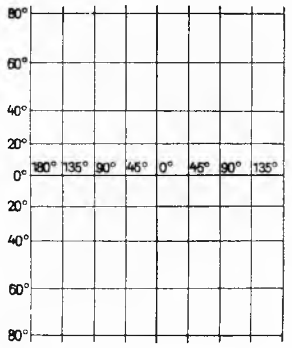
bit će

$$dy = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Meridijani se preslikavaju kao pravci paralelni sa osi y a paralele kao pravci paralelni sa osi x (sl. 37).



Sl. 37

Pri tom se meridijani nalaze unutar granica $-\pi$ do $+\pi$ a paralele u granicama od $-\infty$ do $+\infty$. Jedni su pravci na drugima okomiti.

Krivulja na kugli koja ima jednadžbu

$$\psi = \operatorname{tg}\alpha \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) + a$$

zove se *loksodroma*. Ako se ta krivulja preslika na valjak s pomoću Mercatorove projekcije, dobiva se:

$$x = \operatorname{tg}\alpha \cdot y + a.$$

Vidimo odavde da se loksodroma preslikava u Mercatorovoj projekciji u pravac koji siječe sve pravce paralelne sa osi y pod istim kutom. Loksodroma je, prema tome, krivulja koja sve meridijane na kugli siječe pod istim kutom.

Ekviarealno preslikavanje je preslikavanje uz održanje površina. Kako je elemenat površine jednak

$$dA = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \quad dA_1 = \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,du\,dv,$$

to će biti $dA = dA_1$ ako je

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2.$$

To je dakle uvjet za ekviarealno preslikavanje.

Prema tome je

$$ds_1^2 = d\psi^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi^2 = \frac{d\varphi^2 + \cos^2\varphi\,d\psi^2}{\cos^2\varphi}.$$

Odavde je

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Vidimo da je ds_1^2/ds^2 funkcija samo kuta φ i prema tome je i u ovom slučaju preslikavanje konformno.

Specijalan je slučaj ako su koordinatne osi jedna na drugoj okomite, jer je u tom slučaju

$$F = 0 \quad \text{i} \quad \bar{F} = 0$$

pa je

$$EG = \bar{E}\bar{G}$$

uvjet ekviarealnosti preslikavanja u takvom slučaju.

Primjer. Tačku M (sl. 38) projiciramo s kugle na valjak tako da povučemo kroz M pravac okomit na os y. Ordinata projekcije N je onda $y = \sin\varphi$, a $dy = \cos\varphi\,d\varphi$. Prema tome je

$$ds_1^2 = d\psi^2 + \cos^2\varphi\,d\varphi^2.$$

Imali smo

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\,d\psi^2,$$

dakle je $E = 1$, $G = \cos^2\varphi$, $F = 0$.

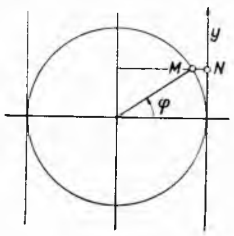
Kako je

$$ds_1^2 = \cos^2\varphi\,d\varphi^2 + d\psi^2,$$

slijedi da je $\bar{E} = \cos^2\varphi$, $\bar{G} = 1$, $\bar{F} = 0$, te je

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \cos^2\varphi.$$

Prema tome je u tom slučaju preslikavanje ekviarealno.



Sl. 38

LIT.: *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Berlin 1930. — *R. Kašanin*, Viša matematika, Beograd 1949. — *D. Struik*, Differential geometry, Cambridge, Mass. 1950. — *L. P. Ajzenhart*, Uvod u diferencijalnu geomeriju (prevod s engleskoga), Beograd 1951. — *Ž. Marković*, Uvod u višu analizu, Zagreb 1956. — *А. П. Норден*, Краткий курс дифференциальной геометрии, Москва 1958.

V. Vranić

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE, OBIČNE. Diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj dolaze, osim nezavisnih varijabli i funkcija tih varijabli, također derivacije tih funkcija. Riješiti (integrirati) diferencijalnu jednadžbu znači naći funkcije koje tu jednadžbu zadovoljavaju.

Diferencijalne jednadžbe od velike su važnosti u prirodnim i tehničkim naukama. Prirodni zakon može se shvatiti kao nužna veza između sadanjeg stanja jedne pojave i stanja neposredno nakon toga. Takav zakon predočuje se diferencijalnom jednadžbom, tj. veza fizikalnih veličina i njihovih promjena u prostoru i vremenu data je diferencijalnom jednadžbom, pri čemu se kao mjera tih promjena pojavljuju diferencijalni kvocijenti. Kad treba primijeniti takav prirodni zakon na neku specijalnu pojavu, diferencijalna jednadžba koja ga prikazuje integrira se uz poznate početne, odn. rubne uvjete, pa se dobiva jednadžba koja povezuje varijable razmatrane pojave.

Diferencijalne jednadžbe dijele se u *obične* i *parcijalne*. Diferencijalna jednadžba je obična ako u nju ulaze derivacije funkcija po nezavisnoj varijabli do nekog zadanog reda, ona je parcijalna ako sadrži parcijalne derivacije po nezavisnim varijablama do nekog zadanog reda. Parcijalne diferencijalne jednadžbe predmet su narednog članka u ovoj enciklopediji (str. 273), u ovome članku obradit će se stoga samo obične diferencijalne jednadžbe.

Red, stepen i rješenja diferencijalne jednadžbe. Red diferencijalne jednadžbe jednak je redu najviše derivacije koja u njoj dolazi. Ako je diferencijalna jednadžba predočena kao polinom u derivacijama, stepen diferencijalne jednadžbe jednak je eksponentu najviše derivacije. Diferencijalna jednadžba je linearna ako su u njoj i funkcija i njene derivacije u prvom stepenu.

Do diferencijalne jednadžbe dolazi se matematički kad se želi karakterizirati porodica krivuljâ koje se među sobom razlikuju parametrima $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Neka je, npr., porodica krivuljâ zadana jednadžbom

$$F(x, y, C) = 0. \qquad (1)$$

Parametar C može poprimiti bilo koju vrijednost, teoretski njih neizmjerno mnogo. Ako se jednadžba (1) derivira po x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' = 0, \qquad (2)$$

pa iz (1) i (2) eliminira C, dobiva se diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y') = 0,$$

koja prikazuje zajedničko svojstvo svih krivulja određenih jednadžbom (1).

Ako razmatramo porodicu krivulja koja je obilježena dvama parametrima, mora se jednadžba te porodice krivulja dva puta uzastopce derivirati po x, da bi se mogli eliminirati parametri C_1 i C_2. Ako takva porodica krivulja ima jednadžbu

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0, \qquad (3)$$

deriviranjem se dobiva

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\,y'' = 0. \qquad (5)$$

Ako se iz (3), (4) i (5) eliminiraju C_1 i C_2, dobiva se diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

za obitelj krivulja određenih jednadžbom (3).

Posve analogno pripadat će jednadžbi

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

diferencijalna jednadžba

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Obrnuto, svaka diferencijalna jednadžba n-tog reda ima rješenje:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots . C_n) = 0.$$

Takvo se rješenje zove *opće rješenje*. Ako parametri $C_1, C_2, \ldots, C_n$ poprimaju određene vrijednosti, rješenje se zove *posebno* ili *partikularno rješenje*. Do partikularnog rješenja dolazi se kad rješenje diferencijalne jednadžbe mora udovoljavati nekim *početnim uvjetima*. Npr. za diferencijalnu jednadžbu prvog reda može se propisati da rješenje

$$F(x, y, C) = 0$$

prolazi jednom unaprijed zadanom tačkom u ravnini. Tome će biti udovoljeno za jedno posve određeno C.

