x, y, a okomica u tom vrhu povučena na osnovku (p^2) je slika $\bar{z}$ osi z. Najljepše slike u ortogonalnoj aksonometriji dobiju se ako je približno $d_x : d_y : d_z = 9 : 5 : 10$.

ZAVOJNICA I ZAVOJNE PLOHE

Putuje li neka tačka na plaštu uspravnog kružnog valjka tako da se jednoliko kreće oko osi valjka i istovremeno jednoliko diže ili spušta u smjeru te osi, opisuje ona na tom plaštu krivulju koja se zove *zavojnica* ili *cilindrična spirala*. Na temelju te definicije konstruirana je na sl. 46a ortogonalna projekcija zavojnice. Zbog



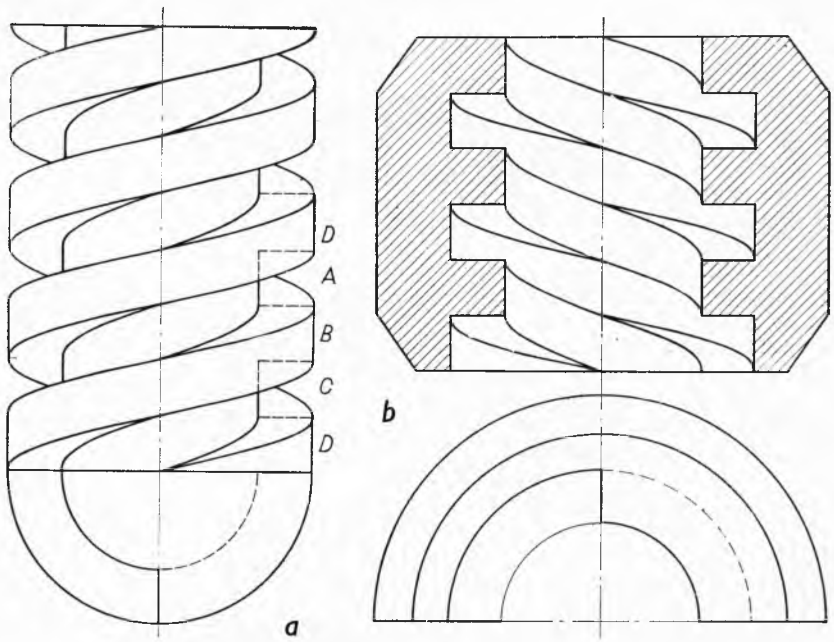
Sl. 46

simetričnosti tlocrta nacrtana je samo njegova donja polovica, a os zavojnice je u ravnini Π_2. Kao što se vidi, zavojnica je transcendentna krivulja, tj. ona se ponavlja i proteže u neizmjernost. Dio ove krivulje koji opisuje jedna njena tačka tokom jednog obilaska oko osi zove se *hod* ili *zavoj* te krivulje. Razvije li se u ravninu plašt valjka s jednim zavojem njegove zavojnice koja počinje u nožišnoj tački izvodnice duž koje je plašt razrezan, bit će razvijena zavojnica dijagonala razvijenog plašta, koji je, kao što je poznato, pravokutnik. Visina h tog pravokutnika zove se *visina hoda* zavojnice. Zbog opisanog jednolikog sastavljenog gibanja tačke na plaštu valjka bit će sve tangente zavojnice jednako nagnute prema osi kao i prema ravnini Π_1. Ovaj kut α jednak je kutu što ga razvijena zavojnica (dijagonala) čini s osnovkom razvijenog pravokutnog plašta valjka. Dakle $\operatorname{tg} \alpha = h/2\,r\,\pi$, ako je r polumjer osnovke valjka. Zamislimo sada osnovku našeg valjka kao osnovku uspravnog kružnog stošca kojega su izvodnice paralelne s tangentama zavojnice. Visina v tog stošca zove se *reducirana visina* zavoja naše zavojnice. Iz dvoomjera $h : v = 2\,r\,\pi : r = 2\pi : 1$ može se lako konstruirati v ako je poznato h (sl. 46 b). Pomoću nacrta tog stošca lako je odrediti nacrt tangente u svakoj tački nacrta zavojnice. Treba, npr., odrediti nacrt tangente u tački A. U tlocrtu se odredi tlocrt i' izvodnice stošca koji je paralelan s tlocrtom t' tangente zavojnice u tački A i nacrta se nacrt i'' te izvodnice. U nacrtu je $i'' \parallel t''$. U infleksionim tačkama nacrta zavojnice (tačkama na nacrtu osi) bit će tangente paralelne s konturnim izvodnicama nacrta tog stošca. Tangentom i okomicom u diralištu spuštenom na os položena ravnina je tzv. *oskulaciona ravnina* zavojnice u tom diralištu. Ova ravnina siječe valjak u elipsi koja u tom diralištu ima sa zavojnicom tri neizmjerno blize zajedničke tačke. Polože li se vrhom malo prije spomenutog stošca ravnine paralelne sa svim oskulacionim ravninama zavojnice, omatat će te ravnine taj isti stožac. Oskulaciona ravnina zavojnice u tački B u nacrtnoj konturnoj izvodnici valjka (nacrt B'' je tjeme nacrta zavojnice) bit će paralelna s osi ${}_1x_2$, a sjeći će valjak u elipsi. Ta se elipsa projicira na Π_2 u elipsu kojoj je velika os jednaka promjeru valjka, a mala poluos jednaka reduciranoj visini v zavojnice. Budući da nacrt te elipse oskulira nacrt zavojnice u njenom tjemenu B'', imat će oba ova nacrta zajedničko središte zakrivljenosti. Na temelju poznate konstrukcije središta zakrivljenosti u tjemenima elipse dobije se polumjer zakrivljenosti nacrta zavojnice u tjemenu B'' tako da se u nacrtu vrha reduciranog stošca povuče okomica na jednu njegovu konturnu nacrtnu izvodnicu i njom presiječe os ${}_1x_2$ (tlocrt osnovke). Udaljenost tog sjecišta do nacrta središta osnovke jednaka je traženom polumjeru. Svaka je zavojnica određena, kako se vidi iz dosadanjih razmatranja, svojom osi, jednom tačkom i bilo kutom uspona (kutom tangenata) bilo visinom zavoja.

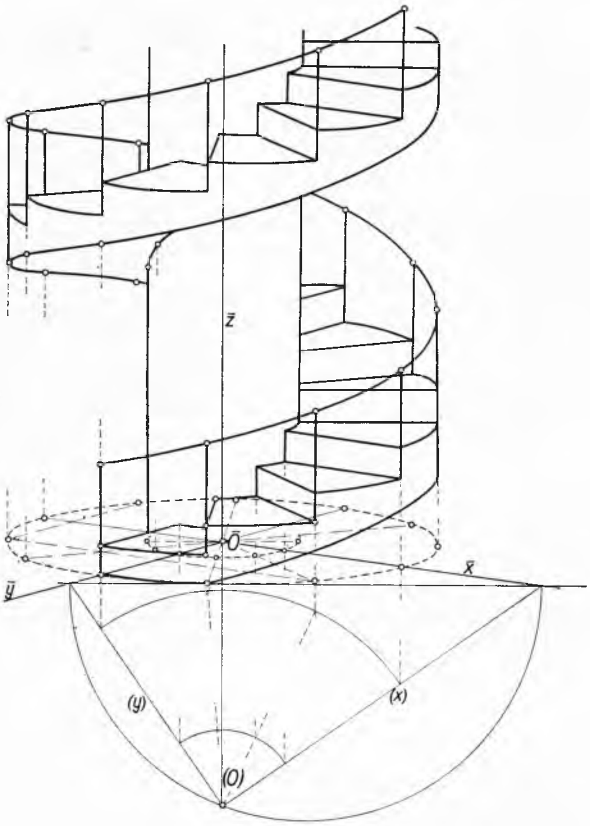
Vrti li se zavojito, na isti način kao jedna tačka, jedan čitav pravac, opisat će on *pravčastu zavojnu plohu*, dok bi neka ravninska ili prostorna krivulja na taj način zavojito okretana opisala opću zavojnu plohu. Za praktične svrhe služe obično samo pravčaste zavojne plohe. Ako se valjak sa zavojnicom vrti oko svoje osi i istovremeno giba u smjeru svoje osi tako da se za vrijeme jednog punog okreta (360°) oko osi valjak pomakne za visinu zavoja zavojnice, putovat će zavojnica sama u sebi. Ova osobina zavojnice služi za konstrukciju vijaka.

