Da bismo dobili diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija, moramo u jednadžbi (58) zamijeniti y' sa $\frac{1}{y'}$, tako da je

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija. Naime, kako su tangente ortogonalnih trajektorija i tangente zadane krivulje jedne na drugima okomite, to je jasno da je koeficijent smjera tangente ortogonalnih trajektorija $-1/y'$, ako je y' koeficijent smjera tangente na zadanu krivulju.

LIT.: *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. 2, Москва [15]1957. — *T. Pejović*, Diferencijalne jednačine, Beograd 1958. — *A. Duschek*, Höhere Mathematik, Bd. 3, Wien [3]1963. — *M. Golomb, M. E. Shanks*, Elements of ordinary differential equations, New York [2]1965. — *L. Collatz*, Differentialgleichungen, Stuttgart [3]1966.

V. Vranić

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE, PARCIJALNE, jednadžbe koje sadrže više nezavisnih promjenljivih i jednu ili više funkcija i njihovih derivacija u odnosu na nezavisne promjenljive.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe spadaju u onaj dio matematike pomoću kojeg matematika dolazi u najužu vezu sa primjenama. Mnogi problemi matematike, fizike, tehnike, ekonomije, biologije itd. vode na parcijalne diferencijalne jednadžbe i na taj način su stimulirali i stimuliraju razvoj matematike. Najuža veza ostvaruje se u fizici, osobito u atomskoj fizici, gdje se zakoni fizike nastoje u potpunosti opisati parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

Jedna od prvih diferencijalnih jednadžbi, neobično važna po posljedicama za razvoj matematike, bila je bez sumnje jednadžba titranja napete žice. Problem titranja žice formulirao je B. Taylor (1685—1751) početkom XVIII st. u radu koji je izišao 1714. Današnji oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

i rješenje $u(x, t) = g_1(x + c\,t) + g_2(x - c\,t)$ toga problema dao je d'Alembert (1717—1783). Iako je d'Alembert uočio važnost rubnih uvjeta za rješavanje navedene diferencijalne jednadžbe, on nije uspio formulirati dodatne uvjete kojima se titranje žice u potpunosti određuje. To je učinio L. Euler (1707—1783). Tim povodom došlo je do žive polemike o pojmu neprekidne funkcije, koji je u savremenoj formi uveo L. Dirichlet (1805—1859). Bitan korak u proučavanju titranja žice napravio je D. Bernoulli (1700—1782). Oslanjajući se na fizikalna razmatranja, on dolazi do zaključka (1753) da se titranje žice odvija kao da se slaže od beskonačno čistih titraja različitih frekvencija, tj. superpozicijom različitih sinusoida čiji se periodi umanjuju obratno proporcionalno prirodnim brojevima. Tako je D. Bernoulli došao do osnovnog principa superpozicije u matematičkoj fizici i naslutio metodu za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi poznatu pod imenom Fourierova metoda (v. Titranja ograničenih tijela u ovom članku). I pored navedenih uspjeha, matematičari XVIII st. ostali su daleko od strogih metoda rješavanja i strogog formuliranja problema rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U prvoj polovini XIX st. dolazi do strogog formuliranja osnovnih pojmova analize [A. Cauchy (1789—1857), K. Gauss (1777—1855)] što je omogućilo rješavanje niza za to vrijeme klasičnih problema. A. Cauchy precizira opći problem egzistencije rješenja diferencijalnih jednadžbi, formulira tzv. Cauchyjev problem, daje kriterije egzistencije rješenja za dosta široku klasu jednadžbi. Završni oblik ovim rezultatima dala je S. V. Kovalevska (1850—1891). Pored primjene teorije funkcija kompleksne promjenljive i varijacionog računa na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, u prvoj polovini XIX st. Fourier (1768—1830) u svom poznatom radu »Théorie analytique de la chaleur« 1822 traži rješenja jednadžbe vođenja topline u obliku trigonometrijskog reda. Kriterije konvergencije takvog reda dao je Dirichlet 1829.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe, naročito takve jednadžbe prvog reda, pojavile su se i u geometriji. Od matematičara koji su se bavili geometrijskim aspektom diferencijalnih jednadžbi treba da se spomenu G. Monge (1746—1818), koji je dao geometrijsku interpretaciju rješenja parcijalnih jednadžbi prvog reda, i S. Lie (1842—1899) koji je započeo danas dobro poznatu i razvijenu teoriju tzv. Liejevih grupa proučavajući parcijalne jednadžbe.

Od matematičara XX st. koji su se bavili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama spomenimo samo trojicu: J. Schauder je 1935 počeo primjenjivati metode funkcionalne analize na parcijalne diferencijalne jednadžbe; S. L. Sobolev je 1936 napravio bitan korak uvodeći pojam poopćenog rješenja (v. tačku 14 ovog prikaza); L. Schwartz je 1948 poopćio rezultate Soboleva i uveo pojam distribucija. Uvođenjem pojma distribucija omogućena je primjena dobro razvitih novih matematičkih disciplina funkcionalne analize i topologije na parcijalne diferencijalne jednadžbe. Mnogi problemi po prvi put su precizno formulirani, pojam rješenja je proširen itd. Time se objašnjava veliki uspjeh koji je na tom području postignut posljednjih 10···15 godina zahvaljujući u prvom redu radovima: S. L. Soboleva, L. Schwartza, L. Hörmandera, L. Gordinga, J. Leraya, B. Malgrangea, Z. Trevesa, L. Nirenberga, K. O. Fridrichsa, I. G. Petrovskog, O. A. Ladiženske, I. Vekua i mnogih drugih.

I pored navedenih uspjeha danas ne postoji završena teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kao što postoji npr. teorija sistema linearnih algebarskih jednadžbi ili čak običnih diferencijalnih jednadžbi. Dobro je razvijena teorija jednadžbi prvog reda (t. 1···6 ovog prikaza) i teorija izvjesnih specijalnih tipova jednadžbi drugog reda (t. 7···34 ovog prikaza).

Da bismo izbjegli tehničke poteškoće, koje sa samom biti teorije često nemaju mnogo zajedničkog, mi pretpostavljamo, ako drukčije nije rečeno, da su sve funkcije neprekidne i dovoljan broj puta neprekidno derivabilne u nekoj oblasti nezavisnih promjenljivih (kratko: funkcije su glatke), da oblast ima dosta gladak rub i sl. Većina razmatranja odnosi se na dosta malu oblast (lokalna svojstva).

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

1. Pojmovi i primjeri. a) Zamislimo da treba naći sve funkcije u dviju promjenljivih x i y takve da vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Relacija (1) zove se parcijalna diferencijalna jednadžba jer sadrži parcijalnu derivaciju. Očigledno (1) znači da u ne zavisi od x, pa je relacija (1) zadovoljena svakom funkcijom $v(y)$, tj. ako u (1) mjesto u pišemo v, dobivamo identitet. Tako je npr. funkcija $v(y) = 2y^5 - 2y + 1$ rješenje jednadžbe (1).

b) Slijedeći primjer parcijalne diferencijalne jednadžbe jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{2}$$

Kako je $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, to je $\frac{\partial u}{\partial y} = v(y)$ proizvoljna funkcija od y. Odavde je $u(x, y) = \int v(y)\,\mathrm{d}y + v_1(x)$ gdje »integraciona konstanta« v_1 može biti proizvoljna funkcija od x. Označimo li integral od v sa v_2, nalazimo da je $u(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$ opće rješenje jednadžbe (2). Jednadžba (1) je *parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda* a (2) *parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda,* jer se u (1) pojavljuje samo prva derivacija a u (2) druga derivacija.

c) Ako je $f(x, y)$ zadana funkcija, onda je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x, y) \tag{3}$$

parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda. Njezino rješenje je

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \int\limits_{y_0}^{y} \mathrm{d}s\, f(t, s) + v_1(x) + v_2(y),$$

gdje su v_1 i v_2 proizvoljne funkcije, a x_0 i y_0 proizvoljni brojevi.

Daljnji primjer parcijalne diferencijalne jednadžbe je jednadžba

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y). \tag{4}$$

Kako vidimo, nije teško napisati nove i nove primjere parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Općenito, relacija oblika

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0 \tag{5}$$

zove se parcijalna diferencijalna jednadžba. Ovdje je F poznata funkcija svojih argumenata, a traži se funkcija u. Funkcija $v(x, y)$ zove se rješenje jednadžbe (5), ako (5) postaje identitet u x, y nakon zamjene funkcije u i njenih derivacija funkcijom v i njenim derivacijama. Red najviše derivacije koja se u (5) pojavljuje zove se red parcijalne diferencijalne jednadžbe (5). Tako su npr. jednadžbe (1) i (4) prvog reda, a jednadžbe (2) i (3) drugog reda. Jednadžba (5) je linearna ako ona ima oblik:

$$a(x, y)\,p + b(x, y)\,q = c(x, y), \qquad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

a kvazilinearna ako je oblika

$$a(x, y, u)\,p + b(x, y, u)\,q = c(x, y, u). \tag{7}$$

Pri tome poznate funkcije a, b, c u slučaju linearne jednadžbe zavise samo od promjenljivih x, y, a ne zavise od tražene funkcije u, dok kod kvazilinearne jednadžbe (7) nepoznata funkcija u ulazi bar u jedan koeficijent.

Općenito relacija:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \ldots\right) = 0 \tag{8}$$

između funkcije $u(x_1, \ldots, x_n)$ i njezinih derivacija i eventualno promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$ zove se parcijalna diferencijalna jednadžba. Jednadžba (8) je linearna ako je oblika:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_0, \tag{9}$$

pri čemu poznate funkcije a_i i a_0 zavise samo od promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Ako u (9) bar jedna od funkcija a_i, a_0 zavisi i od tražene funkcije u, onda se (9) zove kvazilinearna jednadžba. Jednadžba

(9) je homogena ako je $a_0 = 0$, u protivnom je (9) nehomogena jednadžba. U nekim problemima (npr. u teoriji elastičnosti, građevinarstvu itd.) potrebno je promatrati *sistem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.* Primjer sistema je tzv. Cauchy-Riemannov sistem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za dvije funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ koji glasi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(v. *Teorija funkcija*). Teorija ovog sistema nije ništa drugo nego teorija analitičkih funkcija jedne kompleksne promjenljive.

Ovaj primjer, a također primjeri a), b), c), pokazuju kako pojedina parcijalna diferencijalna jednadžba ili sistem takvih jednadžbi ima obilje rješenja. Štaviše, iz tih primjera je jasno da rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe zavisi od proizvoljne funkcije dok je rješenje običnih jednadžbi zavisilo od pojedinih konstanta. Teorija sistema parcijalnih diferencijalnih jednadžbi bitno se razlikuje od teorije bilo običnih diferencijalnih jednadžbi bilo sistema linearnih algebarskih jednadžbi. Ovdje je moguća i razvijena je teorija sistema jednadžbi za jednu funkciju, a da takav sistem nije preodređen. Mogućnost takve teorije slijedi iz činjenice da su rješenja jedne parcijalne jednadžbe suviše neodređena (sadrže proizvoljne funkcije) pa uz izvjesne uvjete, tzv. uvjete integraljivosti, sistem parcijalnih jednadžbi za jednu funkciju ima rješenje.

2. Sistem običnih diferencijalnih jednadžbi. U teoriji i primjenama algebarskih jednadžbi, običnih diferencijalnih jednadžbi, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi itd. traže se odgovori na ova tri pitanja:

1. Pod kojim uvjetima jednadžba (sistem) ima bar jedno rješenje? (Problem egzistencije rješenja).

2. Uz koje dodatne uvjete jednadžba (sistem) ima jedno jedino rješenje? (Problem jedinstvenosti rješenja).

3. Koji je postupak za pronalaženje rješenja?

Navedeni problemi, bar u principu, lako se rješavaju za sistem linearnih algebarskih jednadžbi (v. *Aritmetika i algebra*) i za sistem običnih diferencijalnih jednadžbi. Budući da se rješavanje parcijalnih jednadžbi prvog reda svodi na rješavanja sistema običnih jednadžbi, to ćemo najprije objasniti kako se navedeni problemi rješavaju za takav sistem.

Tipičan i vrlo dalekosežan postupak za rješavanje navedenih problema može se sasvim dobro uočiti već u slučaju jednadžbe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{10}$$

gdje je f zadana funkcija. Zahtijeva se da se odredi funkcija $g(x)$ koja u danoj tački x_0, u okolini koje je f neprekidna i ima neprekidnu derivaciju, ima unaprijed zadanu vrijednost y_0. Pokazuje se da je rješavanje navedenog problema ekvivalentno sa rješavanjem jednadžbe

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\, ds. \tag{11}$$

Budući da se tražena funkcija y u (11) pojavljuje pod znakom integrala, to se (11) zove integralna jednadžba (v. *Integralne jednadžbe*). Jednadžba (11) rješava se tzv. metodom sukcesivnih aproksimacija (v. *Metode aproksimacija*), koja se sastoji u ovom:

Na desnoj strani u (11) y se zamijeni sa y_0 i onda izračuna funkcija

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds,$$

tzv. prva aproksimacija funkcije y. Sada se pod znakom integrala u (11) y zamijeni sa y_1; dobiva se druga aproksimacija y_2 i postupak se ponavlja. Ako je n-ta aproksimacija $y_n(x)$ određena, $(n + 1)$-a aproksimacija y_{n+1} definira se kao funkcija:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_n(s)]\, ds \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Tim postupkom dolazimo do niza funkcija $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ za koji se pokazuje da konvergira nekoj funkciji g koja zadovoljava jednadžbu (10) i »početni« uvjet $g(x_0) = y_0$. Pored toga g je jedinstvena funkcija s tim svojstvima.

Sličan postupak vrijedi i u slučaju sistema od n običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

gdje su $f_1, \ldots, f_n$ zadane funkcije, a traže se funkcije $y_1, \ldots, y_n$ promjenljive x koje u tački x_0 primaju unapred zadane vrijednosti $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Na sistem (12) svodi se i obična diferencijalna jednadžba n-tog reda:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right). \tag{13}$$

Uvođenjem funkcija $y_1 = y,\ \ y_2 = \frac{dy}{dx}, \ldots, y_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y$ (13) prelazi u sistem:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Napomenimo da nešto slično ne postoji u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, tj. parcijalna diferencijalna jednadžba višeg reda općenito nije ekvivalentna sistemu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. To je jedna od osnovnih razlika ovih dviju teorija koje osim imena imaju malo zajedničkog.

U vezi sa sistemom (12) vrijedi:

Teorem 1: Pretpostavimo da su zadani brojevi $x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ i funkcije $f_1, \ldots, f_n$. Ako su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ neprekidne i imaju neprekidne parcijalne derivacije u okolini tačke $x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, onda postoji jedan i samo jedan sistem funkcija $g_1, \ldots, g_n$ takav da vrijedi

$$\frac{dg_i(x)}{dx} = f_i[x, g_1(x), \ldots, g_n(x)] \quad \text{i}$$
$$g_i(x_0) = y_i^{(0)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

za sve x iz neke okoline tačke x_0.

Kratko rečeno, teorem 1 osigurava egzistenciju i jedinstvenost rješenja sistema (12) za proizvoljno odabrane početne uvjete u tački x_0 i uz vrlo široke pretpostavke o funkcijama f_i u okolini tačke $x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Mijenjamo li početne uvjete $y_i^{(0)}$ i tačku x_0, dobivamo nova i nova rješenja. Prema tome opće rješenje sistema (12) zavisi od n proizvoljnih konstanti, tj.

$$y_i(x) = g_i(x, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Uz izvjesne uvjete iz (14) možemo konstante $C_1, \ldots, C_n$ eliminirati, tj. možemo ih izraziti u obliku:

$$C_i = V_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Relaciju (15) treba shvatiti ovako: zamijenimo li u (15) $y_1, \ldots, y_n$ bilo kojim rješenjem $g_1, \ldots, g_n$ sistema (12), dobivamo konstantu za sve x dovoljno blize k x_0. Integralom sistema (12) zove se svaka funkcija $V(x, y_1, \ldots, y_n)$ od $n + 1$ varijable koja nije konstanta, ali je

$$V[x, g_1(x), \ldots, g_n(x)] = C \quad \text{(konstanta)}$$

za svako x iz neke okoline tačke x_0 i za svako rješenje $g_1, \ldots, g_n$ sistema (12). Kako je jednadžbom (14) definirana neka krivulja, to možemo reći da je integral sistema (12) funkcija od $n + 1$ promjenljive koja duž svakog rješenja (14) ostaje konstanta, ali općenito nije konstanta. Ako su $V_1, \ldots, V_m$ integrali sistema (12), onda je $W(V_1, \ldots, V_m)$ također integral toga sistema za proizvoljnu funkciju W. Opće rješenje sistema (12) ima oblik $W(V_1, \ldots, V_n)$, gdje su $V_1, \ldots, V_n$ nezavisni integrali sistema (12) (tj. ne postoji funkcija G takva da je $G(V_1, \ldots, V_n) = 0$ za sve x iz neke okoline).