Kod diferencijalne jednadžbe drugog reda može se propisati da krivulja koja prikazuje rješenje prolazi određenom tačkom i da joj tangenta u toj tački ima određen smjer. Ta dva početna uvjeta određuju parametre C_1 i C_2 i time je dobiveno partikularno rješenje. Ako se propiše da krivulja mora prolaziti kroz dvije unaprijed određene tačke ili više njih, govori se (mjesto o početnim uvjetima) o *rubnim uvjetima*.

Osim općeg rješenja i partikularnih rješenja postoji i tzv. *singularno rješenje*, koje geometrijski znači ovojnicu porodice krivulja.

Svaka obična diferencijalna jednadžba određuje *polje smjerova*. U najjednostavnijem primjeru $y' = f(x, y)$ vidi se da svakom x, y u ravnini xOy odgovara posve određeno y', tj. određen smjer tangente na krivulju u toj tački. Na taj način određeno je polje smjerova u ravnini xOy. Ako se spoje tačke kojima je pridružen isti smjer, dobivaju se krivulje koje se zovu *izokline*.

Ima vrlo mnogo diferencijalnih jednadžbi koje egzaktnim metodama nisu rješive. (Da bismo došli do rješenja takvih diferencijalnih jednadžbi, služimo se numeričkim i grafičkim metodama.) Postojanje (egzistencija) i jednoznačnost rješenja diferencijalne jednadžbe jest pitanje koje se rješava tzv. *teoremom egzistencije*. Na ovome mjestu ne ćemo ulaziti u dokazivanje tog teorema, nego ćemo samo naznačiti što se pod time razumijeva.

Za diferencijalnu jednadžbu oblika $y' = f(x, y)$ može se pokazati da uz izvjesne pretpostavke o $f(x, y)$ uvijek postoji krivulja $y = F(x)$ koja prolazi po volji zadanom tačkom $P(x_0, y_0)$ u području u kome je određeno $f(x, y)$ i koja je integralna krivulja zadane diferencijalne jednadžbe. Ujedno se može dokazati da je ta krivulja jedina integralna krivulja koja prolazi tom tačkom. Najbitnija pretpostavka koja mora vrijediti za funkciju $f(x, y)$ jest *Lipschitzov uvjet* koji glasi: mora postojati konstantna veličina $M > 0$ takva da za bilo koji par tačaka $P(x, y_1)$ i $P(x, y_2)$ zadanog područja vrijedi

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq M(y_2 - y_1).$$

Prema tome, ako je taj uvjet ispunjen, zadana diferencijalna jednadžba ima rješenje.

Diferencijalne jednadžbe prvog reda

Metoda rješavanja separacijom varijabli. Diferencijalne jednadžbe koje se mogu svesti na oblik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \tag{6}$$

rješavaju se separacijom varijabli.

Iz oblika (6) slijedi

$$\varphi(x)\,dx - \psi(y)\,dy = 0,$$

a iz toga:

$$\int \varphi(x)\,dx - \int \psi(y)\,dy = C. \tag{7}$$

Uz pretpostavku da su ovi integrali rješivi, jednadžba (7) daje rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Homogene diferencijalne jednadžbe. Homogena diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{8}$$

Jednadžbe ovog tipa rješavaju se supstitucijom

$$\frac{y}{x} = z, \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z. \tag{9}$$

Tom supstitucijom poprima zadana diferencijalna jednadžba (8) oblik

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}. \tag{10}$$

U jednadžbi (10) provedena je separacija varijabli, te se ona rješava na način naveden u prethodnoj tački.

Postoje diferencijalne jednadžbe koje nisu homogene, ali se mogu svesti na homogene. Takve su jednadžbe npr. jednadžbe oblika

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{11}$$

Ovakva jednadžba rješava se kako je prikazano u nastavku.

a) Ako je

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

traži se rješenje ovih dviju jednadžbi:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Neka je to rješenje $x = x_1$, $y = y_1$.

Uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu (11) mjesto varijabli x, y nove varijable u i v koje su definirane ovako:

$$x = u + x_1, \qquad y = v + y_1.$$

Tom supstitucijom poprima zadana diferencijalna jednadžba oblik

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right). \tag{12}$$

Dobivena jednadžba (12) homogena je diferencijalna jednadžba i rješava se na način koji smo gore pokazali.

b) Ako je

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$a_2 = k\,a_1, \qquad b_2 = k\,b_1,$$

onda to uvršteno u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right). \tag{13}$$

Ova se jednadžba rješava supstitucijom

$$a_1x + b_1y = u.$$

Tom supstitucijom jednadžba (13) poprima oblik

$$\frac{1}{b_1}\frac{du}{dx} = f\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + \frac{a_1}{b_1},$$

a ta se jednadžba rješava separacijom varijabla.

Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda ima oblik

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = g(x). \tag{14}$$

Ova jednadžba može se riješiti na više načina.

a) *Varijacijom konstante* (Lagrange) jednadžba (14) rješava se ovako:

Pretpostavimo da je $g(x) = 0$. Time jednadžba (14) poprima oblik

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0, \quad \text{odnosno} \quad \frac{dy}{y} = -f(x)\,dx,$$

to jest

$$y = C\,e^{-F(x)}, \tag{15}$$

gdje je $F(x)$ primitivna funkcija od $y = f(x)$, tj.

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Ako sada pretpostavimo, da je

$$g(x) \neq 0,$$

to znači da u rješenju (15) C nije konstanta već funkcija od x. Ako prema tome (15) deriviramo po x, dobit ćemo

$$\frac{dy}{dx} = C' e^{-F(x)} - C\,e^{-F(x)} \cdot f(x),$$

a to uvršteno u (14) daje

$$C' e^{-F(x)} = g(x)$$

odakle

$$C' = g(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Odavde slijedi da je

$$C = \int g(x)\,e^{F(x)} dx + K,$$

a kako je $y = C\,e^{-F(x)}$,

to slijedi

$$y = e^{-F(x)}[\int g(x)\, e^{F(x)}\, dx + K].$$

b) Ako imamo jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y = g(x),$$

ona se može riješiti i *Bernoullijevom metodom.*

Postavimo

$$y = u\, v, \qquad (16)$$

gdje su u i v funkcije od x. Deriviramo po x pa dobijemo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u.$$

Ovo uvršteno u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje

$$\left[\frac{du}{dx} v + \frac{dv}{dx} u\right] + f(x)\cdot u\, v = g(x),$$

odnosno

$$\left[\frac{du}{dx} + u\, f(x)\right] v + \frac{dv}{dx} u = g(x).$$

Ako u tome postavimo

$$\frac{du}{dx} + u\, f(x) = 0, \qquad (17)$$

dobijemo

$$u\, \frac{dv}{dx} = g(x)\, . \qquad (18)$$

Iz (17) slijedi

$$\frac{du}{u} = -f(x)\, dx.$$

To integrirano daje

$$u = e^{-F(x)}.$$

Ako to uvrstimo u (18) dobivamo

$$dv = g(x)\cdot e^{F(x)} dx.$$

Ovo integrirano daje

$$v = \int g(x)\, e^{F(x)} dx + K,$$

što uvršteno u (16) daje konačno

$$u = e^{-F(x)}[\int g(x)\, e^{F(x)}\, dx + K],$$

a to je rezultat koji smo već dobili po Lagrangeu varijacijom konstante.

c) Linearna diferencijalna jednadžba može se riješiti i uz pomoć *multiplikatora* (Euler). Postupak je ovaj:

