finom razdjeljenju na neku bezvodnu anorgansku sol, koja se neprestano miješa u plitkoj miješalici. Na sličan način kao kod metode gumna, vodena se faza veže na bezvodnu sol.

Na jedan od navedenih načina dobiveni detergentski prašak obično se još udešava na određenu koncentraciju površinski aktivne tvari u miješalicama i naknadno mu se dodaju one praškaste komponente koje se iz bilo kakvih razloga ne mogu primiješati kašastoj masi.

Gotovi detergentski praškovi pune se u papirnatu ambalažu sadržaja 100, 150, 200 i 250 g, a detergenti za strojeve u kutije od ljepenke sadržaja do 5 kg. Za punjenje postoje strojevi koji vrše sve faze rada posve automatski, počevši od pravljenja kutija do pakovanja paketa u sanduke ili veće kartonske kutije, koje se također automatski zatvaraju i etiketiraju.

Problem biodegradabilnosti detergenata. Detergenti na bazi višenavedenih površinski aktivnih tvari manje su podložni biološkom razgrađivanju nego sapuni. Oni se stoga samočišćenjem u recipijentima, kamo dospijevaju s otpadnim vodama, ne razaraju, pa se nakupljaju u površinskim vodama (a mogu dospjeti i u podzemne) i izazivaju mnoge štetne pojave. Pročišćavanje vode radi dobivanja pitke vode je prisutnošću detergenata otežano, tako onečišćena voda neupotrebljiva je za neke industrije, njima se oštećuje fauna i flora. U ekstremnim slučajevima desilo se da se u gusto naseljenom području pjenila voda koja je izlazila iz vodovodne slavine, a plovidba po manjem vodnom toku postala je vrlo teška uslijed guste pjene koja se stvarala na njegovoj površini. U nekim industrijski razvijenim državama poduzimaju se stoga zakonske mjere protiv onečišćenja detergentima koji se biološki ne razgrađuju (nisu »biodegradabilni«). Tako njemački zakon o detergentima od 1961 traži da anionaktivni detergenti budu razgradljivi najmanje 80%. Taj zakon stupio je na snagu krajem 1964.

Utvrđeno je da su od alkilbenzensulfonatâ biodegradabilni samo oni koji imaju ravan alifatski lanac, a oni koji imaju razgranat lanac, nisu. Dosad u detergentima najviše upotrebljavana površinski aktivna komponenta, dodecilbenzensulfonat, sastojao se redovito od izomera tetrapropilenbenzensulfonata, koji je spoj s razgranatim alifatskim lancem, te stoga nije biodegradabilan. Za proizvodnju biodegradabilnih alkilbenzensulfonata s nerazgranatim alifatskim lancem (linearnih alkilbenzensulfonata — LAS) upotrebljavaju se danas kao sirovina ravnolančani parafini dobiveni iz plinskog ulja metodom adsorpcije na molekularnim sitima (v. *Adsorpcija,* TE 1, str. 6) ili katalitičkim krekingom težih naftnih frakcija u nazočnosti vodika, urea-adukcijom iz smjese različitih ugljikovodika i na neke druge načine. Linearni alkilbenzeni mogu se dobiti i drukčije, npr. alkiliranjem benzena pomoću olefina koji nastaju pri krekingu visokomolekularnih ravnolančanih parafinskih voskova. Biodegradabilni alkilbenzensulfonati stavljeni su na tržište u Njemačkoj pod nazivom Marlon BW, a u Velikoj Britaniji pod nazivom Dobane JN.

Alkilsulfati i »olefinsulfonati«, površinski aktivne tvari o kojima je naprijed bilo govora, također su biološki razgradljivi.

Svjetska i domaća proizvodnja detergenata. Sintetska sredstva za pranje doživjela su nagli razvoj, osobito nakon drugog svjetskog rata. Tom razvoju pomogli su mnogi faktori kao što su bogat asortiman detergenata, jaka reklama, sve veće uvođenje strojeva za pranje u kućanstvima, novi sintetski tekstilni materijali koji zahtijevaju posebnu pažnju u pranju itd. Uz to se zemljama siromašnim na prirodnim masnoćama pružila mogućnost da proizvodnjom sintetskih sredstava za pranje postanu neovisniji o uvozu prirodnih masnoća.

Sve te okolnosti, a i neki drugi faktori, uvjetovali su da je proizvodnja detergenata u nekim zemljama postigla goleme razmjere. Tako je 1964 iznosila u USA preko 2,7 Mt, a u Evropi preko 1,5 Mt.

Veći dio dosadanje proizvodnje detergenata u svijetu kao i daljnji porast ide uglavnom na račun smanjenja proizvodnje sapuna. Iz statističkih podataka je vidljivo da su detergenti u svijetu istisli velik dio sapuna iz potrošnje te zauzeli njegovo mjesto. Stoga se u većini zemalja gdje je jaka potrošnja sredstava za pranje kreće udio detergenata u ukupnoj količini sredstava za pranje između 40 i 60%. Izgleda da će se taj omjer u dogledno vrijeme održati, jer se za sada ne pokazuje tendencija naglijeg porasta potrošnje bilo na jednu bilo na drugu stranu.

U Jugoslaviji je proizvodnja detergenata prešla početnu fazu razvoja. Prvi komercijalni detergent u prahu pojavio se na našem tržištu 1956. Odonda se proizvodnja detergenata iz godine u godinu povećavala, kako se vidi iz ove tablice:

Godina	1957	1958	1959	1960	1961	1962
Proizvodnja, t	3 590	10 563	16 580	18 493	21 261	26 086
Godina	1963	1964	1965	1966	1967	1970
Proizvodnja, t	30 320	38 122	46 983	53 532	58 813	80 000*

* Procjena

Premda navedena proizvodnja još zaostaje za proizvodnjom u drugim zemljama, ona pokazuje stalnu tendenciju povećavanja, dok proizvodnja sapuna uglavnom stagnira. To povećanje proizvodnje detergenata važno je sa privrednog gledišta za našu zemlju, jer se upotrebom viševrijednih detergenata postiže da se ne mora povećati uvoz prirodnih masnoća.

Slično kao i na vanjskim tržištima, i u nas su se nakon prvog izrađivača komercijalnog detergenta pojavili i drugi sa svojim proizvodima pod različitim nazivima. Sada se na našem tržištu nalaze uglavnom detergenti u obliku praška, pakovani u kartonske kutije sadržaja 150···5000 g i u tekućem obliku, punjeni u bocama sadržaja 0,5 litara. Osim ovih detergenata u formi praška i tekućoj formi, postoji u nas i jedan u formi paste, pakovan u tube.

Izrađivači detergenata su većinom tvornice sapuna. Ti proizvođači jesu danas: »Albus«, Novi Sad; »OHIS«, Skopje; »Labud«, Zagreb; »Merima«, Kruševac; »Nikola Đurković«, Kotor; »Saponia«, Osijek; »Zlatorog«, Maribor; i »Karbon«, Zagreb. (Od njih samo »OHIS« i »Karbon« nisu tvornice sapuna.)

U većini detergenata na našem tržištu upotrebljava se kao površinski aktivna supstancija natrijum-dodecilbenzensulfonat, koji se proizvodi u zemlji u četiri tvornice, a to su: »OHIS«, Skopje; »Kutrilin«, Zagreb; »Prva Iskra«, Barić i »Teol«, Ljubljana. Tri tvornice provode samo sulfonaciju i neutralizaciju uvoznog dodecilbenzena, uglavnom tetramernog tipa, dok se »OHIS« Skopje priprema i na sintezu dodecilbenzena. Potrebno je spomenuti da je tvornica »Teol« u Ljubljani već 1953 pustila u pogon pokusnu poluindustrijsku instalaciju za sintezu dodecilbenzena kerilnog tipa, upotrijebivši pri tom kao sirovinu domaći petrolej, dobiven iz nafte Mramor Brdo, a ispitivala je i petrolej iz uvozne nafte. To je postrojenje prestalo s radom 1956 a proizvelo je u svemu od 1953 do 1956 183 tone natrijum-alkil-aril-sulfonata sa 40% površinski aktivne tvari.

Tvornica »Teol« je 1962 osvojila proizvodnju neionogenih detergenata na bazi kondenzacionih produkata etilenoksida, koje je stavila u promet pod nazivom Etolati NF.

LIT.: *C. Lüttgen,* Organische und anorganische Wasch-, Bleich- und Reinigungsmittel, Heidelberg 1952. — *W. Kopaczewski,* Les détersifs, 3 vol., Paris 1952/53. — *H. Stüpel,* Synthetische Wasch- und Reinigungsmittel, Stuttgart 1954. — *A. M. Schwartz, J. W. Perry, J. Berch,* Surface-active agents and detergents, 2 vol., New York 1957/58. — *Ф. В. Неволин,* Синтетические моющие средства, Москва 1957. — *П. А. Ребиндер,* Поверхностно-активные вещества, Москва 1961. — *G. Gawalek,* Wasch- und Netzmittel, Berlin 1962. — *K. Lindner,* Tenside, Textilhilfsmittel, Waschrohstoffe, 2 Bde, Stuttgart 1964. — *M. J. Schick,* Nonionic surfactants, New York 1964. — *J. P. Sisley, P. J. Wood,* Encyclopedia of surfaceactive agents, 2 vol., New York 1964. — *Шенфельд,* Неионогенные моющие средства, Москва 1965.

M. Bravar M. Veldin

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, grana geometrije koja se bavi proučavanjem svojstava krivulja i ploha. Najčešće se proučavaju svojstva krivulja i ploha u neposrednoj okolini neke njihove tačke, ali često i svojstva tih objekata u njihovoj cjelini.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA U RAVNINI

Diferencijalna geometrija u ravnini bavi se izučavanjem svojstava krivulja u ravnini. Krivulje u ravnini mogu se analitički predočiti na više načina. Ako je jedna koordinata tačke na krivulji dana kao funkcija druge koordinate, tj. ako je krivulja analitički predočena jednadžbom:

$$y = f(x) \text{ (u Kartezijevim koordinatama)}$$

ili

$$r = f(\varphi) \text{ (u polarnim koordinatama),}$$

takav se način predočivanja zove *eksplicitnim*. Krivulje mogu biti analitički predočene i u *implicitnom* obliku, tj. jednadžbom

$$F(x, y) = 0 \text{ ili } G(r, \varphi) = 0.$$

Daljnji je način analitičkog predočivanja krivulja u ravnini *parametarsko* predočivanje uz pomoć parametra t, tj. jednadžbama

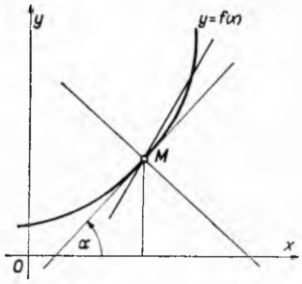
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

ili

$$r = g_1(t), \quad \varphi = g_2(t)$$

(v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 278 i 280).

Tangenta i normala. Pravac položen bilo kako kroz dvije tačke na krivulji zove se *sekanta*. Ako jedno presjecište sekante s krivuljom uzmemo čvrsto i oko njega pravac zakrećemo, drugo presjecište pravca s krivuljom kretat će se po krivulji i približavati čvrstoj tački, dok ne padne u nju (sl. 1). Tako dobiveni pravac je *tangenta* na krivulju u dotičnoj tački. Kažemo stoga da je tangenta granični slučaj sekante. Jednadžba tangente u tački (x_0, y_0) neke krivulje $y = f(x)$ glasi



Sl. 1

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Ako je krivulja zadana parametarski, jednadžba tangente glasi:

$$y - f_2(t_0) = \frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0)}\,[x - f_1(t_0)].$$

Normala na krivulju u nekoj njenoj tački je pravac okomit na tangentu u toj tački.

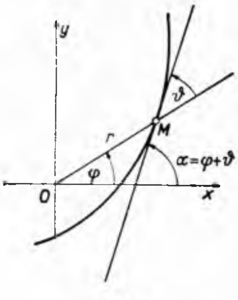
Prema tome jednadžba normale glasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0),$$

odnosno

$$y - f_2(t_0) = -\frac{f_1'(t_0)}{f_2'(t_0)}\,[x - f_1(t_0)].$$

Ako je krivulja zadana u polarnom koordinatnom sistemu, treba odrediti veličinu kuta ϑ koji čini tangenta sa radijvektorom.



Sl. 2

Prema sl. 2 je

$$\operatorname{tg}(\varphi + \vartheta) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Kako je u polarnom koordinatnom sistemu

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

to odavde slijedi

$$\mathrm{d}x = -r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}y = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

Prema tome je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\,\mathrm{d}r}{-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{d}r},$$

ili, ako brojnik i nazivnik podijelimo sa $\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi}, \text{ gdje je } r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Imamo prema tome

$$\operatorname{tg}(\varphi + \vartheta) = \frac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi}.$$

Kako je

$$\operatorname{tg}(\varphi + \vartheta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta},$$

to dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi}.$$

Iz ove jednadžbe dobiva se

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r}{r'}.$$

Asimptote. Ako jednadžba neke krivulje dopušta mogućnost da ili x ili y, ili i x i y postanu beskonačno veliki, onda velimo da ta krivulja ima beskonačno udaljene tačke. Takva krivulja ima granu koja seže u neizmjernost. Slijedimo tačku koja po toj grani odmiče u neizmjernost. Ako postoji pravac kome se ta tačka neograničeno približava, taj se pravac zove *asimptota*. Asimptota može biti paralelna sa osi ordinata, paralelna sa osi apscisa ili priklonjena prema osi apscisa.