Na sl. 47 prikazana je konstrukcija vijka tzv. dvostrukog pravokutnog nareza. Taj vijak nastaje time što se jednaki kvadrati A, B, C, D u ravnini osi zavojito oko te osi okreću tako da donji vanjski vrh kvadrata D nakon jednog obilaska oko osi dođe u vanjski gornji vrh kvadrata A. Visina hoda zavojnica svih vrhova tih kvadrata jednaka je onda četverostrukoj stranici kvadrata. Stranice paralelne s osi opisuju valjke (unutarnji i vanjski), a stranice okomite na os opisuju tzv. uspravne zatvorene pravčaste zavojne plohe. Prostor do osi omeđen dijelovima tih valjaka i zavojnih ploha, koji su dobiveni zavojnim gibanjem stranica spomenutih kvadrata, ispunjen metalom ili drvetom, zove se vijak ili zavrtanj. Preostali dio prostora ispunjen tom materijom zove se matica ili navrtka tog vijka. Na sl. 47 a nacrtan je vijak, a na sl. 47 b nacrtana je njegova matica u osnom presjeku.

Kad bi se zavojito gibali samo kvadrati A, B uz polovičnu visinu hoda, dobio bi se vijak jednostrukog pravokutnog nareza. Namjesto kvadrata mogu biti i drugi oblici, npr. trokuti, trapezi itd. Ti se oblici zovu narez vijka.



Sl. 47



Sl. 48

Osim na vijcima, zavojnice se u praksi primjenjuju i pri projektiranju zavojnih stubišta. Na sl. 48 konstruirano je pojednostavnjeno zavojno stubište u ortogonalnoj aksonometriji uz prikrate 9 : 5 : 10. Tlocrt valjka dobiven je u aksonometriji i razdijeljen na 12 jednakih dijelova pomoću položaja prevaljenog oko traga XY. U prevaljenom položaju razdijeljen je tlocrt valjka na jednoj četvrtini osnovke i razdioba je prenesena na sliku tlocrta, a tamo su ostale tačke razdiobe dobivene pomoću kose aksijalne simetrije sa osi $\bar{x}, \bar{y}$ i centralne simetrije sa središtem O.

PERSPEKTIVA

Perspektiva. Ako sve zrake projiciranja prolaze jednom tačkom, koja se naziva *središtem* ili *centrom projiciranja* (također očnom tačkom), takvim se projiciranjem nastale projekcije objekata ili geometrijskih tvorevina zovu *centralnim projekcijama* ili *perspektivnim slikama* tih objekata ili geometrijskih tvorevina. (Ovakva perspektiva zove se još i *linearna perpektiva,* jer postoji i perspektiva u kojoj se pravci prikazuju kao vrlo slabo zakrivljene krivulje.) U centralnoj projekciji ili perspektivi mogu se ne samo prikazivati razni objekti nego se pomoću nje mogu, kao i u ostalim projekcijama, rješavati mnoge prostorne geometrijske zadaće.

Središte projiciranja zadaje se u prostoru tako da se na ravnini projekcija (ravnini slike) nacrta okomita projekcija O_c središta projiciranja O, koja se zove *glavna tačka* slike, a oko nje se opiše kružnica kojoj je polumjer jednak udaljenosti središta O od ravnine slike. Ova udaljenost zove se *distancija,* a opisana kružnica naziva se *distancionom kružnicom* (distantnim krugom).

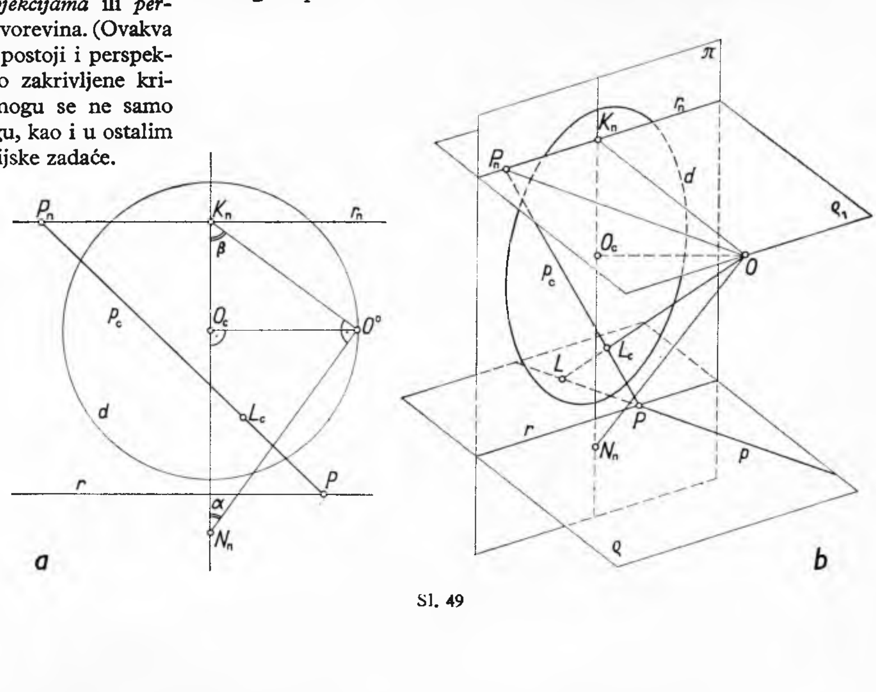
Pravac u centralnoj projekciji. Na perspektivnoj slici prikazuje se pravac, recimo p na modelu sl. 49 a, tako da mu se nacrta probodište P s ravninom slike (Π) i centralna projekcija P_n njegove neizmjerno daleke tačke (sl. 49 b). Tačka P_n (ili P^n) zove se *nedogled* pravca p, a tim nedogledom je zbog $OP_n \parallel p$ određen smjer pravca p u prostoru.

Budući da je pravac jednom tačkom i smjerom u prostoru određen, to je i pravac p tačkama P, P_n u prostoru određen. Iz toga, dalje, izlazi da svi paralelni pravci imaju zajednički nedogled. Centralna projekcija nekog pravca p, ili tačke L, bilježi se p_c i L_c. Perspektivnom slikom L_c bit će tačka L u prostoru određena tek ako leži na nekom pravcu, jer tačka L_c je centralna projekcija svih tačaka jedne projicirajuće zrake (v. sl. 49 a i b).

Ravnina u centralnoj projekciji. Analogno kao pravac prikazuje se u perspektivi i ravnina. Tragom r ravnine ϱ (v. sl. 49 a i b) i njenim položajem u prostoru ta je ravnina u prostoru određena. Ako se središtem O položi ravnina $\varrho_1 \parallel \varrho$, pa njome presiječe ravnina slike Π u pravcu r_n, bit će, zbog $\varrho_1 \parallel \varrho$, i $r_n \parallel r$. Pravac r_n je centralna projekcija neizmjerno dalekog pravca ravnine ϱ, a zove se *nedogledni trag* ili *nedoglednica* te ravnine. Budući da je nedoglednicom r_n određen položaj ravnine ϱ, a trag r je jedan njen pravac, to je pravcima r, r_n ta ravnina u prostoru određena. Iz toga također izlazi da paralelne ravnine imaju zajedničku nedoglednicu. Jedan pravac neke ravnine siječe sve ostale pravce, pa i neizmjerno daleki pravac te ravnine. Izlazi, dakle, da će se pravac p nalaziti u ravnini ϱ samo onda ako mu je probodište P u tragu r, a nedogled P_n u nedoglednom tragu r_n te ravnine. Pravci kojima samo nedogled leži u nedoglednom tragu neke ravnine paralelni su s tom ravninom u prostoru. Nedogled pravaca okomitih na ravninu slike je glavna tačka O_c, a nedogledni tragovi ravnina okomitih na ravninu slike prolaze tom glavnom tačkom. Nedogledni trag horizontalnih ravnina zove se *horizont h,* a trag horizontalne ravnine zove se *osnovica o.*

Prikloni kut pravca i ravnine. Prikloni kut β nekog pravca određuje se tako da se odredi prava veličina priklonog kuta paralelnog pravca koji je položen središtem projiciranja O a prolazi nedogledom tog pravca. Npr., neka je na sl. 49 b tačka K_n nedogled nekog pravca. $O_c K_n$ je okomita projekcija spomenutog paralelnog pravca položenog središtem O. Preklopi li se spojnica $O K_n$ oko te projekcije u ravninu slike, past će ona u spojnicu $O^\circ K_n$, gdje je $O_c O^\circ \perp O_c K_n$, a O° leži na distancionoj kružnici, jer je $O O^\circ$ polumjer te kružnice. Kut $\sphericalangle\ O_c K_n O^\circ$ je dakle traženi prikloni kut β. Spusti li se iz glavne tačke O_c okomica na nedogledni trag r_n ravnine ϱ, bit će nožište K_n nedogled svih priklonica ravnine ϱ, jer je $O K_n$ paralela s priklonicama te ravnine. Zbog toga je kut $\sphericalangle\ O_c K_n O^\circ$ prava veličina priklonog kuta ravnine ϱ.