Ako imamo zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y = g(x),$$

pa je pomnožimo sa dx, dobivamo

$$dy + f(x)\cdot y\, dx = g(x)\, dx.$$

Ova jednadžba pomnožena s funkcijom $m = m(x)$ prelazi u jednadžbu

$$m(x)\, dy + f(x)\, m(x)\cdot y\, dx = g(x)\, m(x)\, dx. \qquad (19)$$

Funkcija $m(x)$ je *multiplikator* koji se odabira tako da nakon množenja njime lijeva strana diferencijalne jednadžbe postane totalni diferencijal. To je moguće samo ako je

$$\frac{\partial m(x)}{\partial x} = \frac{\partial[f(x)\, m(x)\, y]}{\partial y}\, . \qquad (20)$$

Iz (20) slijedi

$$\frac{dm(x)}{dx} = m(x)\, f(x)$$

ili

$$\frac{dm(x)}{m(x)} = f(x)\, dx,$$

a iz toga

$$m(x) = e^{F(x)}. \qquad (21)$$

Ako prema tome u (19) uvrstimo izraz (21) za multiplikator $m(x)$ zadane diferencijalne jednadžbe, dobivamo jednadžbu

$$e^{F(x)} f(x)\, y\, dx + e^{F(x)}\, dy = e^{F(x)}\, g(x)\, dx,$$

kojoj je lijeva strana totalni diferencijal, tako da integrirajući dobivamo

$$y \int_{x_0}^{x} e^{F(x)}\, f(x)\, dx + e^{F(x_0)} \int_{y_0}^{y} dy = \int e^{F(x)}\, g(x)\, dx,$$

$$y\, e^{F(x)} - y\, e^{F(x_0)} + e^{F(x_0)} y - e^{F(x_0)}\, y_0 = \int e^{F(x)}\, g(x) dx,$$

ili

$$y\, e^{F(x)} = \int e^{F(x)} g\, dx + K,$$

odnosno

$$y = e^{-F(x)}\,[\int e^{F(x)}\, g(x)\, dx + K],$$

a to je rezultat koji smo dobili i prethodnim dvjema metodama rješavanja.

Bernoullijeva jednadžba je jednadžba oblika

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\, y + g(x)\cdot y^n = 0,$$

u kojoj je n bilo kakav realni broj osim 0 i 1. Za $n = 0$ ova jednadžba prelazi u linearnu diferencijalnu jednadžbu, a za $n = 1$ ta se jednadžba rješava separacijom varijabla.

Da bi se Bernoullijeva jednadžba riješila, ona se prije svega podijeli sa y^n, čime se dobiva

$$y^{-n}\cdot \frac{dy}{dx} + y^{1-n}\cdot f(x) + g(x) = 0,$$

a onda se uvrsti $u = y^{1-n}$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)\, u\cdot f(x) = (n-1)\, g(x).$$

Dobivena jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba koja se može riješiti jednom od naprijed navedenih metoda.

Riccatijeva jednadžba, koja ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x),$$

nije općenito rješiva, već se može riješiti samo ako je poznato jedno partikularno rješenje $y = y_1(x)$. U tom slučaju rješava se supstitucijom $y = z + y_1$, kojom se svodi na oblik

$$\frac{dz}{dx} = (2\, a\, y_1 + b)\, z + a\, z^2,$$

tj. na Bernoullijevu jednadžbu, koja se rješava kako je naprijed navedeno.

Egzaktna diferencijalna jednadžba. Jednadžba oblika

$$P(x, y)\, dx + Q\,(x, y)\, dy = 0$$

egzaktna je ako joj je lijeva strana totalni diferencijal, tj. ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\, .$$

U tom slučaju rješenje gornje jednadžbe svodi se na integraciju totalnog diferencijala:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = C.$$

Eulerov multiplikator. Ako u jednadžbi

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dx = 0$$

lijeva strana nije totalni diferencijal, tj. ako ona nije egzaktna, može se pokušati pretvoriti je u egzaktnu jednadžbu množenjem funkcijom $m(x, y)$:

$$m(x, y)\cdot P(x, y)\, dx + m(x, y)\cdot Q(x, y)\, dy = 0. \qquad (22)$$

Funkcija $m\,(x, y)$ zove se *integrirajući faktor, integrirajući multiplikator* ili *Eulerov multiplikator.* Ona se načelno nalazi ovako:

Budući da je jednadžba (22) egzaktna, mora vrijediti:

$$\frac{\partial mP}{\partial y} = \frac{\partial mQ}{\partial x},$$

odnosno

$$P\, \frac{\partial m}{\partial y} + m\, \frac{\partial P}{\partial y} = Q\, \frac{\partial m}{\partial x} + m\, \frac{\partial Q}{\partial x}\, .$$

Ta se parcijalna diferencijalna jednadžba može pisati i ovako:

$$Q\frac{\partial m}{\partial x} - P\frac{\partial m}{\partial y} + m\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{23}$$

Rješenje te parcijalne diferencijalne jednadžbe dalo bi traženu funkciju m.

Međutim, jednadžba (23) nije uvijek rješiva. Ovdje ćemo pokazati kako se ona rješava u nekoliko karakterističnih slučajeva.

a) m neka je funkcija samo od x. Jednadžba (23) prelazi u jednadžbu

$$Q\frac{dm}{dx} + m\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

iz koje dobivamo

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{24}$$

Kako je m po pretpostavci funkcija samo od x, lijeva je strana jednadžbe (24) funkcija samo od x. Iz toga nužno slijedi da je i desna strana te jednadžbe funkcija samo od x, dakle je izraz

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{25}$$

funkcija samo od x i prema tome nezavisna od y.

Odavde slijedi obrat: ako je zadana diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

takva da je izraz (25) funkcija samo od x, tj. nezavisna od y, ta se jednadžba može riješiti ako je pomnožimo multiplikatorom $m(x)$.

b) Pretpostavimo sada, da je m funkcija samo od y. U tom slučaju jednadžba (23) prelazi u jednadžbu

$$-P\frac{dm}{dy} + m\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{26}$$

Kako je lijeva strana jednadžbe (26) po pretpostavci funkcija samo od y, to nužno mora vrijediti i za desnu stranu jednadžbe, tj. izraz

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{27}$$

funkcija je samo od y i nezavisan od x.

Prema tome, obratno, ako u zadanoj diferencijalnoj jednadžbi

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

za funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ vrijedi uvjet da je izraz (27) samo funkcija od y, navedena se jednadžba može riješiti uz pomoć multiplikatora $m(y)$.

c) Pretpostavimo da je m funkcija od xy. Ako pišemo $z = xy$, onda je $m = m(z)$. Imamo:

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{dm}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{dm}{dz}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{dm}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{dm}{dz}. \tag{29}$$

Ako izraze iz (28) i (29) uvrstimo u jednadžbu (28), dobivamo

$$(Px - Qy)\frac{dm}{dz} = m\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

a odavde

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{dm}{dz} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy}.$$

Kako je lijeva strana ove jednadžbe funkcija od $z = xy$, mora i desna strana biti funkcija od xy, pa je prema tome izraz

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy}$$

funkcija od xy.

Obratno, ako možemo pokazati da je taj izraz funkcija od xy, zadana jednadžba rješiva je uz pomoć multiplikatora $m(x,y)$.

d) Ako je m funkcija od y/x, možemo analogno kao prije pokazati da je, ako pišemo $\frac{y}{x} = z$,

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{dm}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{dm}{dx}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{dm}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dm}{dz}.$$

Ovo uvršteno u jednadžbu (23) daje

$$\frac{Px + Qy}{x^2}\,\frac{dm}{dz} = m\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dz} = \frac{x^2}{Px + Qy}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{30}$$

Lijeva strana jednadžbe (30) funkcija je samo od $z = y/x$ pa prema tome mora i desna strana, tj.

$$\frac{x^2}{Px + Qy}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{31}$$

biti funkcija od y/x. Vrijedi i obrat: ako je izraz (31) funkcija od y/x, zadana je diferencijalna jednadžba rješiva uz pomoć multiplikatora $m(\frac{y}{x})$.