Ako funkcija $y = f(x)$ ima u nekoj tački $x = a$

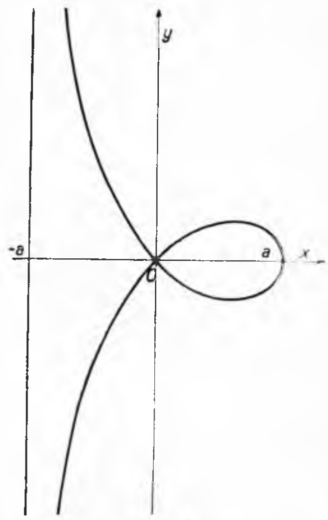
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

onda velimo da je pravac $x = a$ asimptota krivulje.

Npr. *strofoida*

$$y = x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

(sl. 3) ima asimptotu $x + a = 0$.



Sl. 3

Ako je krivulja dana u implicitnom obliku

$$u_0(x)\,y^m + u_1(x)\,y^{m-1} + \\ + \cdots + u_m(x) = 0,$$

asimptota paralelna sa osi y dobiva se tako da se najprije jednadžba podijeli sa y^m;

$$u_0(x) + u_1(x)\cdot\frac{1}{y} + u_2(x)\cdot\frac{1}{y^2} + \cdots + u_m(x)\cdot\frac{1}{y^m} = 0,$$

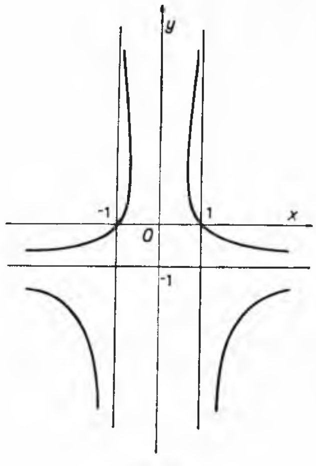
a zatim u dobivenu jednadžbu uvrsti $y = \infty$. Onda ostaje $u_0(x) = 0$, pa je to jednadžba iz koje se izračunava ono x za koje y postaje ∞. Ako je a neki korijen jednadžbe $u_0(x) = 0$, onda je

$$x - a = 0$$

asimptota krivulje paralelne s osi ordinata.

Npr.

$$(x^2 - 1)\,y^2 + 2\,x^2 y + x^2 - 1 = 0.$$



Sl. 4

Podijelimo ovu jednadžbu sa y^2 pa dobivamo

$$x^2 - 1 + 2\,x^2\cdot\frac{1}{y} + (x^2 - 1)\cdot\frac{1}{y^2} = 0.$$

Za $y = \infty$ dobivamo

$$x^2 - 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe jesu

$$x_1 = +1, \; x_2 = -1,$$

dakle su jednadžbe asimptota:

$$x = +1, \; x = -1,$$

pa su to obje asimptote paralelne sa osi y.

Analogno mogu se naći i asimptote koje su paralelne sa osi x na taj način da se jednadžba poreda po potencijama od x^2.

U našem slučaju imali bismo za gornju jednadžbu ovaj oblik

$$(y + 1)^2 \cdot x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Ako ovu jednadžbu podijelimo sa x^2, dobivamo

$$(y+1)^2-(y^2+1)\cdot\frac{1}{x^2}=0.$$

Za $x=\infty$ dobivamo $(y+1)^2=0$, tj. $y=-1$ je asimptota zadane krivulje paralelna sa osi x. To je ujedno dvostruka asimptota, jer smo je izračunali iz jednadžbe $(y+1)^2=0$ (sl. 4).

Asimptote mogu biti i nagnute prema osi x. Ako krivulja data jednadžbom $y=f(x)$ ima asimptotu koja je priklonjena prema osi x, onda je jednadžba asimptote

$$y=a\,x+b.$$

Jednadžbu takve krivulje možemo u tom slučaju pisati u obliku

$$y=a\,x+b+d(x),$$

gdje $d(x)$ ima svojstvo da je

$$\lim_{x\to\infty} d(x)=0,$$

što znači da se u beskonačnosti krivulja približava asimptoti, ako takva postoji.

Prema tome, krivulja će imati takvu asimptotu ako joj jednadžbu možemo dovesti u naprijed navedeni oblik

$$y=a\,x+b+d(x).$$

Ako ovu jednadžbu podijelimo sa x, dobivamo

$$\frac{y}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{d(x)}{x}.$$

Imamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=a,$$

pa smo time našli koeficijent smjera asimptote.

Da nađemo veličinu b, postupamo ovako: Imali smo

$$y=a\,x+b+d(x);$$

iz toga slijedi:

$$b=y-a\,x-d(x),$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-a\,x-d(x)],$$

a kako je za $x\to\infty$ $d(x)=0$, to ostaje

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-a\,x)$$

Npr.

$$y=\frac{x^2}{4\,(x+2)}.$$

Vidimo odmah da za $x=-2$ postaje $y=\infty$, pa je prema tome svakako jedna asimptota $x=-2$.

Asimptota koja je nagnuta prema osi x dobiva se u smislu prednjeg na ovaj način:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{4\,(x+2)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4\,(x+2)}=\frac{1}{4},$$

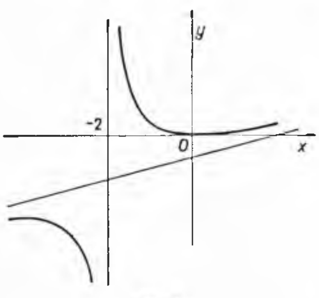
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{4\,(x+2)}-\frac{1}{4}\,x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2\,x}{4\,(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2\,(x+2)}=-\frac{1}{2}.$$

Prema tome jednadžba druge asimptote glasi

$$y=\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{2}\qquad\text{(sl. 5).}$$



Sl. 5

Ako je funkcija dana u implicitnom obliku

$$f(x,\,y)=0,$$

asimptota se nađe tako da se najprije članovi funkcije poredaju po homogenim grupama:

$$\varphi_n(x,y)+\varphi_{n-1}(x,y)+\cdots+$$
$$+\varphi_1(x,y)+\varphi_0(x,y)=0,$$

gdje $\varphi_i\,(x,y)$ znači da su svi sumandi i-tog stepena. Takva jednadžba podijeli se sa x^n, pa se dobiva ovaj oblik:

$$\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\,\varphi^{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+\frac{1}{x^n}\,\varphi_0\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Ako u tako dobivenoj jednadžbi puštamo da x ide u beskonačnost, ostaje samo jednadžba

$$\varphi_n\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

pa se iz te jednadžbe izračuna vrijednost koju poprima y/x kad x ide u beskonačnost, a to nije ništa drugo nego koeficijent smjera a asimptote. Ako zatim u danu jednadžbu uvrstimo

$$y=a\,x+b$$

i pustimo opet, pošto smo jednadžbu podijelili s najvišom potencijom od x, da x ide u beskonačnost, dobit ćemo vrijednost za b.

Npr. krivulja *Descartesov list* ima jednadžbu

$$x^3-3\,c\,x\,y+y^3=0.$$

Poredamo ovu jednadžbu najprije po homogenim grupama:

$$x^3+y^3-3\,c\,x\,y=0.$$

Prva grupa je trećeg stepena, druga je drugog stepena. Podijelimo čitavu jednadžbu sa x^3, tj. sa x u najvećem stepenu:

$$1+\frac{y^3}{x^3}-3\,c\,\frac{y}{x^2}=0,$$

odnosno

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^3-3\,c\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=0.$$

Ako $x\to\infty$, onda je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=a$,

pa dobivamo

$$1+a^3=0.$$

Odavde slijedi da je koeficijent smjera asimptote $a=-1$. Jednadžba asimptote glasit će dakle

$$y=-x+b.$$

Tu vrijednost uvrstimo u prvotnu jednadžbu:

$$x^3-3\,c\,x\,(-x+b)+(-x+b)^3=0,$$

ili

$$3\,c\,x^2-3\,c\,b\,x+3\,x^2\,b-3\,x\,b^2+$$
$$+\,b^3=0.$$

Ovu jednadžbu podijelimo sa x^2:

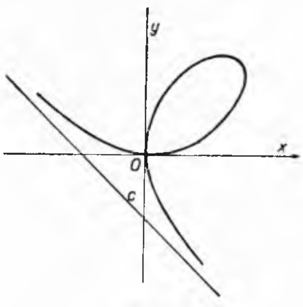
$$3\,c-\frac{3\,b\,c}{x}+3\,b-\frac{3\,b^2}{x}+\frac{b^3}{x^2}=0.$$

Ako sada pustimo da x ide u beskonačnost, dobivamo:

$$3\,c+3\,b=0\ \text{ili}\ b=-c,$$

pa je jednadžba asimptote

$$y=-x-c\ \text{(sl. 6).}$$



Sl. 6

Singularne tačke krivulja u ravnini. Ako je neka krivulja određena implicitnom jednadžbom

$$f(x,y)=0,$$

koeficijent smjera tangente te krivulje određuje se iz formule

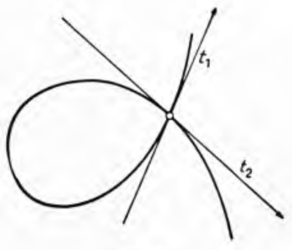
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_x}{f_y}.$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ postoji u nekoj tački ako je u toj tački f_x i f_y neprekidno i ako je $f_y\neq 0$. Ako je $f_y=0$ a $f_x\neq 0$, onda je $\frac{dx}{\mathrm{d}y}=0$. Ako je u nekoj tački $f_x=0$ i $f_y=0$, onda se u toj tački ne može odrediti ni $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ni $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. Takva tačka krivulje $f(x,y)=0$ zove se *singularna tačka.*

Može se pokazati da vrsta singularne tačke ovisi o diskriminanti

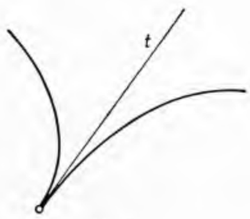
$$D=f_{xy}^2-f_{xx}\cdot f_{yy}.$$

Ako je $D>0$, krivulja ima u dotičnoj tački dvije realne tangente, a to znači da je ta tačka čvorište (sl. 7). Ako je $D<0$, u dotičnoj tački ne postoje realne tangente; ta je tačka *izolirana* (sl. 8). Ako je $D=0$, postoji samo jedna tangenta, ali mogu postojati dvije grane krivulje, tj. krivulja može u toj tački imati *šiljak*, i to ili *šiljak prve vrste* (sl. 9) ako su grane krivulje s jedne i druge strane



Sl. 7


Sl. 8



Sl. 9

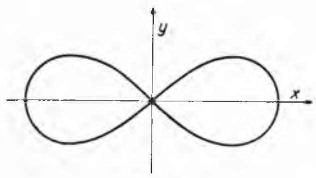
Sl. 10

tangente ili *šiljak druge vrste* (sl. 10) ako su obje grane na jednoj strani tangente.

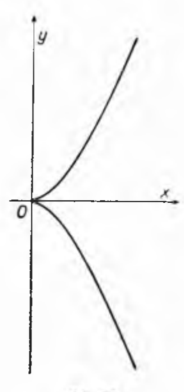
Primjeri. *1. Lemniskata:*

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$
$$f_x = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2 x,$$
$$f_y = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2 y,$$
$$f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2,$$
$$f_{xy} = 8xy,$$
$$f_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2.$$

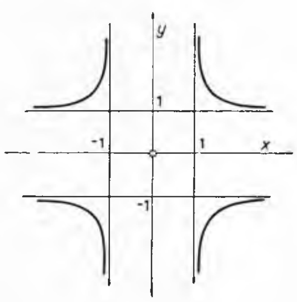
U tački (0, 0) je $f_x = 0$, $f_y = 0$. $D = 4a^4$. U toj tački krivulja ima dakle čvorište, jer je $D > 0$ (sl. 11).



Sl. 11



Sl. 12



Sl. 13

2. Semikubna parabola:

$$y^2 - x^3 = 0.$$
$$f_x = -3x^2,\ f_y = 2y,\ f_{xx} = -6x,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2$$

U tački (0, 0) je $D = 0$, prema tome krivulja ima u toj tački šiljak, i to šiljak prve vrste (sl. 12).

3. Krivulja $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2 = 0.$

$$f_x = 2x - 2xy^2,\quad f_y = 2y - 2x^2 y,$$
$$f_{xx} = 2 - 2y^2,\quad f_{xy} = -4xy,\quad f_{yy} = 2 - 2x^2.$$

U tački (0, 0) je $D = -4$; ova tačka krivulje je izolirana tačka, jer je $D < 0$ (sl. 13).