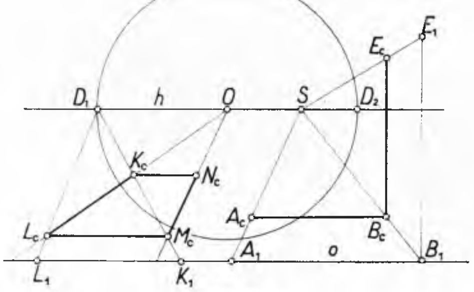
Pravac okomit na ravninu. Okomica $O N_n$ postavljena u središtu O na ravninu ϱ probada ravninu slike u nedogledu N_n svih okomica ravnine ϱ. Budući da okomite projekcije $O_c K_n$ i $O_c N_n$ pravaca $O K_n$ i $O N_n$ padaju u jednu okomicu traga r i nedoglednice r_n, to se pomoću preklapanja oko te okomice lako može odrediti nedogled N_n, jer je nedogled K_n priklonica poznat, a kut $\sphericalangle\ K_n O^\circ N_n = 90°$. Iz opisanog očito izlazi da se nedogled pravaca okomitih na horizontalne ravnine nalazi neiz-



Sl. 49

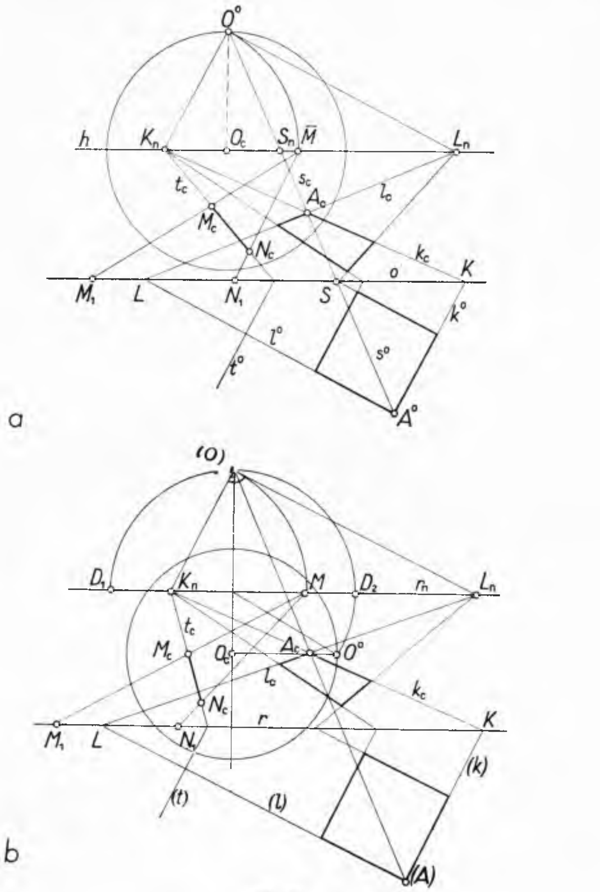
mjerno daleko u smjeru okomitom na osnovicu, odnosno na horizont. Iz toga dalje proizlazi da su perspektivne slike okomicâ na horizontalne ravnine među sobom paralelne i okomite na horizont. To dakako vrijedi za sve ravnine okomite na ravninu slike.

Budući da je polumjer distancione kružnice jednak udaljenosti središta O od ravnine slike, distanciona je kružnica geometrijsko mjesto nedogledâ svih onih pravaca u prostoru koji su na ravninu slike priklonjeni pod 45°. Sjecišta D_1, D_2 horizonta h s tom kružnicom su nedogledi takvih pravaca u horizontalnim ravninama, a zovu se *distancione* (distantne) *tačke*. Leži li u horizontalnoj ravnini dužina $A\,B$ paralelna s osnovicom o, ostat će ta dužina jednaka sama sebi ako se paralelno pomakne u tu osnovicu u bilo kojem smjeru. Iz toga izlazi da se prava veličina dužine $A\,B$ u horizontalnoj ravnini, zadanoj centralnom projekcijom $A_c\,B_c$ (sl. 50), konstruira tako da se njena centralna projekcija $A_c\,B_c$ projicira iz bilo koje tačke S na horizontu h u osnovicu o; dobivena dužina $A_1\,B_1$ jednaka je pravoj veličini dužine $A\,B$ u prostoru. Ako je neka dužina $L\,K$ u horizontalnoj ravnini okomita na osnovici o, dakle i na ravninu slike, tj. ako joj je nedogled u glavnoj tački, treba je na osnovicu projicirati pod kutom od 45° da bi ta projekcija bila jednaka pravoj veličini. Perspektivnu sliku $L_c\,K_c$ te dužine treba, prema tome, projicirati na osnovicu iz jedne od distancionih tačaka D_1 ili D_2, da bi se na toj osnovici dobila prava veličina $L_1\,K_1$ te dužine. Zada li se perspektivnom slikom $B_c\,E_c$ neka dužina $B\,E$ koja je u tački B u horizontalnoj ravnini postavljena na ovu okomito, dobiva se njena prava veličina ovako: iz bilo koje tačke S horizonta h projicira se tačka B_c na osnovicu o u tačku B_1, u ovoj tački postavi se okomica na tu osnovicu, pa na ovu projicira iz nedogleda S tačka E_c u tačku E_1. Dužina $B_1\,E_1$ je prava veličina dužine $B\,E$ u prostoru, budući da dužina $B_1\,E_1$ predstavlja dužinu $B\,E$ paralelno pomaknutu u ravninu slike u smjeru koji je određen nedogledom S. Pomoću ovih dosad opisanih sredstava može se jednostavno konstruirati perspektivna slika kvadrata, kocke ili kakvog tijela sastavljenog od pravokutnih četverostranih prizama, kojima su pobočke okomite i paralelne s ravninom slike, npr. slika $K_c\,L_c\,M_c\,N_c$ kvadrata $K\,L\,M\,N$ na sl. 50. Perspektivne slike pobočaka paralelnih s ravninom slike bit će slične tim pobočkama u prostoru i slično postavljene, a to vrijedi za sve likove paralelne s ravninom slike.



Sl. 50

Preklapanje ravnine u ravninu slike. Horizontalnu ravninu osnovice o i s njom paralelnu ravninu horizonta h i središta O preklopimo oko osnovice o, odnosno oko horizonta h, u istom smislu na ravninu slike (sl. 51 a). Neki pravac k u horizontalnoj ravnini osnovice o, zadan probodištem K i nedogledom K_n, past će u preklopljenom položaju u pravac $k^\circ \parallel O^\circ K_n$, jer je $o \parallel h$ i u prostoru $O\,K_n \parallel k$. Na pravcu k° neka je tačka A°, kojoj spojnica s tačkom O° siječe pravac k_c u tački A_c. Shvati li se spojnica $O^\circ A^\circ$ kao perspektivna slika s_c pravca s u horizontalnoj ravnini osnovice o, past će preklopljeni položaj s° tog pravca u sam taj pravac, jer tačke O°, S_n, S i A° leže na tom pravcu. Budući da je tačka A sjecište pravaca s, k, bit će A_c perspektivna slika te tačke. Drugim riječima, preklopljeni centar O°, perspektivna slika i preklopljeni položaj neke tačke u horizontalnoj ravnini leže uvijek na jednom pravcu. Postavi li se u O° okomica na spojnicu $O^\circ\,K_n$, sjeći će ona horizont h u tački L_n, koja će biti nedogled svih pravaca u toj ravnini okomitih na pravac k, budući



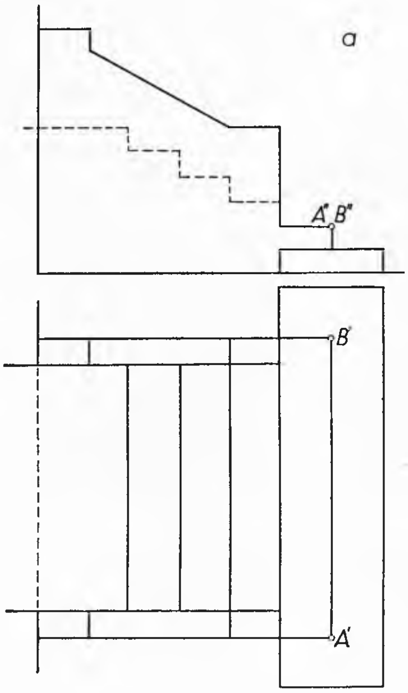
Sl. 51

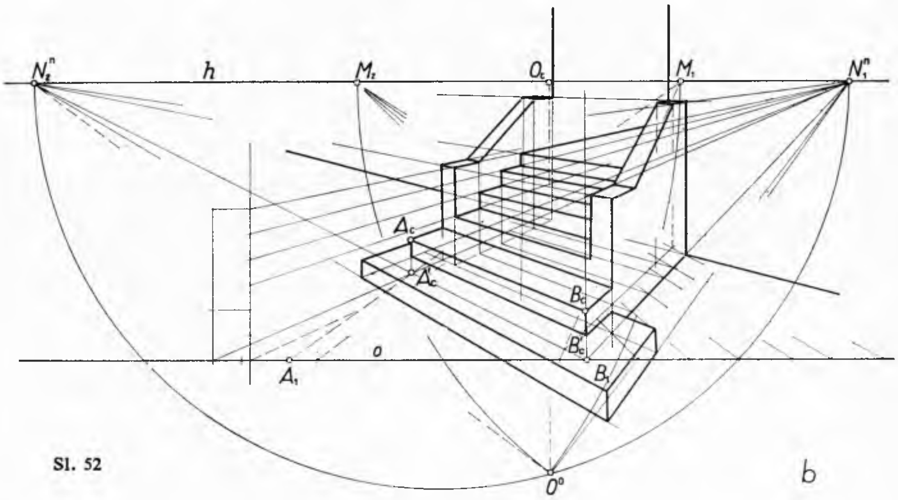
da je $OL_n \perp k$, odnosno $O^\circ L_n \perp k^\circ$. Spojnica $L_n\,A_c$ slika je pravca l povučenog tačkom A okomito na pravac k. Nacrta li se u preklopljenom položaju kvadrat kojemu je vrh tačka A° a stranice su na pravcima k°, l°, lako je nacrtati njegovu perspektivnu sliku (vidi sl. 51 a).