3. Linearna parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda. Sistem (12) običnih diferencijalnih jednadžbi možemo pisati u obliku:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}$$

ili u potpuno simetričnom obliku:

$$\frac{dx_0}{a_0} = \frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n}, \qquad (16)$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ funkcije promjenljivih $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Integral sistema (16) je funkcija $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ koja duž svakog rješenja sistema (16) ostaje konstanta, a da V nije konstanta. Uzmemo li $x_0 = x$ kao nezavisnu promjenljivu i $x_1 = g_1(x), \ldots, x_n = g_n(x)$ kao rješenje sistema (16), onda je $V[x, g_1(x), \ldots, g_n(x)] = C$. Odavde je

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n = 0. \qquad (17)$$

Budući da su g_i rješenja sistema (16), to je $dx_i = \lambda a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sa nekim faktorom λ. Stoga (17) daje:

$$a_0 \frac{\partial V}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0. \qquad (18)$$

Relacija (18) predstavlja identitet duž rješenja $g_1, \ldots, g_n$ sistema (16). Budući da kroz svaku tačku prolazi po jedno rješenje toga sistema, to je (18) identitet po promjenljivim $x_0, \ldots, x_n$. To znači da je V rješenje homogene linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$a_0 \frac{\partial u}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \qquad (19)$$

Dakle svaki integral sistema (16) predstavlja rješenje jednadžbe (19). Budući da vrijedi i obrat, tj. svako rješenje jednadžbe (19) predstavlja integral sistema (16), to se proučavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe (19) svodi na proučavanje sistema (16) običnih diferencijalnih jednadžbi. Dakle, opće rješenje jednadžbe (19) ima oblik $W(V_1, \ldots, V_n)$ gdje su $V_1, \ldots, V_n$ nezavisni integrali sistema (16).

Kvazilinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b_0 \qquad (20)$$

svodimo na linearnu jednadžbu tako da rješenje tražimo u implicitnom obliku $V(x_1, \ldots, x_n, u) = C$. Deriviramo li V po x_i, dobivamo:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

što zajedno sa (20) daje:

$$b_0 \frac{\partial V}{\partial u} + b_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + b_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0,$$

pa je problem rješavanja jednadžbe (20) ekvivalentan sistemu linearnih jednadžbi:

$$\frac{dx_0}{b_0} = \frac{dx_1}{b_1} = \ldots = \frac{dx_n}{b_n} \qquad (u = x_0).$$

Primjer: Riješimo jednadžbu:

$$x z \frac{\partial u}{\partial x} + y z \frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (21)$$

Pripadni sistem linearnih jednadžbi glasi:

$$\frac{dx}{x z} = \frac{dy}{y z} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}. \qquad (22)$$

Odavde je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y z}{x z} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x - \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1.$$

Iz $\dfrac{dx}{x z} = \dfrac{dz}{-(x^2 + y^2)}$ slijedi

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-(1 + C_1^2) x} \Rightarrow (1 + C_1^2) x^2 + z^2 = C_2.$$

Odavde i iz $y/x = C_1$ dobivamo

$$V_1 \equiv \frac{y}{x} = C_1, \qquad V_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Budući da su V_1 i V_2 dva nezavisna integrala, to je

$$u(x, y, z) = W\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right)$$

(W proizvoljna funkcija) opće rješenje jednadžbe (21).

4. Opća parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda. Rješavanje jednadžbe:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (23)$$

$$\left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n\right)$$

svodi se na rješavanje tzv. karakterističnog sistema običnih diferencijalnih jednadžbi. Taj sistem glasi:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n} =$$

$$= \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}, \qquad (24)$$

gdje je $Z = \dfrac{\partial F}{\partial u}$ i $X_k = \dfrac{\partial F}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Ako se (23) simetrizira, tj. u tretira kao promjenljiva $u = x_0$ i rješenje traži u obliku $V(x_1, \ldots, x_n, x_0) = C$, onda

$$p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_0}$$

zajedno sa (23) daje parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za funkciju V i njezine derivacije. Riješi li se tako dobivena jednadžba po $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ (x je jedna od pogodno odabranih promjenljivih), dobivamo jednadžbu oblika:

$$p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Pripadni karakteristični sistem običnih diferencijalnih jednadžbi glasi:

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \text{ i}$$

$$\frac{dV}{dx} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \qquad (25)$$

Sistem (25) od $2n$ običnih diferencijalnih jednadžbi može se napisati za svaku funkciju H od $2n$ promjenljivih $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Takav sistem zove se *kanonski sistem* i na njega vode mnogi problemi mehanike. Funkcija H zove se *Hamiltonova funkcija* i igra važnu ulogu u klasičnoj i kvantnoj fizici. U slučaju problema dvaju tijela imamo:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left(p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad k \text{ konstanta}\right),$$

a odgovarajuća diferencijalna jednadžba glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Razmatranja tačaka 3 i 4 pokazuju kako se mogu rješavati parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda i da rješenja ovise o proizvoljnoj funkciji. Problemu jedinstvenosti rješenja posvećene su naredne dvije tačke.

5. Cauchyjev problem za jednadžbe prvog reda. Rješenje u linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$a p + b q = c \qquad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (26)$$

geometrijski predstavlja plohu $z = u(x, y)$ [x, y, z pravokutne koordinate u prostoru. Vrijednost funkcije $u(x, y)$ nanosimo na aplikatu]. Budući da kod običnih diferencijalnih jednadžbi zadavanje funkcije i njezinih derivacija do određenog reda u danoj tački jednoznačno određuje rješenje obične diferencijalne jednadžbe, to očekujemo da kroz svaku prostornu krivulju C možemo položiti jednu i samo jednu plohu $z = u(x, y)$ koja je rješenje jednadžbe (26). Problem određivanja rješenja jednadžbe (26) koje ide kroz zadanu krivulju zove se *Cauchyjev problem*. Označimo li sa C_0 projekciju krivulje C na ravninu x, y, onda Cauchyjev problem glasi: odredi rješenje jednadžbe (26) koje na krivulji C_0 prima unaprijed propisane vrijednosti. Ako navedeni problem ima rješenje, onda funkciju u, pa dakle i sve njezine derivacije, moramo moći odrediti pomoću koeficijenata a, b, c jednadžbe (26) i podataka o krivulji C_0. Pretpostavimo da je u rješenje jednadžbe (26) i da je $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$ jednadžba krivulje C kroz koju ide rješenje u, tj. $\zeta(t) = u[\xi(t), \eta(t)]$ (v. *Analitička geometrija*). Odavde deriviranjem po t dobivamo:

$$\zeta' = p\,\xi' + q\,\eta'. \tag{27}$$

Iz (26) i (27) dobivamo:

$$p = \frac{c\eta' - b\zeta'}{D}, \qquad q = \frac{a\zeta' - c\xi'}{D}, \tag{28}$$

gdje je

$$D = a\,\eta' - b\,\xi'. \tag{29}$$

Deriviramo li (26) po x i izračunamo $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ iz (28), dobivamo sistem od dvije jednadžbe za nepoznanice $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ determinanta kojeg je D. Odavde se te dvije nepoznanice izračunaju. Ova razmatranja vode na zaključak da se sve derivacije funkcije u mogu izraziti pomoću a, b, c, ξ, η i ζ. Izračunamo li na taj način sve derivacije funkcije u u tački (x_0, y_0) krivulje C_0, možemo napisati (Taylorov) red

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij}(x - x_0)^i\,(y - y_0)^j \qquad c_{ij} = \frac{1}{i!\,j!}\cdot\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\,\partial y^j}$$

i očekivati da on konvergira funkciji u (v. *Diferencijalni račun*). Ako su ispunjeni ovi uvjeti:

a) funkcije a, b, c mogu se razviti u redove potencija (kratko: diferencijalna jednadžba je analitična);

b) funkcije ξ, η mogu se razviti u red potencija (krivulja C_0 je analitična);

c) funkcija ζ može se razviti u red potencija (početni uvjeti su analitični) i

d) $D \neq 0$, $[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2 \neq 0$ duž krivulje C_0,

onda navedeni red konvergira u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) i daje rješenje u jednadžbe (26). Ovo rješenje je analitično (može se razviti u red potencija) i jedino je rješenje s tim svojstvima. Podvucimo još jedanput da koeficijente navedenog reda možemo izračunati poznavajući samo funkcije a, b, c, ξ, η, ζ. Ovaj rezultat je specijalan slučaj vrlo općenitog teorema Cauchy-Kovalevske, koga jedna varijanta glasi:

Teorem 2. Neka je

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\Big(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_N; \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \ldots\Big),$$

$$(i, j = 1, \ldots, N; \qquad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leq n_j; \qquad k_0 < n_j)$$

sistem od N parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za funkcije $u_1, \ldots, u_N$ promjenljivih $t, x_1, \ldots, x_n$. Pretpostavimo da su za $t = t_0$ zadani početni uvjeti

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (t = t_0; \quad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1).$$

Ako su funkcije F_i analitičke u okolini tačke $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ i sve funkcije $\varphi_j^{(k)}$ analitičke u okolini tačke $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, onda postoji jedan i samo jedan sistem analitičkih funkcija $u_1, \ldots, u_N$ koji je rješenje navedenog sistema parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i koji za $t = t_0$ zadovoljava početne uvjete.

Za linearne jednadžbe teorem 2 poopćio je Holmgren dokazavši da linearna jednadžba s analitičkim koeficijentima i u slučaju eventualno neanalitičkih početnih uvjeta, ukoliko uopće ima rješenje, ima jedinstveno rješenje. Jedno od posljednjih poopćenja teorema 2 napravio je A. Friedman 1958. Teorem 2 je jedan od vrlo rijetkih teorema opće prirode u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Uvjeti pod kojima on vrijedi suviše su jaki (analitičnost), ali je i rezultat (analitičnost) također suviše dobar. Područje u kome rješenje postoji općenito se ne da ustanoviti, pa taj teorem ima samo teorijsku vrijednost. U ostalom dijelu ovoga prikaza mi ćemo izbjegavati taj teorem radeći s dosta specijalnim tipovima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Da se uvjeti teorema 2 ne mogu sasvim izostaviti pokazuje primjer što slijedi (O. Perron 1928). Sistem jednadžbi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad u(0, y) = 0$$

$$a\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = f(x + y), \; v(0, y) \equiv 0 \; (a \text{ konstanta})$$

ima rješenje za neprekidno f ako je $a > 0$; za dva puta neprekidno derivabilno f ako je $a = 0$ i za analitičko f ako je $a < 0$. Ako su navedeni zahtjevi ispunjeni, rješenje je analitičko. No ako je $a < 0$ a f nije analitička funkcija, navedeni sistem nema rješenja uopće. Dugo se smatralo da linearna parcijalna diferencijalna jednadžba sa dosta glatkim koeficijentima ima uvijek rješenja ukoliko se ne zahtijeva da to rješenje zadovoljava neke dodatne uvjete, kao u slučaju navedenog primjera. To mišljenje opovrgao je H. Lewy tek 1957, davši primjer para linearnih jednadžbi prvog reda u tri nezavisne promjenljive koji nema rješenja ni u jednoj po volji maloj kugli. Te jednadžbe glase:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} - 2x\frac{\partial v}{\partial t} = g'(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2y\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

gdje je g neprekidna funkcija sa svim svojim derivacijama, ali ne analitička. L. Hörmander je dokazao da ovaj sistem nema rješenja ni u smislu distribucija i on je posvetio nekoliko radova parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje nemaju rješenja uopće.

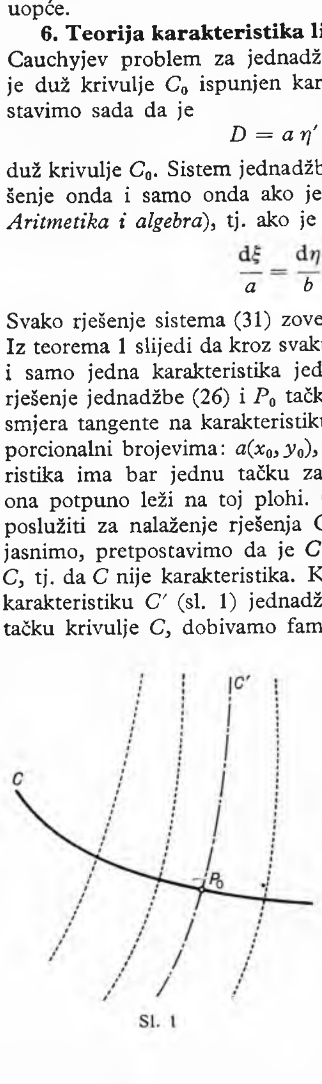
6. Teorija karakteristika linearnih jednadžbi prvog reda. Cauchyjev problem za jednadžbu (26) rješava se pozitivno ako je duž krivulje C_0 ispunjen karakteristični uvjet $D \neq 0$. Pretpostavimo sada da je

$$D = a\,\eta' - b\,\xi' = 0 \tag{30}$$

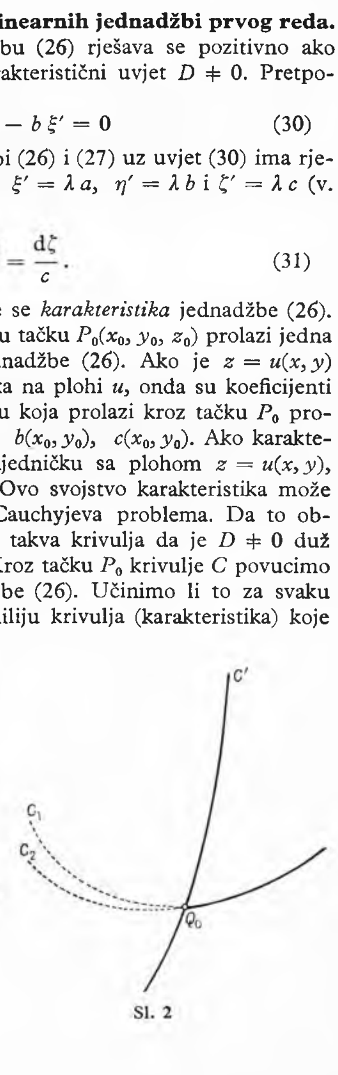
duž krivulje C_0. Sistem jednadžbi (26) i (27) uz uvjet (30) ima rješenje onda i samo onda ako je $\xi' = \lambda a$, $\eta' = \lambda b$ i $\zeta' = \lambda c$ (v. *Aritmetika i algebra*), tj. ako je

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{\mathrm{d}\eta}{b} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{c}. \tag{31}$$

Svako rješenje sistema (31) zove se *karakteristika* jednadžbe (26). Iz teorema 1 slijedi da kroz svaku tačku $P_0(x_0, y_0, z_0)$ prolazi jedna i samo jedna karakteristika jednadžbe (26). Ako je $z = u(x, y)$ rješenje jednadžbe (26) i P_0 tačka na plohi u, onda su koeficijenti smjera tangente na karakteristiku koja prolazi kroz tačku P_0 proporcionalni brojevima: $a(x_0, y_0)$, $b(x_0, y_0)$, $c(x_0, y_0)$. Ako karakteristika ima bar jednu tačku zajedničku sa plohom $z = u(x, y)$, ona potpuno leži na toj plohi. Ovo svojstvo karakteristika može poslužiti za nalaženje rješenja Cauchyjeva problema. Da to objasnimo, pretpostavimo da je C takva krivulja da je $D \neq 0$ duž C, tj. da C nije karakteristika. Kroz tačku P_0 krivulje C povucimo karakteristiku C' (sl. 1) jednadžbe (26). Učinimo li to za svaku tačku krivulje C, dobivamo familiju krivulja (karakteristika) koje



Sl. 1



Sl. 2

obrazuju (prekrivaju) plohu $z = u(x, y)$, za koju je lako vidjeti da zadovoljava jednadžbu (26).

Odavde se vidi da se kroz svaku krivulju C koja nije karakteristika može položiti jedinstveno rješenje jednadžbe (26), tj. Cauchyjev problem ima jedno i samo jedno rješenje ako C nije karakteristika. Uzmimo sada neku tačku Q_0 (sl. 2); kroz nju povucimo karakteristiku C' i uzmimo dvije krivulje C_1 i C_2 koje sijeku karakteristiku C' u tački Q_0 i identične su sa »jedne strane« od Q_0, ali sa druge nisu identične. Rješenja u_1 i u_2 jednadžbe (26) koja idu kroz C_1 odnosno C_2 sijeku se duž C'; desno od C' su identična, ali se lijevo razdvajaju. Izlazi dakle da kroz svaku karakteristiku prolazi beskonačno rješenja jednadžbe (26), da se ta rješenja granaju duž karakteristike. Dakle Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje ako su početni uvjeti zadani duž projekcije karakteristike na ravninu x, y.

LAPLACEOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

7. Definicija i izvod jednadžbe. Diferencijalna jednadžba

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

zove se *Laplaceova* diferencijalna jednadžba, a pripadna nehomogena jednadžba:

$$\Delta u = f \qquad (f \text{ zadana funkcija}) \tag{2}$$

zove se *Poissonova jednadžba*. U jednadžbama (1) i (2) Δ označava tzv. Laplaceov diferencijalni izraz koji u pravokutnom Kartezijevom sustavu n-dimenzionalnog prostora ima oblik

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{3}$$

Teorija Laplaceove i Poissonove jednadžbe zove se *teorija potencijala*. Te jednadžbe spadaju u najbolje proučene diferencijalne jednadžbe. Navedimo neke od mnogih problema koji vode na jednadžbu (1) ili (2).

a) Pretpostavimo da je oblast D prostora ispunjena homogenim izotropnim tijelom koje je izolirano od ostalog dijela prostora i čije se toplinsko stanje tokom vremena ne mijenja. Označimo li sa $u(x_1, x_2, x_3)$ temperaturu tijela u tački (x_1, x_2, x_3) oblasti D, funkcija u zadovoljava jednadžbu (1) ($n = 3$) u svakoj tački oblasti D. Ovdje se nameće ovaj problem: ako je poznata temperatura u svakoj tački ruba oblasti D, kako odrediti temperaturu u tačkama koje su unutar oblasti D?

b) Brzina $\vec{v}$ stacionarnog bezvrtložnog protjecanja nestlačive tekućine može se prikazati u obliku $\vec{v} = \operatorname{grad} u$. Odatle slijedi da potencijal u brzine $\vec{v}$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu: $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$.

c) Privlačna sila $\vec{F}$ koju prouzrokuje masa raspoređena po oblasti D sa gustoćom f može se izraziti u obliku $\vec{F} = \operatorname{grad} u$. Potencijal u zadovoljava Laplaceovu jednadžbu u tačkama van oblasti D, a u oblasti D Poissonovu jednadžbu $\Delta u = -4\pi f$. Sličan rezultat vrijedi i za potencijal elektrostatskog polja.

d) Pretpostavimo da se u nedeformiranom stanju mirna membrana podudara sa oblasti D ravnine (x, y). Deformirajmo rub S membrane samo u vertikalnom smjeru tako da je jednadžba toga ruba dana funkcijom φ. Uslijed toga membrana se podudara sa plohom $z = u(x, y)$, koja ima svojstvo da je $u(x, y) = \varphi(x, y)$ za tačke (x, y) sa ruba ∂D. Da bismo našli funkciju u, pretpostavimo da je potencijalna energija membrane proporcionalna promjeni površine te membrane, tj. sa

$$\int\limits_D \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int\limits_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

što je, zanemarujući veličine višeg reda, proporcionalno integralu:

$$\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Da bi membrana bila u ravnotežnom položaju, potencijalna energija mora biti minimalna, tj. funkcija u među svim funkcijama koje se na ∂D podudaraju sa φ odlikuje se time što navedenom integralu daje minimum. Odavde uz izvjesne pretpostavke (v. *Varijacioni račun*) slijedi da funkcija u zadovoljava jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ako je membrana opterećena (vertikalno) silom gustoće f, funkcija u zadovoljava jednadžbu $\Delta u = f$. Treba dakle naći ono rješenje Laplaceove odnosno Poissonove jednadžbe koje se na rubu ∂D podudara sa unaprijed zadanom funkcijom φ (v. t. 10 ovog prikaza).

8. Harmonijske funkcije i elementarna rješenja Laplaceove jednadžbe. Neprekidna funkcija u koja ima neprekidne parcijalne derivacije i svojstvo da je $\Delta u = 0$ u nekoj oblasti D zove se *harmonijska funkcija* u oblasti D. U slučaju $n = 2$ teorija Laplaceove jednadžbe u biti je teorija analitičkih funkcija jedne kompleksne promjenljive (v. *Teorija funkcija*). Veza između tih dviju teorija osniva se na činjenici da je realni i imaginarni dio analitičke funkcije $F(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ harmonijska funkcija. Nadalje za zadanu harmonijsku funkciju u ($n = 2$) u oblasti D postoji harmonijska funkcija v takva da je $u + \mathrm{i}\, v$ analitička funkcija u D (ne nužno jednoznačna).

Laplaceova jednadžba ima izvjesna tzv. kovarijantna svojstva. Zamijenimo li varijable $x_1, \ldots, x_n$, novim varijablama $y_1, \ldots, y_n$ tako da se nove varijable dobivaju translacijom $y_k = a_k - x_k$ (a_k konstante; $k = 1, \ldots, n$), ili homotetijom: $y_k = a\, x_k$ ($k = 1, \ldots, n$; konstanta $a > 0$), ili rotacijom: $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}; \quad \delta_{ij} = 1 \ za \ i = j \ \text{ i } \ \delta_{ij} = 0 \ za \ i \neq j\right)$ ili uzastopnom primjenom navedenih transformacija, jednadžba (1) ima isti oblik u odnosu na nove varijable. Svojstvo funkcije da bude harmonijska očuvava se pri tim transformacijama. Obratno Δ je jedini, s tačnošću do konstantnog faktora, linearni diferencijalni izraz sa konstantnim koeficijentima (v. t. 21 ovog prikaza) koji je kovarijantan u odnosu na navedene transformacije. Pored toga, u slučaju $n = 2$, Δ je kovarijantno u odnosu na sva konformna preslikavanja (v. *Teorija funkcija*).

Budući da je jednadžba (1) kovarijantna u odnosu na rotacije prostora, možemo očekivati da ona ima rješenja koja zavise samo od udaljenosti $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Potražimo rješenja jednadžbe (1) koja zavise samo od udaljenosti $u = u(r)$. Izrazimo li Δ u polarnom koordinatnom sistemu, $\Delta u(r) = 0$ povlači

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0,$$

odakle dobivamo:

$$\begin{aligned} u(r) &= a\, r^{2-n} + b && \text{za} \quad n > 2 \quad \text{i} \\ u(r) &= a \ln \frac{1}{r} + b && \text{za} \quad n = 2, \end{aligned} \tag{4}$$

gdje su a i b konstante. Rješenje (4) ($a \neq 0$) zove se fundamentalno ili elementarno rješenje jednadžbe (1). Fundamentalno rješenje (4) je harmonijska funkcija za $r \neq 0$. Da opravdamo naziv fundamentalno rješenje, pretpostavimo da je $n = 2$; Q proizvoljna ali čvrsta tačka oblasti D; r udaljenost od Q i u funkcija koja ima neprekidne druge derivacije u zatvorenoj oblasti $\bar{D} = \partial D \cup D$ (∂D označava rub oblasti D). Koristeći se Greenovim formulama (v. *Diferencijalni račun*) može se dokazati relacija:

$$2\pi u(Q) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{r}\, \mathrm{d}s - \int\limits_{\partial D} u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n}\, \mathrm{d}s - \iint\limits_D \ln \frac{1}{r}\, \Delta u\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{5}$$

gdje $\frac{\partial u}{\partial n}$ označava derivaciju funkcije u u smjeru vanjske normale (v. *Diferencijalni račun*) na ∂D. Relacija (5), odnosno analogne relacije u slučaju $n > 2$, igraju osnovnu ulogu u proučavanju jednadžbe (1). Tom relacijom izražena je vrijednost funkcije u u tački Q pomoću njezinih svojstava na rubu ∂D i na D. (Usporedi Cauchyjevu formulu u članku *Teorija funkcija*). U relaciji (5) važnu ulogu ima funkcija $\ln \frac{1}{r}$, tj. elementarno rješenje jednadžbe (1) ($a = 1$, $b = 0$).

9. Svojstva harmonijskih funkcija. Budući da osnovna svojstva harmonijskih funkcija ne zavise od n, možemo uzeti $n = 2$. Pretpostavimo da je $K(Q, R)$ krug radijusa R sa središtem u Q i da je taj krug sadržan u oblasti D u kojoj je funkcija u harmonijska. Relacija (5) za slučaj oblasti $K(Q, R)$ daje

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K} u \, \mathrm{d}s, \tag{6}$$

što pokazuje da je srednja vrijednost harmonijske funkcije po kružnici ∂K jednaka vrijednosti te funkcije u središtu Q te kružnice. Kažemo da funkcija v ima svojstvo srednje vrijednosti u oblasti D ako je za svaki zatvoreni krug $K = K(Q, R)$ iz oblasti D srednja vrijednost funkcije v po ∂K jednaka vrijednosti te funkcije u središtu kruga K. Harmonijska funkcija ima svojstvo srednje vrijednosti u oblasti gdje je ona harmonijska. Interesantno je da vrijedi i obrat, tj. neprekidna funkcija koja ima svojstvo srednje vrijednosti u oblasti D u toj oblasti je harmonijska. Izlazi dakle da neprekidnost i svojstvo srednje vrijednosti povlače derivabilnost. Štaviše, takva funkcija ima derivacije svakog reda. Svojstvo jednadžbe (1) da svako neprekidno rješenje te jednadžbe mora biti glatko (čak i analitično) sa fizikalnog stanovišta sasvim je jasno. Jednadžba (1) opisuje stacionarna stanja ili stanja ravnoteže pa je jasno da sistem prije nego prijeđe u takvo stanje mora izgladiti sve nesimetrije ili nabore.

Harmonijska funkcija, ukoliko nije konstanta, dostiže svoj maksimum i minimum na rubu ∂D oblasti D u kojoj je ona harmonijska. Ako su dvije funkcije u_1 i u_2 harmonijske u oblasti D i neprekidne u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, tada $u_1 = u_2$ na ∂D povlači $u_1 = u_2$ u D. Dakle svojstvima harmonijske funkcije na rubu oblasti određena su njezina svojstva u oblasti. Ako je D ograničena oblast i u_n niz harmonijskih funkcija u D neprekidnih na $\overline{D}$, i ako u_n uniformno konvergira funkciji u na rubu ∂D, onda je u harmonijska funkcija u D. Označimo li sa δ bilo koju derivaciju, δu_n uniformno konvergira funkciji δu u G. Nenegativna u krugu $K(Q, R)$ harmonijska funkcija u ima svojstvo:

$$\frac{R-r}{R+r} u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R+r}{R-r} u(Q) \qquad (r = \overline{QP}).$$

10. Dirichletov problem. Pretpostavimo da je D ograničena oblast i f neprekidna funkcija zadana na rubu ∂D oblasti D. Dirichletov problem glasi: da li postoji funkcija u harmonijska u D, neprekidna na $\overline{D} = \partial D \cup D$ i takva da se na rubu podudara sa funkcijom f, tj. $u(P) = f(P)$, $P \in \partial D$. Ovaj problem uz zadano f može imati najviše jedno rješenje. Ako su f_1 i f_2 dvije neprekidne funkcije ∂D takve da je $-\varepsilon \leq f_1 - f_2 \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ konstanta) i u_1, u_2 odgovarajuća rješenja Dirichletovog problema, onda je $-\varepsilon \leq u_1 - u_2 \leq \varepsilon$ u G. Zaista funkcija $u_1 - u_2$ je harmonijska i na rubu se podudara s funkcijom $f_1 - f_2$. Budući da $u_1 - u_2$ na rubu ∂D dostiže svoj maksimum (minimum), to je maksimum (minimum) funkcije $u_1 - u_2$ isti kao i funkcije $f_1 - f_2$, što povlači tvrdnju. Ako se dakle funkcije f_1, f_2 (rubni uvjeti) malo razlikuju, pripadna se rješenja Dirichletovog problema, ukoliko postoje, također malo razlikuju. Drugim riječima, rješenje Dirichletovog problema neprekidno zavisi od rubnih uvjeta, tj. od funkcije f. Kaže se također da je problem rubnih uvjeta korektno postavljen (v. t. 14 ovog prikaza).

Ako je D jedinični krug iz koga je središte izbačeno i f funkcija koja se na jediničnoj kružnici ∂D poništava a u središtu kruga D prima vrijednost 1, onda za tu oblast i tako definiranu funkciju f Dirichletov problem nema rješenja. Oblast D zove se Dirichletova oblast ako Dirichletov problem ima rješenje za svaku funkciju f neprekidnu na ∂D. Krug je Dirichletova oblast. Svaka ograničena jednostruko povezana oblast je Dirichletova oblast. Općenito svaka oblast konačne povezanosti čiji rub ne sadrži izolirane tačke Dirichletova je oblast. U slučaju $n = 3$ kugla je Dirichletova oblast (za opći slučaj vidi radove S. L. Soboleva u popisu literature).

Neka je K krug radijusa R, r i φ polarne koordinate i $f(\varphi)$ na ∂K definirana funkcija

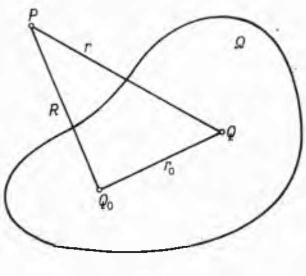
$$[f(0) = f(2\pi)].$$

Tada je

$$u(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2} \, \mathrm{d}\vartheta \tag{7}$$

harmonijska funkcija u K i $\lim (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = f(\vartheta)$ $\quad (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \to R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})$. Formula (7) kojom je Dirichletov problem za krug eksplicitno riješen zove se Poissonova formula. Pored navedenog Dirichletovog problema poznat je i tzv. Neumannov problem: za neprekidnu funkciju f na ∂D nađi harmonijsku funkciju u u D, neprekidnu na $\overline{D}$ i takvu da je $\frac{\partial u}{\partial n} = f$ na ∂D. U slučaju $n = 2$ Neumannov problem može se svesti na Dirichletov problem.

11. Potencijali. Masa m koncentrirana u tački Q proizvodi u tački $P \neq Q$ Newtonov potencijal $u(P) = \frac{m}{r}$, gdje je r udaljenost tačke P od tačke Q. Ako masa nije koncentrirana u jednoj tački nego je razmazana po oblasti Ω prostora s gustoćom f, onda je potencijal $u(P)$ u tački P koja nije u Ω dan izrazom:



Sl. 3

$$u(P) = \int_\Omega \frac{f(Q)}{r} \, \mathrm{d}\Omega_Q \qquad (r = \overline{PQ}). \tag{8}$$

Uzmimo neku tačku Q_0 u Ω i razvijmo funkciju $1/r$ u red u odnosu na tačku Q_0. Dobivamo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{r_0^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial r_0^k} \left(\frac{1}{R}\right) \tag{9}$$

(sl. 3), gdje je $r_0 = \overline{Q_0 Q} < \overline{Q_0 P} = R$ i $\frac{\partial}{\partial r}$ znači derivaciju u smjeru $\overrightarrow{Q_0 Q}$. Uvrstimo li (9) u (8) dobivamo:

$$u(P) = u_0(P) + u_1(P) + \ldots, \tag{10}$$

gdje je

$$u_n(P) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_\Omega f r_0^n \frac{\partial^n}{\partial r_0^n} \left(\frac{1}{R}\right) \mathrm{d}\Omega_Q \tag{11}$$

tzv. potencijal n-tog reda ($n = 0, 1, \ldots$). Potencijal nultog reda $u_0(P) = \frac{1}{R} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\Omega_Q$ isti je kao da je sva masa koncentrirana u tački Q_0. Potencijal u_1 u vezi je s potencijalom dipola, u_2 s potencijalom kvadrupola itd. Budući da se u jednadžbi (8) pod znakom integrala pojavljuje funkcija $1/r$, tom je jednadžbom definirana harmonijska funkcija van oblasti Ω. Analogno je u_n harmonijska funkcija van oblasti Ω. Ako je masa razmazana po plohi S, potencijal u tački P koja nije na S dan je izrazom:

$$u(P) = \iint_S \frac{\sigma(Q)}{r} \, \mathrm{d}S_Q, \tag{12}$$

gdje je σ površinska gustoća. Potencijal (12) zove se potencijal jednostrukog sloja, a potencijal

$$u(P) = \iint_S \frac{\tau(Q)}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}S_Q \tag{13}$$

zove se potencijal dvostrukog sloja. Ovdje $\frac{\partial}{\partial n}$ označuje derivaciju u smjeru vektora $\overrightarrow{QP}$.

Potencijali prostog i dvostrukog sloja predstavljaju također harmonijske funkcije van plohe S.

Ako je S oblast u ravnini, f neprekidna funkcija definirana u S, C krivulja u ravnini i σ, τ neprekidne funkcije na C, onda se funkcija:

$$u(P) = \iint_S f(Q) \ln \frac{1}{r} \, \mathrm{d}S_Q \tag{14}$$

zove logaritamski potencijal;

$$u_1(P) = \int_C \sigma(Q) \ln \frac{1}{r} \, \mathrm{d}s_Q \tag{15}$$

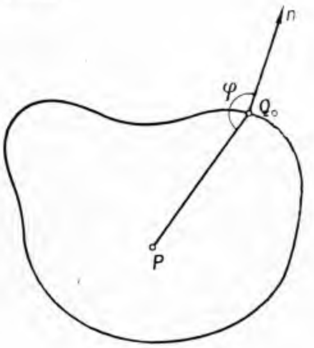
zove se potencijal prostog sloja i

$$u_2(P) = \int_C \tau(Q) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \, ds_Q \tag{16}$$

potencijal dvostrukog sloja. Uz ovu terminologiju relacija (5) pokazuje da je proizvoljna funkcija u zbroj od tri potencijala: 1. potencijala prouzrokovanog masom (nabojem) razmazanom po D sa gustoćom $-\Delta u/2\pi$; 2. potencijala prostog sloja razmazanog po ∂D sa gustoćom $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial u}{\partial n}$ i 3. potencijala dvostrukog sloja razmazanog po ∂D sa gustoćom: $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)$. Ako su σ i τ neprekidne funkcije, sa (15) i (16) definirane su harmonijske funkcije van krivulje C. Analogno relacija (14) definira harmonijsku funkciju van oblasti S. Uz dosta široke pretpostavke o funkciji f može se dokazati da je $\Delta u = -2\pi f$, tj. u oblasti S relacijom (14) definirano je rješenje Poissonove jednadžbe $\Delta u = -2\pi f$. Obratno, ako je S Dirichletova oblast i f neprekidno derivabilna funkcija, jednadžbom (14) određeno je jedinstveno rješenje jednadžbe $\Delta u = -2\pi f$ koje iščezava na rubu ∂S. Potencijal dvostrukog sloja doživljava skok prilikom prelaza preko krivulje C.