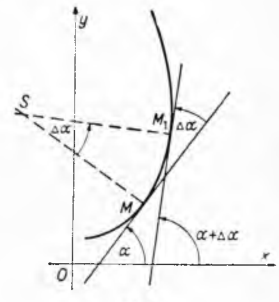
Zakrivljenost krivulja može se definirati uz pomoć zakrivljenosti kružnice. Zakrivljenost kružnice mjeri se uz pomoć polumjera kružnice time da se zakrivljenost kružnice definira kao recipročna vrijednost njezinog polumjera:

$$K = \frac{1}{\varrho},$$

gdje je ϱ polumjer kružnice. Odavde vidimo da je kružnica to manje zakrivljena što je ϱ veći. Ako $\varrho \to \infty$, zakrivljenost $K \to 0$. Stvarno, kad polumjer kružnice teži beskonačnosti, kružnica teži pravcu, a pravac je krivulja zakrivljenosti nula. Ako u gornjoj formuli pomnožimo brojnik i nazivnik sa α, dobivamo

$$K = \frac{\alpha}{\varrho\alpha},$$

pri čemu je $\varrho\alpha$ dužina luka na kružnici polumjera ϱ sa središnjim kutem α. Ova posljednja formula služi nam za definiciju zakrivljenosti svake krivulje. Ako na krivulji uzmemo (sl. 14) neku tačku M i u toj tački položimo tangentu na krivulju, pa potražimo na krivulji susjednu tačku M_1 i u toj susjednoj tački također položimo tangentu, te se dvije tangente sijeku pod kutem $\Delta\alpha$. Naime, tangenta u tački M siječe os x pod kutom α, a tangenta u tački M_1 siječe os x pod kutom $\alpha + \Delta\alpha$, pa je odatle jasno da je kut koji čine te dvije tangente jednak $\Delta\alpha$, tj. jednak prirastu kuta prve tangente kad se na krivulji pomaknemo do susjedne tačke. Ako je tako dobiven luk $M\,M_1$ vrlo malen, možemo taj dio luka smatrati kao dio kružnice. Središte te kružnice dobiva se kao sjecište normala u tačkama M i M_1 a ove dvije normale su dva polumjera te kružnice koji među sobom zatvaraju kut $\Delta\alpha$.



Sl. 14

Uz tu pretpostavku je dakle za našu krivulju

$$\frac{1}{\varrho} \approx \frac{\Delta\alpha}{\widehat{M M_1}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Ova formula vrijedit će to tačnije što je Δs manje, pa će prema tome biti

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Odavde možemo izračunati $1/\varrho$ na ovaj način. Kako je α kut što ga čini tangenta sa osi x, to je

$$\operatorname{tg}\alpha = y', \text{ ili } \alpha = \operatorname{arc\,tg} y'.$$

Odavde

$$d\alpha = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2},$$

a kako je osim toga

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

to slijedi:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

a sam *polumjer zakrivljenosti* ϱ:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Ako je krivulja zadana parametarski, tj. jednadžbama

$$\alpha = f_1(t),\quad y = f_2(t),$$

može se pokazati da se polumjer zakrivljenosti izračunava iz formule

$$\varrho = \frac{[f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2]^{3/2}}{f_1'(t)\,f_2''(t) - f_2'(t)\,f_1''(t)}.$$

Iz formule za polumjer zakrivljenosti mogu se lako naći koordinate *središta zakrivljenosti*. Ako neka tačka ima koordinate (x, y), onda su koordinate središta zakrivljenosti

$$\xi = x - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''},$$
$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Koordinate središta zakrivljenosti dane su dakle kao funkcije od x. Za svaku tačku krivulje dobivamo na taj način posve određeno središte zakrivljenosti, a sva ova središta leže na krivulji koja se zove *evoluta* dane krivulje i dana je u parametarskom obliku jednadžbama

$$\xi = g(x), \qquad \eta = h(x)\,.$$

Tako je npr. za parabolu $y^2 = 2\,p\,x$ evoluta dana jednadžbama

$$\xi = p + 3\,x, \qquad \eta = \pm\, 2\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2},$$

ili

$$\eta^2 = \frac{8}{27\,p}\,(\xi - p)^3.$$

Evoluta parabole zove se *Neilova parabola* (sl. 15). Evoluta elipse prikazane jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

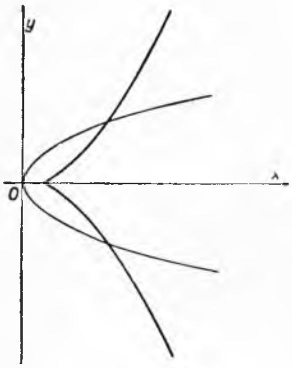
ima jednadžbu

$$(a\,\xi)^{2/3} + (b\,\eta)^{2/3} = e^{2/3}$$

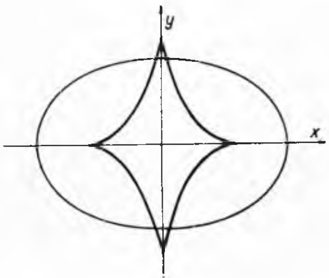
gdje je $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Evoluta elipse zove se astroida (sl. 16).

Može se pokazati da je duljina luka evolute između dviju tačaka jednaka razlici polumjera zakrivljenosti prvotne krivulje. Ako prema tome od jedne tačke evolute nanesemo na evolutu



Sl. 15



Sl. 16

nerastezljivu nit, pa odvijamo nit u smjeru tangente evolute, krajnja tačka te niti ležat će uvijek na zadanoj krivulji. Prvotna se krivulja može dobiti odvijanjem evolute, pa se ona zbog toga zove i *evolventa* svoje evolute.

Duljina luka. Već je naprijed spomenuto da je

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx.$$

To se lako dokazuje na ovaj način. Ako na nekoj krivulji uzmemo dvije tačke M_1 i M_2 i načinimo trokut $M_1\,P\,M_2$ (sl. 17), taj će trokut imati katete Δx i Δy i hipotenuzu Δs. Po Pitagorinom poučku imamo dakle

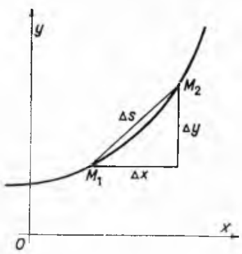
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2;$$

odatle dobivamo

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

pa imamo ujedno

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$



Sl. 17

Iz te formule možemo izračunati diferencijal luka krivulje i uz pomoć tog diferencijala izračunati duljinu nekog luka dane krivulje formulom

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Ako je krivulja dana u parametarskom obliku, duljina se luka izračunava iz formule

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}\;dt\,.$$

Npr. cikloida ima jednadžbu

$$x = r\,(t - \sin t)\,,$$
$$y = r\,(1 - \cos t)\,,$$

pa dobivamo da duljina njenog luka između dva šiljka iznosi

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[r^2\,(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t]}\;dt = 2\,r \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8\,r\,.$$

Dodirivanje krivulja. Neka dvije krivulje $y = f(x)$ i $y = g(x)$ imaju zajedničku tačku $x = x_0$, tj.

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Pretpostavimo, nadalje, da

$$f'(x_0) \neq g'(x_0).$$

Ako razvijemo te funkcije po Taylorovoj formuli, imamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,f''[x_0 + \vartheta_1(x - x_0)],$$

$$g(x) = g(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}\,g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,g''[x_0 + \vartheta_2(x - x_0)].$$

Odavde dobivamo

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0) + \frac{x - x_0}{2!}\,\{f''[x_0 + \vartheta_1(x - x_0)] - g''[x_0 + \vartheta_2(x - x_0)]\}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)\,.$$

Kako je $f'(x_0) - g'(x_0) \neq 0$, velimo da se ove dvije krivulje u tački $x = x_0$ sijeku, ali ne dodiruju. Razlika $f(x) - g(x)$ teži prema nuli kad x teži prema x_0 kao beskonačno mala veličina prvog reda.

Ako je, međutim,

$$f'(x_0) = g'(x_0), \quad f''(x_0) \neq g''(x_0),$$

imamo po Taylorovom razvoju

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\,f'''[x_0 + \vartheta_1(x - x_0)],$$

$$g(x) = g(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}g''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\,g'''[x_0 + \vartheta_2(x - x_0)],$$

pa imamo

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2!}\,[f''(x_0) - g''(x_0)] + \frac{x - x_0}{3!}\,\{f'''[x_0 + \vartheta_1(x - x_0)] - g'''[x_0 + \vartheta_2(x - x_0)]\}.$$

U tom slučaju krivulje $y = f(x)$ i $y = g(x)$ se diraju, jer imaju zajedničku tangentu, a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2!}\,[f''(x_0) - g''(x_0)]\,,$$

tj. kad x teži prema x_0, razlika $f(x) - g(x)$ teži prema nuli kao beskonačno mala veličina drugoga reda. Za same krivulje velimo da one imaju u tom slučaju u tački $x = x_0$ *dodir prvoga reda.*

Ako je posve općenito u tački $x = x_0$,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0),$$
$$f''(x_0) = g''(x_0) \cdots f^n(x_0) = g^n(x_0),$$

tj. ako su u toj tački ordinate obiju krivulja kao i sve derivacije do uključivo n-te jednake, onda se kaže da zadane krivulje imaju u tački $x = x_0$ *dodir n-toga reda.* Po ovoj definiciji krivulje koje se ne dodiruju imaju *dodir 0-tog reda.*

Omotnica. Neka u jednadžbi

$$f(x, y, C) = 0$$

C znači parametar koji može poprimiti različite vrijednosti. Za svako odabrano C dobivamo jednu krivulju u ravnini. Prema tome ta jednadžba predočuje skup od neizmjerno mnogo krivulja, koji zovemo *porodicom krivuljâ.*

Ako za neku takvu jednoparametarsku porodicu krivulja postoji krivulja C koja ima svojstvo da u svakoj svojoj tački ima tangentu koja je u toj tački ujedno tangenta jedne krivulje iz dane porodice, ali krivulja C sama ne pripada toj porodici, onda kažemo da je krivulja C *omotnica* (anvelopa) dane porodice krivulja. Do te omotnice dolazi se tako da se zadana jednadžba derivira po C i postavi

$$\frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

Iz ove jednadžbe i prethodne eliminira se C i tako dobivena jednadžba je jednadžba omotnice zadane porodice krivulja. U pojedinim slučajevima treba uvijek ispitati da li je to stvarno omotnica. Zadana porodica krivulja ima samo onda omotnicu, ako su zadovoljeni ovi uvjeti:

1. $$f(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0;$$

2. $$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{Cx} & f_{Cy} \end{vmatrix} \neq 0,$$

3. $$f_{CC} \neq 0.$$

Imamo npr. obitelj kružnica

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}.$$

Da nađemo omotnicu tih kružnica deriviramo tu jednadžbu po C pa dobivamo

$$-2(x - C) = \frac{C}{2}.$$

Odavde

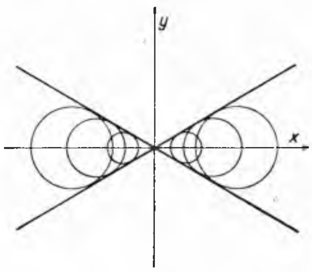
$$C = \tfrac{4}{3}x.$$

To uvršteno u jednadžbu kružnica daje

$$y^2 = \tfrac{1}{3}x^2,$$

ili

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$



Sl. 18

Dobili smo dakle dva pravca (sl. 18), koji su zaista omotnice danih krugova, jer zadovoljavaju gore navedene uvjete. Naime, 1. uvjet je zadovoljen jer smo iz njega i dobili jednadžbe tih pravaca. 2. uvjet je determinanta:

$$D = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ f_{Cx} & f_{Cy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x-C) & 2y \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4y.$$

$D \neq 0$, kad je $y \neq 0$, a kako općenito nije $y = 0$, to je i taj uvjet ispunjen. 3. uvjet, $f_{CC} = \frac{3}{2} \neq 0$, ispunjen je, jer f_{CC} nije za svako C jednak nuli.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA PROSTORNIH KRIVULJA

Prostorne krivulje. Krivulje u prostoru predočuju se najčešće u parametarskom obliku:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Vektor od ishodišta do neke tačke u prostoru zove se *radijvektor* te tačke. Svaka tačka na krivulji određena je radijvektorom

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},$$

gdje su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ jedinični vektori u smjeru osî x, y i z.

Prostorna krivulja može se predočiti i kao presjek dviju ploha:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Duljina luka prostorne krivulje određuje se polazeći od formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Prema tome, duljina luka prostorne krivulje od tačke M_1 koja odgovara parametru t_1 do tačke M_2 koja odgovara parametru t_2 bit će jednaka

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt,$$

gdje $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ znači $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Na primjer, krivulja

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

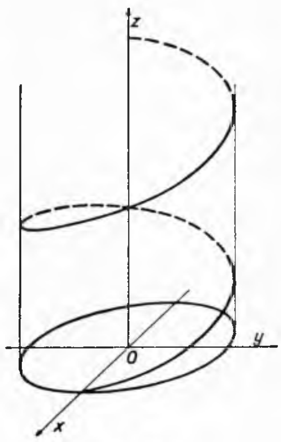
zove se *zavojnica* i nalazi se u cijelosti na valjku koji ima jednadžbu

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Duljina luka te prostorne krivulje od tačke $M_1(a, 0, 0)$ do tačke $M_2(a, 0, 2\pi b)$ (sl. 19) tj. od tačke $t = 0$ do tačke $t = 2\pi$ izračunava se iz formule

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt = $$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$



Sl. 19

Tangenta prostorne krivulje. Ako je parametar koji pripada nekoj tački na krivulji jednak t, radijvektor te tačke na krivulji funkcija je tog parametra t, pa se bilježi $\vec{r}(t)$. Ako na prostornoj krivulji uzmemo susjednu tačku koja se dobiva za parametar $t + \Delta t$, pripadni je radijvektor $\vec{r}(t + \Delta t)$. Vektor koji spaja te dvije tačke jednak je $\Delta\vec{r}$, tj. odgovara prirastu koji se mora dodati vektoru $\vec{r}(t)$ da bi se dobio $\vec{r}(t + \Delta t)$ (sl. 20).