Diferencijalne jednadžbe višeg reda

Diferencijalne jednadžbe višeg reda jesu jednadžbe oblika

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Do tih se jednadžbi dolazi ako se n puta uzastopce derivira jednadžba

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Na taj način teoretski se može eliminirati n konstanti i dobiva se diferencijalna jednadžba n-tog reda.

Pokazat ćemo kako se rješavaju neki tipovi tih diferencijalnih jednadžbi.

Tip I: $$f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{32}$$

U ovoj jednadžbi ne dolazi y, pa se jednadžba rješava tako da se uvrsti $y' = u$. Time jednadžba (32) prelazi u jednadžbu

$$f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}) = 0.$$

Na taj način snizili smo danoj jednadžbi red od n na $n - 1$. Specijalno, ako je zadana jednadžba bila drugog reda, mi smo je time sveli na diferencijalnu jednadžbu prvog reda, koju ćemo riješiti, ako je rješiva, jednom od metoda izloženih u prethodnom poglavlju.

Tip II: $$f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{33}$$

U ovoj jednadžbi ne dolazi x. Ona se rješava supstitucijom

$$y' = u. \tag{34}$$

Iz (34) slijedi deriviranjem

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u.$$

Ako se to uvrsti u jednadžbu (33), dobiva se nova jednadžba oblika

$$f(y, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}) = 0,$$

tj. opet je zadanoj diferencijalnoj jednadžbi red snižen od n na $(n - 1)$.

Tip III: $$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Ako je lijeva strana ove jednadžbe homogena po $y, y', y'', \ldots$, ona se rješava supstitucijom

$$y = e^{\int z\,dx} = \exp\int z\,dx.$$

Odavde slijedi

$$y' = z\exp\int z\,dx$$
$$y'' = \exp\int z\,dx\,[z' + z^2]$$
$$y''' = \exp\int z\,dx\,[3zz' + z'' + z^3], \quad \text{itd.}$$

Ako se to uvrsti u danu diferencijalnu jednadžbu nakon kraćenja sa $\exp \int z\,dx$, ostat će jednadžba kojoj je red za 1 niži od reda zadane jednadžbe.

Tip IV. Ako je zadana jednadžba

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

homogena u $x, y, dx, dy, d^2y \ldots$, ona se rješava supstitucijom

$$y = u\,x, \qquad x = e^t.$$

Može se lako pokazati da time zadana jednadžba poprima oblik

$$\varphi\left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \ldots\right) = 0,$$

tj. da je svedena na tip II, jer u njoj ne dolazi nezavisna varijabla.

Linearne diferencijalne jednadžbe

Linearne diferencijalne jednadžbe imaju oblik:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \varphi(x).$$

Koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ funkcije su od x. Jednadžba se zove linearna jer su y i sve njegove derivacije u prvom stepenu.

Ako je $\varphi(x) \equiv 0$, zadana jednadžba poprima oblik

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (35)$$

Jednadžba ovog oblika zove se *homogena linearna diferencijalna jednadžba.*

Pokazat ćemo kako se rješavaju neki tipovi linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Homogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima. Ako su u jednadžbi

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstante, takva se jednadžba rješava supstitucijom

$$y = e^{rx}.$$

Odavde se dobiva

$$y' = r\,e^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Ako se to uvrsti u (35), dobiva se:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0,$$

tj. rješenje se svodi na algebarsku jednadžbu

$$P_n(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Ta se jednadžba zove karakteristična jednadžba zadane linearne diferencijalne jednadžbe. Ona ima rješenja $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Ako su sva ta rješenja različita, opće je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Ima li karakteristična jednadžba kompleksni korijen $r = a + b\,i$, ta jednadžba mora, kako je poznato, imati kao rješenje i konjugirano kompleksni korijen $r = a - b\,i$. Prema tome bit će svakako rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x},$$

odnosno odavde

$$y = C_1 e^{ax} \cdot e^{bix} + C_2 e^{ax} \cdot e^{-bix} =$$

$$= C_1 e^{ax} (\cos b\,x + i \sin b\,x) + C_2 e^{ax} (\cos b\,x - i \sin b\,x).$$

Ako se to uredi, dobivaju se kao realna rješenja:

$$y = e^{ax} (K_1 \cos bx + K_2 \sin bx).$$

Karakteristična jednadžba ne mora imati same različite korijene. Ti korijeni mogu biti i višestruki. Kad su korijeni višestruki, postupak rješavanja osniva se na razmatranjima iz algebre datim u nastavku.

Neka je zadana jednadžba

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Ako ta jednadžba ima n korijena $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mi je možemo pisati

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Uzmemo li, kao primjer, da je x_1 trostruki korijen, možemo pisati

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^3 (x - x_4)(x - x_5) \ldots (x - x_n).$$

Ako pišemo

$$a_n (x - x_4)(x - x_5) \ldots (x - x_n) = \varphi(x),$$

onda je

$$P_n(x) = (x - x_1)^3 \varphi(x),$$

$$P_n'(x) = 3 (x - x_1)^2 \varphi(x) + (x - x_1)^3 \varphi'(x).$$

Funkcija $\varphi(x)$ nije djeljiva sa $x - x_1$; prema tome je

$$P_n'(x) = (x - x_1)^2 \psi(x),$$

gdje je

$$\psi(x) = 3\,\varphi(x) + (x - x_1)\,\varphi'(x).$$

Nadalje je

$$P_n''(x) = 2 (x - x_1)\,\psi(x) + (x - x_1)^2 \psi'(x).$$

Ako pišemo

$$\tau(x) = 2\,\psi(x) + (x - x_1)\,\psi'(x),$$

onda je

$$P_n''(x) = (x - x_1)\,\tau(x).$$

Odavde slijedi

$$P_n'''(x) = \tau(x) + (x - x_1)\,\tau'(x).$$

Razabiramo da $P_n(x)$, $P_n'(x)$, $P_n''(x)$ jest djeljivo sa $x - x_1$, a $P'''(x)$ nije djeljivo sa $x - x_1$. Prema tome je $P_n(x_1) = 0$, $P_n'(x_1) = 0$, $P_n''(x_1) = 0$, $P_n'''(x_1) \neq 0$.

Može se ovaj rezultat poopćiti i reći: Ako je x_1 m-struki korijen jednadžbe $P_n(x) = 0$, onda je x_1 ujedno i korijen jednadžbi $P_n'(x) = 0$, $P_n''(x) = 0, \ldots, P_n^{(m-1)}(x_1) = 0$, a $P_n^{(m)}(x_1) \neq 0$. Ovo svojstvo, poznato iz algebre, primijenit ćemo u rješavanju diferencijalne jednadžbe

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Ako se piše

$$L_n[y] \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y,$$

gdje je $L_n[y]$ oznaka za *linearni diferencijalni operator n-tog reda*, može se zadana linearna diferencijalna jednadžba pisati u obliku

$$L_n[y] = 0.$$

Ako je $y = e^{rx}$ partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, onda je

$$L_n[e^{rx}] = e^{rx} \cdot P_n(r) = 0.$$

Ako deriviramo po r dobivamo

$$\frac{\partial L_n(e^{rx})}{\partial r} = x\,e^{rx} P_n(r) + e^{rx} P_n'(r).$$

Lako se može dokazati da je

$$\frac{\partial L_n(e^{rx})}{\partial r} = L_n(x\,e^{rx}),$$

pa imamo

$$L_n(x\,e^{rx}) = x\,e^{rx} P_n(r) + e^{rx} P_n'(r).$$

Kako je $P_n(r) = 0$, imamo

$$L_n(x\,e^{rx}) = e^{rx} P_n'(r). \qquad (36)$$

Ako je r bio dvostruki korijen, onda je prema onom što smo naprijed rekli $P_n'(r) = 0$, i prema tome

$$L_n[x\,e^{rx}] = 0,$$

tj. $y = x\,e^{rx}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe.

Iz (36) slijedi

$$\frac{\partial L_n(x\,e^{rx})}{\partial r} = L_n[x^2 e^{rx}] = x\,e^{rx} P_n'(r) + e^{rx} P_n''(r),$$

odnosno, zbog $P_n'(r) = 0$:

$$L_n[x^2 e^{rx}] = e^{rx} P_n''(r).$$

Ako je r trostruki korijen, onda je $P_n''(r) = 0$, pa imamo da je

$$L_n[x^2 e^{rx}] = 0,$$

tj. u tom slučaju je $y = x^2 e^{rx}$ rješenje diferencijalne jednadžbe. Posve općenito vrijedi dakle ovaj zaključak: Ako karakteristična jednadžba linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda ima m-struki korijen, partikularna su rješenja te jednadžbe:

$$y = e^{rx}, \quad y = x\,e^{rx}, \quad y = x^2\,e^{rx} \ldots, \quad y = x^{m-1}\,e^{rx},$$

a opće je rješenje

$$y = C_1\,e^{rx} + C_2\,x\,e^{rx} + C_3\,x^2\,e^{rx} + \ldots + C_{m-1}\,x^{m-1}\,e^{rx}.$$

Nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe su jednadžbe oblika

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = \varphi(x).$$

Pretpostavimo opet da su koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstante. Nehomogena jednadžba rješava se tako da se najprije riješi njen homogeni dio, tj.

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0,$$

kome je rješenje

$$u = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x} + \ldots + C_n\,e^{r_n x}$$

ako su svi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ među sobom različiti. Ako $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nisu svi različiti, postupit ćemo kako smo u prethodnom poglavlju pokazali. Na svaki način u je opće rješenje homogenog dijela zadane diferencijalne jednadžbe, ali nije rješenje zadane jednadžbe. S obzirom na desnu stranu jednadžbe moramo prema tome rješenje u povećati za jednu funkciju v od x tako da taj zbroj zadovolji zadanu diferencijalnu jednadžbu. Funkciju v odabiramo u skladu s desnom stranom zadane diferencijalne jednadžbe. Pri tome mogu nastupiti tipični slučajevi navedeni u nastavku.

a) Neka je desna strana polinom oblika

$$b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_2\,x^2 + b_1\,x + b_0,$$

onda je i

$$v = d_m\,x^m + d_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + d_2\,x^2 + d_1\,x + d_0.$$

Ako se v uvrsti u zadanu diferencijalnu jednadžbu, dobiva se identitet iz kojeg se mogu izračunati koeficijenti $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_m$.

Ovaj postupak vrijedi samo ako je na lijevoj strani diferencijalne jednadžbe posljednji član y. Ako, pak, lijeva strana diferencijalne jednadžbe svršava sa y', treba polinom v pomnožiti sa x. Analogno treba, ako je posljednji član izraza na lijevoj strani zadane diferencijalne jednadžbe y'', polinom v pomnožiti sa x^2, ako je posljednji član y''', sa x^3, itd.

Primjer. Da bismo riješili diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + y' = x^4,$$

riješimo najprije njen homogeni dio, tj. jednadžbu

$$y''' + y' = 0.$$

Karakteristična je jednadžba ove diferencijalne jednadžbe:

$$r^3 + r = 0,$$

i ona ima korijene $r_1 = 0, \quad r_2 = i, \quad r_3 = -i.$

Prema tome je

$$u = C_1 + C_2\,e^{ix} + C_3\,e^{-ix}.$$

Budući da lijeva strana zadane diferencijalne jednadžbe svršava sa y', uzet ćemo

$$v = d_5\,x^5 + d_4\,x^4 + d_3\,x^3 + d_2\,x^2 + d_1\,x,$$

$$v' = 5\,d_5\,x^4 + 4\,d_4\,x^3 + 3\,d_3\,x^2 + 2\,d_2\,x + d_1,$$

$$v'' = 20\,d_5\,x^3 + 12\,d_4\,x^2 + 6\,d_3\,x + 2\,d_2,$$

$$v''' = 60\,d_5\,x^2 + 24\,d_4\,x + 6\,d_3.$$

Ako se vrijednosti v, v', v'', v''' uvrste u zadanu diferencijalnu jednadžbu, dobiva se

$$5\,d_5\,x^4 + 4\,d_4\,x^3 + (60\,d_5 + 3\,d_3)\,x^2 + (24\,d_4 + 2\,d_2)\,x + (6\,d_3 + d_1) = x^4.$$

Odavde slijedi:

$$5\,d_5 = 1, \quad 4\,d_4 = 0, \quad 60\,d_5 + 3\,d_3 = 0, \quad 24\,d_4 + 2\,d_2 = 0, \quad 6\,d_3 + d_1 = 0,$$

i dalje:

$$d_5 = \tfrac{1}{5}, \quad d_4 = 0, \quad d_3 = -4, \quad d_2 = 0, \quad d_1 = 24.$$

Prema tome je

$$v = \tfrac{1}{5}\,x^5 - 4\,x^3 + 24\,x,$$

a kako je $y = u + v$, rješenje zadane diferencijalne jednadžbe glasi

$$y = C_1 + C_2\,e^{ix} + C_3\,e^{-ix} + \tfrac{1}{5}\,x^5 - 4\,x^3 + 24\,x.$$

b) Ako je izraz na desnoj strani zadane diferencijalne jednadžbe $\varphi(x) = b\,e^{ax}$ i ako je $a \neq r_i$, možemo odabrati

$$v = A\,e^{ax}.$$

Ako se u zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1\,y' + a_0\,y = b\,e^{ax}$$

uvrsti

$$v = A\,e^{ax}, \quad y' = A\,a\,e^{ax}, \quad v'' = A\,a^2\,e^{ax} \ldots$$

dobiva se jednadžba

$$A\,a_n \cdot a^n\,e^{ax} + A\,a_n \cdot a^{n-1}\,e^{ax} + \ldots A\,a_2 \cdot a^2\,e^{ax} + A\,a_1 \cdot a\,e^{ax} + A\,a_0\,e^{ax} = b\,e^{ax}.$$

Odavde, ako se krati sa e^{ax},

$$A[a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0] = b,$$

odnosno $A \cdot P_n(a) = b$, iz čega slijedi

$$A = \frac{b}{P_n(a)}, \quad \text{odnosno} \quad v = \frac{b}{P_n(a)} \cdot e^{ax}.$$

Ova formula za v vrijedi samo ako je $a \neq r_i$. Ako je a m-struki korijen od $P_n(r) = 0$, može se lako pokazati da je

$$v = A\,x^m\,e^{ax},$$

odnosno

$$v = \frac{b}{P_n^{(m)}(a)}\,x^m\,e^{ax}. \tag{37}$$

c) Ako je na desnoj strani zadane diferencijalne jednadžbe trigonometrijska funkcija $\sin a\,x$ ili $\cos a\,x$, takva se jednadžba može riješiti kako je pokazano pod b). Treba samo upotrijebiti poznate jednadžbe

$$\cos a\,x = \frac{e^{a x i} + e^{-a x i}}{2} \quad \text{ili} \quad \sin a\,x = \frac{e^{a x i} - e^{-a x i}}{2\,i}.$$