Mjerne tačke. Na pravcu t, koji je paralelan s pravcem k, neka se nalazi dužina $M\,N$. Projicira li se ta dužina na osnovicu o u smjeru simetrale jednog od kutova što ih zatvaraju pravci t, o, dobiva se na osnovici o dužina $M_1 N_1$, koja je jednaka pravoj veličini dužine $M\,N$ u prostoru. Opišimo na sl. 51 a oko nedogleda K_n pravca t luk polumjera $K_n\,O^\circ$ i njime presijecimo horizont h u tački $\overline{M}$. Tačka $\overline{M}$ je nedogled smjera jedne simetrale kutova što ih zatvaraju pravci t, o, jer je $t^\circ \parallel K_n\,O^\circ$ i $h \parallel o$. Projicira li se, dakle, perspektivna slika $M_c N_c$ dužine $M\,N$ iz tačke $\overline{M}$ na osnovicu o, dobit će se na njoj prava veličina $M_1\,N_1$ dužine $M\,N$. Tačka M_1 zove se *mjerna tačka* nedogleda N_1.

Sva razmatranja o preklopljenom položaju horizontalnih ravnina i ravnina okomitih na ravninu slike vrijede potpuno jednako i za ravnine u općem položaju, samo treba imati na umu da se te ravnine ne prevaljuju u ravninu slike za 90°, nego u nju rotiraju za neki kut koji je veći ili manji od toga. Tačku O treba običnom rotacijom oko nedoglednice r_n dovesti u tačku (O) (v. sl. 16 a i b). Namjesto horizonta h imamo sada nedogledni trag r_n, a sve ostale konstrukcije (i obrazloženja) ostaju isti kao za horizontalne i okomite ravnine (v. sl. 51 b). Sjecišta D_1, D preložene kružnice O° (O) rotacije tačke O s nedoglednim tragom r_n su nedogledi svih onih pravaca te ravnine koji s tragom r zatvaraju kut od 45°, jer spojnice $O\,D_1$ i $O\,D_2$ u prostoru zatvaraju s nedoglednicom r_n taj kut.

Na temelju dosadanjih razmatranja znat ćemo kontruirati perspektivnu sliku nekog uglatog praktičnog objekta koji stoji na horizontalnoj ravnini. Na sl. 52 a zadani su tlocrt i nacrt jednostavnog stubišta, nacrtani u mjerilu 1:40. Crtajući perspektivnu sliku tog stubišta crtat će se zapravo slika 40 puta umanjenog modela, kojega se pojedine tačke nalaze na projicirajućim zrakama tačaka tog stubišta, ali udaljene od središta O za jednu četrdesetinu udaljenosti tih tačaka od središta O. U omjeru 1:40 stoje također udaljenost središta O od horizontalne ravnine na kojoj stoji to stubište u prirodi i udaljenost glavne tačke O_c od osnovice horizontalne ravnine na kojoj stoji umanjeni model stubišta. Ako je u prirodi ta visina, recimo, 1 m, bit će to na našoj slici 2,5 cm. Da bi perspektivne slike praktičnih objekata bile prirodne, tj. približno onakve kakve smo navikli





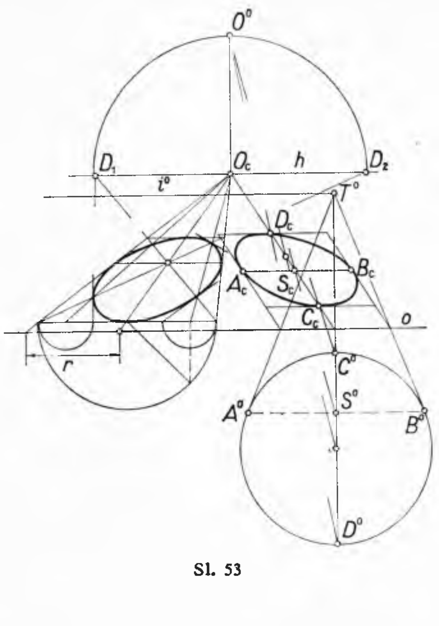
Sl. 52

da vidimo, ne smije, kako je pokazalo iskustvo, kut između bilo kojih dviju projicirajućih zraka biti veći od 45°. To se postiže i tako da se objekt dovoljno odmakne od središta projiciranja O. Na slici 52 nije se tome uvjetu moglo potpuno udovoljiti zbog malog formata slike.

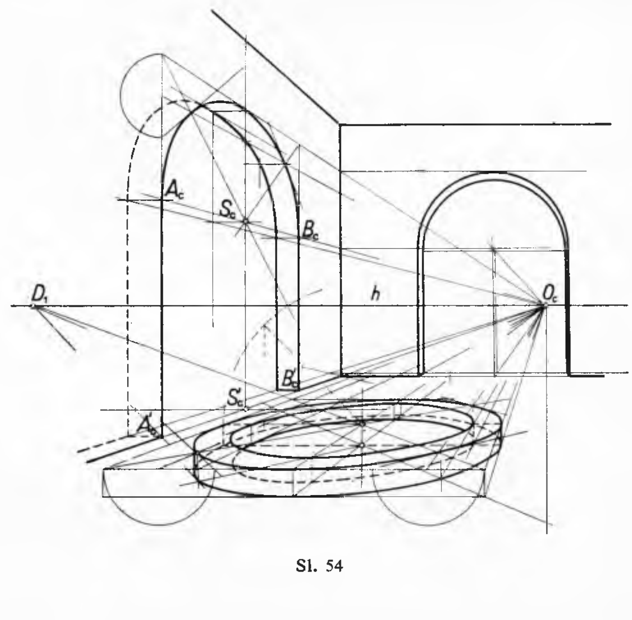
Perspektivna slika stubišta zadanog na sl. 52 a nacrtat će se tako da se pomoću nedogleda N_1^n, N_2^n bridova koji su među sobom okomiti i njima pridruženih mjernih tačaka N_1, M_2 nacrta perspektivna slika tlocrta tog stubišta, a onda u svakoj tački slike tog tlocrta na okomicu nanese perspektivna slika visine odgovarajuće tačke (v. tačku E na sl 50). Na slici 52 početa je konstrukcija s bridom $A\,B$, i onda je spomenutim načinom pomoću svih ostalih tačaka sastavljena slika čitavog stubišta.

Pespektivna slika kružnice može se smatrati ravninskim presjekom kosog kružnog stošca, dakle može biti kružnica, elipsa, hiperbola i parabola. Ako je kružnica paralelna s ravninom slike, perspektivna slika bit će joj kružnica. Postavi li se središtem projiciranja O ravnina paralelna s ravninom slike (ona se zove *izbježna ravnina* ili očna ravan), sjeći će svaka ravnina prostora tu ravninu u pravcu koji se zove *izbježnica* (očni trag) i te ravnine, a kojega perspektivna slika pada u neizmjerno daleki pravac ravnine slike. Ako kružnica u ravnini ne siječe njenu izbježnicu, bit će joj perspektivna slika elipsa. Ako je dira, bit će njezina perspektivna slika parabola jer ima jednu neizmjerno daleku tačku, a ako je siječe, bit će joj perspektivna slika hiperbola jer ima dvije neizmjerno daleke tačke. Perspektivna slika tangenata kružnice u njenim sjecištima s izbježnicom bit će asimptote perspektivne slike takve kružnice. Perspektivna slika kružnice, kad je elipsa, crta se obično tako da se nacrta slika toj kružnici opisanog kvadrata kojemu su dvije stranice paralelne s ravninom slike, te odrede slike dirališta (polovišta) na tim stranicama (sl. 53 lijevo). Osim toga odrede se slike tačaka na dijagonalama tog kvadrata koje prolaze distancionim tačkama. Te se tačke odrede pomoću slika okomitih spojnica dviju takvih tačaka na osnovici o, kojima je nedogled u glavnoj tački O_c. Kako se pronalazi razmak tih okomica bez prevaljenog položaja ove kružnice vidi se na sl. 53. Budući da tangente u tačkama na dijagonalama čine s osnovicom kut od 45°, lako je i njih nacrtati (vidi sliku). Sa osam tačaka i osam tangenata može se svaka elipsa prilično tačno nacrtati. U općoj ravnini radi se posve jednako, samo treba voditi brigu o tome gdje se sada nalaze distancione tačke D_1, D_2, kao i o tome da dvije stranice opisanog dirnog kvadrata leže u priklonicama ako su im dvije paralelne s tragom u ravnini slike.

Elipsa, kao perspektivna slika kružnice, može se nacrtati i tako da joj se odredi par konjugiranih promjera. Spustimo iz središta kružnice okomicu na osnovicu o i njom presijecimo izbježnicu i u tački T, pa iz ove tačke povucimo tangente na tu kružnicu. Perspektivna slika $A_c\,B_c$ tetive $A\,B$ koja spaja dirališta A, B tih tangenata i perspektivna slika $C_c\,D_c$ promjera omeđenog sjecištima C, D ove kružnice sa spomenutom okomicom položenom središtem kružnice na osnovicu o dat će par konjugiranih promjera perspektivne slike kružnice. Ovo proizlazi iz činjenice da su perspektivne slike tangenata u tačkama A_c, B_c paralelne s $C_c\,D_c$ jer prolaze neizmjerno dalekom perspektivnom slikom T_c tačke na spojnici $C\,D$, a tangente u tačkama C, D, odnosno C_c, D_c, paralelne su s osnovicom o, dakle i sa $A_c B_c$. Kružnica, opisane tangente, njihova dirališta A, B i sjecišta C, D nacrtaju se najprije u prevaljenom položaju u ravnini slike (sl. 53 desno), a odavde se na poznati način prenesu na perspektivnu sliku.



Sl. 53



Sl. 54

Preklopljena izbježnica $i°$ nalazi se za distanciju udaljena od osnovice o na istoj strani na kojoj je u istoj udaljenosti i preloženo središte $O°$ iznad horizonta h. Kad bi preklopljena kružnica dirala, odnosno sjekla preklopljenu izbježnicu $i°$, bila bi slika te kružnice parabola, odnosno hiperbola. Perspektivnoj slici kružnice u općoj ravnini, kada je ta slika elipsa, određuje se par konjugiranih promjera na posve jednak način, samo je prevaljena izbježnica (i) na istoj strani traga r na kojoj se nalazi (O) od traga r udaljena isto toliko koliko je tačka (O) udaljena od nedoglednice r_n, jer je upravo toliki razmak između traga r i nedoglednice i' u prostoru.

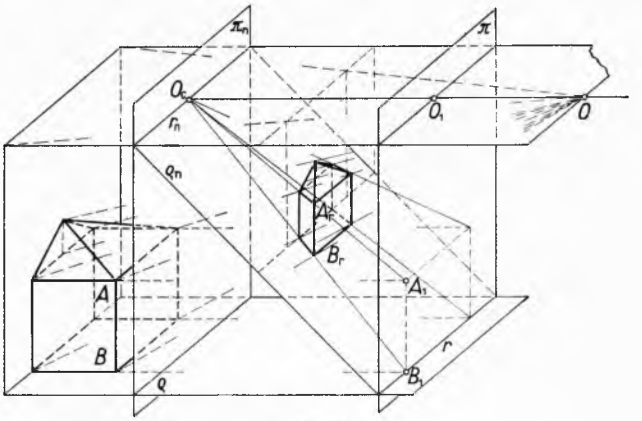
Na sl. 54 primijenjena su gornja razmatranja za konstruiranje perspektivne slike praktičnog objekta koji se sastoji od dva zida s polukružno završenim otvorima, od kojih je jedan paralelan s ravninom slike a drugi okomit na nju. Ispred ta dva zida nalazi se niski kružni basen, omeđen dvjema prikraćenim stošcima. Ovaj basen zadan je slikom svoje osi i slikom svog dijametralnog presjeka, paralelnog s ravninom slike. Budući da je na taj način zadana slika središta i promjera paralelnog s ravninom slike svake kružnice na ta dva prikraćena stošca, to se pomoću malo prije opisanog dirnog kvadrata može lako konstruirati osam tačaka i osam njihovih tangenata za sliku svake ove kružnice, a prema tome nacrtati i perspektivna slika čitavog objekta. Za slike okolišnih zidova s polukružnim otvorima nacrta se najprije tlocrt, a onda zidovi bez otvora. Na zidove nanesu se sada slike već spomenutih opisanih dirnih kvadrata (ovdje polukvadrata), pomoću kojih se dobiva pet tačaka i tangenata za sliku svakog polukružnog ruba na otvoru. Slike polukružnih rubova otvora na zidu paralelnom s ravninom slike bit će polukružnice, pa je dovoljno odrediti njihova središta i polumjer. Ako je na zidu okomitom na ravninu slike zadana slika S_c središta kružnog brida otvora u tom zidu, odredit će se kao na sl. 50 slika $A'_c B'_c$ tlocrta $A'B'$ promjera paralelnog s horizontalnom ravninom, dok se vertikalni polumjer određuje kao slika $B_c E_c$ dužine BE na sl. 50. U ravnini tog zida nacrta se sada slika frontalnog dirnog kvadrata kružnog otvora sa središtem u S, a dalje se radi kao na sl. 53 kad bi bila zaokrenuta za 90°.

RELJEFNA PERSPEKTIVA

Pridruže li se dva prostora jedan drugome tako da je svakoj tački jednog prostora pridružena jedna tačka drugog prostora i svakoj ravnini jednog prostora jedna ravnina drugog prostora, a tačka pridružena nekoj tački u jednoj ravnini prvog prostora leži u pridruženoj ravnini drugog prostora i obrnuto, onda se takva pridruženost zove *kolinearna srodnost*. Pretpostavimo, kao specijalan slučaj, jednu ravninu kojoj su sve tačke same sebi pridružene. Ako postoji takva ravnina, može se dokazati da uvijek izvan te ravnine postoji još jedna tačka koja je sama sebi pridružena; nazovimo je *središtem kolineacije O*. Iz svega toga direktno izlazi da su svi pravci i ravnine središta kolineacije O sami sebi pridruženi, a iz toga dalje proizlazi da spojnice parova pridruženih tačaka takvih dvaju prostora prolaze središtem O. Ravninu kojoj su sve tačke same sebi pridružene zvat ćemo *zajednička ravnina*. Na ovakav specijalan način kolinearno pridruženi prostori zovu se *perspektivno kolinearni prostori*. Označi li se sa S probodište spojnice para pridruženih tačaka A, A_1 (koja prolazi središtem O) sa zajedničkom ravninom, može se na temelju činjenice da se svi parovi pridruženih pravaca i ravnina sijeku u zajedničkoj ravnini, te pomoću Papposova teorema (v. *Analitička geometrija*, TE I, 277) dokazati da je vrijednost dvoomjera $(O\,S\,A\,A_1) = k$ konstantna i jednaka za sve parove pridruženih tačaka. Vrijednost k zove se *karakteristična konstanta* ovakvih perspektivno kolinearnih prostora. Budući da se pri kolinearnoj srodnosti zapravo radi o preslikavanju jednog prostora na drugi, to će svakom objektu jednog prostora biti pridružen jedan objekt drugog prostora. Objekt pridružen u drugom prostoru pomoću perspektivne kolinearne srodnosti nekom praktičnom objektu u prvom prostoru zove se *reljefna slika*, ili *reljef* tog predmeta. Reljefna slika nekog objekta nije, prema tome, dvodimenzionalna slika u ravnini, nego je to trodimenzionalni objekt u prostoru.

Tačka O i ravnina Π na sl. 55 neka su središte i zajednička ravnina dvaju perspektivno kolinearnih prostora. Slika prostornog modela nacrtana je u kosoj projekciji. Karakteristična konstanta tih dvaju perspektivno kolinearnih prostora neka je k. Neizmjerno dalekoj ravnini prvog prostora pridružena je u drugom prostoru ravnina Π_n, paralelna sa zajedničkom ravninom Π. Središte O neka je od zajedničke ravnine Π udaljeno za dužinu d. Okomica spuštena iz središta O na ravnine Π, Π_n neka siječe te ravnine u tačkama O_1, O_c, a neizmjerno daleku ravninu u tački N. Rečeno je da je $OO_1/O_cO_1 : ON/O_cN = k$. Budući da je N neizmjerno daleko, bit će $ON/O_cN = 1$, tj. $OO_1 = d = k\ O_cO_1$, odnosno $O_cO_1 = d/k$.