Vektor $\Delta\vec{r}$ može se pisati i ovako

$$\Delta\vec{r} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}.$$

Ako ovu jednadžbu podijelimo sa Δt, dobivamo

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\cdot\vec{k};$$

ako $\Delta t \to 0$, ova formula prelazi u

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}.$$

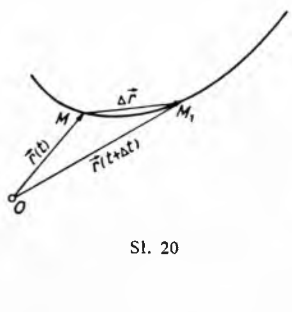
Time je definirana *derivacija radijvektora* po parametru t, koja je također vektor. Smjer tog vektora je smjer tangente na prostornu krivulju jer je smjer sekante bio određen vektorom $\Delta\vec{r}$, a kad $\Delta\vec{r}$ teži ka $d\vec{r}$, onda sekanta teži tangenti. Kao pozitivni smjer tangente uzima se smjer u kome raste parametar, odnosno dužina luka.

Iz gornje formule za $\frac{d\vec{r}}{dt}$ slijedi da je

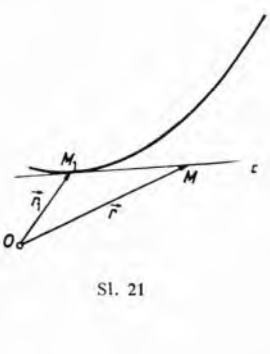
$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}.$$

Jednadžbu tangente na prostornu krivulju dobivamo na osnovu ovog razmatranja. Na sl. 21 predočena je tangenta na prostornu krivulju u tački M_1. Na toj tangenti uzmemo bilo koju tačku M. Spojimo tačke M_1 i M s ishodištem i dobivamo trokut OM_1M. Prema tome je

$$\vec{r} = \vec{r}(t_1) + \overrightarrow{M_1M}.$$



Sl. 20



Sl. 21

Vektor $\overrightarrow{M_1M}$ je vektor koji ima smjer vektora $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$, pa je stoga

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\, \vec{r}'(t_1).$$

Iz toga slijedi konačno

$$\vec{r} = \vec{r}(t_1) + \lambda\, \vec{r}'(t_1).$$

To je *vektorska jednadžba tangente na prostornu krivulju.* Iz ove jednadžbe slijedi:

$$x = x(t_1) + \lambda\, x'(t_1),$$
$$y = y(t_1) + \lambda\, y'(t_1),$$
$$z = z(t_1) + \lambda\, z'(t_1),$$

a odavde se dobiva *analitička jednadžba tangente na prostornu krivulju:*

$$\frac{x - x(t_1)}{x'(t_1)} = \frac{y - y(t_1)}{y'(t_1)} = \frac{z - z(t_1)}{z'(t_1)}.$$

Kosinusi kut va što ih ta tangenta čini sa osima x, y i z jesu:

$$\cos\alpha = \frac{x'(t_1)}{|\vec{r}'(t_1)|}, \quad \cos\beta = \frac{y'(t_1)}{|\vec{r}'(t_1)|}, \quad \cos\gamma = \frac{z'(t_1)}{|\vec{r}'(t_1)|}.$$

Za zavojnicu imamo:

$$\frac{x - x_1}{-a\sin t_1} = \frac{y - y_1}{a\cos t_1} = \frac{z - z_1}{b},$$

pri čemu su x_1, y_1, z_1 koordinate tačke koja odgovara parametru t_1, a x, y, z su koordinate tačke na tangenti.

Ako je prostorna krivulja dana kao presjek dviju ploha

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0,$$

jednadžba tangente glasi

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}\right)_{(1)}} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}\right)_{(1)}} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right)_{(1)}},$$

gdje je

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = f_y g_z - f_z g_y,$$

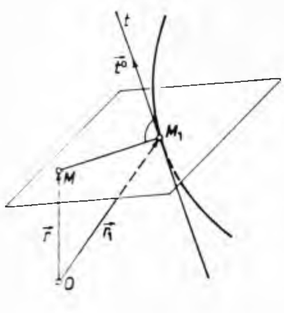
a indeks (1) znači da se za x, y, z uvrštava x_1, y_1, z_1.

Normalna ravnina. Ravnina okomita na smjer tangente u tački M_1 prostorne krivulje zove se *normalna ravnina krivulje* u toj tački. Ako spojimo tačku M_1 krivulje i bilo koju tačku M normalne ravnine s ishodištem, dobivamo trokut OM_1M (sl. 22). Iz tog trokuta slijedi, da je

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1.$$

Taj vektor $\overrightarrow{M_1M}$, koji leži u normalnoj ravnini, okomit je na tangentu na prostornu krivulju u tački M_1. Ako označimo sa $\vec{t}^\circ$ jedinični vektor tangente, onda mora vrijediti uvjet

$$\vec{t}^\circ \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0.$$



Sl. 22

To je *vektorska jednadžba normalne ravnine.*

Kako je

$$\vec{t}^\circ = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k},$$
$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k},$$

to iz vektorske jednadžbe (skalarni produkt) slijedi

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0,$$

odnosno

$$(x - x_1)\,x'(t_1) + (y - y_1)\,y'(t_1) + (z - z_1)\,z'(t_1) = 0.$$

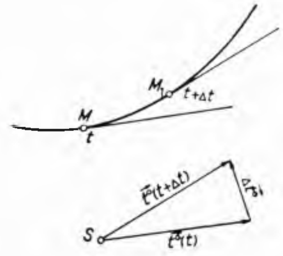
Npr. za zavojnicu dobivamo jednadžbu normalne ravnine:

$$(x - x_1)\cdot(-a\sin t_1) + (y - y_1)\cdot a\cos t_1 + (z - z_1)\cdot b = 0,$$

ili odavde

$$-y_1 x + x_1 y + b z = b z_1.$$

Glavna normala. Prostorna krivulja u svakoj svojoj tački ima samo jednu tangentu, ali neizmjerno mnogo normala. Između svih tih normala ističu se dvije: glavna normala i binormala. Do pojma glavne normale dolazimo na osnovu ovakvog razmatranja. Ako na prostornu krivulju u nekoj tački kojoj pripada parametar t položimo tangentu, ta će tangenta imati svoj određeni smjer. Ako promatramo samo onaj dio tangente koji ima dužinu 1, onda smo tako dobili jedinični vektor tangente. Ako u nekoj susjednoj tački s parametrom $t + \Delta t$ također položimo tangentu, dobit ćemo neki drugi smjer i neki drugi jedinični vektor. Zamislimo sada u prostoru bilo koju tačku i položimo kroz tu tačku paralelu s prvim jediničnim vektorom i paralelu s drugim jediničnim vektorom. Krajnje tačke tih vektora leže na jednoj kugli polumjera 1. Geometrijsko mjesto vrhova jediničnih tangentnih vektora na spomenutoj jediničnoj kugli zove se *sferna indikatrisa* tangentnog vektora. Ako spojimo krajnje vrhove dvaju jediničnih vektora tangente koji polaze iz istih ishodišta, dobivamo sl. 23, iz koje razabiremo da je



Sl. 23

$$\vec{t}^\circ(t + \Delta t) = \vec{t}^\circ(t) + \Delta\vec{t}^\circ,$$

ili

$$\Delta\vec{t}^\circ = \vec{t}^\circ(t + \Delta t) - \vec{t}^\circ(t).$$

Ako sad pustimo da Δt ide prema nuli, dobivamo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{t}^\circ = d\vec{t}^\circ.$$

Kako je, medutim,

$$\vec{t}^\circ = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

to je

$$\frac{d\vec{t}^\circ}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Razabiremo odavde da je derivacija jediničnog vektora tangente po s jednaka drugoj derivaciji radijvektora $\vec{r}$ po s. Ta derivacija jediničnog vektora tangente, odnosno druga derivacija radijvektora, ima prema tome smjer tangente na sfernu indikatrisu, te je ujedno okomita na jediničnom vektoru tangente. Pravac koji je okomit na tangenti i ima smjer vektora druge derivacije radijvektora zove se *glavna normala.* Jedinični vektor glavne normale piše se $\vec{n}^\circ$.

Budući da je $\vec{n}^\circ$ proporcionalno drugoj derivaciji $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, svakako je

$$\vec{n}^\circ = R\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},$$

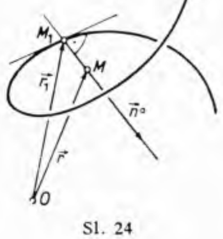
gdje je R faktor proporcionalnosti. Značenje tog R upoznat ćemo kasnije.

Ako na prostornoj krivulji spojimo tačku M_1 s ishodištem i isto učinimo s bilo kojom tačkom glavne normale, dobivamo trokut OM_1M (sl. 24). Za taj trokut vrijedit će:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{n}^\circ,$$

iz čega slijedi:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \mu \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$



Sl. 24

Odavde:

$$x = x_1 + \mu \frac{d^2x}{ds^2}, \quad y = y_1 + \mu \frac{d^2y}{ds^2}, \quad z = z_1 + \mu \frac{d^2z}{ds^2},$$

odnosno,

$$\frac{x - x_1}{x''} = \frac{y - y_1}{y''} = \frac{z - z_1}{z''},$$

gdje su x'', y'', z'' druge derivacije x, y i z po s u tački s parametrom t_1.

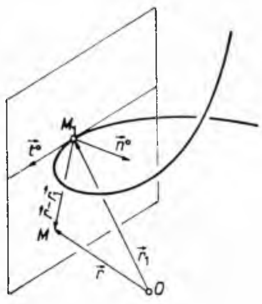
Npr. jednadžbe glavne normale zavojnice glase:

$$\frac{x - x_1}{-a \cos t_1 \cdot \dfrac{1}{a^2 + b^2}} = \frac{y - y_1}{-a \sin t_1 \cdot \dfrac{1}{a^2 + b^2}} = \frac{z - z_1}{0}$$

ili

$$\frac{x - x_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{y_1} = \frac{z - z_1}{0}.$$

Ravnina rektifikacije je ravnina koja je okomita na glavnu normalu i prolazi tangentom. Ona je dakle i tangencijalna ravnina



Sl. 25

prostorne krivulje. Iz sl. 25 se vidi da je jednadžba ravnine rektifikacije

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}^\circ = 0.$$

Vektor $\vec{r} - \vec{r}_1$ je u ravnini rektifikacije, pa kako je ravnina rektifikacije okomita na glavnoj normali, mora skalarni produkt vektora $\vec{r} - \vec{r}_1$ i vektora $\vec{n}^\circ$ biti jednak nuli.

Kako su komponente vektora $\vec{r} - \vec{r}_1$ jednake $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, a komponente vektora $\vec{n}^\circ$ su proporcionalne sa

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2},$$

to slijedi

$$(x - x_1)\frac{d^2x}{ds^2} + (y - y_1)\frac{d^2y}{ds^2} + (z - z_1)\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

kao jednadžba ravnine rektifikacije.

Za zavojnicu bit će prema tome ta jednadžba

$$(x - x_1)\frac{-a \cos t_1}{a^2 + b^2} + (y - y_1)\frac{-a \sin t_1}{a^2 + b^2} = 0,$$

odnosno

$$x x_1 + y y_1 = a^2.$$

Ravnina rektifikacije zavojnice je tangentna ravnina valjka na kojem se nalazi zavojnica.

Binormala je pravac okomit na tangenti i na glavnoj normali. Orijentacija i smjer binormale dani su jediničnim vektorom binormale, koji se označuje sa $\vec{b}^\circ$ i jednak je

$$\vec{b}^\circ = \vec{t}^\circ \times \vec{n}^\circ.$$

Komponente od $\vec{t}^\circ$ su $\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}$, a od $\vec{n}^\circ$, $R\dfrac{d^2x}{ds^2}$, $R\dfrac{d^2y}{ds^2}$, $R\dfrac{d^2z}{ds^2}$.

Imamo prema tome

$$\vec{b}^\circ = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ R\dfrac{d^2x}{ds^2} & R\dfrac{d^2y}{ds^2} & R\dfrac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix},$$

$$\vec{b}^\circ = R\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\vec{i} + R\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\vec{j} + R\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\vec{k},$$

iz čega slijede jednadžbe binormale

$$\frac{x - x_1}{y'z'' - z'y''} = \frac{y - y_1}{z'x'' - x'z''} = \frac{z - z_1}{x'y'' - y'x''}$$

gdje $y'z'' - z'y''$ znači ili $\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}$ ili $\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{dz}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}$ u tački s parametrom t_1.