Tako je $\lim\limits_{P\to Q_0} u_2(P) = u_2(Q_0) - \pi\tau(Q_0)$ kada P teži iznutra tački Q_0 na rubu C. Analogno je $\lim\limits_{P\to Q_0} u_2(P) = u_2(Q_0) + \pi\tau(Q_0)$ kada P teži prema Q_0 izvana.

Ovo svojstvo potencijala dvostrukog sloja pogodno je za rješavanje Dirichletovog problema pomoću integralnih jednadžbi (v. članak *Integralne jednadžbe*).



Sl. 4

Ako je f zadana neprekidna funkcija na rubu ∂D oblasti D, rješenje se Dirichletovog problema dobiva kao potencijal dvostrukog sloja što ga proizvodi masa (naboj) gustoće τ na rubu ∂D s tim da je τ rješenje integralne jednadžbe:

$$\tau(P) = -\frac{f(P)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_C \tau(Q)\frac{\cos\varphi}{r}\, ds_Q \tag{17}$$

$$\left[C = \partial D, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\varphi}{r}\right] \qquad \text{(vidi sl. 4).}$$

VALNA JEDNADŽBA

12. Definicija i izvod valne jednadžbe. Parcijalna diferencijalna jednadžba:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \qquad (c \text{ konstanta}) \tag{1}$$

zove se valna jednadžba u n-dimenzionalnom prostoru za funkciju u promjenljivih $x_1, \ldots, x_n, t$. Jednadžba (1) mnogo je proučavana i imala je veliki utjecaj na razvoj matematike (v. historijski uvod). Jednadžbom (1) za $n = 1$ opisuje se transverzalno titranje žice i longitudinalno titranje štapa; za $n = 2$ poprečno titranje membrane; za $n = 3$ širenje zvuka u prostoru. Maxwellove jednadžbe elektrodinamike u vakuumu pomoću potencijala opisuju se jednadžbama tipa (1), itd. Stoga je korisno varijablu t interpretirati kao vrijeme, a varijable $x_1, \ldots, x_n$ kao prostorne koordinate.

Pretpostavimo da mirna membrana zauzima oblast D ravnine x, y i da je pobuđena na transverzalno titranje. Sa $u(x, y, t)$ označujemo otklon membrane u tački (x, y) u vrijeme t. U slučaju slobodnog titranja membrane (kad nema vanjskih sila) Lagrangeova funkcija L ima oblik:

$$L = T - U = \frac{\varrho}{2}\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dy - \frac{\mu}{2}\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

gdje su ϱ i μ konstante koje karakteriziraju fizikalna svojstva membrane. Gibanje membrane između dva momenta t_0 i t_1 odvija se tako da integral

$$\int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_D \cdots \tag{2}$$

bude ekstremalan (Hamiltonov princip). Integral u jednadžbi (2) je integral po cilindru u prostoru (x, y, t). Označimo li sa φ_0 vrijednost funkcije u na donjoj bazi cilindra i sa φ_1 vrijednost funkcije u na gornjoj bazi cilindra, tj.

$$u(x, y, t_0) = \varphi_0(x, y), \qquad u(x, y, t_1) = \varphi_1(x, y), \tag{3}$$

onda funkcija u mora biti takva da integral (2) čini ekstremalnim i da zadovoljava uvjete (3). Odavde uz dosta općenite pretpostavke slijedi da u mora zadovoljavati jednadžbu (1) i uvjete (3). Podvucimo da se ovdje zahtijeva poznavanje funkcije u samo na bazama spomenutog cilindra, a ne na cijelom cilindru.

13. Titranje beskonačno duge žice. Uzmimo da se os x podudara s konfiguracijom nategnute homogene mirne žice. Izvučemo li žicu iz položaja ravnoteže i onda je ispustimo, ona počne titrati uslijed naponâ koji djeluju u žici. Pretpostavimo da žica titra u ravnini i uzmimo u obzir samo transverzalna titranja. Na mjestu x u vrijeme t otklon žice od ravnotežnog položaja označimo sa $u(x, t)$. Funkcijom $u(x, t)$ titranje žice je potpuno određeno. Na osnovu zakona mehanike uz dosta općenite pretpostavke izvodi se da funkcija u zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

u kojoj konstanta c ima dimenziju brzine i zavisi od napetosti i linearne gustoće žice. Iz mehanike materijalne tačke poznato je da je gibanje materijalne tačke potpuno određeno ako u nekom trenutku t_0 znamo položaj tačke i njezinu brzinu. Zamislimo li žicu kao sistem od mnogo materijalnih tačaka, možemo očekivati da poznavanje položaja i brzine svakog elementa žice u trenutku t_0 određuje titranje žice, tj. da ono određuje funkciju u. Prema tome tzv. početni ili Cauchyjevi uvjeti za titranje žice imaju ovaj oblik:

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi(x), \tag{5}$$

gdje su φ i ψ poznate funkcije. Funkcija φ određuje konfiguraciju žice u trenutku t_0, a funkcija ψ raspored brzina (impulsa) u tom trenutku. Uzmemo li da je $t_0 = 0$, iz (4) i (5) dobivamo:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z)\, dz, \tag{6}$$

a to je tzv. d'Alembertovo rješenje jednadžbe (4) uz početne uvjete (5).

Da pretpostavkom $t_0 = 0$ nije narušena općenitost slijedi iz kovarijantnosti jednadžbe (4) s obzirom na translaciju vremena. Ta jednadžba isto kao i jednadžba (1) kovarijantna je također i s obzirom na inverziju vremena, tj. s obzirom na zamjenu t sa $-t$. Uzmimo $n = 3$ i stavimo $x_0 = c\,t$. Jednadžba (1) kovarijantna je s obzirom na translacije $x_k' = a_k + x_k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$; s obzirom na homotetije $x_k' = \lambda x_k$ $(\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, 3)$ i s obzirom na linearnu transformaciju $x_k' = \sum\limits_{j=0}^{3} a_{kj} x_j$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ čiji koeficijenti obrazuju matricu $A = (a_{kj})$ takvu da je $A'JA = J$. Ovdje je J dijagonalna matrica četvrtog reda: $J_{11} = J_{22} = J_{33} = 1$, $J_{44} = -1$; A' označava transponiranu matricu matrice A. Svaka linearna transformacija s realnim koeficijentima čija matrica ima svojstvo da je $A'JA = J$ zove se *Lorentzova transformacija.* Skup svih Lorentzovih transformacija obrazuje grupu. Sve Lorentzove transformacije i sve translacije obrazuju tzv. nehomogenu Lorentzovu grupu na kojoj se osniva specijalna teorija relativnosti. Obratno: linearni diferencijalni izraz drugog reda sa konstantnim koeficijentima (v. t. 20 ovog prikaza) koji je kovarijantan u odnosu na nehomogenu Lorentzovu grupu proporcionalan je diferencijalnom izrazu

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{7}$$

14. Zavisnost rješenja od početnih uvjeta. Relacija (6) daje eksplicitni izraz za rješenje jednadžbe (4) uz početne uvjete (5). Iz te relacije možemo izvući dva vrlo važna zaključka koja vrijede i za jednadžbu (1), a također i za tzv. diferencijalne jednadžbe hiperboličnog tipa (vidi t. 22, 23 ovog prikaza). Maloj promjeni početnih uvjeta, tj. funkcijâ φ i ψ (na konačnom intervalu) odgovara mala promjena rješenja. To se drukčije kaže da rješenje jednadžbe (4) na neprekidan način zavisi od početnih uvjeta. Općenito kažemo da je problem integracije parcijalne diferencijalne jednadžbe korektno postavljen ako je on rješiv, ako ima jedinstveno rješenje i ako rješenje na neprekidan način zavisi od početnih ili dodatnih uvjeta. Činjenica da je problem integracije jednadžbe (4) uz uvjete (5) korektno postavljen povlači da mala greška u određivanju početnih uvjeta (5) nema velike posljedice za rješavanje problema. Sličan zaključak vrijedi za jednadžbu (1) uz odgovarajuće početne uvjete $u(x_1, \ldots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ za $t = 0$ ali za Laplaceovu jednadžbu rješenje općenito ne zavisi na neprekidan način od početnih uvjeta. Tako problem integracije jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(x, 0) \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{n^k} \sin n x,$$

gdje su n i k pozitivne konstante, ima rješenje

$$u(x, t) = \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} n t \cdot \sin n x$$

koje prima po volji velike vrijednosti za po volji malo t, ako je samo n dosta veliko, bez obzira na to što su početni uvjeti blizi nuli.

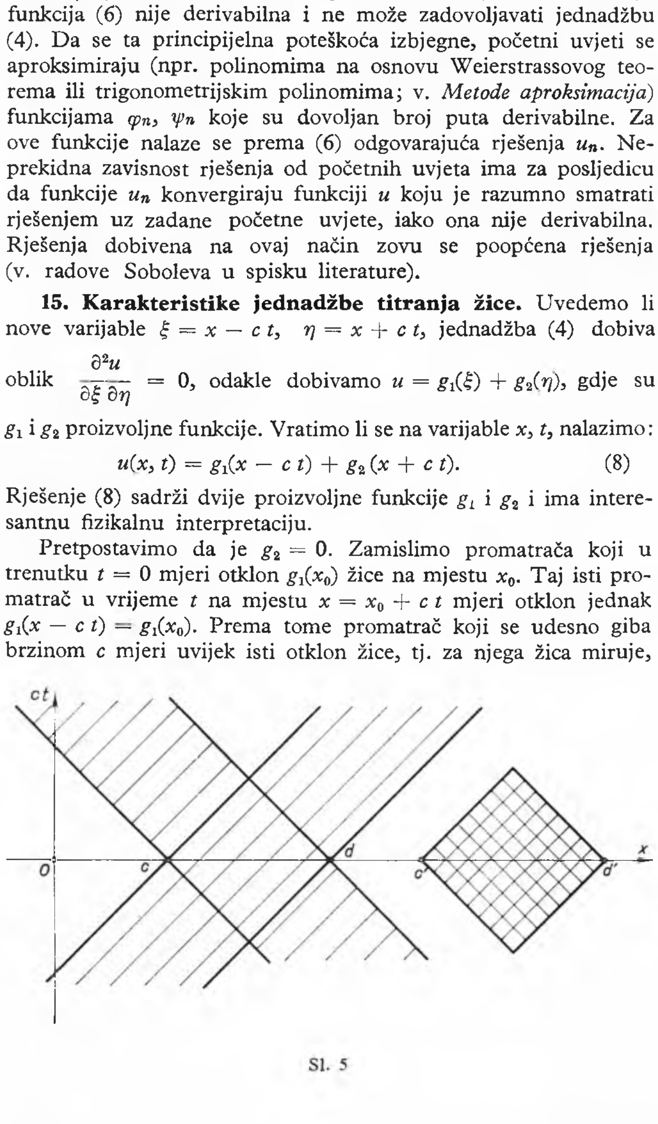
Iz relacije (6) slijedi da glatkim početnim uvjetima odgovara jednako glatko rješenje. S druge strane u praksi dolaze početni uvjeti φ, ψ koji su samo npr. neprekidne funkcije. U tom slučaju funkcija (6) nije derivabilna i ne može zadovoljavati jednadžbu (4). Da se ta principijelna poteškoća izbjegne, početni uvjeti se aproksimiraju (npr. polinomima na osnovu Weierstrassovog teorema ili trigonometrijskim polinomima; v. *Metode aproksimacija*) funkcijama φ_n, ψ_n koje su dovoljan broj puta derivabilne. Za ove funkcije nalaze se prema (6) odgovarajuća rješenja u_n. Neprekidna zavisnost rješenja od početnih uvjeta ima za posljedicu da funkcije u_n konvergiraju funkciji u koju je razumno smatrati rješenjem uz zadane početne uvjete, iako ona nije derivabilna. Rješenja dobivena na ovaj način zovu se poopćena rješenja (v. radove Soboleva u spisku literature).

15. Karakteristike jednadžbe titranja žice. Uvedemo li nove varijable $\xi = x - c t$, $\eta = x + c t$, jednadžba (4) dobiva oblik $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$, odakle dobivamo $u = g_1(\xi) + g_2(\eta)$, gdje su g_1 i g_2 proizvoljne funkcije. Vratimo li se na varijable x, t, nalazimo:

$$u(x, t) = g_1(x - c t) + g_2(x + c t). \tag{8}$$

Rješenje (8) sadrži dvije proizvoljne funkcije g_1 i g_2 i ima interesantnu fizikalnu interpretaciju.

Pretpostavimo da je $g_2 = 0$. Zamislimo promatrača koji u trenutku $t = 0$ mjeri otklon $g_1(x_0)$ žice na mjestu x_0. Taj isti promatrač u vrijeme t na mjestu $x = x_0 + c t$ mjeri otklon jednak $g_1(x - c t) = g_1(x_0)$. Prema tome promatrač koji se udesno giba brzinom c mjeri uvijek isti otklon žice, tj. za njega žica miruje,

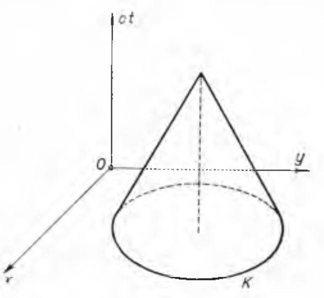


Sl. 5

ima stalno istu konfiguraciju. No to znači da se poremećaj širi brzinom c udesno, a $g_1(x - c t)$ predstavlja val koji se širi udesno. Analogno $g_2(x + c t)$ u slučaju $g_2 \neq 0$ predstavlja val koji se brzinom c širi ulijevo. Opći oblik rješenja (8) pokazuje da titranje žice nastaje superpozicijom dvaju valova koji se brzinom c šire u suprotnim smjerovima. Pravci $x - c t = k$ (konstanta), odnosno $x + c t = k$, po kojima se poremećaj širi, zovu se karakteristike jednadžbe (4). Dakle, jednadžba (4) ima dva sistema paralelnih pravaca kao karakteristike i kroz svaku tačku ravnine x, t prolazi po jedna karakteristika iz nekog navedenog sistema.

Značenje karakteristika u odnosu na početne uvjete mogu se izvesti iz relacije (6). Radi jednostavnosti uzmimo da je $\psi = 0$ i da je $\varphi(x) = 0$ za x van danog intervala (c, d), $c < d$. Iz (6) slijedi da u iščezava za sve tačke ravnine $(x, c\,t)$ koje se nalaze van jednostruko osjenjenog područja sl. 5. Prema tome, promjena početnih uvjeta na intervalu (c, d) može da utječe na rješenje samo u jednostruko osjenjenom području. Odavde ujedno slijedi da početni uvjeti zadani na intervalu (c', d'), $c' < d'$ potpuno određuju rješenje samo u kvadratu koji je dvostruko osjenjen na sl. 5. Tačku A van toga kvadrata moguće je smjestiti u prugu čiji je odnos prema dvostruko osjenjenom kvadratu sličan odnosu one jednostruko osjenjene pruge na sl. 5. Mijenjanjem početnih uvjeta na sjecištu te pruge sa osi x možemo rješenje u tački A po volji mijenjati, a da rješenje u dvostruko osjenjenom kvadratu ostane nepromijenjeno. Dvostruko osjenjeno područje naziva se područjem egzistencije, a jednostavno osjenjeno područje područjem utjecaja početnih uvjeta.

Zadavanje početnih uvjeta duž karakteristike $c t = x + k$ isto je kao i zadavanje početnih uvjeta samo u tački $x = -k$, $t = 0$, pa time nije osigurana jedinstvenost rješenja. Rješenja se granaju duž karakteristika. Razmatranja u slučaju $n = 2$ dobiju se iz rezultata u slučaju $n = 1$ »rotacijom« oko osi $c\,t$. Tako za $n = 2$ zadavanje početnih uvjeta na nekom krugu K u ravnini x, y potpuno određuje rješenje unutar dva stošca konstruirana nad K sa osi paralelnom osi $c\,t$, čije izvodnice čine kut od 45° sa osi stošca (sl. 6).



Sl. 6

Ulogu karakteristika ovdje preuzimaju stošci navedenog oblika. Početni uvjeti u K, tj.

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x_1, x_2) \quad (\text{za } t = 0)$$

ne određuju rješenje ni u jednoj tački van navedenih stožaca. Analogna razmatranja vrijede i za jednadžbu (1) u općem slučaju.

16. Valna jednadžba u ravnini i prostoru. Cauchyjev problem za jednadžbu (1) glasi: naći rješenje jednadžbe (1) takvo da je

$$u(x_1, \ldots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x_1, \ldots, x_n) \text{ za } t = 0, \tag{9}$$

gdje su φ, ψ zadane funkcije u nekoj oblasti D. Mi ćemo ovdje navesti rješenja za slučajeve a) $n = 2$ i b) $n = 3$ [interesantno je da je problem b) lakše riješiti nego problem a), a onda, kako je to učinio Hadamard, problem a) shvatiti kao poseban slučaj problema b)]. Eksplicitna formula kojom se rješava problem b) zove se *Kirchhoffova formula* i glasi:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = t\,\psi(S_t) + \frac{\partial}{\partial t}[t\,\varphi(S_t)] \qquad (c = 1, \quad t > 0). \tag{10}$$

Pri tome S_t označava loptu radijusa t sa središtem u tački (x_1, x_2, x_3), a $f(S_t)$ označava srednju vrijednost funkcije f po lopti S_t, tj.

$$f(S_t) = \frac{1}{4 \pi t^2} \int\limits_{S_t} f \, \mathrm{d} S_t. \tag{11}$$

Analogna formula za rješenje problema a) zove se *Poissonova formula* i ima oblik:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_t} \frac{\psi(y_1, y_2)}{[t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2]^{1/2}} \, dy_1 \, dy_2 + \\ + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{K_t} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{[t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2]^{1/2}} \, dy_1 \, dy_2. \quad (12)$$

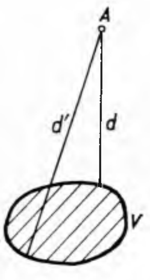
U formuli (12) K_t označava krug u ravnini radijusa t sa središtem u tački (x_1, x_2). Formula (12) dobiva se iz formule (10) time što se uvaži da u (10) u ne zavisi od x_3, tj. spuštanjem sa trodimenzionalnog na dvodimenzionalni slučaj. Spuštanjem sa rješenja (12) ($n = 2$) ili (10) ($n = 3$) na jednodimenzionalni slučaj dobiva se d'Alembertovo rješenje (6). Eksplicitna rješenja (10) i (12) omogućavaju dokaz da je Cauchyjev problem rješiv ($n = 2, 3$), da je rješenje jedinstveno i da na neprekidan način zavisi od početnih uvjeta φ, ψ. Dakle problemi a) i b) korektno su postavljeni.

Relacije (10) i (12) imaju sličnu fizikalnu interpretaciju kao i relacija (6).

No već na tom koraku pokazuje se bitna razlika u vladanju rješenja jednadžbe (1) za n parno i za n neparno. Da to objasnimo, pretpostavimo da je $\varphi = 0$. Tada (10) i (12) prelaze u

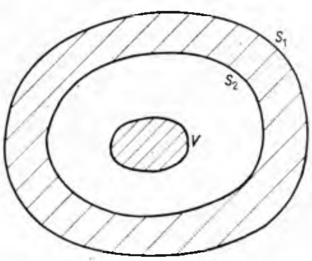
$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \psi \, dS_t \quad (13)$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_t} \frac{\psi(y_1, y_2)}{[t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2]^{1/2}} \, dy_1 dy_2. \quad (14)$$



Sl. 7

Neka je V (sl. 7) dio prostora (x_1, x_2, x_3) ograničen plohom $S = \partial V$. Pretpostavimo da funkcija ψ iščezava van volumena V i da ψ ne iščezava identički. Za tačku $A(x_1, x_2, x_3)$ prostora potpuno su određene: najmanja udaljenost d i najveća udaljenost d' od tačke A do tačaka volumena V. Ako je A van volumena V i $t < d$, lopta S_t radiusa t sa središtem u A ne siječe V, pa funkcija (13) iščezava. Analogno funkcija (13) iščezava ako je $t > d'$. Za t između d i d' lopta radijusa t oko A siječe područje V, pa funkcija (13) može biti različita od nule. Zamislimo da $\psi \neq 0$ znači da je u času $t = 0$ u V nastao neki poremećaj. Taj poremećaj u času $t < d$ nije došao do tačke A. On dolazi u A u vrijeme $t = d$, a nestaje u tački A u vrijeme $t = d'$. Za dano t promotrimo dvije plohe: plohu S_1 koja dijeli tačke prostora do kojih je poremećaj došao u vrijeme t od tačaka u koje poremećaj još nije stigao, i plohu S_2 koja dijeli tačke u kojima je u času t već nastupilo smirenje od tačaka u kojima postoji poremećaj. Dio prostora između ploha S_1 i S_2 predstavlja područje postojanja poremećaja u času t prouzrokovanog nekim poremećajem (npr. izvorom zvuka) izazvanim u V u času $t = 0$. Plohe S_1 i S_2 predstavljaju dvije valne fronte. U tačku A poremećaj dolazi u vrijeme $t = d$, tamo ostaje do vremena $t = d'$ i onda u A ponovo nastupa prvobitno stanje. No to znači da je nakon vremena $t > d'$ tačka A spremna da primi novi poremećaj koji u V nastaje u neko kasnije vrijeme.



Sl. 8

Sasvim je drukčija situacija u slučaju $n = 2$. Označimo li sa S ograničen dio ravnine, sa $C = \partial S$ rub od S i uzmemo funkciju ψ koja iščezava van S, ali ne svugdje, onda na temelju relacije (14) zaključujemo da za novu tačku A postoji udaljenost d takva da u A poremećaj (koji nastaje u S u vrijeme $t = 0$) dolazi u vrijeme $t = d$. No taj poremećaj ostaje u A za svako $t > d$, s tim da za $t \to \infty$ on iščezava. Drugim riječima, tačke do kojih jednom dođe poremećaj nikada se više ne vraćaju u ravnotežni položaj. Ta pojava zove se difuzija valova, a različito širenje poremećaja u slučaju parnog i neparnog n zove se *Huygensov princip*.

17. Nehomogena valna jednadžba. Za nehomogenu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \quad (n = 3, \quad c = 1), \quad (15)$$

gdje je f zadana funkcija, Cauchyjev problem glasi:

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3). \quad (16)$$

Ovaj problem se svodi na dva specijalna problema: naći funkciju U takvu da bude

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0, \quad U(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi(x_1, x_2, x_3) \quad (17)$$

i funkciju V takvu da bude

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = f, \quad V(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Riješe li se navedena dva problema, onda je funkcija $u = U + V$ rješenje jednadžbe (15) uz uvjete (16). Rješenje prvog problema dano je Kirchhoffovom formulom, a rješenje problema (18) formulom:

$$V(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K_t} \frac{f(t - r, y_1, y_2, y_3)}{r} \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3, \quad (19)$$

gdje je K_t kugla radijusa t sa središtem u tački (x_1, x_2, x_3) i $r = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2}$. Relacijom (19) određen je u vrijeme t u tački (x_1, x_2, x_3) tzv. retardiran potencijal što ga prouzrokuje naboj gustoće f. Kako vidimo, potencijal V u vrijeme t određen je gustoćom naboja u vrijeme $t - r$, tj. onom gustoćom koja je u tački (y_1, y_2, y_3) bila u nešto ranijem momentu $t - r$. Analogno u slučaju $n = 2$ rješenje nehomogene jednadžbe (15) uz odgovarajuće početne uvjete dobiva se tako da se desnoj strani relacije (12) doda funkcija:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_{t-\tau}} \frac{f(y_1, y_2, \tau)}{[(t - \tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2]^{1/2}} \, dy_1 \, dy_2 \, d\tau,$$

gdje je $K_{t-\tau}$ krug radijusa $t - \tau \geq 0$ sa središtem u tački (x_1, x_2). U slučaju $n = 1$ desnoj strani relacije (6) treba dodati

$$\frac{1}{2c} \int\limits_{T} f(y, \tau) \, dy \, d\tau,$$

gdje je T trokut: $0 \leq \tau \leq t, \qquad |y - x| \leq c\,|t - \tau|$.

JEDNADŽBA VOĐENJA TOPLINE

18. Definicija jednadžbe vođenja topline. Diferencijalna jednadžba

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad (c \text{ konstanta}) \quad (1)$$

zove se jednadžba vođenja topline. Tom jednadžbom opisuje se vođenje topline u tijelima, difuzija u fizičkoj kemiji, usporavanje neutrona u materiji. Schrödingerova jednadžba u kvantnoj fizici često ima oblik (1) itd. Promotrimo čvrsto tijelo i temperaturu u vrijeme t u tački (x_1, x_2, x_3) označimo sa $u(x_1, x_2, x_3, t)$. Toplina tijela struji od tačaka više temperature k tačkama niže temperature. Ako je tijelo izotropno homogeno i nema izvora ni ponora topline, funkcija u zadovoljava jednadžbu (1), pri čemu konstanta c zavisi od fizikalnih svojstava tijela. Ako u tijelu postoje izvori i ponori topline koji su karakterizirani funkcijom f, desnoj strani jednadžbe (1) treba dodati funkciju f. U slučaju širenja topline u dvodimenzionalnim (ploče) ili jednodimenzionalnim (štapovi) sredstvima funkcija u u jednadžbi (1) zavisi samo od x_1, x_2, odnosno od $x = x_1$. Budući da osnovna svojstva jednadžbe (1) ne zavise od n, uzimamo da je $n = 1$ i da su jedinice mjerenja uzete tako da je $c = 1$. Jednadžba (1) u tom slučaju prelazi u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Jednadžba (2) [jednadžba (1)] ne mijenja se s obzirom na translacije $t' = t_0 + t$, $x' = x_0 + x$, ali za razliku od valne jednadžbe ona nije kovarijantna u odnosu na inverziju vremena, tj. jednadžba

(2) ne opisuje reverzibilne procese. Zbog toga slučajevi $t < 0$ i $t > 0$ nisu ravnopravni.

19. Početni i rubni problemi jednadžbe vođenja topline. Cauchyjev problem (sa fizikalnog stanovišta potpuno jasan) za jednadžbu (2) glasi: treba naći neprekidnu i ograničenu funkciju

$$u(x, t), \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t \geq 0,$$

koja za $t > 0$ zadovoljava jednadžbu (2), a za $t = 0$ podudara se sa unaprijed zadanom funkcijom $\varphi(x)$, tj. $u(x, 0) = \varphi(x)$. Rješenje je navedenog problema jedinstveno i dano Poissonovom formulom:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y, \qquad (t > 0). \quad (3)$$

Da nije zahtijevana ograničenost funkcije u, rješenje ne bi bilo općenito jednoznačno. Iz (3) se vidi da je Cauchyjev problem korektno postavljen u skupu ograničenih i neprekidnih funkcija. Funkcija u ima ovo svojstvo pruge: u pruzi $(x\,t)$ ravnine određenoj sa $0 \leq t < T < \infty$ vrijedi $m \leq u(x, t) \leq M$, gdje je $m = \inf \varphi(x)$, $M = \sup \varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$. Ako funkcija φ iščezava van nekog konačnog intervala osi x na kome je pozitivna, iz (3) slijedi da za svako $t > 0$ i za svako x vrijedi $u(x, t) > 0$. To povlači fizikalno neprihvatljiv zaključak da se toplina širi beskonačno velikom brzinom. Očito taj rezultat pokazuje da jednadžba (2) u potpunosti ne opisuje vođenje topline. No sa praktičnog stanovišta rezultati dobiveni pomoću jednadžbe (2) daju zadovoljavajuće rezultate.

Ograničeno rješenje jednadžbe (1) uz početni uvjet

$$u(x_1, \ldots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

glasi:

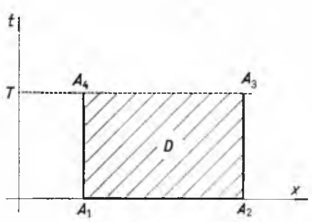
$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}{4t}\right) \cdot$$

$$\cdot\, \varphi(y_1, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n,$$

a rješenje nehomogene jednadžbe $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f$ uz isti početni uvjet dobije se time što se dodaje homogenom rješenju funkcija:

$$\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y_1, \ldots, y_n, s)}{[2\sqrt{\pi(t-s)}]^n} \exp\left(-\frac{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}{4(t-s)}\right) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n\right] \mathrm{d}s.$$

Pretpostavimo da je l dužina vodiča, da je u času $t = 0$ temperatura u svakoj tački x poznata. Nadalje uzmimo da tokom vremena $0 \leq t < T$ mjerimo temperaturu na rubovima vodiča. Iz fizikalnih razloga očekujemo da ovi podaci jednoznačno određuju temperaturu u svakoj tački x u vrijeme T. Matematički se ova razmatranja izriču u vidu ovog rubnog problema: treba naći neprekidnu funkciju $u(x, t)$ koja u području D (sl. 9) zadovoljava jednadžbu (2) i tako da na dijelu ruba $A_4\, A_1\, A_2\, A_3$ toga područja funkcija prima unaprijed propisane neprekidne vrijednosti. Pokazuje se da navedeni problem ima uvijek rješenje, da je takvo rješenje jedinstveno i da je problem korektno postavljen. Ti rezultati su dobrim dijelom posljedice ove interesantne činjenice: rješenje $u\,(x,t)$ jednadžbe (2) koje je neprekidno na zatvorenom pravokutniku čije su stranice paralelne osima x i t dostiže svoj maksimum i svoj minimum na rubu toga pravokutnika. Preciznije, taj maksimum i minimum funkcija u dostiže na rubu oblika A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3, a ne unutar gornje stranice pravokutnika.



Sl. 9

KLASIFIKACIJA LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI DRUGOG REDA

20. Motivacija klasifikacije jednadžbi. Parcijalna diferencijalna jednadžba:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u + f = 0 \qquad (1)$$

zove se linearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda. Tu su $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c i f poznate funkcije varijabli $x_1, \ldots, x_n$, a traži se funkcija $u(x_1, \ldots, x_n)$. Laplaceova jednadžba, valna jednadžba i jednadžba vođenja topline predstavljaju specijalne slučajeve jednadžbe (1). ($a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, $a_{kk} = 1$, -1 ili 0, $b_i = 0$, $c = 0, f = 0$). Navedene tri jednadžbe bitno se razlikuju. U prvom redu one opisuju različite fizikalne pojave: Laplaceova jednadžba opisuje stanja ravnoteže ili stacionarna stanja, a valna jednadžba opisuje pojave koje se tokom vremena mijenjaju. Te su jednadžbe izvedene iz različitih fizikalnih principa (principa minimuma potencijalne energije i Hamiltonova principa). U skladu s tim za Laplaceovu jednadžbu ima smisla Dirichletov problem, a za valnu jednadžbu Cauchyjev problem. Rješenja Laplaceove jednadžbe su glatka bar kao i rubni uvjeti, dok za valnu jednadžbu to nije općenito istina. Harmonijska funkcija ne dostiže maksimum u području, a rješenje jednadžbe vođenja topline dostiže maksimum na rubu područja, itd. Sve to pokazuje da ne može postojati jedinstvena teorija diferencijalnih jednadžbi oblika (1) te da ih treba na neki način klasificirati i onda izučavati svojstva pojedinih klasa. Kao osnov klasifikacije služi klasifikacija linearnih diferencijalnih izraza [glavnog dijela u jednadžbi (1)]:

$$l(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}, \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \qquad (2)$$

vezanih uz (1). Da je $l(u)$ linearno znači da je

$$l(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 l(u_1) + a_2 l(u_2) \qquad (3)$$

za svaki par realnih brojeva a_1, a_2 i svaki par dva puta derivabilnih funkcija u_1, u_2.

21. Slučaj dviju varijabli i konstantnih koeficijenata. Uz diferencijalni izraz:

$$l(u) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (a, b, c \text{ konstante}), \qquad (4)$$

usko je vezan polinom (kvadratna forma) u dvije varijable:

$$P(\xi, \eta) = a\,\xi^2 + 2\,b\,\xi\,\eta + c\,\eta^2, \qquad (5)$$

koji možemo pisati u obliku $a\left(\xi + \dfrac{b}{a}\eta\right)^2 + \left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)\eta^2$. S novim varijablama $\xi' = \sqrt{a}\left(\xi + \dfrac{b}{a}\eta\right)$, $\eta' = \left(c - \dfrac{b^2}{a}\right)^{1/2} \eta$, forma (5) ima oblik $P = (\xi')^2 + (\eta')^2$.

Ovaj postupak sugerira da u (4) uvedemo nove varijable x', y' tako da bude

$$x = \sqrt{a}\, x', \quad y = \frac{b}{\sqrt{a}} x' + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)^{1/2} y'. \qquad (6)$$

U varijablama x', y' izraz (4) dobiva oblik:

$$l(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} (= \Delta u).$$

Ovu redukciju mogli smo provesti uz pretpostavku da je $a > 0$ i $c - \dfrac{b^2}{a} > 0$. Ako je $a > 0$, ali $c - \dfrac{b^2}{a} < 0$, onda mjesto (6) stavljamo

$$x = \sqrt{a}\, x', \qquad y = \frac{b}{\sqrt{a}} x' + \left(\frac{b^2}{a} - c\right)^{1/2} y'$$

i dobivamo

$$l(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.$$

U slučaju $a > 0$, $c - \dfrac{b^2}{a} = 0$ stavljamo $x' = \sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y, y' = y$ i dobivamo $l(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$.

Ako je $a = c = 0$ i $b > 0$ onda supstitucija $x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2b}}$, $y' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2b}}$ povlači $l(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$. Lako je vidjeti da $l(u)$

li $-l(u)$ u svakom drugom mogućem slučaju može biti svedeno na jedan od navedenih oblika. Odavde slijedi: parcijalna diferencijalna jednadžba

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+f\left(x,y,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \quad (7)$$

gdje su a, b i c konstante, a f poznata funkcija, linearnom (regularnom) zamjenom nezavisnih promjenljivih prelazi u jedan od ovih oblika (gdje smo nove varijable ponovo označili sa x, y):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{ako je } ac-b^2>0\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{ako je } ac-b^2<0 \quad (8)\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{ako je } ac-b^2=0.\end{aligned}$$

22. Slučaj n varijabli i konstantnih koeficijenata. U općem slučaju diferencijalnog izraza (2) sa konstantnim koeficijentima a_{ij} promatra se polinom (kvadratna forma) od n varijabli:

$$P(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j. \quad (9)$$

Uvedemo li nove varijable

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}c_{kj}\,x_j, \qquad (k=1,\ldots,n), \quad (10)$$

jednadžba (2) prelazi u

$$l(u)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\,\partial y_j},$$

$$b_{ij}=\sum_{k,m=1}^{n}c_{jk}\,c_{im}\,a_{mk}, \quad (11)$$

što pokazuje da se koeficijenti a_{ij} diferencijalnog izraza (2) prilikom zamjene varijabli (10) transformiraju kao koeficijenti kvadratne forme (9) prilikom prelaza na nove varijable

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}\,\eta_k \quad (12)$$

(sumira se po prvom indeksu, a nove varijable su η_k).

U teoriji kvadratnih formi dokazuje se da je moguće uzeti koeficijente c_{ij} u (12) tako da oni obrazuju regularnu kvadratnu matricu i da bude $b_{ij}=0$ za $i\neq j$ i $b_{kk}=1$, -1 ili 0. Uz takav izbor koeficijenata u (10), (11) postaje:

$$l(u)=\sum_{k=1}^{n_+}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k{}^2}-\sum_{k=n_++1}^{n_++n_-}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k{}^2}. \quad (13)$$

Iako postoji velika proizvoljnost za svođenje diferencijalnog izraza (2) na »kanonski« oblik (13), taj oblik je jedinstven, jer brojevi n_+, n_- i $n_0=n-(n_++n_-)$ ne zavise od načina na koji je to svođenje izvršeno (zakon inercije za kvadratne forme). Budući da je oblik (13) jedinstven, on služi za vrlo dalekosežnu i duboku klasifikaciju diferencijalnih jednadžbi drugog reda oblika:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+f\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \quad (14)$$

sa konstantnim koeficijentima $a_{ij}=a_{ji}$. Kaže se da je jednadžba (14) eliptičnog tipa, ako je $n_+=n$ ili $n_-=n$; paraboličnog tipa ako je $n_0>0$ i hiperboličnog tipa, ako je $n_0=0$ i $0<n_+<n$. Ako je $n_+=n-1$ i $n_-=1$ ili obratno, jednadžba (14) je hiperboličnog tipa u pravom smislu, a u ostalim slučajevima ona je ultrahiperboličnog tipa. Prema ovoj klasifikaciji Laplaceova jednadžba je eliptičnog tipa, valna jednadžba hiperboličnog tipa u pravom smislu, a jednadžba vođenja topline paraboličnog tipa.

23. Slučaj promjenljivih koeficijenata. Ako su koeficijenti a_{ij} diferencijalnog izraza (2) funkcije promjenljivih $x_1,\ldots,x_n$, za danu tačku $P_0(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0)$ promatramo kvadratnu formu

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0)\;\xi_i\,\xi_j. \quad (15)$$

Forma (15) omogućava da se jednadžba (14) klasificira u tački P_0 već prema kanonskom obliku na koji se (15) svodi. Brojevi n_+, n_- i n_0 koji karakteriziraju kanonski oblik forme (15) zavise od tačke P_0, tj. oni se mijenjaju od tačke do tačke kao što se, uostalom, i linearne transformacije koje formu svode na dijagonalni oblik mijenjaju od tačke do tačke. Primjeri pokazuju da u slučaju $n\geqq 3$ ne postoje ne samo linearne nego ni nelinearne transformacije koordinata koje bi jednadžbu (14) svele na kanonski oblik u nekoj maloj oblasti. Međutim, u slučaju $n=2$ takve transformacije uvijek postoje uz vrlo općenite pretpostavke o koeficijentima a_{ij}. Kaže se da jednadžba (14) pripada mješovitom tipu u nekoj oblasti, ako ona u promatranoj oblasti nije istog tipa.

Primjer 1. Jednadžba

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x>0,\ y>0) \quad (16)$$

supstitucijom $x'=y^2$, $y'=x^2$ prelazi u jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{1}{2x'}\frac{\partial u}{\partial x'}+\frac{1}{2y'}\frac{\partial u}{\partial y'}=0,$$

što pokazuje da je (16) eliptičnog tipa.

Primjer 2. Jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad (17)$$

supstitucijom $x'=x+y-\cos x$, $y'=x-y+\cos x$ prelazi u $\frac{\partial^2 u}{\partial x'\partial y'}=0$, pa je (17) hiperboličnog tipa.

Primjer 3. Jednadžba

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x>0) \quad (18)$$

supstitucijom $x'=y/x$, $y'=y$ prelazi u $\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}=0$, pa je (18) paraboličnog tipa.

Na ovako klasificirane diferencijalne jednadžbe nastoje se proširiti problemi, metode i rezultati Laplaceove jednadžbe, valne jednadžbe i jednadžbe vođenja topline (I. G. Petrovskij, v. popis literature). Pokazuje se da hiperbolične jednadžbe imaju izrazito različita svojstva od eliptičnih i paraboličnih jednadžbi. Eliptične i parabolične jednadžbe imaju svojstvo da je rješenje jednadžbe sa beskonačno derivabilnim koeficijentima i beskonačno derivabilnim dodatnim uvjetima beskonačno derivabilno. To je poslužilo u novije vrijeme za drugu klasifikaciju diferencijalnih jednadžbi, prema kojoj eliptične i parabolične jednadžbe pripadaju istoj tzv. *hipoeliptičnoj* klasi. Algebarsku karakterizaciju hipoeliptičnosti dao je L. Hörmander (v. popis literature).

Uz jednadžbu (14) promatra se i jednadžba prvog reda, tzv. karakteristična jednadžba

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0, \quad (19)$$

čija se rješenja zovu *karakteristike* jednadžbe (14). U slučaju $n=2$, tj. u slučaju jednadžbe (7) s koeficijentima a, b, c eventualno promjenljivim, jednadžba (19) prelazi u sistem od dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}. \quad (20)$$

Odavde se vidi da jednadžba eliptičnog tipa nema realne karakteristike, jednadžba paraboličnog tipa ima samo jedan sistem karakteristika, a jednadžba hiperboličnog tipa ima dva sistema karakteristika. U slučaju valne jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ($a=1$, $b=0$, $c=-1$) jednadžba (20) daje $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm 1$, odakle je $y=x\pm k$ (k je konstanta). U slučaju jednadžbe vođenja topline $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ($a=1$, $b=c=0$), (20) povlači $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, pa su pravci paralelni sa osi x karakteristike te jednadžbe.

Zadavanje funkcije u i njezine prve derivacije na rješenju jednadžbe (19) ne daje mogućnost da se ta funkcija jednoznačno odredi, tj. Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje ako se početni uvjeti zadaju na karakterističnim mnogostranostima. Karakteristike jednadžbe (19) zovu se *bikarakteristike* jednadžbe (14).

24. Tricomijeva diferencijalna jednadžba. Tip diferencijalne jednadžbe (7) (a, b, c funkcije od x, y) zavisi od diskriminante

$$\Delta(x, y) = [b(x, y)]^2 - a(x, y)\, c(x, y). \tag{21}$$

Jednadžba (7) je miješanog tipa u nekoj oblasti D ako funkcija (21) nije istog predznaka u toj oblasti. Krivulja na kojoj je $\Delta(x, y) = 0$ zove se parabolična krivulja jednadžbe (7). U zavisnosti od vladanja funkcije $\Delta(x, y)$ u okolini parabolične krivulje jednadžba (7) realnom zamjenom varijabli prelazi u jedan od oblika:

$$y^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad x^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g, \tag{22}$$

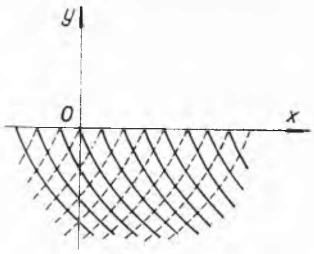
gdje smo nove varijable ponovo označili sa x, y. U (22) n je prirodan broj. U slučaju $n = 1$ jednadžbe (22) prelaze u ove dvije jednadžbe

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g, \qquad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g. \tag{23}$$

Prva od jednadžbi (23) zove se *Tricomijeva parcijalna diferencijalna jednadžba* po talijanskom matematičaru Tricomiju koji ju je promatrao 1923. Ona igra važnu ulogu u aerodinamici u problemima u kojima je brzina bliza brzini zvuka u sredstvu. Jednadžba (23) je eliptičnog tipa u gornjoj poluravnini ($y > 0$, brzina ispod brzine zvuka), hiperboličnog tipa u donjoj poluravnini ($y < 0$, brzina veća od brzine zvuka) i paraboličnog tipa na osi x. Karakteristike Tricomijeve jednadžbe dobivaju se iz (20) ($a = y$, $b = 0$, $c = 1$), tj. iz jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm(-y)^{-1/2}.$$

Odavde je $(x - k)^2 + \frac{4}{9}y^3 = 0$ gdje je k konstanta. Prema tome za $y \leq 0$ karakteristike su realne i predstavljaju dva sistema polukubičnih parabola (sl. 10).



Sl. 10

U eliptičnoj poluravnini $y > 0$ supstitucija $x' = x$, $y' = \frac{2}{3}y^{3/2}$ Tricomijevu jednadžbu prevodi u

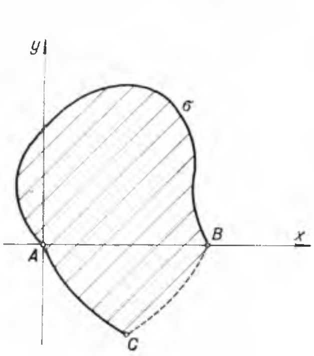
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{1}{3y'}\frac{\partial u}{\partial y'} = 0,$$

a u hiperboličnoj ravnini $y < 0$ uzimanje karakteristika za koordinatne linije, tj.

$$x' = x - \tfrac{2}{3}(-y)^{3/2}, \qquad y' = x + \tfrac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

prevodi Tricomijevu jednadžbu u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} - \frac{1}{6(x' - y')}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right) = 0.$$



Sl. 11

Interesantan je rubni problem Tricomijeve jednadžbe. Pokazuje se da zadavanje funkcije na luku σ (sl. 11) u eliptičnoj poluravnini i na luku $\widehat{AC}$ karakteristike u hiperboličnoj poluravnini određuje jednoznačno rješenje Tricomijeve jednadžbe u njenom području. Primijetimo da se u tački C sastaju dvije karakteristike iz različitih sistema, jedna povučena iz tačke A i druga povučena iz tačke B (za daljnje proučavanje ove interesantne jednadžbe vidi Tricomi u spisku literature).

TITRANJE OGRANIČENIH TIJELA

25. Ograničena tijela i rubni uvjeti. Sa fizikalnog stanovišta diskusija valne jednadžbe i jednadžbe vođenja topline koju smo do sada u ovom članku prikazali odnosila se na neograničena tijela: titranje neograničene žice i membrane, širenje zvuka u neograničenom dijelu prostora, neograničen vodič topline itd. U narednih nekoliko tačaka promatramo ograničena tijela. Ograničenost žice, membrane, vodiča itd. matematički se izražava posebnim uvjetima koje rješenje jednadžbe mora da zadovolji na rubu tijela. Te vrste uvjeti zovu se *rubni uvjeti.* Titranje tijela potpuno se određuje diferencijalnom jednadžbom, početnim i rubnim uvjetima. Pored toga ovdje na nekoliko primjera ilustriramo vrlo efektivnu i fizikalno sadržajnu metodu rješavanja jednadžbi separacijom varijabli (tzv. Fourierovu metodu). Rješenje jednadžbe traži se u obliku produkata dviju ili više funkcija od kojih svaka zavisi samo od jedne varijable. Time se dobivaju posebna (harmonijska) rješenja, a linearnost jednadžbe povlači da i linearan spoj, pa dakle i red (ili integral), sastavljen od tih posebnih rješenja mora biti rješenje (bar formalno). Važna okolnost koja se pojavljuje jest da u zavisnosti od rubnih uvjeta izvjesne konstante koje se pojavljuju prilikom separacije mogu poprimiti samo potpuno određene vrijednosti i u saglasnosti s tim tijelo može imati potpuno određena stanja »harmonijskih« titranja.

26. Titranje ograničene žice. Pretpostavimo da se žica duljine l u ravnotežnom položaju podudara sa osi x i da je lijevi kraj te žice u ishodištu. Funkcija $u(x, t)$ kojom je dan otklon na mjestu x u vrijeme t pored diferencijalne jednadžbe

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

i početnih uvjeta

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{2}$$

mora zadovoljiti i rubne uvjete

$$u(0, t) \equiv 0, \qquad u(l, t) \equiv 0 \qquad \text{za svako } t. \tag{3}$$

Rješenje jednadžbe (1) tražimo u obliku $u(x, t) = X(x)\, T(t)$. Iz (1) dobivamo:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{c^2 T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}. \tag{4}$$

Budući da lijeva strana u (4) zavisi samo od x, a desna od t, to je svaka od tih strana konstanta λ. Dakle je

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = c^2 \lambda T \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda X. \tag{5}$$

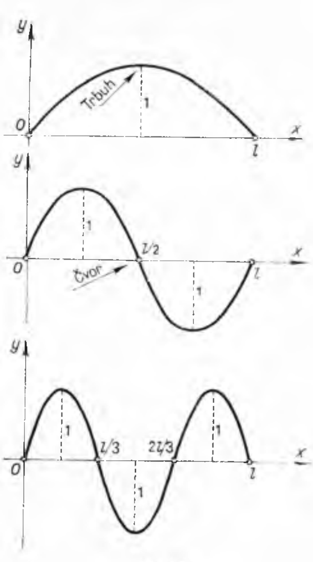
Rubni uvjeti (3) sa funkcije u prelaze na funkciju X i za funkciju X dobivamo slijedeći rubni problem

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad X \neq 0. \tag{6}$$

Treba dakle odrediti brojeve λ i funkcije X tako da vrijede svi zahtjevi u (6). Pišemo li $\lambda = -k^2$, onda $X'' = -k^2 X$ povlači $X(x) = A\,\mathrm{e}^{ikx} + B\,\mathrm{e}^{ikx}$ gdje su A i B neke konstante. No sada rubni uvjeti $X(0) = X(l) = 0$ i $X \neq 0$ povlače $k = \frac{\pi}{l}n$ gdje je n cijeli broj. Prema tome (6) nema rješenja za bilo koji broj λ, nego samo za $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{\pi}{l}n\right)^2$. Pripadno rješenje je proporcionalno s funkcijom:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi}{l}n\,x \qquad (n = 1, 2 \ldots). \tag{7}$$

Na sl. 12 prikazane su funkcije $\sqrt{\frac{l}{2}}\,X_n$ koje daju harmonijska titranja za $n = 1, 2, 3$ (v. *Akustika*).



Sl. 12

Brojevi n za koje problem (6) ima rješenje zovu se *svojstvene* (vlastite, karakteristične) vrijednosti problema (6), a funkcije (7) *svojstvene funkcije* problema (6) (v. t. 31 ovog prikaza). Faktor u (7) izabran je tako da funkcija X_n bude »normirana«, tj. da bude $\int_0^l X_n^2 \, dx = 1$. Iz (7) lako slijedi da je

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \, dx = \delta_{nm} \, (= 1 \text{ za } n = m \text{ i } 0 \text{ za } n \neq m), \quad (8)$$

tj. funkcije X_n su ortonormirane na intervalu $(0, l)$.

Budući da je jednadžbu $T'' + \left(\frac{c\pi}{l} n\right)^2 T = 0$ lako riješiti i da je (1) linearna jednadžba, to i funkcija

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) X_n(x), \quad \omega_n = \frac{c\pi}{l} n \quad (9)$$

zadovoljava bar formalno jednadžbu (1) i rubne uvjete (3). Oblik izraza $A_n \sin\left(\frac{\pi c}{l} n t - \varphi_n\right) X_n(x)$ pod znakom sume u jednadžbi (9) predstavlja stojni val sa pomakom faze φ_n (istim za sve x), frekvencije ω_n i amplitude $A_n X_n(x)$. Frekvencija najnižeg tona kojim žica može da titra dana je sa ω_1, a frekvencije ostalih viših tonova proporcionalne su sa osnovnom frekvencijom ω_1 (v. *Akustika*). Brojevi a_n i b_n u jednadžbi (9) određuju se iz početnih uvjeta (2). Deriviramo li tu jednadžbu po t, u dobiven rezultat i u (9) stavimo $t = 0$, dobivamo

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n X_n(x). \quad (10)$$

Relacije (10) predstavljaju razvoj početnih uvjeta (2) u Fourierov red po sinusima (v. *Diferencijalni račun*) odnosno po svojstvenim funkcijama problema (6). Pomnožimo li (10) sa $X_n(x)$, prointegriramo po x od 0 do l i uzmemo u obzir (8), nalazimo:

$$a_m = \int_0^l \varphi(x) X_m(x) \, dx, \qquad \omega_m b_m = \int_0^l \psi(x) X_m(x) \, dx. \quad (11)$$

Brojevi a_m i $\omega_m b_m$ zovu se Fourierovi koeficijenti funkcija φ, ψ u odnosu na funkcije X_m. Iz teorije Fourierovih redova poznato je da se svaka npr. neprekidna funkcija može razviti u Fourierov red. Odavde slijedi da je navedeni postupak opravdan za neprekidne početne uvjete (2).

27. Titranje štapa. a) Longitudinalno titranje štapa duljine l učvršćenog u lijevom kraju i slobodnog na desnom vodi na problem integracije jednadžbe (1) uz početne uvjete (2) i uz rubne uvjete:

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \quad \text{za sve } t. \quad (12)$$

Isti postupak kao u t. 26 vodi na rubni problem:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \text{ i } X \neq 0. \quad (13)$$

Odavde je $\lambda = -k^2$, $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$ i pripadna svojstvena funkcija problema (14) glasi:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \quad (n = 0, 1, 2 \ldots). \quad (14)$$

Funkcije (14) su normirane i vrijedi relacija (8) za $n = 0, 1 \ldots$ Red (15)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2l}\right) \pi c t + b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2l}\right) \pi c t \right] \cdot X_n(x)$$

daje rješenje jednadžbe (1) i rubnog problema (12). Brojevi a_n, b_n određuju se iz početnih uvjeta, tj. iz razvoja funkcija φ, ψ po svojstvenim funkcijama problema (13):

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2l} \pi c \, b_n X_n(x).$$

b) Transverzalno titranje štapa duljine l opisuje se diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (b > 0 \text{ konstanta}). \quad (16)$$

Pored početnih uvjeta (2) imamo 6 vrsta rubnih uvjeta koji nastaju kombinacijama ovih rubnih uvjeta:

1. Kraj štapa može biti ukliješten. Tada mora biti:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{za svako } t \text{ na tom kraju.}$$

2. Kraj štapa može biti poduprt. Tada mora biti:

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ za svako } t;$$

3. Kraj može biti slobodan. Tada mora biti $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ za svako t.

Pretpostavimo da su oba kraja poduprta, tj. da vrijedi 2. slučaj za $x = 0$ i $x = l$. Tada $u(x, t) = X(x) T(t)$ povlači $T'' = -\lambda b^2 T$ a za funkciju X dobivamo ovaj rubni problem:

$$X^{(\mathrm{IV})} = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad X''(l) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X \neq 0. \quad (17)$$

Stavimo li $\lambda = k^4$, onda iz diferencijalne jednadžbe dobivamo:

$$X(x) = A \sin k x + A_1 \cos k x + A_2 \operatorname{sh} k x + A_3 \operatorname{ch} k x.$$

Odavde i iz (17) nalazimo da k mora biti jednako $k_n = n\pi/l$ i da su pripadne svojstvene funkcije dane sa (7), a rješenje problema ima oblik:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n^2 \pi^2 b}{l^2} t + b_n \sin \frac{n^2 \pi^2 b}{l^2} t\right) X_n(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 b}{l^2} b_n X_n(x).$$

28. Titranje kružne membrane. Titranje kružne membrane radijusa 1 opisuje se jednadžbom:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \quad (= \Delta u), \quad (18)$$

gdje su r i ϑ polarne koordinate. Početni uvjeti za membranu glase:

$$u(r, \vartheta, 0) = \varphi(r, \vartheta), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r, \vartheta). \quad (19)$$

Pretpostavimo da je rub membrane učvršćen, tj. da je

$$u(1, \vartheta, t) = 0 \quad \text{za sve } t. \quad (20)$$

Tražimo li rješenje u obliku $u(r, \vartheta, t) = R(r)\, \Theta(\vartheta)\, T(t)$, onda iz (18) dobivamo

$$T'' + (c k)^2 T = 0, \qquad \Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \quad \text{i} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) R = 0, \quad (21)$$

pri čemu su λ i k neke konstante. Budući da Θ po značenju kuta ϑ mora biti periodična funkcija perioda 2π, to je $\lambda = n$ cio broj. No tada jednadžba (21) za R predstavlja u biti Besselovu diferencijalnu jednadžbu (v. *Funkcije, specijalne*). Odavde i iz činjenice da R mora biti neprekidno u nuli slijedi da je $R(r)$ proporcionalno sa $J_n(k r)$ gdje je

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \, \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

Besselova funkcija n-tog reda. Kako su J_n i J_{-n} proporcionalne funkcije, to se možemo ograničiti samo na $n = 0, 1, \ldots$ Rubni uvjet (20) povlači $R(1) = 0$, tj.

$$J_n(k) = 0, \qquad (n = 0, 1 \ldots). \quad (22)$$

Jednadžba (22) pokazuje da konstanta k mora biti korijen transcendentne jednadžbe. Jednadžba (22) ima beskonačno pozitivnih korijena; označimo ih sa $k_1^{(n)}, k_2^{(n)} \ldots$ Stavimo li

$$R_{nm}(x) = \frac{J_n(k_m^{(n)} x)}{\left\{\int_0^1 x \, [J_n(k_m^{(n)} x)]^2 \, dx\right\}^{1/2}} \quad (23)$$

i $\omega_m^{(n)} = c\, k_m^{(n)}$, dobivamo rješenje problema (18) i (20) u obliku

$$u(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_n^{(m)} \cos \omega_m^{(n)} t + B_n^{(m)} \sin \omega_m^{(n)} t) \cdot (C_n \cos n\vartheta + D_n \sin n\vartheta) R_{nm}(r), \quad (24)$$

gdje konstante $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$, C_n i D_n treba odrediti iz (19).

Određivanje tih konstanti iz (19) vodi na izraz oblika:

$$V(r) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m R_{nm}(r) \quad (25)$$

za dosta općenitu funkciju V. (Sumira se samo po m jer se radi samo o nulama funkcije J_n.) Koristeći se dobro poznatim svojstvima Besselovih funkcija imamo:

$$\int_0^1 r\, R_{nm}(r)\, R_{np}(r)\, \mathrm{d}r = \delta_{mp}, \qquad (26)$$

što zajedno sa (25) daje $V_m = \int_0^1 r\, V(r)\, R_{nm}(r)\, \mathrm{d}r$.

Na taj način rješenje problema (18), (19) i (20) zahtijeva razvoj dosta proizvoljne funkcije V u red po svojstvenim funkcijama problema:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \quad R(1) = 0. \qquad (27)$$

29. Vođenje topline. Štap duljine l: na lijevom kraju temperatura se održava na nuli, a na drugom kraju štap predaje toplinu u sredstvo oko sebe. Problem se svodi na rješavanje jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (28)$$

uz tzv. miješane rubne uvjete

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + b\, u = 0 \text{ za } x = l \text{ i za sve } t, \qquad (29)$$

gdje je $b \geqq 0$ konstanta. Početni uvjet glasi

$$u(x, 0) = f(x). \qquad (30)$$

Tražimo li rješenje u obliku $u(x, t) = X(x)\, T(t)$, dobivamo $T(t) = T(0) \exp c'\lambda t$ i za funkciju X rubni problem:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + b\, X(l) = 0, \quad X \neq 0. \qquad (31)$$

Stavimo li $\lambda = -k^2$, iz (31) dobivamo $X(x) = A \cos k x + B \sin k x$, a konstanta k mora zadovoljavati transcendentnu jednadžbu:

$$\operatorname{tg} l k = -\frac{k}{b}. \qquad (32)$$

Nacrtamo li funkcije $-\frac{x}{b}$ i $\operatorname{tg} l x$ nalazimo da ove dvije funkcije imaju beskonačno zajedničkih tačaka $\ldots -w_2 < -w_1 < 0 < < w_1 < w_2 \ldots$

Stavimo li

$$X_n(x) = \left[\frac{b + l\,(w_n^2 + b^2)}{2(w_n^2 + b^2)}\right]^{-1/2} \sin w_n x \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (33)$$

nalazimo

$$\int_0^l X_n(x)\, X_m(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{nm}. \qquad (34)$$

Rješenje problema (28) i (29) ima oblik:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-c' w_n^2 t)\, X_n(x).$$

Konstante A_n su Fourierovi koeficijenti početnog uvjeta (30) u odnosu na funkcije X_n, tj.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, X_n(x). \qquad (35)$$

Svaka neprekidna funkcija može se razviti u red (35); ako je funkcija dovoljno glatka, red konvergira apsolutno i uniformno.

DIFERENCIJALNI OPERATORI

30. Skalarni produkt funkcija. Neka je Ω zatvorena i ograničena oblast na pravcu, ravnini ili u prostoru i sa $C(\Omega)$ označimo skup svih na Ω definiranih kompleksnih neprekidnih funkcija. Kažemo da je neki podskup S od $C(\Omega)$ linearan [ili potprostor u $C(\Omega)$] ako S zajedno sa dvije funkcije f, g sadrži i njihovu linearnu kombinaciju, tj. funkciju $a f + b g$ (a, b kompleksni brojevi). Očito je $C(\Omega)$ linearan skup (vektorski prostor). Neka je ϱ na Ω zadana neprekidna funkcija takva da je $\varrho(P) \geqq 0$ za svaku tačku $P \in \Omega$. Pri tome $\varrho(P) = 0$ može biti samo u konačno tačaka.

Skalarnim produktom (u odnosu na ϱ) funkcija f i g iz $C(\Omega)$ zovemo broj

$$(f, g) = \int_\Omega f(P)\, \overline{g(P)}\, \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega, \qquad (1)$$

gdje $\overline{g(P)}$ označava konjugirano kompleksan broj od $g(P)$. Nenegativan broj $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ zove se norma ili duljina funkcije f, a broj $\|f - g\|$ udaljenost funkcija f i g. Za skalarni produkt (1) vrijedi tzv. Schwarzova nejednakost $|(f, g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$, tj. $\left|\int_\Omega f(P)\, \overline{g(P)}\, \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega\right| \leqq \left[\int_\Omega |f(P)|^2 \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega\right]^{1/2} \left[\int_\Omega |g(P)|^2\, \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega\right]^{1/2}$ i nejednakost trokuta $\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$.

Kažemo da je funkcija f normirana ako je $\|f\| = 1$; da su dvije funkcije f i g ortogonalne (okomite) ako je $(f, g) = 0$. Za podskup S od $C(\Omega)$ kažemo da je ortogonalan ako su bilo koje dvije funkcije iz S ortogonalne; S je ortonormiran ako je ortogonalan i svaki njegov element normiran.

Primjer: a) $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\varrho(x) = 1$ za svako $x \in \Omega$. Tada (1) daje $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$. Funkcije $X_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ imaju svojstvo da je $(X_n, X_m) = \delta_{nm}$, tj. funkcije X_n obrazuju ortonormiran skup u $C([-\pi, \pi])$.

b) $\Omega = [0, l]$, $l > 0$, $\varrho(x) = 1$ za svako $x \in \Omega$. Tada (1) glasi

$$(f, g) = \int_0^l f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Funkcije $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$, $(n = 1, 2, \ldots)$ obrazuju ortonormiran skup u $C([0, l])$ [v. t. 26, formule (7) i (8)].

c) $\Omega = [0, 1]$, $\varrho(x) \equiv x$. Tada (1) glasi:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\, \overline{g(x)}\, x\, \mathrm{d}x.$$

Funkcije R_{nm} $(m = 1, 2, \ldots)$ iz t. 28 su ortonormirane funkcije u odnosu na taj skalarni produkt.

Kažemo da niz funkcija f_n iz $C(\Omega)$ konvergira u srednjem funkciji f iz $C(\Omega)$ (v. *Diferencijalni račun*) ako niz brojeva $\|f_n - f\|$ teži nuli za $n \to \infty$, tj. ako

$$\int_\Omega |f_n(P) - f(P)|^2\, \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega \to 0 \qquad \text{za } n \to \infty.$$

Za ortonormiran skup $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ iz $C(\Omega)$ kažemo da je a) potpun ako $(f, e_k) = 0$ za svako $k = 1, 2, \ldots$ povlači $f = 0$, i b) da je totalan (ortogonalno) ako za svako f iz $C(\Omega)$ i svako $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $b_1, \ldots, b_n$ takvi da je $\|f - (b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n\| < \varepsilon$, tj. ako se svaka funkcija f po volji tačno može aproksimirati linearnim spojem od konačno mnogo funkcija iz skupa E.

Može se dokazati da je svaki zatvoren skup E ujedno i totalan i obratno. Iz

$$\|f - (b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n)\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \qquad (2)$$

gdje je

$$a_k = (f, e_k) = \int_\Omega f(P)\, \overline{e_k(P)}\, \varrho(P)\, \mathrm{d}\Omega \qquad (3)$$

tzv. Fourierov koeficijent funkcije f u odnosu na normiran vektor e_k, zaključujemo da za dano n među svim linearnim spojevima vektora $e_1, \ldots, e_n$ kombinacija

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k \qquad (4)$$

funkciji f daje najbolju aproksimaciju. Važno svojstvo funkcije f_n jest da koeficijenti a_k ne zavise od n, tj. ako su jednom izračunati, mogu poslužiti za daljnje aproksimacije. Iz (2) nadalje zaključujemo da je $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2$, što povlači tzv. Besselovu nejednakost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2. \qquad (5)$$

Prijeđemo li u (4) formalno na $n = \infty$, dobivamo red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k, \qquad (6)$$

koji se zove Fourierov red funkcije f u odnosu na skup E. Ako je E potpun skup, red (6) konvergira u srednjem funkciji f. Štaviše, u tom slučaju za bilo koje dvije funkcije f, g iz $C(\Omega)$ vrijedi tzv. Parsevalova jednakost $(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)\overline{(g, e_k)}$. Pitanje potpunosti skupa ortonormiranih funkcija vrlo je težak problem, a osobito je važno u opravdavanju rješavanja diferencijalnih jednadžbi Fourierovom metodom. Fourierova metoda je primjenljiva samo ako funkcije koje se pri tome dobivaju čine potpun skup funkcija.

31. Diferencijalni operator. Neka je $\Omega = [a, b]$ $a < b$ ograničen segment realnih brojeva i $C^{(n)}$ skup svih realnih na Ω definiranih funkcija koje imaju neprekidnu n-tu derivaciju. Linearnim diferencijalnim izrazom n-tog reda zovemo izraz oblika:

$$l(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y, \quad (n \geqq 2), \qquad (7)$$

pri čemu su funkcije $1/p_0, p_1, \ldots, p_n$ neprekidne na Ω. Relacijom (7) zadano je preslikavanje skupa $C^{(n)}$ u skup $C = C^{(0)}$. Neka su

$$y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)} \qquad (8)$$

vrijednosti funkcije $y \in C^{(n)}$ i njezinih derivacija do uključivši $(n-1)$-og reda na rubovima segmenta Ω. Sa $U(y)$ označimo linearnu formu veličina (8), tj. izraz oblika:

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \\ + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}. \qquad (9)$$

Budući da U funkciji $y \in C^{(n)}$ pridružuje broj, preslikavanje U zove se funkcional. Funkcional U je linearan, tj. vrijedi $U(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 U(y_1) + c_2 U(y_2)$ za svaki par funkcija $y_1, y_2 \in C^{(n)}$ i brojeva c_1, c_2. Ako je zadano više linearnih funkcionala $U_1, \ldots, U_m$, onda relacije

$$U_k(y) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, m) \qquad (10)$$

predstavljaju neka ograničenja na vladanje funkcije y na rubovima a, b segmenta Ω i zovu se rubni uvjeti. Skup svih funkcija $y \in C^{(n)}$ koje zadovoljavaju uvjete (10) označimo sa $\mathscr{D}$. Očigledno je $\mathscr{D}$ linearan podskup u C. Sada koristeći skup $\mathscr{D}$ i diferencijalni izraz (7) definiramo preslikavanje L koje funkciji $y \in \mathscr{D}$ pridružuje funkciju $Ly = l(y)$ iz C. Ovako definirano preslikavanje L zove se diferencijalni operator i kaže se da je on generiran diferencijalnim izrazom (7) i rubnim uvjetima (10). Dok diferencijalni izraz možemo primijeniti na svaku funkciju iz $C^{(n)}$, dotle diferencijalni operator L možemo primijeniti samo na funkcije koje zadovoljavaju uvjete (10). Različiti rubni uvjeti i isti diferencijalni izraz (7) generiraju općenito različite diferencijalne operatore. Operator L je linearan, tj. vrijedi

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2$$

za sve parove brojeva c_1, c_2 i sve parove funkcija y_1, y_2 iz $\mathscr{D}$.