Na horizontalnoj ravnini ϱ, koja ravninu Π siječe u pravcu r, nalazi se iza ravnine Π_n predmet sastavljen od pravokutne četverostrane prizme s okomitim pobočkama paralelnim s ravninama Π, Π_n, na kojoj se nalazi kosa četverostrana piramida s jednom pobočkom u ravnini stražnje pobočke prizme. Ovim pobočkama prislonjeno je to tijelo na zid paralelan s ravninama Π, Π_1. Neizmjerno dalekoj tački N pravca $O\,N$ pridružena je u ravnini Π_n tačka O_c, a neizmjerno dalekom pravcu ravnine ϱ, na kojemu leži tačka N pridružen je pravac $r_n \parallel r$ u ravnini Π_n, koji prolazi tačkom O_c. Reljefna slika ϱ_n ravnine ϱ bit će dakle određena pravcima r, r_n u ravninama Π, odnosno Π_n. Produže li se bridovi zadanog tijela koji prolaze tačkom N, tj. koji su okomiti na ravnine Π, Π_n, do ravnine Π_1 — npr. takvi bridovi vrhova A, B probadat će tu ravninu u tačkama A_1, B_1 — bit će spojnice tih probodišta s tačkom O_c reljefne slike tih bridova. Reljefne slike vrhova su sjecišta spojnica tih vrhova sa središtem O i reljefnih slika bridova na kojima ti vrhovi leže.

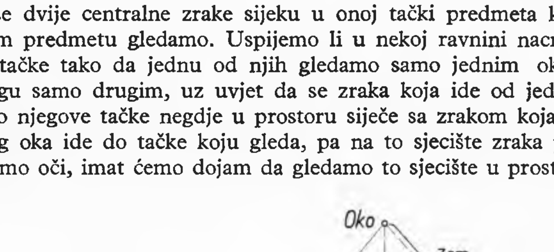


Sl. 55

Dakle, reljefne slike A_r, B_r tačaka A, B bit će sjecišta spojnica O_cA_1 i OA, odnosno spojnica O_cB_1 i OB. Reljefne slike pravaca i dužina paralelnih s ravninama Π, Π_n bit će paralelne s tim pravcima i dužinama u prostoru. Reljefna slika vrha piramide dobivena je pomoću reljefne slike okomice spuštene iz tog vrha na gornju osnovku prizme.

ANAGLIFSKE I STEREOSKOPSKE SLIKE

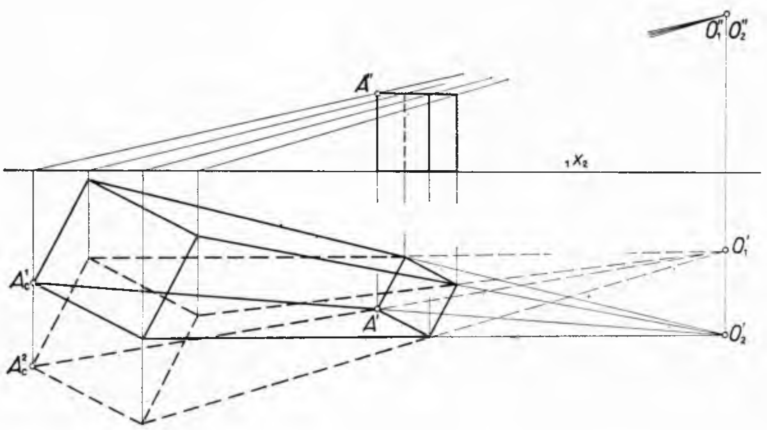
Slika nekog predmeta stvara se u našem oku tako da iz tačaka tog predmeta pada u svako naše oko snop zrakâ svjetla koji na mrežnici oka oblikuje sliku tog predmeta. Za naše svrhe bitno je to da iz svake tačke predmeta dolazi u svako naše oko po jedna centralna zraka tog snopa, tj. ona koja prolazi žarištem leće oka. Ove se dvije centralne zrake sijeku u onoj tački predmeta koju na tom predmetu gledamo. Uspijemo li u nekoj ravnini nacrtati dvije tačke tako da jednu od njih gledamo samo jednim okom a drugu samo drugim, uz uvjet da se zraka koja ide od jednog oka do njegove tačke negdje u prostoru siječe sa zrakom koja od drugog oka ide do tačke koju gleda, pa na to sjecište zraka prilagodimo oči, imat ćemo dojam da gledamo to sjecište u prostoru



Sl. 56

(sl. 56). Kada bismo namjesto ovih dviju tačaka imali slike nekog predmeta nacrtane kako ih vidi jedno i drugo oko, imali bismo dojam kao da gledamo takav isti predmet u prostoru. Konstrukcije takvih slika nekoga predmeta na danoj ravnini lako je izvesti kao centralne projekcije tog predmeta iz naših očiju na tu ravninu. Posve je prirodno da pri tome treba paziti na razmak očiju i njihovu udaljenost od predmeta (prirodni vidni kut), da slike budu prirodne i izvedive. Da bi se te dvije tako nacrtane slike, gledane objema očima, u našem osjetu spojile u doživljaj predmeta u prostoru (a ne naprosto bile dvije slike u ravnini), potrebno je da jednu gledamo samo jednim, a drugu samo drugim okom. To se postiže bilo time da se slike crtaju u *anaglifskoj perspektivi* komplementarnim bojama i promatraju obojenim naočalima, bilo pomoću sprave koja se zove stereoskop.

Anaglifska perspektiva. Nacrtamo li neku sliku određenom crvenom bojom pa je gledamo kroz naočale tačno isto takve boje, mi tu sliku nećemo vidjeti, nego samo prazan papir. Isto to vrijedi i za sliku nacrtanu komplementarnom zelenkastomodrom bojom i promatranom kroz naočale iste boje. Međutim, crvena slika gledana kroz modre naočale i modra gledana kroz crvene naočale izgledat će sivo-crno (v. *Boja*). Projiciramo li sada centralno iz naših očiju neki predmet na neku ravninu, obično horizontalnu ravninu slike, pa projekciju iz lijevog oka izvučemo crveno, a projekciju iz desnog oka modro, a na oči stavimo naočale s jednim crvenim i jednim modrim staklom tako da lijevo staklo bude modro, a desno crveno, imat ćemo dojam da gledamo taj predmet crno obojen u prostoru, budući da lijevu sliku vidimo samo desnim okom, a desnu sliku samo lijevim okom. Zrake iz para odgovarajućih tačaka koje ulaze kao vidljive u odgovarajuće oko sijeku se ispred ravnine tih slika u tački predmeta kojoj su spomenute dvije tačke na opisani način dobivene slike. Tako



Sl. 57

postižemo dojam da kroz obojene naočale gledamo sam taj predmet. Kroz crvene i modre naočale treba, dakako, gledati tako da se oči nalaze na mjestima centara projiciranja.

Geometrijska konstrukcija opisanih perspektivnih slika izvodi se najjednostavnije na taj način da se nacrta tlocrt i nacrt predmeta i tlocrt i nacrt mjesta naših očiju tako da oba oka u nacrtu padaju u jednu tačku (sl. 57). Probodišta s ravninom tlocrta spojnica centara O_1, O_2 s tačkama predmeta (na sl. 57 su to vrhovi prizme) tražene su perspektivne slike tih tačaka. Npr. spojnica $O_1 A$ na sl. 57 daje sliku $A_c{}^1$, a spojnica $O_2 A$ daje sliku $A_c{}^2$. Razmak tačaka O_1, O_2 na našoj slici mora biti približno 7,5 cm, jer tolik je razmak naših očiju. Ako se takve slike crtaju s namjerom da budu pri reprodukciji umanjene, mora se, razumljivo, pri konstrukciji perspektivnih slika povećati prirodni razmak očiju u odgovarajućem mjerilu.

Stereoskopske slike. Na jednak način kao anaglifske slike crtaju se i stereoskopske slike. Dok se anaglifske slike crtaju obično na horizontalnu ravninu, stereoskopske se crtaju na vertikalnu ravninu. I ovdje valja u konstruktivnom postupku paziti na razmak očiju i njihovu udaljenost od predmeta, kako bi slike ostale unutar prirodnog kuta gledanja. Namjesto crveno i modro izvuku se ovdje obje slike crno, a da svako oko vidi samo svoju sliku služi sprava koja se zove stereoskop. Ta se sprava sastoji od dvije konveksne leće, za svako oko po jedne. Gledajući kroz te leće vidjet će svako oko samo svoju sliku, tj. pridružene zrake gledanja svakog para pridruženih tačaka (slike jedne tačke u prostoru) sjeći će se u prostoru, pa opet dobivamo dojam da gledamo to sjecište, odnosno da gledamo cio predmet od kojega su nacrtane stereoskopske slike.

STEREOGRAFSKA I GNOMONIČKA PROJEKCIJA

Stereografska projekcija. Projicira li se površina kugle iz jedne njene tačke na ravninu koja je paralelna s dirnom ravninom te kugle u toj tački, tako se nastala slika zove *stereografska projekcija* te kugle. Odaberimo na nekoj kugli tačku O, a negdje na suprotnoj strani te kugle neka stoji ravnina Π paralelno s dirnom ravninom α kugle u tački O. U bilo kojoj tački S kugle postavimo dirnu ravninu β, koja neka dirnu ravninu α siječe u pravcu s. Bilo koje dvije tačke A, B pravca s spojimo s tačkama O, S. Kako je poznato, $\sphericalangle A\,O\,B = \sphericalangle A\,S\,B$. Projicira li se centralno iz tačke O kut $A\,S\,B$ na ravninu Π u kut $A_s\,S_s\,B_s$, bit će $\sphericalangle A_s\,S_s\,B_s = \sphericalangle A\,O\,B$, budući da su tačke A_s, B_s u neizmjerno dalekim probodištima krakova $O\,A$, $O\,B$ s ravninom slike Π. Veličina se kuta pri stereografskoj projekciji kugle, dakle, ne mijenja. Kaže se, da stereografska projekcija preslikava kuglu na ravninu *konformno*.

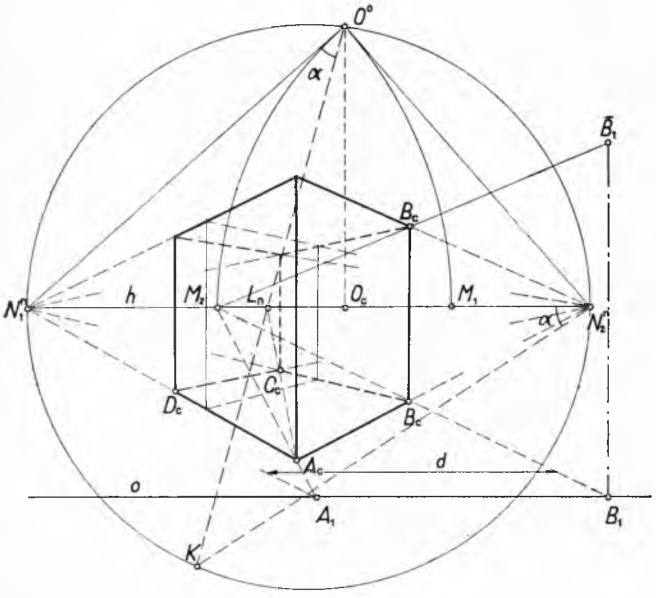
Bilo kakvom ravninom presijecimo našu kuglu u kružnici k, pa tu kružnicu iz središta O projicirajmo na ravninu Π u neku krivulju 2. stupnja k_s. Duž kružnice k zamislimo postavljen na našu kuglu dirni stožac, kojemu neka je vrh V. To je uspravan kružni stožac kojemu su izvodnice u svom nožištu na kružnici k okomite na njenoj tangenti u tom nožištu. Tangente kružnice k projiciraju se centralno iz tačke O na ravninu Π u tangente krivulje k_s. Ali budući da se pravi kutovi pri stereografskoj projekciji kugle projiciraju opet u prave kutove, bit će projekcije izvodnica spomenutog stošca normale krivulje k_s u ravnini Π. Budući da sve izvodnice prolaze vrhom V, prolazit će sve normale krivulje k_s centralnom projekcijom V_s vrha V. Vidi se, dakle, da je krivulja k_s kružnica kojoj je tačka V_s središte. Pri stereografskoj projekciji kugle projiciraju se dakle kružnice uvijek u kružnice.

Stereografska projekcija kugle služi u kartografiji za predočivanje Zemljine površine. Zamisli li se središte O stereografske projekcije postavljeno na polu globusa, Zemlja će biti prikazana u tzv. polarnoj stereografskoj projekciji. Ako je to središte na ekvatoru, bit će to ekvatorska stereografska projekcija. Uzme li se središte O u bilo kojoj tački globusa, a ravnina slike je paralelna s dirnom (horizontskom) ravninom globusa u toj tački, ta je projekcija horizontska stereografska projekcija.

Gnomoničke projekcije. Projicira li se globus iz njegova središta na jednu njegovu dirnu ravninu, takva se projekcija zove *gnomonička projekcija*. Prema tome da li je ravnina slike dirna ravnina globusa u polu, na ekvatoru ili u bilo kojoj drugoj tački izvan njih, zvat će se takva projekcija ili polarna, ili ekvatorijalna, ili horizontska gnomonička projekcija.

GEOMETRIJSKI ELEMENTI FOTOGRAMETRIJE

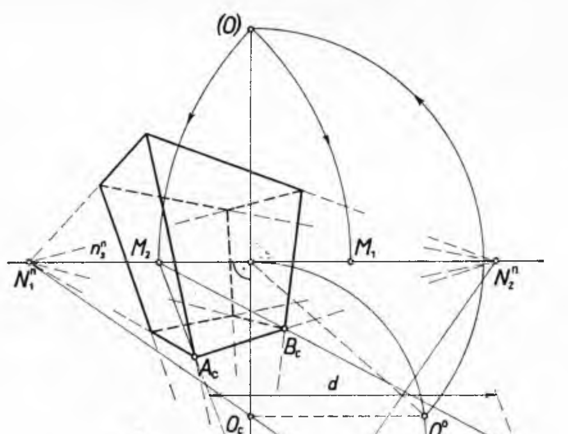
Kako se crta perspektivna slika nekog objekta vidjelo se u poglavlju Perspektiva ovog članka. U ovom će se poglavlju pokazati kako se može rekonstruirati prava veličina i oblik predmeta kojemu je zadana perspektivna slika, recimo jedna fotografska snimka. Da se ta rekonstrukcija može obaviti, moraju o tom predmetu biti poznati još neki podaci. Neka sl. 58 predočuje perspektivnu sliku paralelepipeda kojemu je poznata veličina i oblik osnovke $A\,B\,C\,D$. Neka je osim toga poznata, recimo, prava veličina stranice $A\,B$ i kuta $\alpha = \sphericalangle D\,A\,C$. Sjecišta $N_1{}^n$, $N_2{}^n$ slikâ usporednih stranica $A\,D$, $B\,C$, i $A\,B$, $C\,D$ daju nedoglede pramenova s ovim stranicama paralelnih pravaca, dakle pravaca među sobom okomitih. Na spojnici h tih nedogleda, koja je horizont, nalazi se negdje glavna tačka O_c te perspektivne slike. Opiše li se oko promjera $N_1{}^n$ $N_2{}^n$ kružnica k, nalazit će se negdje na njoj preloženi centar $O°$. Dijagonala $A\,C$ čini, kako je poznato, sa stranicom $A\,D$ poznati kut α. Povucimo, recimo, nedogledom $N_2{}^n$ pravac koji s horizontom h zatvara kut α a kružnicu k siječe u tački K ispod horizonta h. Spojnica tačke K s nedogledom L^n dijagonale $A_c\,C_c$ četverokuta $A_c\,B_c\,C_c\,D_c$ siječe kružnicu k u traženom preloženom središtu $O°$, budući da je $N_1{}^n\,O° \perp O°\,N_2{}^n$ i $\sphericalangle N_1{}^n\,O°\,K = \sphericalangle$



Sl. 58

$N_1^n N_2^n K = \alpha$. Naime, $\sphericalangle N_1^n O° L^n$ je prava veličina kuta $C A D = \alpha$, dakle je u nožištu O_c okomice $O° O_c$ na horizontu h tražena glavna tačka O_c naše perspektivne slike. Tačke M_1, M_2, za koje vrijedi $N_1^n M_1 = N_1^n O°$ i $N_2^n M_2 = N_2^n O°$ mjerne su tačke tih nedogleda. Presijeku li se spojnice $M_2 A_c$, $M_2 B_c$ pravcem $o \parallel h$ tako da razmak između sjecišta bude jednak pravoj veličini d stranice $A B$ umanjenoj u nekom omjeru t, bit će taj pravac o osnovica zadane perspektivne slike, koja predočuje u omjeru t umanjeni objekt što ga želimo rekonstruirati. Pomoću poznatih konstruktivnih metoda mogu se sada odrediti sve prave veličine i međusobni položaji preostalih dijelova. Npr. ako je to slika zgrade, mogu se odrediti prave veličine i međusobni razmaci prozora, vrata itd. Dužina $B_1 \bar{B}_1$ je npr. prava veličina brida $B \bar{B}$.