Za zavojnicu dobit ćemo na taj način da je jednadžba binormale

$$\frac{x - x_1}{b \sin t_1} = \frac{y - y_1}{-b \cos t_1} = \frac{z - z_1}{a}.$$

Ravnina oskulacije je ravnina koja prolazi jediničnim vektorom tangente i glavne normale. Ta ravnina je prema tome također tangencijalna ravnina. Binormala je okomita na toj ravnini jer je okomita na jediničnom vektoru tangente i jediničnom vektoru glavne normale. To svojstvo daje nam vektorsku jednadžbu ravnine oskulacije:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{t}^\circ \times \vec{n}^\circ) = 0 \qquad \text{(sl. 26).}$$

Iz ove jednadžbe slijedi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0,$$

to jest,

$$(x - x_1)(y' z'' - z' y'') + (y - y_1)(z' x'' - x' z'') + (z - z_1)(x' y'' - y' x'') = 0,$$

pri čemu

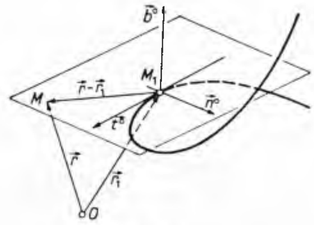
$$y' z'' - z' y'', \quad z' x'' - x' z'', \quad x' y'' - y' x''$$

ima isto značenje kao u jednadžbi binormale.

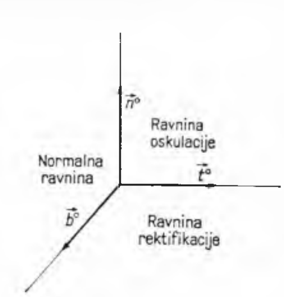
Za zavojnicu dobivamo ovu jednadžbu ravnine oskulacije:

$$b y_1 x - b x_1 y + a^2 z = a^2 z_1.$$

Prostorna krivulja ima, prema naprijed izloženom, u svakoj tački tri istaknuta pravca: tangentu, glavnu normalu i binormalu.



Sl. 26

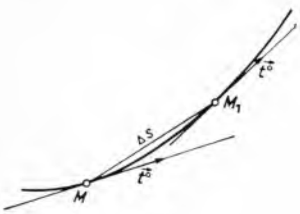


Sl. 27

Ta tri pravca čine *trobridac* s tri ravnine: normalnom ravninom, ravninom rektifikacije i ravninom oskulacije (sl. 27). Za taj trobridac vrijede ove jednadžbe:

$$\vec{t}^\circ = \vec{n}^\circ \times \vec{b}^\circ, \quad \vec{b}^\circ = \vec{t}^\circ \times \vec{n}^\circ, \quad \vec{n}^\circ = \vec{b}^\circ \times \vec{t}^\circ.$$

Fleksija. Zakrivljenost prostorne krivulje može biti dvojaka: fleksija i torzija. Do pojma fleksije dolazi se na ovaj način. Ako na prostornu krivulju (sl. 28) položimo u dvije susjedne tačke tangente, jedinični vektori tih tangenata čine u prostoru kut $\Delta\alpha$. Ako pod Δs razumijevamo udaljenost tih dviju tačaka na krivulji, onda se analogno definiciji zakrivljenosti ravnih krivulja definira srednja zakrivljenost sa $\Delta\alpha/\Delta s$.

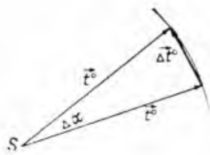


Sl. 28

Ako pustimo da se druga tačka prostorne krivulje sve više približava prvoj, taj omjer prelazi u $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}s$. Taj kvocijent definira se kao *fleksija* krivulje i označuje sa $1/R$, pa je tako

$$\frac{1}{R}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}.$$

Veličinu R zovemo *polumjer zakrivljenosti.*



Sl. 29

Ako iz neke tačke u prostoru povučemo paralele sa tangentama na dvije susjedne tačke prostorne krivulje (sl. 29), vrijedit će, ako su te tačke dovoljno blizu jedna drugoj, jednadžba

$$\left|\Delta\vec{t^\circ}\right|=\Delta\alpha,\quad\text{odnosno}\quad\left|\mathrm{d}\vec{t^\circ}\right|=\mathrm{d}\alpha,$$

pa je

$$\frac{1}{R}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t^\circ}}{\mathrm{d}s}\right|.$$

Imamo nadalje

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t^\circ}}{\mathrm{d}s}=\vec{n^\circ}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t^\circ}}{\mathrm{d}s}\right|=\vec{n^\circ}\cdot\frac{1}{R}.$$

Kako je

$$\vec{t^\circ}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s},$$

to dobijemo konačno

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}=\vec{n^\circ}\cdot\frac{1}{R},\quad\text{odnosno}\quad\vec{n^\circ}=R\cdot\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}.$$

Time smo ujedno pokazali da je faktor proporcionalnosti R, s kojim množimo $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}$ da bismo dobili $\vec{n^\circ}$, polumjer zakrivljenosti naše prostorne krivulje. Kako su komponente vektora

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\ \text{jednake}\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\ \text{i}\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2},$$

odavde slijedi da je

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2}.$$

Iz jednadžbe

$$\vec{n^\circ}=R\cdot\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

slijedi

$$\left|\vec{n^\circ}\right|=R\cdot\left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}\right|$$

$$1=R\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2},$$

iz čega

$$R=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2}}.$$

Ova formula služi da se izračuna polumjer zakrivljenosti prostorne krivulje ako je duljina luka parametar na krivulji. Ako je, pak, na krivulji dan općeniti parametar t, može se pokazati da se R izračunava iz formule

$$R=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

gdje znači

$$A=\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y},\ B=\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z},\ C=\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}.$$

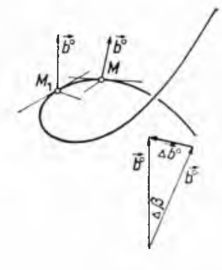
Oznake $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ znače prvu derivaciju po t, a $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ drugu derivaciju po t.

Za zavojnicu može se pomoću gornjih formula pokazati da je

$$R=\frac{a^2+b^2}{a}.$$

Zavojnica ima prema tome konstantnu fleksiju.

Torzija je mjera za promjenu smjera binormale pri pomicanju tačke duž prostorne krivulje. Dok smo do pojma fleksije došli promatrajući dvije susjedne tangente i podijelivši kut među njima sa pripadnom udaljenosti dviju tačaka, do pojma torzije dolazimo ako kut među dvjema susjednim binormalama podijelimo sa udaljenosti dviju tačaka na krivulji. Prema tome je srednja torzija krivulje kvocijent $\Delta\beta/\Delta s$. Iz sl. 30 vidi se da vrijedi



Sl. 30

$$\left|\Delta\vec{b^\circ}\right|\approx\Delta\beta,\quad\text{odnosno}\quad\left|\mathrm{d}\vec{b^\circ}\right|=\mathrm{d}\beta.$$

Apsolutnu vrijednost torzije $1/T$ definiramo kao

$$\frac{1}{T}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}\right|$$

$\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}$ ima smjer glavne normale. To se dokazuje ovako:

$$\vec{b^\circ}\cdot\vec{t^\circ}=0,\qquad\vec{b^\circ}\frac{\mathrm{d}\vec{t^\circ}}{\mathrm{d}s}+\vec{t^\circ}\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t^\circ}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{R}\cdot\vec{n^\circ},\qquad\vec{b^\circ}\,\vec{n^\circ}\cdot\frac{1}{R}+\vec{t^\circ}\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}=0.$$

Kako je

$$\vec{b^\circ}\cdot\vec{n^\circ}=0,\quad\text{to je}\quad\vec{t^\circ}\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}=0.$$

Dakle je $\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}$ okomito na $\vec{t^\circ}$ i na $\vec{b^\circ}$ i leži prema tome u $\vec{n^\circ}$.

Imamo dakle

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}=\vec{n^\circ}\left|\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}\right|,\quad\text{ili}\quad\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}=\vec{n^\circ}\cdot\frac{1}{T},$$

a odavde, ako jednadžbu množimo sa $\vec{n^\circ}$, zbog $(\vec{n^\circ})^2=1$,

$$\frac{1}{T}=\vec{n^\circ}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b^\circ}}{\mathrm{d}s}.$$

Može se pokazati da je

$$\frac{1}{T}=-\frac{\{r'\cdot r''\cdot r'''\}}{|r''|^2},$$

što se može pisati i ovako:

$$\frac{1}{T}=-R^2\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}.$$

Ova formula vrijedi kad je prostorna krivulja zadana radijvektorom koji je funkcija parametra s. Ako je prostorna krivulja dana kao funkcija parametra t, torzija se izračunava iz formule

$$\frac{1}{T}=-\frac{\{\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\cdot\dddot{\vec{r}}\}}{A^2+B^2+C^2},$$

gdje A, B i C imaju gore označeno svojstvo.

Za zavojnicu dobivamo iz tih formula

$$\frac{1}{T} = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Što se tiče predznaka torzije, može se pokazati ovo. Kad neka tačka prolazi krivuljom u pozitivnom smislu, tj. u smjeru u kome se povećava duljina luka, ona će se, kad siječe oskulacionu ravninu, spuštati ispod te ravnine ako je $\frac{1}{T} > 0$, a uzdizati se ako je $\frac{1}{T} < 0$.

Mi smo definirali torziju uz pomoć kuta što ga čine dvije susjedne binormale. U stvari se uz pomoć torzije mjeri izvijanje prostorne krivulje iz ravnine. Krivulje u ravnini nemaju torzije, jer se ne izvijaju iz ravnine. Stvarno je binormala krivulje u ravnini, kao pravac koji je okomit na tangentu i glavnu normalu, u svakoj tački krivulje pravac okomit na ravninu u kojoj leži krivulja. Prema tome dvije susjedne binormale uvijek čine kut $\Delta\beta = 0$ i torzija je po definiciji jednaka nuli za krivulju u ravnini.

Frenetove formule. Ako formulu

$$\vec{n}^\circ = \vec{b}^\circ \times \vec{t}^\circ$$

deriviramo po s, dobivamo

$$\frac{d\vec{n}^\circ}{ds} = \vec{b}^\circ \times \frac{d\vec{t}^\circ}{ds} + \frac{d\vec{b}^\circ}{ds} \times \vec{t}^\circ.$$

Kako je

$$\frac{d\vec{t}^\circ}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{R}\cdot\vec{n}^\circ \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{b}^\circ}{ds} = \frac{1}{T}\cdot\vec{n}^\circ,$$

slijedi

$$\frac{d\vec{n}^\circ}{ds} = \vec{b}^\circ \times \left(\frac{1}{R}\cdot\vec{n}^\circ\right) + \left(\frac{1}{T}\cdot\vec{n}^\circ\right) \times \vec{t}^\circ = -\frac{1}{R}\cdot\vec{t}^\circ - \frac{1}{T}\vec{b}^\circ.$$

Na taj način dobivene tri formule:

$$\frac{d\vec{t}^\circ}{ds} = \frac{1}{R}\cdot\vec{n}^\circ,$$

$$\frac{d\vec{n}^\circ}{ds} = -\frac{1}{R}\cdot\vec{t}^\circ - \frac{1}{T}\cdot\vec{b}^\circ,$$

$$\frac{d\vec{b}^\circ}{ds} = \frac{1}{T}\cdot\vec{n}^\circ$$

zovu se *Frenetove formule.*

Uz pomoć tzv. *Darbouxova vektora*

$$\vec{d} = -\frac{1}{T}\cdot\vec{t}^\circ + \frac{1}{R}\cdot\vec{b}^\circ$$

mogu se gornje formule pisati i u ovom obliku

$$\frac{d\vec{t}^\circ}{ds} = \vec{d} \times \vec{t}^\circ,$$

$$\frac{d\vec{n}^\circ}{ds} = \vec{d} \times \vec{n}^\circ,$$

$$\frac{d\vec{b}^\circ}{ds} = \vec{d} \times \vec{b}^\circ.$$

Diferencijalna geometrija ploha

Analitičko predočivanje ploha. Plohu u prostoru možemo analitički predočiti na ove načine:

$z = f(x, y)$ (eksplicitno),

ili $f(x, y, z) = 0$ (implicitno),

ili $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ (parametarski uz pomoć dva parametra).

Primjeri. Jednadžba kugle u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sistemu glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Možemo kuglu predočiti i uz pomoć dva parametra uvodeći tzv. *sferne koordinate.* Iz sl. 31 se razabire da se uz pomoć koordinata ϑ i φ može kugla predočiti jednadžbama:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Elipsoid se može pisati

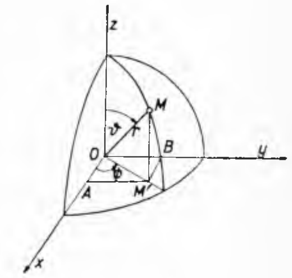
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ili

$$x = a\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1},$$

$$y = b\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1},$$

$$z = c\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$



Sl. 31

Kad je ploha zadana u parametarskom obliku, mogu se x, y, z shvatiti kao skalarne komponente jednog vektora, pa se može pisati

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}.$$

Krajnje tačke radijvektora prolaze zadanom plohom kad se mijenjaju vrijednosti u i v unutar nekog područja P.