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4\,y = \cos 2\,x.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$r^2 + 4 = 0, \quad \text{s rješenjima:} \quad r_1 = 2\,i, \quad r_2 = -2\,i.$$

Prema tome je

$$u = C_1\,e^{2ix} + C_2\,e^{-2ix}.$$

Kako je

$$\cos 2\,x = \tfrac{1}{2}\,e^{2ix} + \tfrac{1}{2}\,e^{-2ix},$$

to će biti u smislu formule (37):

$$v = \frac{x}{2\,P_2'(2\,i)}\,e^{2ix} + \frac{x}{2\,P_2'(-2\,i)}\,e^{-2ix},$$

pa je prema tome

$$v = \frac{x}{4} \cdot \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2\,i} = \frac{x}{4}\,\sin 2\,x.$$

Rješenje je zadane diferencijalne jednadžbe, dakle,

$$y = u + v = C_1\,e^{2ix} + C_2\,e^{-2ix} + \frac{x}{4}\,\sin 2x.$$

Diferencijalna jednadžba oblika

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0 = \cos a\,x$$

može se riješiti i ovako:

Najprije se napiše karakteristična jednadžba $P_n(r) = 0$. Ako joj je rješenje $r \neq a$, može se postaviti

$$v = A\,\cos a\,x + B\,\sin a\,x,$$

pri čemu se A i B nađe tako da se v uvrsti u zadanu diferencijalnu jednadžbu i na osnovu identičnosti lijeve i desne strane nađu vrijednosti A i B.

Ako je korijen karakteristične jednadžbe jednak a i ako je ovo a m-struki korijen karakteristične jednadžbe, pišemo

$$v = A\,x^{m-1}\cos a\,x + B\,x^{m-1}\sin a\,x$$

i postupamo kao gore.

d) Ako je na desnoj strani zadane diferencijalne jednadžbe izraz koji nije ni polinom oblika navedenog pod a), ni eksponencijalna funkcija navedena pod b), ni trigonometrijska funkcija navedena pod c), može se pokušati riješiti takvu jednadžbu uz pomoć metode varijacije konstanata. U čemu se sastoji ta metoda izloženo je u nastavku.

Neka je zadana diferencijalna jednadžba

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \varphi(x) \quad (38)$$

i neka su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ korijeni njezine karakteristične jednadžbe $P_n(r) = 0$. Onda je

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

gdje je $\quad y_i = e^{r_i x}; \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

Uzmimo sada da je

$$v = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

pri čemu pretpostavljamo da $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nisu konstante, kao u funkciji u, nego da su funkcije od x, i da tako određeno v zadovoljava potpuno zadanu diferencijalnu jednadžbu.

Da bismo odredili te funkcije $C_1, C_2, \ldots, C_n$, najprije diferenciramo funkciju $v = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$:

$$v' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i$$

pa stavimo

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i = 0, \quad (39)$$

tako da je

$$v' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'.$$

Odavde dobivamo

$$v'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i'.$$

Stavimo $\quad \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i' = 0, \quad (40)$

pa dobivamo $\quad v'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i''.$

Ako tako nastavimo, dobit ćemo

$$v^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-2)}.$$

Stavimo $\quad \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-2)} = 0, \quad (41)$

pa dobivamo $\quad v^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}.$

Nadalje je

$$v^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)}. \quad (42)$$

Ako vrijednosti

$$v = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i', \quad v'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'', \ldots,$$

$$v^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}, \quad v^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C' y_i^{(n-1)}$$

uvrstimo u (38), dobit ćemo ovaj rezultat:

$$C_1 [a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_1] + C_2 [a_n y_2^{(n)} + $$
$$+ a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_2] + \ldots + C_n [a_n y_n^{(n)} +$$
$$+ a_{n-1} y_n^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_n] + a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)} = \varphi(x). \quad (43)$$

Izrazi u uglatim zagradama jednaki su nuli, jer su $y_1, y_2, \ldots$ partikularna rješenja homogenog dijela linearne diferencijalne jednadžbe. Stoga se jednadžba (43) reducira na jednadžbu

$$a_n \sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)} = \varphi(x).$$

Uvaživši jednadžbe (39), (40), (41) i (42) dobivamo ovaj sistem od n linearnih jednadžbi:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,$$
$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$$
$$a_n C_1' y_1^{(n-1)} + a_n C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n C_n' y_n^{(n-1)} = \varphi(x)$$

sa n nepoznanica $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, iz kojih možemo te nepoznanice izračunati. Kad dobijemo C_1', C_2', C_n', izračunamo integriranjem vrijednosti $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Time je onda $v = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ izračunat.

Primjer. Neka je zadana jednadžba

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x. \quad (44)$$

Karakteristična joj je jednadžba

$$r^2 - 2r + 1 = 0, \quad \text{s rješenjima} \quad r_1 = r_2 = 1.$$

Prema tome je

$$u = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

gdje su C_1 i C_2 povoljne konstante.

Neka je

$$v = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad (45)$$

gdje su C_1 i C_2 funkcije od x.

Imamo

$$v' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2' x e^x + C_1' e^x + C_2' x e^x.$$

Stavimo u smislu (39) da je

$$C_1' + x C_2' = 0, \quad (46)$$

pa dobivamo

$$v' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x. \quad (47)$$

Odavde slijedi

$$v'' = C_1 e^x + 2 C_2 e^x + C_2 x e^x + C_1' e^x + C_2' e^x + C_2' x e^x. \quad (48)$$

Ako uvrstimo vrijednosti (45), (47) i (48) u jednadžbu (44), dobivamo

$$C_1 e^x + 2 C_2 e^x + C_2 x e^x + C_1' e^x + C_2' e^x + C_2' x e^x -$$
$$- 2 C_1 e^x - 2 C_2 e^x - 2 C_2 x e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x = x^2 e^x.$$

Odavde slijedi

$$C_1' e^x + C_2' x e^x + C_2' e^x = x^2 e^x,$$

odnosno

$$C_1' + C_2' x + C_2' = x^2. \quad (49)$$

Iz jednadžbi (46) i (49) nađemo $C_1' = -x^3$, $C_2' = x^2$, iz kojih integriranjem dobivamo: $C_1 = -\frac{x^4}{4}$, $C_2 = \frac{x^3}{3}$, pa je

$$v = -\frac{x^4}{4} e^x + \frac{x^3}{3} x e^x = \frac{x^4}{12} e^x.$$

Kako je $y = u + v$, glasi rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^4}{12} \cdot e^x.$$

Ovojnice krivulja

Ako imamo porodicu krivulja zadanu jednadžbom

$$f(x, y, C) = 0,$$

postavlja se pitanje ovojnice te porodice krivulja. Ovojnica porodice krivulja u ravnini, ako postoji, ima svojstvo da je svaka krivulja te porodice dira, i obratno, da je svaka tačka ovojnice dirališe jedne krivulje te porodice. Možemo prema tome pretpostaviti da će ta ovojnica imati jednadžbu

$$x = x(C), \qquad y = y(C).$$

Tangenta u tački ovojnice ima gradijent

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'(C)}{x'(C)}.$$

To je ujedno gradijent krivulja

$$f(x, y, C) = 0,$$

to jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y, C)}{f_y(x, y, C)}.$$

Mora prema tome biti

$$\frac{y'(C)}{x'(C)} = -\frac{f_x(x,y,C)}{f_y(x,y,C)},$$

odnosno

$$f_x x'(C) + f_y y'(C) = 0. \tag{50}$$

Pored toga, kako su $x(C)$ i $y(C)$ koordinate tačke na krivulji $f(x,y,C) = 0$, mora vrijediti

$$f[x(C), y(C), C] = 0. \tag{51}$$

Ako (51) deriviramo po C, dobivamo

$$f_x x'(C) + f_y y'(C) + f_c = 0. \tag{52}$$

Iz (50) i (52) slijedi $f_c = 0$. Prema tome je nuždan uvjet za postojanje ovojnice

$$f(x,y,C) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C} = 0.$$

Ako se iz ove dvije jednadžbe eliminira C, dobiva se jednadžba ovojnice kao funkcija od x, y.

To rješenje je ujedno singularno rješenje diferencijalne jednadžbe za koju je $f(x,y,C) = 0$ bilo opće rješenje.

Diferencijalne jednažbe koje su linearne u x i y

Takve su jednadžbe Lagrangeova jednadžba i njen specijalan slučaj, Clairautova jednadžba.

Lagrangeova jednadžba $y = x\varphi(y') + f(y')$ rješava se tako da se derivira po x. Time se dobiva:

$$y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + f'(y')y''.$$

Ako pišemo $y' = p$, prednja diferencijalna jednadžba poprima oblik

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + f'(p)]p',$$

odnosno

$$1 = \left[\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x + \frac{f'(p)}{p-\varphi(p)}\right]\frac{dp}{dx}.$$

Odavde se dobiva

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x - \frac{f'(p)}{p-\varphi(p)} = 0.$$

To je linearna jednadžba prvog reda, koju znamo riješiti.

Clairautova jednadžba $y = xy' + f(y')$ specijalan je slučaj Lagrangeove jednadžbe sa $\varphi(y') = y'$.

Ako potražimo jednadžbe izoklina koje pripadaju Clairautovoj jednadžbi, dobivamo

$$y = Cx + f(C).$$

To je porodica pravaca s koeficijentom smjera C. Prema tome svi isti smjerovi leže u samom pravcu i iz toga slijedi da su te izokline ujedno i opće rješenje Clairautove diferencijalne jednadžbe.

Analitički možemo Clairautovu jednadžbu riješiti i ovako: Jednadžbu

$$y = xy' + f(y')$$

deriviramo po x pa dobivamo

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'',$$

a ako pišemo $y' = p$, dobivamo:

$$p = p + xp' + f'(p)p',$$

odnosno

$$p'[x + f'(p)] = 0.$$

Iz prednje jednadžbe slijedi:

a) $p' = 0$, odavde $p = y' = C$.

To uvršteno u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje

$$y = Cx + f(C),$$

kao što smo već imali.

b) $x + f'(p) = 0. \qquad (53)$

Ako u zadanu diferencijalnu jednadžbu uvrstimo $y' = p$, dobivamo

$$y = xp + f(p). \tag{54}$$

Ako se iz (53) i (54) eliminira p, dobiva se singularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, a to je ovojnica pravaca.

Podsjećamo kako smo došli do jednadžbe ovojnice u prethodnom poglavlju ovog članka.

Ako je zadana diferencijalna jednadžba

$$y = xy' + f(y'),$$

pokazali smo da je opće rješenje te diferencijalne jednadžbe

$$y = Cx + f(C).$$

Da bismo dobili ovojnicu, deriviramo ovu jednadžbu po C:

$$0 = x + f'(C).$$

Eliminirajući C iz ove dvije jednadžbe dobiva se ovojnica. A to je isto što smo načinili gore kad smo iz $y = xy' + f(y')$ i $0 = x + f'(y')$ eliminirali y'.

Trajektorije

Neka je

$$f(x,y,C) = 0 \tag{55}$$

porodica krivulja. Potražit ćemo izogonalne trajektorije te porodice krivulja, tj. krivulje koje sijeku zadanu porodicu krivulja pod istim kutom.

Uzmimo na jednoj od krivulja (55) jednu tačku. U toj tački položimo tangentu na krivulju. Ta tangenta imat će koeficijent smjera

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Zadanu krivulju siječe u toj tački izogonalna trajektorija. Tangenta na izogonalnoj trajektoriji u toj tački ima koeficijent smjera

$$\operatorname{tg}\beta = y'.$$

Tangens kuta što ga zatvaraju te dvije tangente jednak je

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta},$$

odnosno, uvrstivši vrijednost za $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y' + \dfrac{f_x}{f_y}}{1 - y'\dfrac{f_x}{f_y}}. \tag{56}$$

φ je kut pod kojim se sijeku izogonalne trajektorije i zadana funkcija. Taj je kut jednak u svakoj tački u kojoj se sijeku te krivulje, pa se prema tome može $\operatorname{tg}\varphi$ shvatiti kao konstantna veličina za tu vrstu izogonalnih trajektorija.

Kako u jednadžbi (55) tako i u jednadžbi (56) dolazi veličina C. Ako se C eliminira iz te dvije jednadžbe, dobiva se diferencijalna jednadžba porodice izogonalnih trajektorija.

Specijalan slučaj izogonalnih trajektorija jesu ortogonalne trajektorije. To su krivulje koje sijeku krivulje iz zadane porodice pod kutem od 90°. Kako je u tom slučaju

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

to se jednadžba (56) reducira na oblik

$$\frac{1 - y'\dfrac{f_x}{f_y}}{y' + \dfrac{f_x}{f_y}} = 0,$$

a odavde

$$y' \cdot \frac{f_x}{f_y} = 1. \tag{57}$$

Ako se iz (55) i (57) eliminira C, dobiva se diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija.

Do ortogonalnih trajektorija možemo doći i na drugi način. Ako je naime zadana jednadžba porodice krivulja

$$F(x,y,C) = 0,$$

možemo najprije naći diferencijalnu jednadžbu tih krivulja:

$$f(x,y,y') = 0. \tag{58}$$

Da bismo dobili diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija, moramo u jednadžbi (58) zamijeniti y' sa $\frac{1}{y'}$, tako da je

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija. Naime, kako su tangente ortogonalnih trajektorija i tangente zadane krivulje jedne na drugima okomite, to je jasno da je koeficijent smjera tangente ortogonalnih trajektorija $-1/y'$, ako je y' koeficijent smjera tangente na zadanu krivulju.

LIT.: *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. 2, Москва ^{15}1957. — *T. Pejović*, Diferencijalne jednačine, Beograd 1958. — *A. Duschek*, Höhere Mathematik, Bd. 3, Wien ^{3}1963. — *M. Golomb, M. E. Shanks*, Elements of ordinary differential equations, New York ^{2}1965. — *L. Collatz*, Differentialgleichungen, Stuttgart ^{3}1966.

V. Vranić

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE, PARCIJALNE, jednadžbe koje sadrže više nezavisnih promjenljivih i jednu ili više funkcija i njihovih derivacija u odnosu na nezavisne promjenljive.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe spadaju u onaj dio matematike pomoću kojeg matematika dolazi u najužu vezu sa primjenama. Mnogi problemi matematike, fizike, tehnike, ekonomije, biologije itd. vode na parcijalne diferencijalne jednadžbe i na taj način su stimulirali i stimuliraju razvoj matematike. Najuža veza ostvaruje se u fizici, osobito u atomskoj fizici, gdje se zakoni fizike nastoje u potpunosti opisati parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

Jedna od prvih diferencijalnih jednadžbi, neobično važna po posljedicama za razvoj matematike, bila je bez sumnje jednadžba titranja napete žice. Problem titranja žice formulirao je B. Taylor (1685—1751) početkom XVIII st. u radu koji je izišao 1714. Današnji oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i rješenje $u(x, t) = g_1(x + c\,t) + g_2(x - c\,t)$ toga problema dao je d'Alembert (1717—1783). Iako je d'Alembert uočio važnost rubnih uvjeta za rješavanje navedene diferencijalne jednadžbe, on nije uspio formulirati dodatne uvjete kojima se titranje žice u potpunosti određuje. To je učinio L. Euler (1707—1783). Tim povodom došlo je do žive polemike o pojmu neprekidne funkcije, koji je u savremenoj formi uveo L. Dirichlet (1805—1859). Bitan korak u proučavanju titranja žice napravio je D. Bernoulli (1700—1782). Oslanjajući se na fizikalna razmatranja, on dolazi do zaključka (1753) da se titranje žice odvija kao da se slaže od beskonačno čistih titraja različitih frekvencija, tj. superpozicijom različitih sinusoida čiji se periodi umanjuju obratno proporcionalno prirodnim brojevima. Tako je D. Bernoulli došao do osnovnog principa superpozicije u matematičkoj fizici i naslutio metodu za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi poznatu pod imenom Fourierova metoda (v. Titranja ograničenih tijela u ovom članku). I pored navedenih uspjeha, matematičari XVIII st. ostali su daleko od strogih metoda rješavanja i strogog formuliranja problema rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U prvoj polovini XIX st. dolazi do strogog formuliranja osnovnih pojmova analize [A. Cauchy (1789—1857), K. Gauss (1777—1855)] što je omogućilo rješavanje niza za to vrijeme klasičnih problema. A. Cauchy precizira opći problem egzistencije rješenja diferencijalnih jednadžbi, formulira tzv. Cauchyjev problem, daje kriterije egzistencije rješenja za dosta široku klasu jednadžbi. Završni oblik ovim rezultatima dala je S. V. Kovalevska (1850—1891). Pored primjene teorije funkcija kompleksne promjenljive i varijacionog računa na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, u prvoj polovini XIX st. Fourier (1768—1830) u svom poznatom radu »Théorie analytique de la chaleur« 1822 traži rješenja jednadžbe vođenja topline u obliku trigonometrijskog reda. Kriterije konvergencije takvog reda dao je Dirichlet 1829.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe, naročito takve jednadžbe prvog reda, pojavile su se i u geometriji. Od matematičara koji su se bavili geometrijskim aspektom diferencijalnih jednadžbi treba da se spomenu G. Monge (1746—1818), koji je dao geometrijsku interpretaciju rješenja parcijalnih jednadžbi prvog reda, i S. Lie (1842—1899) koji je započeo danas dobro poznatu i razvijenu teoriju tzv. Liejevih grupa proučavajući parcijalne jednadžbe.

Od matematičara XX st. koji su se bavili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama spomenimo samo trojicu: J. Schauder je 1935 počeo primjenjivati metode funkcionalne analize na parcijalne diferencijalne jednadžbe; S. L. Sobolev je 1936 napravio bitan korak uvodeći pojam poopćenog rješenja (v. tačku 14 ovog prikaza); L. Schwartz je 1948 poopćio rezultate Soboleva i uveo pojam distribucija. Uvođenjem pojma distribucija omogućena je primjena dobro razvitih novih matematičkih disciplina funkcionalne analize i topologije na parcijalne diferencijalne jednadžbe. Mnogi problemi po prvi put su precizno formulirani, pojam rješenja je proširen itd. Time se objašnjava veliki uspjeh koji je na tom području postignut posljednjih 10···15 godina zahvaljujući u prvom redu radovima: S. L. Soboleva, L. Schwartza, L. Hörmandera, L. Gordinga, J. Leraya, B. Malgrangea, Z. Trevesa, L. Nirenberga, K. O. Fridrichsa, I. G. Petrovskog, O. A. Ladiženske, I. Vekua i mnogih drugih.

I pored navedenih uspjeha danas ne postoji završena teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kao što postoji npr. teorija sistema linearnih algebarskih jednadžbi ili čak običnih diferencijalnih jednadžbi. Dobro je razvijena teorija jednadžbi prvog reda (t. 1···6 ovog prikaza) i teorija izvjesnih specijalnih tipova jednadžbi drugog reda (t. 7···34 ovog prikaza).

Da bismo izbjegli tehničke poteškoće, koje sa samom biti teorije često nemaju mnogo zajedničkog, mi pretpostavljamo, ako drukčije nije rečeno, da su sve funkcije neprekidne i dovoljan broj puta neprekidno derivabilne u nekoj oblasti nezavisnih promjenljivih (kratko: funkcije su glatke), da oblast ima dosta gladak rub i sl. Većina razmatranja odnosi se na dosta malu oblast (lokalna svojstva).

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

1. Pojmovi i primjeri. a) Zamislimo da treba naći sve funkcije u dviju promjenljivih x i y takve da vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Relacija (1) zove se parcijalna diferencijalna jednadžba jer sadrži parcijalnu derivaciju. Očigledno (1) znači da u ne zavisi od x, pa je relacija (1) zadovoljena svakom funkcijom $v(y)$, tj. ako u (1) mjesto u pišemo v, dobivamo identitet. Tako je npr. funkcija $v(y) = 2y^5 - 2y + 1$ rješenje jednadžbe (1).

b) Slijedeći primjer parcijalne diferencijalne jednadžbe jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{2}$$

Kako je $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, to je $\frac{\partial u}{\partial y} = v(y)$ proizvoljna funkcija od y. Odavde je $u(x, y) = \int v(y)\,\mathrm{d}y + v_1(x)$ gdje »integraciona konstanta« v_1 može biti proizvoljna funkcija od x. Označimo li integral od v sa v_2, nalazimo da je $u(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$ opće rješenje jednadžbe (2). Jednadžba (1) je *parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda* a (2) *parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda*, jer se u (1) pojavljuje samo prva derivacija a u (2) druga derivacija.

c) Ako je $f(x, y)$ zadana funkcija, onda je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x, y) \tag{3}$$

parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda. Njezino rješenje je

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}s\, f(t, s) + v_1(x) + v_2(y),$$

gdje su v_1 i v_2 proizvoljne funkcije, a x_0 i y_0 proizvoljni brojevi.

Daljnji primjer parcijalne diferencijalne jednadžbe je jednadžba

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y). \tag{4}$$

Kako vidimo, nije teško napisati nove i nove primjere parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Općenito, relacija oblika

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0 \tag{5}$$

zove se parcijalna diferencijalna jednadžba. Ovdje je F poznata funkcija svojih argumenata, a traži se funkcija u. Funkcija $v(x, y)$ zove se rješenje jednadžbe (5), ako (5) postaje identitet u x, y nakon zamjene funkcije u i njenih derivacija funkcijom v i njenim derivacijama. Red najviše derivacije koja se u (5) pojavljuje zove se red parcijalne diferencijalne jednadžbe (5). Tako su npr. jednadžbe (1) i (4) prvog reda, a jednadžbe (2) i (3) drugog reda. Jednadžba (5) je linearna ako ona ima oblik:

$$a(x, y)\,p + b(x, y)\,q = c(x, y), \qquad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

a kvazilinearna ako je oblika

$$a(x, y, u)\,p + b(x, y, u)\,q = c(x, y, u). \tag{7}$$

Pri tome poznate funkcije a, b, c u slučaju linearne jednadžbe zavise samo od promjenljivih x, y, a ne zavise od tražene funkcije u, dok kod kvazilinearne jednadžbe (7) nepoznata funkcija u ulazi bar u jedan koeficijent.

Općenito relacija:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \ldots\right) = 0 \tag{8}$$

između funkcije $u(x_1, \ldots, x_n)$ i njezinih derivacija i eventualno promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ zove se parcijalna diferencijalna jednadžba. Jednadžba (8) je linearna ako je oblika:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_0, \tag{9}$$

pri čemu poznate funkcije a_i i a_0 zavise samo od promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Ako u (9) bar jedna od funkcija a_i, a_0 zavisi i od tražene funkcije u, onda se (9) zove kvazilinearna jednadžba. Jednadžba