Ako zadani objekt stoji na nekoj kosoj ravnini, pa bi njegova perspektivna slika imala tri nedogleda N_1^n, N_2^n, N_3^n, glavna tačka O_c njegove perspektivne slike bit će sjecište visina trokuta $N_1^n N_2^n N_3^n$ (sl. 59). Spojnice $n_3^n = N_1^n N_2^n$, $n_2^n = N_1^n N_3^n$ i $n_1^n = N_2^n N_3^n$ su nedogledni tragovi triju pramenova paralelnih i među sobom okomitih ravnina (položaji pobočaka zadane prizme). Pomoću nedogleda N_3^n i nedogleda M_3^n priklonica u ravninama nedoglednog traga n_3^n lako se može odrediti preloženi



Sl. 59

centar $O°$, a prema tome i distancija $O_c\ O°$. Tačka (O) na okomici $N_4^n M_3^n$ nedoglednice n_3^n, gdje je $M_3^n (O) = M_3^n O°$, jest prevaljeno središte, a pomoću njega dobivene su mjerne tačke M_1, M_2 nedogleda N_1^n, N_2^n na nedoglednici n_3^n. Povuče li se pravac $n_3 \parallel n_3^n$ tako da on spojnice $M_2 A_c$, $M_2 B_c$ siječe u tačkama kojima je razmak jednak određenom dijelu d prave veličine dužine $A B$, bit će taj pravac n_3 trag ravnine osnovke zadanog paralelepipeda. Poznatim postupcima mogu se sada odrediti prave veličine, umanjene u zadanom omjeru, svih ostalih bridova i drugih razmaka na zadanoj prizmi. U takvom slučaju potrebno je, prema tome, poznavati samo pravu veličinu jednog brida. Kad ne bi ništa bilo poznato o predmetu koji se želi rekonstruirati, a čija bi perspektivna slika bila zadana, trebalo bi — da bi se taj predmet mogao rekonstruirati — imati još jednu takvu sliku snimljenu s drugog mjesta, kao i tačan položaj obaju mjesta odakle su te slike snimljene (*v. Fotogrametrija*).

Povijest centralne projekcije. Na ostacima rimskih slika, naročito u Pompejima, već se vide začeci kasnijeg razvitka perspektive. Arhitektonski objekti prikazani su ovdje isključivo u frontalnom položaju, i to obično simetrično. Slike bridova okomitih na ravninu slike sjekle bi se u simetrali slike, ali ne sve u istoj tački, kao što to danas uči perspektiva. Namjesto jednog bila su obično dva, pa i tri razna nedogleda na takvoj simetrali. Nakon zastoja u Srednjem vijeku, tek se u XIV st. javlja u Italiji nastojanje da se u slikarstvo unesu neka perspektivna pravila. Firentinac Giotto crta osobe ne samo jednu do druge, kao na bizantinskim slikama, nego i jednu iza druge. Štaviše, i koso gledanu aureolu crtao je kao elipsu. Nedogled za bridove okomite na ravninu slike javlja se već koncem XIV st. Tek u XV st., za renesanse, počela se je na temelju tačnog promatranja prirode razvijati i perspektiva. Prva pravila za crtanje perspektivnih slika postavio je Firentinac F. Brunelleschi (1377—1446), koji je bio zlatar, kipar, inženjer i graditelj. Poslije njega svi paralelni pravci na perspektivnoj slici imaju samo jedan nedogled. Kako su zgodno i smišljeno tadanji umjetnici znali smjestiti te nedoglede vidi se na »Posljednjoj večeri« Leonarda da Vincija (1415), gdje se nedogled bridova okomitih na ravninu slike nalazi na čelu Krista, koji je na toj slici glavno lice. Konstruktivni postupci koje je upotrebljavao Brunelleschi za crtanje perspektivnih slika nisu poznati. Tek 150 godina kasnije spominje G. Vasari da se za konstrukciju perspektivnih slika služi tlocrtom i bokocrtom. Zasluge za razvoj perspektive imali su kasnije Leon Battista Alberti (1404—1472), koji je nacrtao i perspektivni pogled na Veneciju, i Piero della Francesca (1416—1492), autor opširnog rukopisa o perspektivi. Naročito zaslužan je kasnije Albrecht Dürer (1471—1528). Na svakoj svojoj slici konstruirao je on najprije perspektivni položaj, a tek onda je prelazio na umjetničku obradu. Spomenuti treba i Guida Ubalda del Monte (1545—1607), kao i Estiennea Migona, koji se za tačniju konstrukciju slike služi jednom oko horizonta prevaljenom skalom. Holandez Gravesand (1688—1742) prevaljuje sliku u horizontalnoj ravnini oko traga u ravninu slike, pa se služi kolinearnim odnosom između te slike i njenog prevaljenog položaja. Englez Brook Taylor (1685—1731) crta pomoću nedogleda i mjernih tačaka likove u kosoj ravnini, te određuje nedogled njenih okomica. Među ljude najzaslužnije za perspektivu treba svakako ubrojiti Johanna Heinricha Lamberta (1728—1777). Lambert prvi u potpunosti pokazuje kojim se postupkom može direktno nacrtati perspektivna slika nekog predmeta i bez tlocrta, nacrta ili bokocrta, ako mu se tačno poznaju oblik i dimenzije. On se služi, kao i Taylor, pravim i nedoglednim tragovima ravnina, nedogledima pravaca i njihovim mjernim tačkama. Istražuje, nadalje, utjecaj promjene centra projiciranja na izgled slike i prvi pokušava iz perspektivne slike odrediti pravu veličinu predmeta i time postavlja temelje fotogrametrije. Od pisaca o perspektivi u XIX i XX st. treba spomenuti B. E. Cousinerya, G. Schreibera, J. de la Gourneriea, W. Fiedlera, A. G. Perschku i E. Koutnyja, G. Haucka, K. Bartela.

Stereografsku projekciju kugle otkrio je još Ptolemej 140, a naziv »stereografska« uveo je F. Aguillon (1613). O stereografskoj projekciji dosta je pisao i E. Reusch (1881), a o njenoj primjeni u kartografiji H. Gretschel (1873). Kasnije se o njoj govori u svakoj većoj knjizi o centralnoj projekciji.

O reljefnoj perspektivi prvi naučno piše Breysig (1798), a on se prvi i služi tim nazivom »reljefna«. Kasnije o njoj pišu Poncelet (1822), C. T. Anger (1834), M. Poudra (1862), R. Staudigl (1868), L. Burmester (1883), pa Staud, Reye, Fiedler i drugi u svojim knjigama o deskriptivnoj geometriji i perspektivi. O kazališnoj perspektivi, kao specijalnoj reljefnoj perspektivi, pisali su L. Burmester (1884) i J. J. Pillet (1921). Anaglifska i ostale specijalne centralne projekcije javljaju se uglavnom tek u XX st.

LIT.: *Chr. Wiener,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2 Bde, Leipzig 1884. — *W. Fiedler,* Die darstellende Geometrie, 3 Bde, Leipzig 1888. — *A. Hauck,* Lehrbuch der malerischen Perspektive, Berlin 1910. — *K. Rohn, E. Papperitz,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 4 Bde, Leipzig 1913. — *G. Loria,* Metodi di geometria descrittiva, Milano 1919. — *C. Roubaudi,* Traité de géométrie descriptive, Paris 1920. — *J. Pillet,* Traité de perspective linéaire, Paris 1921. — *F. Enriques,* Lezioni di geometria descrittiva, Bologna 1925. — *M. Boucher,* Cours de géométrie descriptive, Paris 1934. — *K. Bartel,* Malerische Perspektive, Leipzig-Berlin 1934. — *E. Müller,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2 Bde, Leipzig 1936. — *F. Warner,* Applied descriptive geometry, New York 1938. — *H. W. Miller,* Descriptive geometry, New York ^{7}1941. — *E. F. Watts, J. T. Rule,* Descriptive geometry, New York 1946. — *Ch. H. Schumann,* Descriptive geometry; a treatise on the graphics of space for the scientific professions, Princeton ^{4}1946. — *Н. Ф. Четверухин,* Вопросы современной начертатетльной геометрии, Москва 1947. — *J. Božičević,* Deskriptivna geometrija, Zagreb 1948. — *W. H. Roever,* The Mongean method of descriptive geometry, New York 1952. — *V. Niče,* Perspektiva, Zagreb 1953. — *F. Rehbock,* Derstellende Geometrie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957. — *V. Niče,* Deskriptivna geometrija, Zagreb 1958. — *K. Strubecker,* Vorlesungen über darstellende Geometrie, Göttingen 1958. — *В. Гордон, М. Семейцов-Огиевский,* Курс начертательной геометрии, Москва 1958. — *А. Т. Чалый,* Курс начертательной геометрии, Москва 1959. — *V. Soudijan,* Cours théorique de perspective naturelle, Paris 1958. — *E. Salkowski,* Darstellende Geometrie, Leipzig ^{9}1963. — *Н. Н. Крылов, П. И. Лобандиевский,* Курс начертательной геометрии, Москва 1963. — *H. v. Sanden,* Darstellende Geometrie, Stuttgart ^{9}1964. — *E. C. Paré, R. O. Loving, I. L. Hill,* Descriptive geometry, New York ^{3}1965. — *H. E. Grant,* Practical descriptive geometry, New York ^{2}1965. — *I. Pál, V. Niče,* Nacrtna geometrija u anaglifnim slikama (prijevod s madžarskog), Zagreb 1966. — *W. E. Street,* Technical descriptive geometry, New York ^{2}1966. — *F. Hohenberg, V. Niče,* Konstruktivna geometrija u tehnici (prijevod s njemačkog) Zagreb 1966.

V. Niče