Ako u gornjim jednadžbama za x, y i z uzmemo da je $v = v_0$, tj. da je v jednak jednoj određenoj vrijednosti, te jednadžbe prelaze u oblik

$$x = x(u, v_0), \qquad y = y(u, v_0), \qquad z = z(u, v_0).$$

Kako je u tim izrazima v_0 konstanta, x, y, z funkcije su samo parametra u. Prema tome te formule predstavljaju prostornu krivulju koja se u cijelosti nalazi na našoj plohi. Tu krivulju zvat ćemo *u-krivuljom.*

Kako imamo mogućnost uvrštavati za v različne vrijednosti v_0, v_1, v_2 itd., na taj način dobivamo jednoparametarsku *porodicu u-krivulja.* Analogno možemo, ako uzmemo da je $u = u_0$ dobiti

$$x = x(u_0, v), \qquad y = y(u_0, v), \qquad z = z(u_0, v).$$

Na taj način dobivamo *v-krivulju*, a sa različnim vrijednostima u_0, u_1, u_2 itd. *porodicu v-krivulja.* Te u-krivulje i v-krivulje zovu se također *koordinatne* ili *parametarske krivulje.*

Ako jednu u-krivulju uzmemo kao jednu koordinatnu os a jednu v-krivulju kao drugu koordinatnu os, dobivamo na plohi koordinatni sistem uz pomoć u-krivulja i v-krivulja.

Ako imamo na plohi bilo kakvu krivulju, možemo je predočiti uz pomoć navedenog koordinatnog sistema jednadžbom

$$f(u, v) = 0 \quad \text{ili} \quad v = v(u),$$

ili jednadžbama $u = u(t)$ i $v = v(t)$.

Ako za kuglu predočenu sfernim koordinatama uzmemo $\varphi = \varphi_0$, dobit ćemo ϑ-krivulje:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi_0, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi_0, \quad z = r\cos\vartheta,$$

koje nisu ništa drugo nego meridijani na kugli. Ako u parametarskim jednadžbama uzmemo $\vartheta = \vartheta_0$, dobit ćemo

$$x = r\sin\vartheta_0\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta_0\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta_0;$$

te su φ-krivulje paralele na kugli.

Tangencijalna ravnina. Ako je krivulja na plohi zadana parametarski, tj. jednadžbama $u = u(t)$, $v = v(t)$, onda će radijvektor te krivulje biti dan jednadžbom

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,[u(t), v(t)].$$

Ako želimo taj radijvektor derivirati po t, postupamo po formuli:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}_u\cdot\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\cdot\frac{dv}{dt}.$$

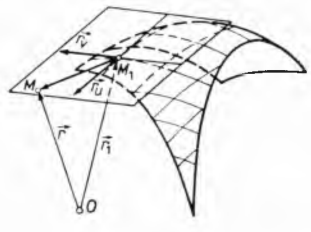
Veličine $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ određuju smjerove tangenata na u-krivulje odnosno v-krivulje u dotičnoj tački. Prema tome $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ imaju smjer tangenata na u-krivulju odnosno v-krivulju.

Jednom tačkom plohe (npr. M, sl. 32) ide neizmjerno mnogo prostornih krivulja koje leže na toj plohi i svaka prostorna krivulja ima u toj tački tangentu čiji je smjer određen gornjom formulom za tangentu. Sve te tangente zajedno čine *tangencijalnu* *ravninu* na tu plohu. Jednadžba te tangencijalne ravnine dobiva se na ovaj način. Iz sl. 32 razabire se da svaka tačka tangencijalne ravnine leži na nekoj tangenti kroz tačku M_1. Prema tome je za tačku M na tangencijalnoj ravnini

$$\overrightarrow{M_1 M} = \lambda_1 \cdot \vec{r}_u + \lambda_2 \cdot \vec{r}_v,$$

a odavde

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{r}_u + \lambda_2 \vec{r}_v.$$



Sl. 32

$\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ moraju biti linearno nezavisni tj. $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \neq 0$, jer kad bi $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ bilo jednako 0, to bi značilo da su $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ u pravcu, a to ne može da bude.

Vektorski produkt $r_u \times r_v$ jednak je

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

To je vektor okomit na tangencijalnu ravninu. Prema tome je

$$(\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0,$$

a odavde dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

kao *jednadžbu tangencijalne ravnine* u jednoj tački plohe. To se može pisati i ovako

$$\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]_1 (x - x_1) + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]_1 (y - y_1) + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]_1 (z - z_1) = 0.$$

Ako je ploha zadana u obliku $f(x, y, z) = 0$, onda jednadžba tangencijalne ravnine glasi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0.$$

Normala na plohu određena je (po smjeru) vektorskim produktom $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Jedinični vektor normale na plohu bit će prema tome

$$\vec{N}^\circ = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

Vektorska jednadžba normale na plohu glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_u \times \vec{r}_v).$$

Odavde dobivamo *jednadžbe normale na plohu*

$$\frac{x - x_1}{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)_x} = \frac{y - y_1}{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)_y} = \frac{z - z_1}{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)_z}.$$

Ako je ploha zadana u obliku $f(x, y, z) = 0$, imamo za jednadžbe normale na plohu oblik

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1}.$$

Prva osnovna diferencijalna forma plohe. Ako imamo na plohi krivulju koja je zadana jednadžbama $u = u(t)$, $v = v(t)$, onda je *derivacija radijvektora* bilo koje tačke na toj krivulji

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{r}_u \cdot \dot{u} + \vec{r}_v \cdot \dot{v}.$$

Tu $\dot{u}$ i $\dot{v}$ znače derivacije po parametru t. Ako ovaj izraz kvadriramo, dobit ćemo:

$$\dot{\vec{r}}^2(t) = \vec{r}_u^{\,2} \cdot \dot{u}^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \dot{u}\dot{v} + \vec{r}_v^{\,2} \cdot \dot{v}^2,$$

$$\dot{\vec{r}}^2(t) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2, \text{ jer je } |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s.$$

Uvedimo sada ove oznake:

$$\vec{r}_u^{\,2} = |\vec{r}_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = E,$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = F,$$

$$\vec{r}_v^{\,2} = |\vec{r}_v|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = G.$$

Odavde dobivamo

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Ako ovu jednadžbu pomnožimo sa $\mathrm{d}t^2$, dobivamo

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2,$$

formulu koja nam daje mogućnost da izračunamo diferencijal dužine luka bilo koje krivulje na nekoj plohi. Desna strana ove formule zove se također *prva osnovna diferencijalna forma plohe.* Za različne plohe ta će forma dobiti svoje naročite oblike.

Npr. za ravninu x, y prva osnovna diferencijalna forma glasi

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Ta jednadžba odgovara prethodnoj sa $x = u$, $y = v$, $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Za kuglu koja je predočena sfernim koordinatama prva osnovna diferencijalna forma će glasiti

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\psi^2$$

Ovdje je $\vartheta = u$, $\psi = v$, $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2 \sin^2\vartheta$.

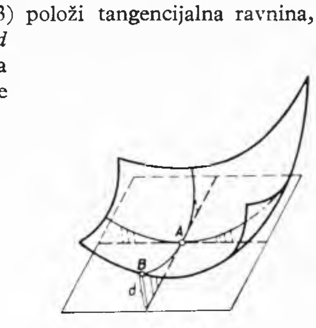
S time u vezi može se primijetiti da je $F = 0$ ako su koordinatne krivulje na plohi međusobno okomite. To vidimo npr. i u slučaju ravnine x, y i u slučaju kugle.

U prvoj osnovnoj diferencijalnoj formi sadržana su dakle karakteristična svojstva ploha. Ako dvije različite plohe imaju istu diferencijalnu formu, one se mogu razviti jedna u drugu. Npr. prve osnovne diferencijalne forme valjka i ravnine su jednake, pa stoga možemo sliku na valjku razviti u ravninu. Razvijanje jedne plohe u drugu zovemo također *izometrijskim preslikavanjem,* jer se u tom slučaju preslikavaju dužine pojedinih likova u istoj veličini.

Geometrija na plohi promatra unutarnja svojstva plohe, koja ovise samo o metričkim odnosima na samoj plohi, a ne o metričkim odnosima prostora u kome se ploha nalazi. Takva unutarnja svojstva dana su upravo prvom osnovnom diferencijalnom formom.

Druga osnovna diferencijalna forma plohe. Ako se u jednoj tački neke plohe (A, sl. 33) položi tangencijalna ravnina, može se pokazati da je udaljenost d neke druge, susjedne tačke (B) na plohi od te tangencijalne ravnine približno jednaka

$$d \approx \tfrac{1}{2}[\vec{N}^\circ \vec{r}_{uu} \cdot \mathrm{d}u^2 + 2\vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \vec{N}^\circ \vec{r}_{vv}\,\mathrm{d}v^2].$$



Sl. 33

Uvedemo li kratice

$$\vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_{uu} = L, \quad \vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_{uv} = M,$$

$$\vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_{vv} = N,$$

dobivamo

$$d = \tfrac{1}{2}(L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2).$$

Izraz u zagradi zove se *druga osnovna diferencijalna forma plohe.*

Možemo pisati

$$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = $$
$$= \frac{1}{L}[(L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v)^2 + (LN - M^2)\,\mathrm{d}v^2].$$

Izraz u okrugloj zagradi, $LN - M^2$, zove se *diskriminanta D*:

$$D = L N - M^2.$$

Diskusija jednadžbe za drugu diferencijalnu formu pokazuje ovo:

1. Ako je $D > 0$, izraz je u uglatoj zagradi pozitivan, a predznak diferencijalne forme zavisi samo od L, tj. ako je $L > 0$, forma je pozitivna, ako je $L < 0$, forma je negativna. Mi velimo da je forma *pozitivno definitna* ako je $D > 0$ i $L > 0$. U tom slučaju poprima naime forma za sve realne vrijednosti od $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ koje su različite od nule vrijednosti koje su veće od 0. Ako je $D > 0$ a $L < 0$, velimo da je forma *negativno definitna*. Ona poprima za sve realne vrijednosti od $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ koje su različite od nule vrijednosti manje od nule, bez obzira na to gdje smo odabrali susjednu tačku. Da bi se shvatilo značenje tog rezultata, treba se sjetiti kako smo došli do druge diferencijalne forme. Imali smo tačku na plohi, uzeli smo u susjedstvu te tačke drugu tačku i potražili smo njezinu udaljenost od tangencijalne ravnine. Položaj te druge tačke određen je veličinom diferencijalâ $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$. Ako je forma pozitivno definitna, to znači da će udaljenost svake tačke u susjedstvu naše prvotne tačke imati pozitivnu udaljenost od tangencijalne ravnine, a ako je forma negativno definitna, da će sve tačke imati negativnu udaljenost. U jednom i drugom slučaju sve se tačke u okolišu prvotne tačke nalaze na istoj strani tangencijalne ravnine. Tačke na plohi koje imaju to svojstvo zovu se ***eliptične tačke***, a za plohu velimo da je u toj tački ***pozitivno zakrivljena***. Takve su primjerice sve tačke na kugli, na elipsoidu, na dvokrilnom hiperboloidu i na eliptičkom paraboloidu.

Ako je u gore označenoj drugoj osnovnoj diferencijalnoj formi $D < 0$, izraz u zagradi može biti pozitivan ili negativan, već prema tome kako odaberemo $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$. Takva forma zove se zbog toga *indefinitna*, i to znači da se tačke u susjedstvu naše prvotne tačke mogu, već prema tome kako odaberemo $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$, nalaziti ispod ili iznad tangencijalne ravnine. Takve tačke u čijem se susjedstvu pojedine tačke mogu nalaziti ispod ili iznad tangencijalne ravnine zovu se *hiperbolne tačke*, a za plohu velimo da je u takvoj tački ***negativno zakrivljena***. Takve se tačke nalaze primjerice na hiperbolnom paraboloidu i jednokrilnom hiperboloidu.

Treći slučaj koji može nastati jest da je $D = 0$. U tom slučaju izraz u uglatoj zagradi može postati jednak nuli ako je

$$(L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v)^2 = 0,$$

inače je izraz u uglatoj zagradi pozitivan. Mi zovemo takvu formu *semidefinitnom*; ona može biti ili $\geqq 0$ ako je $L > 0$, ili $\leqq 0$ ako je $L < 0$.

Razlika je između semidefinitne forme i definitne forme što semidefinitna forma može poprimiti i vrijednost nula. Kad je forma definitna, sve se tačke u susjedstvu prvotne tačke — kako smo vidjeli — nalaze ili ispod ili iznad tangencijalne ravnine. Kad je forma semidefinitna, nalaze se osim toga neke tačke upravo na tangencijalnoj ravnini. Takve tačke u čijem se susjedstvu mogu nalaziti tačke koje su sve s iste strane tangencijalne ravnine ili na samoj tangencijalnoj ravnini zovu se ***parabolne tačke***, a za plohu velimo da joj je u toj tački ***zakrivljenost nula***.