Kompleksni broj λ zove se svojstvena vrijednost diferencijalnog operatora L ako postoji funkcija $y \in \mathscr{D}$, $y \neq 0$ takva da je

$$Ly = \lambda y. \qquad (11)$$

Skup svih funkcija $y \in \mathscr{D}$ za koje vrijedi (11) uz zadano λ obrazuje linearan skup (potprostor od $\mathscr{D}$), tzv. svojstven potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti diferencijalnog operatora L označimo sa $\sigma(L)$.

32. Greenova funkcija. Osnovni problem diferencijalnih operatora sastoji se u pronalaženju svih svojstvenih vrijednosti i svih svojstvenih funkcija toga operatora kao i problem razvijanja proizvoljne funkcije u redove po svojstvenim funkcijama. Osnovnu ulogu kod rješavanja navedenog problema igra veza između diferencijalnih i integralnih operatora. Pokazuje se da je integralni operator inverzan diferencijalnom operatoru. Treba li riješiti jednadžbu $Ly = f$ onda se rješenje nalazi u obliku $y = L^{-1}f$ odnosno

$$y(x) = \int_a^b G(x, z) f(z)\, dz. \qquad (12)$$

Funkcija G kojom je u (12) izražen inverzni operator L^{-1} zove se *Greenova funkcija* operatora L. Operator L^{-1} postoji onda i samo onda ako među formama (10) ima tačno n linearno nezavisnih formi (v. *Aritmetika i algebra*). U tome slučaju (koji u nastavku uzimamo) Greenova funkcija G je jedinstvena i ona je karakterizirana ovim svojstvima:

a) Za svako z iz $[a, b]$ funkcija $G(x, z)$ ima sve derivacije do uključivši derivaciju n-tog reda;

b) za dano z, $a < z < b$, funkcija $G(x, z)$ kao funkcija od x ima neprekidne derivacije $(n-1)$-og i n-tog reda u intervalima $[a, z)$, $(z, b]$. Pri tome u tački $x = z$ derivacija $(n-1)$-og reda ima skok prve vrste, tj. vrijedi:

$$\left[\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}\right]_{x = z+0} - \left[\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}\right]_{x = z-0} = \frac{1}{p_0(z)};$$

c) u svakom od intervala $[a, z)$, $(z, b]$ funkcija $G(x, z)$ kao funkcija od x zadovoljava jednadžbu $l(G) = 0$ i rubne uvjete $U_k(G) = 0$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Primjer: Titranje žice duljine l u t. 26 [relacija (6)] dovelo nas je na problem nalaženja svih funkcija $X(x)$ takvih da je $X'' = \lambda X$, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ i $X \neq 0$. U oznakama koje smo ovdje uveli imamo

$$l(y) = \frac{d^2}{dx^2} y, \quad U_1(y) = 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_l, \quad U_2(y) = 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_l,$$
$$(a = 0, \quad b = l).$$

Budući da su forme U_1 i U_2 nezavisne, postoji operator L^{-1}. Provjerom se lako vidi da Greenova funkcija ima oblik:

$$G(x, z) = \begin{cases} x\left(\dfrac{z}{l} - 1\right) & \text{za} \quad x \leqq z \\ z\left(\dfrac{x}{l} - 1\right) & \text{za} \quad x \geqq z. \end{cases}$$

Stavimo li u (12) $f = \lambda y$, zaključujemo da (12) prelazi u

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, z)\, y(z)\, dz. \qquad (13)$$

Ovo je integralna jednadžba Fredholmova tipa prve vrste, pa teorija integralnih jednadžbi (v. *Integralne jednadžbe*) povlači: skup $\sigma(L)$ svih svojstvenih vrijednosti operatora L prebrojiv je bez gomilišta u konačnosti i svaki svojstven potprostor operatora L sadrži samo konačno mnogo nezavisnih funkcija. Odavde slijedi ovaj rezultat: Ako diferencijalna jednadžba $l(y) = 0$ uz rubne uvjete $U_k(y) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ ima samo trivijalno rješenje (tj. $Ly = 0 \Rightarrow y = 0$), tada:

a) homogeni rubni problem $l(y) = \lambda y$, $U_k(y) = 0$ $(k = 1, \ldots n)$ ima prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ koje se ne mogu gomilati u konačnosti.

b) Za svako λ_0 koje nije svojstvena vrijednost navedenog rubnog problema, tj. operatora L, nehomogeni rubni problem $l(y) = \lambda_0 y + f$, $U_k(y) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ ima jedno i samo jedno rješenje za svaku neprekidnu funkciju f.

33. Sturm-Liouvilleov problem. Diferencijalni izraz

$$l(y) = \frac{1}{\varrho}[(p y')' - q y], \qquad (14)$$

gdje su p, q i ϱ zadane funkcije takve da je $\varrho(x) \geqq \varrho_0 > 0$ i $p(x) \geqq p_0 > 0$ na ograničenom segmentu $\Omega = [a, b]$ i rubni uvjeti tipa

$$\alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' = 0, \qquad \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' = 0 \qquad (15)$$

generiraju diferencijalni operator L. Problem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija toga operatora zove se Sturm-Liouvilleov problem. Svojstvene vrijednosti navedenog problema su realne i čine uzlazni niz $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ realnih brojeva. Svakom broju λ_n pripada svojstvena funkcija koja ima tačno n nula u intervalu (a, b). Ako su y_1 i y_2 dvije svojstvene funkcije koje pripadaju istoj svojstvenoj vrijednosti, one su proporcionalne, tj. $y_2 = c y_1$ (c broj).

Stavimo li

$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, \varrho(x)\, dx$ za funkcije f i g iz $C(\Omega)$ i sa l_n označimo normiranu $[(l_n, l_n) = 1]$ svojstvenu funkciju koja pripada svojstvenoj vrijednosti λ_n, onda je $(l_n, l_m) = \delta_{nm}$. Svaka funkcija y iz $\mathscr{D}$, tj. dva puta neprekidno derivabilna funkcija koja zadovoljava rubne uvjete (15), može se razviti u Fourierov red $y = \sum_{k=0}^{\infty} (y, l_k)\, l_k$ po svojstvenim funkcijama Sturm-Liouvilleovog problema. Pri tome navedeni red konvergira apsolutno i uniformno. Napisani red konvergira u srednjem funkciji y za svaku funkciju y za koju integral $\int\limits_a^b |y(x)|^2 \varrho(x)\,dx$ postoji i konačan je (kvadratno sumabilne funkcije).

Mnogo općenitiji rezultati navedenog tipa odnose se na tzv. hermitske diferencijalne operatore. Kod takvih operatora Greenova funkcija G ima svojstvo simetrije: $G(x, z) = \overline{G(z, x)}$ za sve x, z. Većina praktičnih problema vodi na takve operatore, pa navedeni rezultati opravdavaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi Fourierovom metodom (tj. metodom separacije varijabli).

34. Greenova funkcija Dirichletova problema. Razmatranja t. 32 mogu se proširiti i na parcijalne diferencijalne jednadžbe, naročito jednadžbe eliptičnog tipa. Pokažimo to na primjeru Dirichletova problema. Treba naći funkciju $u(x, y, z)$ takvu da bude

$$\Delta u = f \tag{16}$$

u nekoj oblasti Ω prostora i da se funkcija u na rubu $S = \partial\Omega$ podudara sa zadanom funkcijom φ. Pretpostavimo da znamo riješiti specijalni slučaj navedenog problema, tj. da znamo naći funkciju $g(P, P_0)$ od dvije tačke (tj. od 6 varijabli) takvu da je

$$\Delta g = 0 \ \text{ u } \ \Omega, \quad g(P, P_0) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (P \in S, \ r = \overline{PP_0}). \tag{17}$$

Rješenje ovog specijalnog problema daje funkciju g, a funkcija

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, P_0)$$

zove se Greenova funkcija diferencijalnog operatora generiranog Laplaceovim diferencijalnim izrazom Δ i rubnim problemom $u(P) = \varphi(P)$ za $P \in S$. Rješenje (ako postoji) jednadžbe (16) uz traženi rubni uvjet dano je formulom:

$$u(P_0) = \iint\limits_S \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_\Omega G(P, P_0) f(P)\,d\Omega.$$

Prema tome rješenje specijalnog problema (17) omogućava nalaženje rješenja (ako postoji) problema (16) za dosta široku klasu funkcija f i φ. Određivanje Greenove funkcije težak je problem i u slučaju kada je poznata njezina egzistencija. Greenova funkcija zavisi od oblasti Ω, njezina egzistencija ima veliku teoretsku vrijednost jer omogućava vezu diferencijalnih i integralnih operatora. Podvucimo da integralna jednadžba koja je pridružena rubnom problemu kompenzira ne samo diferencijalnu jednadžbu nego i rubne uvjete. Teorija integralnih jednadžbi dobro je razvijena i omogućava rješavanje rubnih problema raznim aproksimativnim metodama (v. *Metode aproksimacija*). Teorijom distribucija mnoga pitanja u vezi s Greenovom funkcijom i diferencijalnim operatorima rasvijetljena su i pojednostavnjena. Za dublja razmatranja problema dotaknutih u ovom prikazu potrebna su sredstva funkcionalne analize (teorija mjere, Hilbertov prostor, Banachov prostor, linearni topološki prostori itd.).

LIT.: *R. Courant, D. Hilbert,* Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Berlin 1931, 1937. — *E. C. Titchmarsh,* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, New York 1946. — *В. И. Смирнов,* Курс высшей математики, т. II, Москва 1948. — *Б. М. Левитан,* Разложение по собственным функциям, Москва 1950. — *С. Л. Соболев,* Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, Ленинград 1950. — *R. Sauer,* Anfangswertprobleme der partiellen Differenzialgleichungen, Berlin 1952. — *С. Л. Соболев,* Уравнения математической физики, Москва 1954. — *F. Tricomi,* Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Torino 1954. — *L. Hörmander,* On the theory of general partial differential operators, Acta Mathematica 94, 161—248, 1955. — *F. John,* Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, New York 1955. — *C. Miranda,* Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Berlin 1955. — *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. IV, Москва 1957. — *G. Hellwig,* Partielle Differenzialgleichungen, Stuttgart 1960. — *И. Г. Петровский,* Лекции об уравнениях с частными производными, Москва 1961. — *Н. С. Котляров, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов,* Основные дифференциальные уравнения математической физики, Москва 1962. — *R. Courant,* Partial differential equations, New York 1962. — *B. Epstein,* Partial differential equations, New York 1962. — *J. Hadamart,* Lectures in Cauchy's problem in linear partial differential equations, New York 1962.

S. Kurepa

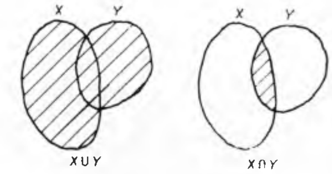
DIFERENCIJALNI RAČUN, jedan od dvaju dijelova (drugi je integralni račun) *infinitezimalnog računa,* u kojem se specifičnim »infinitezimalnim« metodama izučavaju realne funkcije jedne i više varijabli. To je uvod u centralnu disciplinu matematike: *matematičku analizu.* Sa stanovišta savremene matematike infinitezimalni račun predstavlja ponešto heterogenu skupinu pojmova i rezultata koji su osnov za različne više dijelove matematičke analize kao što su diferencijabilna preslikavanja u vektorskim prostorima i na diferencijabilnim mnogostrukostima, analitičke funkcije, teorija mjere i integrala, funkcionalna analiza, diferencijalne jednadžbe, integralne jednadžbe, funkcionalne jednadžbe i jednadžbe diferencija, integralne transformacije, harmonijska analiza, račun varijacija, itd.

Iako prve tragove nalazimo već u starogrčkoj matematici (tangente nekih posebnih krivulja, najjednostavniji problemi ekstrema, zameci integralnog računa), diferencijalni račun se počeo sustavno razvijati tek u XVII st., naročito u vezi s problemom brzine gibanja, problemom tangente na krivulju i problemom ekstrema funkcija.

Put diferencijalnom računu utrli su svojim radovima osobito R. Descartes (1596—1650), B. Cavalieri (1598—1647), P. de Fermat (1601—1665), G. P. Roberval (1602—1675), E. Torricelli (1608—1647), J. Wallis (1616—1703) i I. Barrow (1630—1677). Međutim, osnivačima discipline treba smatrati tek I. Newtona (1643—1727) i G. W. Leibniza (1646—1716). Na razvijanju diferencijalnog računa i njegovih brojnih primjena u XVII i XVIII st. mnogo su učinili J. Gregory (1638—1675), a osobito braća Jakob Bernoulli (1654—1705) i Johann Bernoulli (1667—1748). Slijedili su vrlo značajni radovi L. Eulera (1707—1783), J. d'Alemberta (1717—1783), J. L. Lagrangea (1736—1813) i P. S. Laplacea (1749—1827). Od matematičara XIX i XX st. za razvoj i egzaktno fundiranje diferencijalnog računa i srodnih disciplina osobito su važni J. Fourier (1768—1830), C. F. Gauss (1777—1855), A. Cauchy (1789—1857), C. Jacobi (1804—1851), P. L. Dirichlet (1805—1859), K. Weierstrass (1815—1897), B. Riemann (1826—1866), R. Dedekind (1831—1916) i G. Cantor (1845—1918).

1. Skupovi i preslikavanja. U sustavnoj izgradnji savremene matematike uzima se kao osnovni pojam pojam *skupa.* Pri tome se najčešće radi o skupovima brojeva, tačaka, pravaca ili drugih matematičkih objekata. Sloboda u odabiranju skupova je gotovo neograničena. Skup je poznat čim je poznato od kojih se *elemenata (članova)* sastoji. Ako je X neki skup, a x elemenat od X, simbolički se taj odnos označava relacijom $x \in X$, gdje znak $\in$ označuje pripadanje. Ako je svaki element skupa Y ujedno i element skupa X, kaže se da je Y *podskup* skupa X i piše $Y \subseteq X$.

Osnovne operacije među skupovima jesu *spoj (unija)* $X \cup Y$ skupova X i Y i *presjek* $X \cap Y$ skupova X i Y. Spoj $X \cup Y$



Sl. 1. Spoj i presjek skupova

je skup koji se sastoji od elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova X, Y; presjek $X \cap Y$ je skup koji se sastoji samo od onih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu X i skupu Y (sl. 1).

Preslikavanje $f: X \to Y$ skupa X u skup Y je postupak kojim se svakom elementu $x \in X$ pridružuje jedan element $y \in Y$. Kaže se da je X — *područje definicije* preslikavanja f, a Y — *područje vrijednosti* preslikavanja f. Piše se $y = f(x)$. x se naziva *nezavisnom varijablom* ili *argumentom,* a y *zavisnom varijablom* ili *funkcijom.* Najvažniji je slučaj kada su X i Y skupovi brojeva; tada se mjesto o preslikavanju najčešće govori o *funkciji.* Ako je Y skup brojeva a X skup složenijih objekata (npr. vektora, funkcija i sl.) za f se ponekad upotrebljava naziv *funkcional.* Ako su i X i Y sastavljeni od složenijih objekata, tada je u upotrebi često naziv *operator.*

Ako su dana dva preslikavanja $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, tada je posve definirano *složeno preslikavanje* $g \circ f: X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ako je dano još i preslikavanje $h: Z \to W$, tada vrijedi zakon asocijacije $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Pojam skupa, preslikavanja i funkcije sporo se i dugo razvijao, te je današnje shvaćanje nastalo tek u XIX st. a razjasnilo se osobito razvitkom teorije skupova početkom XX stoljeća.

2. Realni kontinuum R. Funkcije jedne varijable. Osnov na kojem je izgrađena matematička analiza jest *skup realnih brojeva,* tzv. *realni kontinuum* R. U tom skupu definirane su dvije osnovne operacije: *zbrajanje (adicija)* i *množenje (multiplikacija),* kojima se svakom paru realnih brojeva $x, y \in R$ pridružuje broj $x + y \in R$, odnosno broj $x \cdot y \in R$. Nadalje, realni kontinuum je *potpuno uređen,* tj. za svaka dva realna broja $x, y \in R$ zna se da x nije veći od y, simbolički $x \leqq y$, ili da y nije veći od x, $y \leqq x$. Ako je $x \leqq y$, i pri tom je x različito od y, piše se $x < y$.