Ravnina ima, primjerice, sve tačke parabolne, odnosno, zakrivljenost joj je u svim tačkama jednaka nuli. Tako je i na izvodnicama valjka.

Zakrivljenost ploha mjeri se tako da se mjeri zakrivljenost prostorne krivulje na samoj plohi. Ploha neka je zadana jednadžbama

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Na toj plohi neka se nalazi krivulja sa jednadžbom

$$u = u(t), \qquad v = v(t).$$

Za jedinični vektor tangente na tu krivulju imamo formulu

$$\vec{r}' = \vec{t}^\circ = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'.$$

Nadalje je

$$\vec{r}'' = \frac{\mathrm{d}\vec{t}^\circ}{\mathrm{d}s} = \vec{r}_{uu} \cdot u'^2 + 2\,\vec{r}_{uv}\, u'\, v' + \vec{r}_{vv} \cdot v'^2 + \vec{r}_u \cdot u'' + \vec{r}_v \cdot v''.$$

Ako ovu posljednju jednadžbu pomnožimo sa $\vec{N}^\circ$, dobivamo

$$\vec{r}'' \cdot \vec{N}^\circ = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}^\circ \cdot u'^2 + 2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}^\circ \cdot u'\, v' + \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}^\circ \cdot v'^2 + \\ + \vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_u \cdot u'' + \vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_v \cdot v''.$$

Kako je $\vec{N}^\circ$ normala na plohu, pa je prema tome okomita kako na $\vec{r}_u$ tako i na $\vec{r}_v$, to je

$$\vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_u = 0 \qquad \text{i} \qquad \vec{N}^\circ \cdot \vec{r}_v = 0.$$

Primijenivši oznake

$$\vec{N}^\circ \vec{r}_{uu} = L, \qquad \vec{N}^\circ \vec{r}_{uv} = M, \qquad \vec{N}^\circ \vec{r}_{vv} = N$$

dobivamo

$$\vec{r}'' \cdot \vec{N}^\circ = L\,u'^2 + 2\,M\,u'\,v' + N\,v'^2.$$

Nadalje je

$$\vec{r}'' = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}^\circ.$$

U ovoj formuli znači R polumjer zakrivljenosti dotične prostorne krivulje na plohi, a $\vec{n}^\circ$ je glavna normala te iste krivulje. Ako izraz za $\vec{r}''$ uvrstimo u prethodnu formulu, dobivamo

$$\frac{1}{R}\vec{n}^\circ \cdot \vec{N}^\circ = L\,u'^2 + 2\,M\,u'\,v' + N\,v'^2,$$

odnosno, ako pišemo mjesto u' i v'

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \qquad \text{i} \qquad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{1}{R}\vec{n}^\circ \cdot \vec{N}^\circ = \frac{L\,\dot{u}^2 + 2\,M\,\dot{u}\,\dot{v} + N\dot{v}^2}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2},$$

i konačno dobivamo

$$\frac{1}{R} \cdot \vec{n}^\circ \cdot \vec{N}^\circ = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2\,M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}.$$

Ako nazovemo ϑ kut što ga čine $\vec{n}^\circ$ i $\vec{N}^\circ$, gornja formula prelazi u ovaj konačni oblik:

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2\,M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}.$$

To je formula s pomoću koje se izračunava zakrivljenost svake prostorne krivulje na plohi, a time ujedno i zakrivljenost same plohe.

Da pojednostavnimo stvar, položit ćemo kroz normalu plohe bilo kakvu ravninu. Ta ravnina siječe našu plohu u krivulji čija glavna normala leži u istom pravcu s normalom plohe, tako da je ϑ jednako ili nula ili π. Ako je polumjer zakrivljenosti te krivulje R_n, onda je, u slučaju da je $\vartheta = 0$, zakrivljenost $1/R_n$, pa je

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2\,M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2}.$$

$1/R_n$ se zove *zakrivljenost normalnog presjeka*. Taj normalni presjek ima tangentu u dotičnoj tački plohe. Ako kroz tu tangentu položimo bilo koju drugu ravninu koja ne prolazi normalom plohe, dobit ćemo razne krivulje koje će sve imati

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{1}{R_n}$$

jer se za te krivulje ne mijenja desna strana formule. Odavde slijedi

$$R = R_n \cos\vartheta \qquad (\textit{Meusnierov teorem}).$$

Iz prethodne formule za $1/R_n$ razabiremo ujedno da je na desnoj strani kvocijent druge osnovne diferencijalne forme sa prvom osnovnom diferencijalnom formom. Nazivnik u toj formuli je dakle $\mathrm{d}s^2$, tj. pozitivna veličina, pa predznak od $1/R_n$ zavisi samo od predznaka brojnika. Ako je druga osnovna diferencijalna forma definitna, tj. ako je

$$D = L\,N - M^2 > 0$$

ima $1/R_n$ za sve vrijednosti $\mathrm{d}u$ i $\mathrm{d}v$ isti predznak, a to znači, da $1/R_n$ ima isti predznak bez obzira na to kako smo načinili normalni presjek. Velimo u tom slučaju da je ploha u toj tački *pozitivno zakrivljena*, iako će sama zakrivljenost imati negativnu vrijednost ako je $L < 0$. Ako je forma indefinitna, tj. $D < 0$, $1/R_n$ nema uvijek isti predznak, već zavisi od toga u kojem smjeru ćemo plohu normalno presjeći. U tom slučaju velimo da je ploha u toj tački *negativno zakrivljena*. Ako je $D = 0$, $1/R_n$ može poprimiti ili vrijednosti istog predznaka ili vrijednost nula. Ploha ima u toj tački *zakrivljenost nula*.

Vrijednost od $1/R_n$ u jednoj tački zavisi od vrijednosti du i dv. Postavlja se pitanje za koje vrijednosti od du i dv će $1/R_n$ poprimiti ekstremne vrijednosti. Može se na osnovu računa ekstremnih vrijednosti lako pokazati da se ekstremne vrijednosti za R_n mogu dobiti iz jednadžbe

$$(EG - F^2)\left(\frac{1}{R_n}\right)^2 - (EN - 2FM + GL)\frac{1}{R_n} + (LN - M^2) = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba daje dva rješenja $1/R_1$ i $1/R_2$ i to su *glavne zakrivljenosti* plohe u tački (u,v).

Definiramo kao *srednju zakrivljenost* plohe

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Nadalje definiramo *Gaussovu mjeru zakrivljenosti*

$$K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{D}{W}.$$

Vidjeli smo da su $1/R_1$ i $1/R_2$ glavne zakrivljenosti, koje dobivamo, prema tome, ako normalne presjeke (tj. presjeke kroz normalu plohe) položimo u naročita dva smjera za koje se može pokazati da su jedan na drugom okomita. Ti smjerovi zovu se *glavni smjerovi*, a krivulje na plohi koje dira jedan od tih glavnih smjerova zovu se ***krivulje zakrivljenosti***. Svakom tačkom plohe prolaze dakle dvije krivulje zakrivljenosti koje se sijeku pod pravim kutom. Krivulje zakrivljenosti zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 (MG - NF) + \frac{dv}{du}(GL - EN) + (LF - ME) = 0.$$

Za zakrivljenost bilo kojeg normalnog presjeka vrijedi *Eulerov teorem* koji glasi

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha,$$

pri čemu je α kut između tangente dotičnog normalnog presjeka plohe i tangente na prvu krivulju zakrivljenosti.

Geodetske krivulje su sve krivulje na plohi kojima glavna normala u svakoj tački krivulje pada u normalu na plohu. *Najkraća spojnica* dviju tačaka na plohi je uvijek geodetska krivulja. Diferencijalna jednadžba geodetske krivulje dobiva se iz pretpostavke da glavna normala pada u smjer normale na plohi, a kako je normala na plohu okomita na tangenti i podudara se s glavnom normalom, to se u takvom slučaju normala na plohu nalazi u ravnini oskulacije. Odavde slijedi vektorska jednadžba:

$$\vec{N}^\circ \cdot (\vec{t}^\circ \times \vec{n}^\circ) = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Ova determinanta može se svesti na oblik

$$\begin{vmatrix} E + Fv' & Fv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}v' + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)v'^2 \\ F + Gv' & Gv'' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}v' + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$v'' = Av'^3 + Bv'^2 + Cv' + D,$$

gdje su A, B, C i D funkcije od u i v. Tako se može pokazati da su geodetske krivulje na kugli glavni krugovi, geodetske krivulje u ravnini pravci itd.

U vezi s geodetskim krivuljama je i pojam *geodetske zakrivljenosti*. Geodetska zakrivljenost definirana je formulom:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin\vartheta}{R},$$

gdje je R polumjer zakrivljenosti bilo koje krivulje na plohi, a ϑ kut što ga čini glavna normala te krivulje s normalom plohe.

Geodetske krivulje, jer im glavna normala pada u normalu plohe, imaju $\vartheta = 0$, i prema tome

$$\frac{1}{R_g} = 0.$$

Geodetske krivulje su prema tome krivulje koje imaju geodetsku zakrivljenost 0.

Asimptotske krivulje. Ako glavna normala krivulje normalnog presjeka čini s normalom na plohu kut od $\pi/2$, ravnina oskulacije te krivulje leži u tangencijalnoj ravnini na tu plohu. Polumjer je zakrivljenosti te krivulje

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos\vartheta}{R},$$

pa kako je $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, imamo za te krivulje

$$\frac{1}{R_n} = 0.$$

Na taj način definiran je smjer tako zvanog *asimptotskog pravca*. *Asimptotska krivulja* je takva krivulja na plohi koja u svakoj tački ima za tangentu asimptotski pravac.

Kako imamo za asimptotske krivulje uvjet da je

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = 0,$$

to je u tom slučaju druga osnovna diferencijalna forma jednaka nuli, tj.

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

odnosno,

$$N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2M\frac{dv}{du} + L = 0$$

je diferencijalna jednadžba asimptotske krivulje.

PRESLIKAVANJE DVIJU PLOHA

Ako su zadane dvije plohe

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_1(u_1, v_1),$$

možemo izvršiti *preslikavanje* tih ploha jedne na drugu time što svakoj tački $T(u,v)$ prve plohe pridružimo jednu tačku $T_1(u_1, v_1)$ druge plohe tako da su pri tom koordinate u_1, v_1 tačke T_1 određene koordinatama u, v tačke T na osnovu jednadžbi

$$u_1 = \varphi(u,v), \quad v_1 = \psi(u,v).$$

Funkcije φ i ψ, koje određuju to preslikavanje ploha, moraju zadovoljavati ovim uvjetima: moraju biti jednoznačne, neprekidne i derivabilne, i osim toga mora biti funkcionalna determinanta

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

U tom slučaju vrijedi naime i obrnuto preslikavanje, tj. takvo da svakoj tački (u_1, v_1) pripada tačka (u,v).

Na taj način možemo jednu krivulju sa prve plohe preslikati na drugu plohu i tamo dobiti neku drugu krivulju.

Neka za prvu plohu prva osnovna diferencijalna forma glasi

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

a za drugu plohu

$$ds_1^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2.$$

Pri tom su E, F, G funkcije od u i v, a E_1, F_1, G_1 su funkcije od u_1 i v_1. Ako sad pišemo

$$u_1 = \varphi(u,v), \quad v_1 = \psi(u,v),$$

dobivamo

$$ds_1^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\,\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2,$$

gdje su sada $\overline{E}$, $\overline{F}$ i $\overline{G}$ funkcije od u i v.

Od koeficijenata prve osnovne diferencijalne forme koju dobivamo na taj način za drugu plohu zavise različne mogućnosti preslikavanja. Ovdje ćemo promatrati tri vrste preslikavanja: *izometrijsko preslikavanje*, tj. preslikavanje uz održanje dužina; *konformno preslikavanje*, tj. preslikavanje uz održanje kutova i *ekviarealno preslikavanje*, tj. preslikavanje uz održanje površine.

Izometrijsko preslikavanje. Kao što smo gore spomenuli, takvo preslikavanje postoji ako pri preslikavanju ostaje održana duljina svakog elementa luka. Ako je za prvu plohu

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

a za drugu plohu

$$ds_1^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\,\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2,$$

preslikavanje je samo onda izometrijsko, ako je za svako u i v i za svako du i dv u svakoj tački i u svakom smjeru

$$ds^2 = ds_1^2.$$

Ali to je moguće samo tako da je

$$E = \overline{E}, \qquad F = \overline{F}, \qquad G = \overline{G}.$$

Prema tome plohe kojima prve diferencijalne forme imaju to svojstvo mogu se izometrijski preslikati, tj. jedna u drugu razviti.

Tako se može pokazati za valjak, ako ima jednadžbu

$$x = u, \qquad y = \sin v, \qquad z = 1 - \cos v,$$

da je

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

a tačno istom diferencijalnom formom predočena je i dužina luka u ravnini ako uzmemo

$$x = u, \quad y = v.$$

Odavde slijedi da se valjak može na ravninu izometrijski preslikati.

Konformno preslikavanje. Pretpostavimo opet

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$ds_1^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\,\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2.$$

Uzmimo da su veličine E, F, G proporcionalne veličinama $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, što znači da je

$$\overline{E} = \lambda^2(u,v)\cdot E, \quad \overline{F} = \lambda^2(u,v)\cdot F, \quad \overline{G} = \lambda^2(u,v)\cdot G.$$

Odavde dobivamo da je

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \lambda^2(u,v).$$

U ovakvom slučaju su dakle diferencijali luka na objema plohama razmjerni, bez obzira na to u kojem smjeru smo ih uzeli.

Ako imamo na prvoj plohi dvije krivulje

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t), \qquad \vec{r} = \vec{r}_2(t),$$

kut što ga čine ove dvije krivulje, tj. njihove tangente, jednak je

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{|\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2|}.$$

Iz te formule slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{E\,\dot{u}_1\,\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\,\dot{v}_2 + \dot{u}_2\,\dot{v}_1) + G\,\dot{v}_1\,\dot{v}_2}{\sqrt{E\,\dot{u}_1^2 + 2\,F\,\dot{u}_1\,\dot{v}_1 + G\,\dot{v}_1^2}\cdot\sqrt{E\,\dot{u}_2^2 + 2\,F\,\dot{u}_2\,\dot{v}_2 + G\,\dot{v}_2^2}}$$

Ako u ovoj formuli pomnožimo brojnik i nazivnik sa $\lambda^2(u,v)$, dobijemo

$$\cos\alpha = \frac{\overline{E}\,\dot{u}_1\,\dot{u}_2 + \overline{F}(\dot{u}_1\,\dot{v}_2 + \dot{u}_2\,\dot{v}_1) + \overline{G}\,\dot{v}_1\,\dot{v}_2}{\sqrt{\overline{E}\,\dot{u}_1^2 + 2\,\overline{F}\,\dot{u}_1\,\dot{v}_1 + \overline{G}\,\dot{v}_1^2}\cdot\sqrt{\overline{E}\,\dot{u}_2^2 + 2\,\overline{F}\,\dot{u}_2\,\dot{v}_2 + \overline{G}\,\dot{v}_2^2}}$$

Izraz na desnoj strani nije ništa drugo nego kosinus kuta što ga čine preslikane krivulje na drugoj plohi, tj. $\cos\alpha_1$. Imamo dakle

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1$$

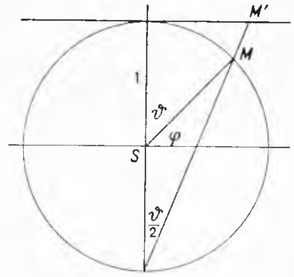
ili

$$\alpha = \alpha_1.$$

Dobili smo, dakle, ovaj značajan rezultat: ako je

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \lambda^2(u,v),$$

kutovi što čine dvije krivulje na prvoj plohi ostaju pri preslikavanju sačuvani. Takvo preslikavanje zove se *konformno*. Pri tome se stranice malog trokuta preslikavaju razmjerno, a kutovi mu ostaju održani.



Sl. 34

Primjer konformnog preslikavanja je *stereografska projekcija* (sl. 34). Pri toj projekciji preslikavaju se tačke s kugle polumjera 1 na tangencijalnu ravninu koja ide sjevernim polom kugle. Ako je kugla predočena sfernim koordinatama, prva će diferencijalna forma glasiti:

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\psi^2.$$

Preslikat ćemo bilo koju tačku kugle na ravninu tako da ćemo tu tačku spojiti s južnim polom i dobiveni pravac produžiti do tangencijalne ravnine. Za tačku u tangencijalnoj ravnini vrijedi

$$ds_1^2 = dr^2 + r^2\,d\psi^2$$

ako smo uzeli polarni koordinatni sistem u ravnini. Samo preslikavanje izvršeno je, kako se iz slike vidi, na osnovu jednadžbe

$$r = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2},$$

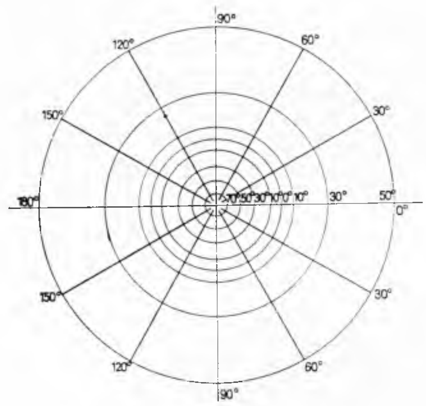
pa ovo uvršteno u jednadžbu za ds_1^2 daje

$$ds_1^2 = \frac{d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\psi^2}{\cos^4\frac{\vartheta}{2}}.$$

Imamo, prema tome,

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{1}{\cos^4\frac{\vartheta}{2}}.$$

Vidimo da je kvocijent ds_1^2/ds^2 zavisan samo od u i v, tj. u našem slučaju samo od ϑ, pa je ovdje ispunjen uvjet konformnog preslikavanja. Vidimo, npr., da se svi meridijani preslikavaju kao pravci koji idu iz ishodišta, a sve paralele

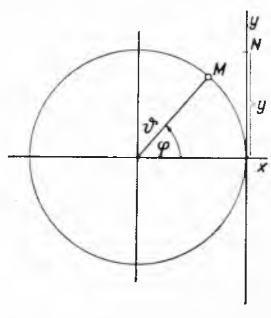


Sl. 35

kao koncentrične kružnice oko ishodišta (sl. 35), i kao što meridijani sijeku paralelne kružnice pod pravim kutom, tako i pravci iz ishodišta sijeku koncentrične kružnice pod pravim kutom.

Drugi primjer za konformno preslikavanje je *Mercatorova projekcija*. U njoj se projiciraju tačke s kugle na valjak koji je omotan oko kugle. Ako se kugla i valjak projiciraju na ravninu koja ide središtem kugle paralelno s izvodnicama valjka, dobiva se sl. 36. Pretpostavimo da kugla ima polumjer 1. Tačka M na kugli, s geografskom širinom φ, projicira se na valjak u tački N, koja ima ordinatu

$$y = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$



Sl. 36

Diferencijal luka na kugli jest

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\psi^2,$$

odnosno, budući da je $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\,d\psi^2.$$

Diferencijal luka na valjku je

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2.$$

Ako se plašt valjka odmota u ravninu, bit će $x = \psi$, pa je ujedno $dx = d\psi$

Kako je, nadalje,

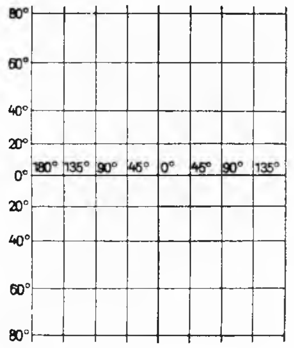
$$y = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

bit će

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}.$$

Meridijani se preslikavaju kao pravci paralelni sa osi y a paralele kao pravci paralelni sa osi x (sl. 37).



Sl. 37

Pri tom se meridijani nalaze unutar granica $-\pi$ do $+\pi$ a paralele u granicama od $-\infty$ do $+\infty$. Jedni su pravci na drugima okomiti.

Krivulja na kugli koja ima jednadžbu

$$\psi = \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) + a$$

zove se *loksodroma*. Ako se ta krivulja preslika na valjak s pomoću Mercatorove projekcije, dobiva se:

$$x = \operatorname{tg}\alpha \cdot y + a.$$

Vidimo odavde da se loksodroma preslikava u Mercatorovoj projekciji u pravac koji siječe sve pravce paralelne sa osi y pod istim kutom. Loksodroma je, prema tome, krivulja koja sve meridijane na kugli siječe pod istim kutom.

Ekviarealno preslikavanje je preslikavanje uz održanje površina. Kako je elemenat površine jednak

$$\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}A_1 = \sqrt{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

to će biti $\mathrm{d}A = \mathrm{d}A_1$ ako je

$$EG - F^2 = \overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2.$$

To je dakle uvjet za ekviarealno preslikavanje.

Prema tome je

$$\mathrm{d}s_1^2 = \mathrm{d}\psi^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2 = \frac{\mathrm{d}\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\psi^2}{\cos^2\varphi}.$$

Odavde je

$$\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Vidimo da je $\mathrm{d}s_1^2/\mathrm{d}s^2$ funkcija samo kuta φ i prema tome je i u ovom slučaju preslikavanje konformno.

Specijalan je slučaj ako su koordinatne osi jedna na drugoj okomite, jer je u tom slučaju

$$F = 0 \quad \text{i} \quad \overline{F} = 0$$

pa je

$$EG = \overline{E}\,\overline{G}$$

uvjet ekviarealnosti preslikavanja u takvom slučaju.

Primjer. Tačku M (sl. 38) projiciramo s kugle na valjak tako da povučemo kroz M pravac okomit na os y. Ordinata projekcije N je onda $y = \sin\varphi$, a $\mathrm{d}y = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Prema tome je

$$\mathrm{d}s_1^2 = \mathrm{d}\psi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi^2.$$

Imali smo

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\psi^2,$$

dakle je $E = 1$, $G = \cos^2\varphi$, $F = 0$.

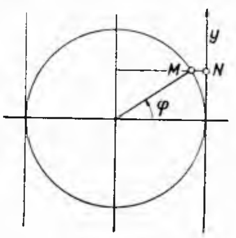
Kako je

$$\mathrm{d}s_1^2 = \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\psi^2,$$

slijedi da je $\overline{E} = \cos^2\varphi$, $\overline{G} = 1$, $\overline{F} = 0$, te je

$$EG - F^2 = \overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = \cos^2\varphi.$$

Prema tome je u tom slučaju preslikavanje ekviarealno.



Sl. 38

LIT.: *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Berlin 1930. — *R. Kašanin*, Viša matematika, Beograd 1949. — *D. Struik*, Differential geometry, Cambridge, Mass. 1950. — *L. P. Ajzenhart*, Uvod u diferencijalnu geomeriju (prevod s engleskoga), Beograd 1951. — *Ž. Marković*, Uvod u višu analizu, Zagreb 1956. — *А. П. Норден*, Краткий курс дифференциальной геометрии, Москва 1958.

V. Vranić

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE, OBIČNE. Diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj dolaze, osim nezavisnih varijabli i funkcija tih varijabli, također derivacije tih funkcija. Riješiti (integrirati) diferencijalnu jednadžbu znači naći funkcije koje tu jednadžbu zadovoljavaju.

Diferencijalne jednadžbe od velike su važnosti u prirodnim i tehničkim naukama. Prirodni zakon može se shvatiti kao nužna veza između sadanjeg stanja jedne pojave i stanja neposredno nakon toga. Takav zakon predočuje se diferencijalnom jednadžbom, tj. veza fizikalnih veličina i njihovih promjena u prostoru i vremenu data je diferencijalnom jednadžbom, pri čemu se kao mjera tih promjena pojavljuju diferencijalni kvocijenti. Kad treba primijeniti takav prirodni zakon na neku specijalnu pojavu, diferencijalna jednadžba koja ga prikazuje integrira se uz poznate početne, odn. rubne uvjete, pa se dobiva jednadžba koja povezuje varijable razmatrane pojave.

Diferencijalne jednadžbe dijele se u *obične* i *parcijalne*. Diferencijalna jednadžba je obična ako u nju ulaze derivacije funkcija po nezavisnoj varijabli do nekog zadanog reda, ona je parcijalna ako sadrži parcijalne derivacije po nezavisnim varijablama do nekog zadanog reda. Parcijalne diferencijalne jednadžbe predmet su narednog članka u ovoj enciklopediji (str. 273), u ovome članku obradit će se stoga samo obične diferencijalne jednadžbe.

Red, stepen i rješenja diferencijalne jednadžbe. Red diferencijalne jednadžbe jednak je redu najviše derivacije koja u njoj dolazi. Ako je diferencijalna jednadžba predočena kao polinom u derivacijama, stepen diferencijalne jednadžbe jednak je eksponentu najviše derivacije. Diferencijalna jednadžba je linearna ako su u njoj i funkcija i njene derivacije u prvom stepenu.

Do diferencijalne jednadžbe dolazi se matematički kad se želi karakterizirati porodica krivuljâ koje se među sobom razlikuju parametrima $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Neka je, npr., porodica krivuljâ zadana jednadžbom

$$F(x, y, C) = 0. \tag{1}$$

Parametar C može poprimiti bilo koju vrijednost, teoretski njih neizmjerno mnogo. Ako se jednadžba (1) derivira po x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' = 0, \tag{2}$$

pa iz (1) i (2) eliminira C, dobiva se diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y') = 0,$$

koja prikazuje zajedničko svojstvo svih krivulja određenih jednadžbom (1).

Ako razmatramo porodicu krivulja koja je obilježena dvama parametrima, mora se jednadžba te porodice krivulja dva puta uzastopce derivirati po x, da bi se mogli eliminirati parametri C_1 i C_2. Ako takva porodica krivulja ima jednadžbu

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{3}$$

deriviranjem se dobiva

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\,y'' = 0. \tag{5}$$

Ako se iz (3), (4) i (5) eliminiraju C_1 i C_2, dobiva se diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

za obitelj krivulja određenih jednadžbom (3).

Posve analogno pripadat će jednadžbi

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Obrnuto, svaka diferencijalna jednadžba n-tog reda ima rješenje: