funkciju y za koju integral $\int\limits_a^b |y(x)|^2 \varrho(x)\, \mathrm{d}x$ postoji i konačan je (kvadratno sumabilne funkcije).

Mnogo općenitiji rezultati navedenog tipa odnose se na tzv. hermitske diferencijalne operatore. Kod takvih operatora Greenova funkcija G ima svojstvo simetrije: $G(x, z) = \overline{G(z, x)}$ za sve x, z. Većina praktičnih problema vodi na takve operatore, pa navedeni rezultati opravdavaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi Fourierovom metodom (tj. metodom separacije varijabli).

34. Greenova funkcija Dirichletova problema. Razmatranja t. 32 mogu se proširiti i na parcijalne diferencijalne jednadžbe, naročito jednadžbe eliptičnog tipa. Pokažimo to na primjeru Dirichletova problema. Treba naći funkciju $u(x, y, z)$ takvu da bude

$$\Delta u = f \tag{16}$$

u nekoj oblasti Ω prostora i da se funkcija u na rubu $S = \partial\Omega$ podudara sa zadanom funkcijom φ. Pretpostavimo da znamo riješiti specijalni slučaj navedenog problema, tj. da znamo naći funkciju $g(P, P_0)$ od dvije tačke (tj. od 6 varijabli) takvu da je

$$\Delta g = 0 \;\text{ u }\; \Omega, \;\; g(P, P_0) = -\frac{1}{4\pi r} \;\; (P \in S,\; r = \overline{PP_0}). \tag{17}$$

Rješenje ovog specijalnog problema daje funkciju g, a funkcija

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, P_0)$$

zove se Greenova funkcija diferencijalnog operatora generiranog Laplaceovim diferencijalnim izrazom Δ i rubnim problemom $u(P) = \varphi(P)$ za $P \in S$. Rješenje (ako postoji) jednadžbe (16) uz traženi rubni uvjet dano je formulom:

$$u(P_0) = \iint\limits_S \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, \mathrm{d}S - \iiint\limits_\Omega G(P, P_0) f(P)\, \mathrm{d}\Omega.$$

Prema tome rješenje specijalnog problema (17) omogućava nalaženje rješenja (ako postoji) problema (16) za dosta široku klasu funkcija f i φ. Određivanje Greenove funkcije težak je problem i u slučaju kada je poznata njezina egzistencija. Greenova funkcija zavisi od oblasti Ω, njezina egzistencija ima veliku teoretsku vrijednost jer omogućava vezu diferencijalnih i integralnih operatora. Podvucimo da integralna jednadžba koja je pridružena rubnom problemu kompenzira ne samo diferencijalnu jednadžbu nego i rubne uvjete. Teorija integralnih jednadžbi dobro je razvijena i omogućava rješavanje rubnih problema raznim aproksimativnim metodama (v. *Metode aproksimacija*). Teorijom distribucija mnoga pitanja u vezi s Greenovom funkcijom i diferencijalnim operatorima rasvijetljena su i pojednostavnjena. Za dublja razmatranja problema dotaknutih u ovom prikazu potrebna su sredstva funkcionalne analize (teorija mjere, Hilbertov prostor, Banachov prostor, linearni topološki prostori itd.).

LIT.: *R. Courant, D. Hilbert,* Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Berlin 1931, 1937. — *E. C. Titchmarsh,* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, New York 1946. — *В. И. Смирнов,* Курс высшей математики, т. II, Москва 1948. — *Б. М. Левитан,* Разложение по собственным функциям, Москва 1950. — *С. Л. Соболев,* Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, Ленинград 1950. — *R. Sauer,* Anfangswertprobleme der partiellen Differenzialgleichungen, Berlin 1952. — *С. Л. Соболев,* Уравнения математической физики, Москва 1954. — *F. Tricomi,* Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Torino 1954. — *L. Hörmander,* On the theory of general partial differential operators, Acta Mathematica 94, 161—248, 1955. — *F. John,* Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, New York 1955. — *C. Miranda,* Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Berlin 1955. — *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. IV, Москва 1957. — *G. Hellwig,* Partielle Differenzialgleichungen, Stuttgart 1960. — *И. Г. Петровский,* Лекции об уравнениях с частными производными, Москва 1961. — *Н. С. Котляров, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов,* Основные дифференциальные уравнения математической физики, Москва 1962. — *R. Courant,* Partial differential equations, New York 1962. — *B. Epstein,* Partial differential equations, New York 1962. — *J. Hadamart,* Lectures in Cauchy's problem in linear partial differential equations, New York 1962.

S. Kurepa

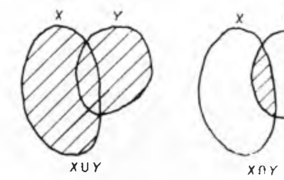
DIFERENCIJALNI RAČUN, jedan od dvaju dijelova (drugi je integralni račun) *infinitezimalnog računa,* u kojem se specifičnim »infinitezimalnim« metodama izučavaju realne funkcije jedne i više varijabli. To je uvod u centralnu disciplinu matematike: *matematičku analizu.* Sa stanovišta savremene matematike infinitezimalni račun predstavlja ponešto heterogenu skupinu pojmova i rezultata koji su osnov za različne više dijelove matematičke analize kao što su diferencijabilna preslikavanja u vektorskim prostorima i na diferencijabilnim mnogostrukostima, analitičke funkcije, teorija mjere i integrala, funkcionalna analiza, diferencijalne jednadžbe, integralne jednadžbe, funkcionalne jednadžbe i jednadžbe diferencija, integralne transformacije, harmonijska analiza, račun varijacija, itd.

Iako prve tragove nalazimo već u starogrčkoj matematici (tangente nekih posebnih krivulja, najjednostavniji problemi ekstrema, zameci integralnog računa), diferencijalni račun se počeo sustavno razvijati tek u XVII st., naročito u vezi s problemom brzine gibanja, problemom tangente na krivulju i problemom ekstrema funkcija.

Put diferencijalnom računu utrli su svojim radovima osobito R. Descartes (1596—1650), B. Cavalieri (1598—1647), P. de Fermat (1601—1665), G. P. Roberval (1602—1675), E. Torricelli (1608—1647), J. Wallis (1616—1703) i I. Barrow (1630—1677). Međutim, osnivačima discipline treba smatrati tek I. Newtona (1643—1727) i G. W. Leibniza (1646—1716). Na razvijanju diferencijalnog računa i njegovih brojnih primjena u XVII i XVIII st. mnogo su učinili J. Gregory (1638—1675), a osobito braća Jakob Bernoulli (1654—1705) i Johann Bernoulli (1667—1748). Slijedili su vrlo značajni radovi L. Eulera (1707—1783), J. d'Alemberta (1717—1783), J. L. Lagrangea (1736—1813) i P. S. Laplacea (1749—1827). Od matematičara XIX i XX st. za razvoj i egzaktno fundiranje diferencijalnog računa i srodnih disciplina osobito su važni J. Fourier (1768—1830), C. F. Gauss (1777—1855), A. Cauchy (1789—1857), C. Jacobi (1804—1851), P. L. Dirichlet (1805—1859), K. Weierstrass (1815—1897), B. Riemann (1826—1866), R. Dedekind (1831—1916) i G. Cantor (1845—1918).

1. Skupovi i preslikavanja. U sustavnoj izgradnji savremene matematike uzima se kao osnovni pojam pojam *skupa.* Pri tome se najčešće radi o skupovima brojeva, tačaka, pravaca ili drugih matematičkih objekata. Sloboda u odabiranju skupova je gotovo neograničena. Skup je poznat čim je poznato od kojih se *elemenata (članova)* sastoji. Ako je X neki skup, a x elemenat od X, simbolički se taj odnos označava relacijom $x \in X$, gdje znak $\in$ označuje pripadanje. Ako je svaki element skupa Y ujedno i element skupa X, kaže se da je Y *podskup* skupa X i piše $Y \subseteq X$.

Osnovne operacije među skupovima jesu *spoj (unija)* $X \cup Y$ skupova X i Y i *presjek* $X \cap Y$ skupova X i Y. Spoj $X \cup Y$



Sl. 1. Spoj i presjek skupova

je skup koji se sastoji od elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova X, Y; presjek $X \cap Y$ je skup koji se sastoji samo od onih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu X i skupu Y (sl. 1).

Preslikavanje $f: X \to Y$ skupa X u skup Y je postupak kojim se svakom elementu $x \in X$ pridružuje jedan element $y \in Y$. Kaže se da je X — *područje definicije* preslikavanja f, a Y — *područje vrijednosti* preslikavanja f. Piše se $y = f(x)$. x se naziva *nezavisnom varijablom* ili *argumentom,* a y *zavisnom varijablom* ili *funkcijom.* Najvažniji je slučaj kada su X i Y skupovi brojeva; tada se mjesto o preslikavanju najčešće govori o *funkciji.* Ako je Y skup brojeva a X skup složenijih objekata (npr. vektora, funkcija i sl.) za f se ponekad upotrebljava naziv *funkcional.* Ako su i X i Y sastavljeni od složenijih objekata, tada je u upotrebi često naziv *operator.*

Ako su dana dva preslikavanja $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, tada je posve definirano *složeno preslikavanje* $g \circ f: X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ako je dano još i preslikavanje $h: Z \to W$, tada vrijedi zakon asocijacije $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Pojam skupa, preslikavanja i funkcije sporo se i dugo razvijao, te je današnje shvaćanje nastalo tek u XIX st. a razjasnilo se osobito razvitkom teorije skupova početkom XX stoljeća.

2. Realni kontinuum R. Funkcije jedne varijable. Osnov na kojem je izgrađena matematička analiza jest *skup realnih brojeva,* tzv. *realni kontinuum* R. U tom skupu definirane su dvije osnovne operacije: *zbrajanje (adicija)* i *množenje (multiplikacija),* kojima se svakom paru realnih brojeva $x, y \in R$ pridružuje broj $x + y \in R$, odnosno broj $x \cdot y \in R$. Nadalje, realni kontinuum je *potpuno uređen,* tj. za svaka dva realna broja $x, y \in R$ zna se da x nije veći od y, simbolički $x \leqq y$, ili da y nije veći od x, $y \leqq x$. Ako je $x \leqq y$, i pri tom je x različito od y, piše se $x < y$.

Osnovna svojstva realnih brojeva jesu ova:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (zakon asocijacije za zbrajanje),
2. $x + y = y + x$ (zakon komutacije za zbrajanje),
3. postoji broj *nula* 0 koji ima svojstvo da je $0 + x = x$, za svako $x \in R$,
4. za svako $x \in R$ postoji *protivan* broj $-x \in R$ sa svojstvom da je $x + (-x) = 0$,
5. $x(yz) = (xy)z$ (zakon asocijacije za množenje),
6. $xy = yx$ (zakon komutacije za množenje),
7. postoji broj *jedan* 1 različit od 0, $1 \in R$, koji ima svojstvo da je $1 \cdot x = x$, za sve $x \in R$,
8. za svaki $x \in R$, $x \neq 0$, postoji recipročan broj $x^{-1} = \frac{1}{x} \in R$ sa svojstvom da je $x^{-1}x = 1$,
9. $x(y + z) = xy + xz$ (zakon distribucije).

Nadalje,

10. iz $x \leqq y$ i $y \leqq z$ slijedi $x \leqq z$, $x, y, z \in R$,
11. $x \leqq y$ i $y \leqq x$ je ispunjeno onda i samo onda ako je $x = y$,
12. iz $x \leqq y$ slijedi $x + z \leqq y + z$, za svako $z \in R$,
13. iz $0 \leqq x$ i $0 \leqq y$ slijedi $0 \leqq xy$.

Napokon, R ima ovo važno svojstvo kontinuiteta:

14. svaki *odozgo omeđeni* skup $M \subseteq R$ ima najmanju *gornju među*, tzv. *supremum* sup M. Kaže se da je skup M omeđen odozgo ako ima bar jednu *gornju među c*, tj. ako postoji broj $c \in R$ sa svojstvom da je $m \leqq c$, za svaki $m \in M$. Npr. skup negativnih brojeva je omeđen odozgo; svaki pozitivan broj i broj 0 gornje su međe ovog skupa. Pri tom je 0 najmanja gornja međa, tj. supremum.

Svojstvo 14. je osobito važno. Iz njega slijedi da je svaki *rez* u skupu realnih brojeva proizveden nekim realnim brojem, a u tome se upravo i sastoji kontinuitet skupa realnih brojeva što daje mogućnost da se uspostavi obostrano jednoznačna korespondencija između realnih brojeva i tačaka na pravcu i tako dođe do pojma *brojevnog pravca* (v. *Analitička geometrija*). Svojstvo 14. daje ujedno i teoretsku osnovu za mogućnost mjerenja dužina. Rez u nekom potpuno uređenom skupu X je svaki rastav skupa X na dva dijela A, B bez zajedničkih elemenata i takva da je svaki $a \in A$ manji od svakog $b \in B$, tj. da je skup A posve lijevo od skupa B. Kaže se da je rez proizveden nekim elementom $c \in X$ ako je $a \leqq c$, za sve $a \in A$, i istodobno je $c \leqq b$, za sve $b \in B$.

Navedenih četrnaest svojstava je karakteristično za skup realnih brojeva, što znači da ne postoji nikakav drugi skup koji posjeduje sva svojstva 1,...,14.

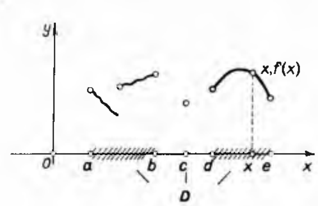
Realni brojevi se mogu izgraditi postepeno polazeći od prirodnih brojeva, proširujući područje brojeva najprije na cijele, pa na racionalne i napokon na realne brojeve (v. *Aritmetika*). Najteži je prelaz od racionalnih na realne brojeve. Treba primijetiti da već racionalni brojevi imaju sva navedena svojstva osim posljednjeg svojstva 14. Ako se npr. promatraju u skupu racionalnih brojeva svi oni racionalni brojevi r za koje je $r^2 < 2$, onda je taj skup omeđen odozgo npr. brojem 2, ali u skupu racionalnih brojeva nema najmanje gornje međe, jer bi to morao biti racionalan broj kojemu bi kvadrat bio 2, a takav racionalni broj ne postoji. Zaista, ako se pretpostavi da je $r = \frac{p}{q}$, gdje su p i q prirodni relativno prosti brojevi, i da je $r^2 = 2$, onda slijedi zaključak da je $p^2 = 2q^2$, što bi značilo da je p^2, a time i p, paran broj. Zato bi bilo $p = 2s$, pa bi se dobilo $2s^2 = q^2$, što bi pokazivalo da je i q paran broj. Prema tome, p i q bi imali broj 2 za zajedničku mjeru, protivno pretpostavci da su p i q relativno prosti brojevi, tj. da nemaju zajedničku mjeru. Ovu činjenicu uočili su već starogrčki matematičari.

Naprotiv, u skupu realnih brojeva postoji broj x za koji je $x^2 = 2$; taj broj se označuje sa $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ je realan broj, ali nije racionalan već je *iracionalan*. Općenito, u skupu realnih brojeva za svako $a > 0$ postoji jednoznačno određeni broj $x > 0$ sa svojstvom da je $x^2 = a$. Piše se $x = \sqrt{a}$ ili $x = a^{\frac{1}{2}}$. Uz pomoć rezova u skupu racionalnih brojeva mogu se definirati i potencije a^{α}, $a > 0$, gdje je α bilo kakav racionalni ili čak realni broj. Općenito se realni brojevi strogo uvode kao rezovi u skupu racionalnih brojeva.

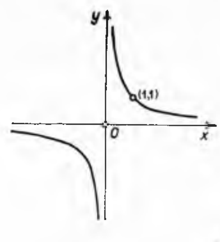
Razvitak pojma realnog broja bio je veoma spor i dugotrajan s počecima u Eudoksa (← 408? — ← 355?). Pri tome je osnovnu ulogu odigrao problem mjerenja dužina i želja da se svakoj dužini pridruži izvjestan broj kao njen *mjerni broj*, tj. kao njena *duljina*.

Nakon što je uveden brojevni pravac, može se ravnopravno govoriti o realnom kontinuumu ili o pravcu, te o brojevima ili tačkama. Najvažniji skupovi na brojevnom pravcu R jesu *otvoreni intervali* (a, b), $a < b$. (a, b) se sastoji od svih x za koje je $a < x < b$. Ponekad se dopušta i slučaj da su a i/ili b beskonačni, pa se dobivaju *beskonačni intervali* $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Kako se vidi, intervali zahvaćaju »s obje strane« svake svoje tačke, pa se govori da je interval okolina svake svoje tačke. Općenito, skup $U \subseteq R$ je *okolina* tačke x ako postoji interval (a, b) takav da je $x \in (a, b) \subseteq U$. Važni su i *zatvoreni intervali* $[a, b]$ koji se sastoje iz svih tačaka x za koje je $a \leqq x \leqq b$.

Svako preslikavanje f realnog kontinuuma R ili nekog njegovog dijela u R zove se funkcija ili preciznije *realna funkcija jedne realne varijable*. Takva je npr. funkcija $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, koja je definirana za sve realne brojeve $x \neq 0$.



Sl. 2. Graf funkcije $f(x)$; $D = [a, b] \cup \{c\} \cup [d, e]$ je područje definicije funkcije f



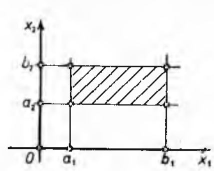
Sl. 3. Graf funkcije $\frac{1}{x}$

Funkcije jedne realne varijable pregledno prikazujemo pomoću grafa. *Graf funkcije f* je skup svih tačaka (x, y) ravnine za koje je $y = f(x)$, a x je iz područja definicije D funkcije f (sl. 2 i 3).

Neki najjednostavniji zakoni u prirodnim i društvenim naukama izražavaju se realnim funkcijama jedne realne varijable. Npr. kod prostog pada je put $s = s(t)$ prevaljen u vremenu t dan funkcijom $s = \frac{g}{2}t^2$, gdje je g ubrzanje sile teže.

3. n-dimenzionalni euklidski prostor $\mathbf{R}^n$. Funkcije više varijabli. Opisivanje složenijih zakona zahtijeva pojam realne funkcije od više realnih varijabli. Npr. struja $I = V/R$, gdje je V napon, a R otpor. U ekonomici potražnja q nekog dobra funkcija je cijene p tog dobra, dohotka k potrošača i vremena t, tj. $q = q(p, k, t)$, dakle, svakoj trojci (p, k, t) brojeva iz nekog područja pripada određena vrijednost q. U složenijim situacijama ovisit će q još npr. i o cijenama $p_1, \ldots, p_m$ nekih drugih dobara (npr. konkurentnih), te će biti $q = q(p, p_1, \ldots, p_m, k, t)$. Potrebno je, dakle, uvesti u razmatranje *n-dimenzionalni realni prostor* R^n kojemu su *tačke* x nizovi od n realnih brojeva $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Geometrijski jezik i nazivi opravdani su u slučajevima $n = 1, 2, 3$ korespondencijom koju uspostavlja koordinatni sustav između tačaka prostora i ovakvih konačnih nizova realnih brojeva (koordinatâ) (v. *Analitička geometrija*).

Najvažniji skupovi u R^n su *n-dimenzionalni intervali*. Ako je dano n intervala $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ na pravcu R, onda je posve određen n-dimenzionalni interval $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ koji se sastoji od svih tačaka $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, gdje je $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$ (sl. 4). Skup $U \subseteq R^n$ je *okolina* tačke $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, ako postoji n-dimenzionalni interval koji sadrži x, a sadržan je u R^n. Skup $V \subseteq R^n$ je *otvoren* ako je okolina svake svoje tačke.



Sl. 4. 2-dimenzionalni interval

U n-dimenzionalnom prostoru R^n može se uvesti i pojam *udaljenosti* dviju tačaka $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ formulom

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

(usporediti s *Analitičkom geometrijom* za $n = 1$, 2 i 3). Udaljenost d ima ova četiri bitna svojstva:

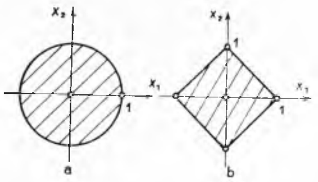
1. $d(x, y) = 0$ onda i samo onda ako je $x = y$,
2. $d(x, y) \geqq 0$, za sve x, y,
3. $d(x, y) = d(y, x)$, za sve x, y,
4. $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$, za sve x, y, z.

Ako je udaljenost d u R^n definirana formulom (1), onda se R^n zove *n-dimenzionalni euklidski prostor.*

Ako je za parove tačaka nekog skupa X definirana udaljenost $d(x, y)$ kao realna funkcija koja ima četiri navedena svojstva, onda se kaže da je X *metrički prostor*, a d da je *metrička funkcija* ili *metrika* u X. n-dimenzionalni euklidski prostor R^n je, dakle, primjer metričkog prostora. Drugi primjeri se dobiju ako se u R^n uvedu drukčije metrike nego što je euklidska metrika (1). Npr. može se udaljenost d_1 definirati formulom

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \qquad (2)$$

Metrički prostori igraju važnu ulogu u savremenoj matematičkoj analizi. U svakom metričkom prostoru dobro je definirana *kugla* $K(x_0, \varepsilon)$ sa središtem u tački $x_0 \in X$ i radijusom $\varepsilon > 0$ kao skup svih tačaka $x \in X^2$ za koje je udaljenost $d(x, x_0) < \varepsilon$. Sl. 5 pokazuje kuglu u R^2 uz uobičajenu euklidsku metriku (1) (dobiva se krug) i uz metriku (2) (dobiva se kvadrat). U metričkom prostoru X je okolina oko tačke $x_0 \in X$ svaki skup U iz X koji sadrži neku kuglu sa središtem u x_0. Skup V je *otvoren* ako je okolina svake njegove tačke $x_0 \in V$. Ove definicije primijenjene na n-dimenzionalni metrički prostor R^n i metrike (1) i (2) ekvivalentne su definicijama preko n-dimenzionalnih intervala.



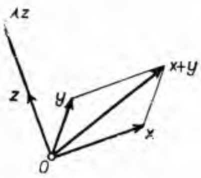
Sl. 5. Kugle u R^2 u raznim metrikama; *1* u metrici (1), *2* u metrici (2)

Ako je V otvoren skup u prostoru X, tada sve tačke $x \in X$ koje ne pripadaju skupu V tvore *zatvoreni skup F*. Kaže se da je tačka $x_0 \in X$ *tačka okupljanja* skupa $A \subseteq X$, ako svaka okolina U oko x_0 sadrži bar jednu tačku skupa A. Sve tačke okupljanja skupa A tvore *zatvarač* ili *zatvorenje* skupa A koji se obično označava sa $\bar{A}$. Skup je zatvoren onda i samo onda ako sadrži sve svoje tačke okupljanja, tj. ako se podudara sa svojim zatvaračem. Skup je *omeđen* ako je sadržan u nekoj konačnoj kugli. Od posebne su važnosti skupovi iz R^n koji su istodobno zatvoreni i omeđeni. Za takav skup iz R^n se kaže da je *kompaktan*. Npr. zatvoreni segment $[a, b] \subseteq R$ je kompaktan skup.

Realna funkcija od n realnih varijabli $f(x_1, \ldots, x_n)$ se definira kao preslikavanje nekog dijela D n-dimenzionalnog realnog prostora R^n u skup realnih brojeva R. f dodjeljuje svakoj tački $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ neku realnu vrijednost $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Zbrajanje i množenje važni su primjeri funkcija od dvije varijable: $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$ definiranih na čitavoj ravnini R^2. Graf funkcije od više varijabli je također dobro definiran, ali mu je praktična važnost za predočavanje funkcija znatno umanjena jer se radi o skupu iz R^{n+1} ako funkcija ima n varijabli (za predočavanje ovih funkcija v. *Numeričke, grafičke i instrumentalne metode računanja*).

Općenitija od funkcija više varijabli su preslikavanja skupova iz R^n u R^m.

Operaciju zbrajanja moguće je uvesti i u prostoru R^n. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tada je $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Ako se tački x pridruži vektor mjesta (v. *Analitička geometrija*) koji spaja ishodište $O = (0, \ldots, 0)$ s tačkom x, vidi se da opisanom zbrajanju korespondira uobičajeno zbrajanje vektora. Pored ove operacije uvodi se i množenje sa realnim brojem λ po formuli $\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Opisanom množenju odgovara množenje vektora sa skalarom (sl. 6. Vidi također *Vektorski i tenzorski račun*).



Sl. 6. Zbrajanje vektorâ i množenje sa skalarom

Za navedene operacije vrijede ova pravila:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x, y, z \in R^n$,
2. $x + y = y + x$, $x, y \in R^n$,
3. za $0 = (0, \ldots, 0)$ je $x + 0 = x$, za svako $x \in R^n$,
4. $x + (-x) = 0$, gdje je $-x = -(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$,
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\lambda \in R$, $x, y \in R^n$,
6. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$, $\lambda, \mu \in R$, $x \in R^n$,
7. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$,
8. $1 \cdot x = x$.

Svaki skup X u kojem je definirano zbrajanje $x + y$ i množenje λx s realnim brojevima tako da su zadovoljeni uvjeti 1...8 zove se *vektorski prostor* ili *linearni prostor*. U matematičkoj analizi su od posebne važnosti *normirani vektorski prostori*, tj. vektorski prostori u kojima je definirana *duljina* ili *norma* $\|x\|$ vektora $x \in X$. Norma zadovoljava ova četiri uvjeta:

1. $\|x\| = 0$ onda i samo onda ako je $x = 0$,
2. $\|x\| \geqq 0$,
3. $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$,
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

U svakom normiranom vektorskom prostoru X formulom $d(x, y) = \|x - y\|$, definira se udaljenost između elemenata x i y tako da je svaki normirani vektorski prostor ujedno i primjer metričkog prostora. R^n je primjer normiranog vektorskog prostora; norma $\|x\|$ je dana formulom $\|x\| = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{\frac{1}{2}}$. U slučaju realnih brojeva norma se svodi na apsolutnu vrijednost $|x|$.

4. Konvergencija nizova tačaka. Redovi. *Niz tačaka* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ iz m-dimenzionalnog prostora R^m je funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva $1, 2, \ldots, n, \ldots$, a sa vrijednostima u prostoru R^m. Drugim riječima, za svaki prirodni broj n posve je određena tačka $x_n \in R^m$ koja je n-*ti član niza*. Poseban slučaj se dobiva za $m = 1$; tada se radi o nizu tačaka na pravcu R, odnosno o nizu realnih brojeva.

Kaže se da niz tačaka $x_n \in R^m$ *konvergira* ili *teži tački* $x_0 \in R^m$, ako u svaku okolinu U od x_0 padaju sve tačke niza x_n uz najviše konačno izuzetaka. Drugim riječima, za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0(\varepsilon)$ takav da je udaljenost $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ čim je $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Ako se radi o tačkama na pravcu, tj. o realnim brojevima, onda je dakako $d(x_n, x_0) = |x_n - x_0|$. Npr. niz brojeva $x_n = \dfrac{1}{n}$ teži prema 0; naprotiv, niz $x_n = 1 + (-1)^n$ ne konvergira, jer prima naizmjenično vrijednosti 0 i 2. Niz x_n može konvergirati najviše prema jednoj tački x_0 koja se označuje sa $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ i zove *limes* ili *granica* niza. Konstantni niz $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, konvergira očito prema x_0. Ako je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, onda i svaki *podniz* $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, n_1 < n_2 < \cdots$, npr. podniz $x_3, x_6, x_9, \ldots$, konvergira prema x_0.

Kompaktni skupovi mogu se karakterizirati važnim svojstvom da svaki niz tačaka iz takvog skupa ima podniz koji konvergira prema nekoj tački tog skupa.

Da bi niz tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ iz R^m konvergirao, nužno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon)$ takav da bude $d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ čim je $n \geqq n_0(\varepsilon)$ i $m \geqq n_0(\varepsilon)$; to je Cauchyjev nuždan i dovoljan uvjet konvergencije. Mnogi važni dijelovi klasične analize vrijede i u normiranim vektorskim prostorima u kojima je ispravan Cauchyjev kriterij; to su tzv. *Banachovi prostori.*

Za niz brojeva $x_n \in R$ se kaže da *monotono raste* ako je $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq \cdots$, a da *monotono pada* ako je $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq \cdots$. Iz Cauchyjeva kriterija neposredno slijedi da je svaki monotono rastući odozgo omeđeni niz brojeva konvergentan. Npr. niz $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ je konvergentan jer monotono raste a svi su mu članovi manji od broja 3. Zaista, na osnovu binomnog poučka (v. *Aritmetika*) vidi se da je $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =$

$$= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} \leqq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

$$\leqq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Granična vrijednost promatranog niza označuje se sa e. Dakle, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Broj e igra važnu ulogu u diferencijalnom računu kao *baza prirodnih logaritama*. Taj je broj iracionalani *transcendentan*, tj. ne poništava niti jedan polinom $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ kojemu su koeficijenti a_i racionalni brojevi. Približna vrijednost broja e je 2,718 281828...

Poseban oblik nizova su *redovi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Radi se o beskonačnim sumama brojeva $u_n \in R$ ili tačaka $u_n \in R^m$. Svakom redu pridružuje se niz *parcijalnih suma* $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2, \cdots, s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, itd. Red $\sum_{1=n}^{\infty} u_n$ konvergira prema s ako niz s_n konvergira prema s. s je *suma reda*, te se piše $s = \sum_{1=n}^{\infty} u_n$. Obrnuto, konvergencija niza tačaka $x_n \in R^m$ svodi se na konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, gdje je $u_n = x_{n+1} - x_n$. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se kaže da *apsolutno konvergira* ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|$ normi članova. Ako se radi o brojevima, apsolutna konvergencija znači konvergenciju reda s apsolutnim članovima $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$. Apsolutno konvergentan red i sam konvergira. Konvergentni redovi koji ne konvergiraju apsolutno zovu se *uvjetno konvergentni*. Suma ovih redova ovisi o redoslijedu sumanada, dok suma apsolutno konvergentnih redova ne ovisi. Primjer uvjetno konvergentnog reda:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

Zbog navedenog svojstva apsolutne konvergencije najvažniji su redovi nenegativnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqq 0$. Za ove redove vrijedi *kriterij upoređivanja*, prema kojemu red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqq 0$, sigurno konvergira ako postoji konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i vrijedi $a_n \leqq b_n$, za sve n počevši od nekog n_0.

Najelementarniji primjer konvergentnog reda je *geometrijski red* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, gdje je $|x| < 1$. Suma ovog reda je $s = \frac{1}{1-x}$ (v. *Aritmetika*). Uporedba s geometrijskim redom daje specijalni Cauchyjev kriterij: ako postoji konstanta $k < 1$ takva da je $\sqrt[n]{a_n} \leqq k$ za sve n počevši od nekog n_0, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, $a_n \geqq 0$; ako je $a_n \geqq 1$ za beskonačno mnogo n, onda taj red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira, već *divergira*. Napose, ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, te je $l < 1$, onda red konvergira; ako je $l > 1$, onda divergira. U slučaju $l = 1$ može nastupiti i konvergencija i divergencija. Za redove s nenegativnim članovima $a_n \geqq 0$ vrijedi i d'Alembertov kriterij: ako postoji broj $k < 1$ takav da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k$ počevši od nekog n_0, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Naprotiv, ako vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$ počevši od nekog n_0, onda red divergira. Napose, ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, a uz to je $l < 1$, red konvergira; ako je $l > 1$, red divergira. Za $l = 1$ moguća su oba slučaja — konvergencija i divergencija. Npr. za *harmonijski red* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ je $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, a red divergira. Naprotiv, za red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ također je $l = 1$, ali red konvergira prema broju 1. Iz mnoštva dovoljnih kriterija za konvergenciju često se upotrebljava Raabeov kriterij: ako postoji broj $K > 1$ takav da je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqq K$ počevši od nekog n_0, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Naprotiv, ako je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqq 1$ počevši od nekog n_0, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. Raabeovim kriterijem može se npr. utvrditi da *hiperharmonijski red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira za $s > 1$, a divergira za $s \leqq 1$.

5. Neprekidnost funkcija i preslikavanja. U matematičkoj analizi naročitu važnost imaju *neprekidne funkcije* i *neprekidna preslikavanja*. To su funkcije, odnosno preslikavanja kod kojih se vrijednost promijeni po volji malo ako se argumenti promijene dovoljno malo. Preciznije, ako je funkcija $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definirana na skupu $D \subseteq R^n$, kaže se da je funkcija f *neprekidna u tački* $x_0 \in D$ ako za svaku okolinu V oko $y_0 = f(x_0)$ postoji okolina U oko x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$, tj. da je $f(x) \in V$, za svako $x \in U$. Ista definicija vrijedi i za preslikavanje $f: X \to Y$ jednog metričkog prostora u drugi.

Ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački područja definicije D, kaže se da je *f neprekidna na D*. Funkcija f je *uniformno* ili *jednoliko neprekidna na* D ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je udaljenost $d(f(x), f(x')) = |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ čim je udaljenost tačaka $x, x' \in D$ manja od δ, tj. čim je $d(x, x') < \delta$. Važno je svojstvo kompaktnih skupova K da je svaka funkcija koja je na K neprekidna i uniformno neprekidna na K.

Zbrajanje $x + y$, odbijanje $x - y$ i množenje $x \cdot y$ primjeri su neprekidnih funkcija u čitavoj ravnini R^2, a dijeljenje $x : y$ neprekidno je u skupu $R^2 \setminus \{0, 0\}$, tj. u ravnini iz koje je odstranjeno ishodište. Konstanta je također primjer neprekidne funkcije.

Ako su $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ dva neprekidna preslikavanja, tada je i složeno preslikavanje $g \circ f: X \to Z$ neprekidno. Zato je npr. kvocijent $\frac{f(x)}{g(x)}$ neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ i sam neprekidan, osim u tačkama gdje se g poništava.

Vrlo je važna činjenica da je neprekidna slika kompaktnog skupa opet kompaktan skup. Posljedica je ovog teorema da je svaka neprekidna funkcija na kompaktnom skupu omeđena i prima svoj maksimum i minimum u nekim tačkama skupa (teorem K. Weierstrassa).

Neprekidnost funkcije f u tački x_0 može se ispitati promatranjem nizova x_n koji konvergiraju prema tački x_0. Pokazuje se da je f neprekidna u tački x_0 onda i samo onda ako je za svaki takav niz x_n limes $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Neka je npr. dana funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0), \\ 0, & (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Za niz $x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ koji teži prema $(0, 0) = x_0$ je $f(x_n) = 0$, pa je i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Naprotiv, za niz $x_n' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ je $f(x_n') = \frac{1}{2}$ pa je i $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \frac{1}{2}$. Zato je funkcija f prekidna u tački $(0, 0)$.

Neprekidnost se može definirati i izučavati u metričkim prostorima, pa i u još općenitijim *topološkim prostorima*. Dio matematike u kojem se sustavno izučavaju neprekidna preslikavanja i njihova svojstva zove se *topologija*. Topologija igra vrlo važnu ulogu u savremenoj matematici, te ima mnogo primjena, naročito u matematičkoj analizi i geometriji.

Ako za svaki niz x_n koji konvergira prema x_0 niz $f(x_n)$ konvergira prema istoj vrijednosti y_0, onda se kaže da je y_0 granična vrijednost funkcije $f(x)$ kada x teži prema x_0 i piše $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$; pri tome x_0 ne mora pripadati području definicije funkcije f već zatvaraču tog područja. Uvjet neprekidnosti se može sada izraziti relacijom $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Npr. $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ postoji i jednak je broju e, jer za svaki niz $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, postoji $\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{1/x_n}$ i jednak je broju e. Zaista, za svako n se može odabrati prirodni broj k_n takav da je $k_n \leqq \frac{1}{x_n} \leqq k_n + 1$. Kako k_n teži prema ∞, to je $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$, jer se radi o podnizu niza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Kako je $1 + \frac{1}{k_n + 1} \leqq 1 + x_n \leqq 1 + \frac{1}{k_n}$, a potenciranje je monotona operacija, dobiva se nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leqq (1 + x_n)^{1/x_n} \leqq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{1 + k_n}.$$

Prvi i treći član teže prema e, pa mora i srednji član težiti prema e. Vrijedi, dakle, formula $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \mathrm{e}$.

6. Diferencijal i derivacija funkcije jedne varijable. Od funkcija jedne realne varijable osobito je važna i jednostavna *linearna funkcija.* Ona je definirana na čitavom pravcu R i dana je formulom $y = a\,x$. Graf ove funkcije je pravac kroz ishodište s koeficijentom smjera a (v. *Analitička geometrija*). Osnovna je ideja diferencijalnog računa da se općenitije funkcije, odnosno preslikavanja, u okolini pojedine tačke x_0 aproksimiraju linearnom funkcijom, odnosno linearnim preslikavanjem. Ako je $y = f(x)$, $x \in U \subseteq R$, realna funkcija definirana na otvorenom skupu U, npr. na otvorenom intervalu $U = (a, b)$, i u tački $x_0 \in U$ prima vrijednost $y_0 = f(x_0)$, tada je linearna funkcija koja u tački x_0 prima vrijednost y_0 dana formulom

$$Y = y_0 + a\,(x - x_0). \tag{1}$$

Postavlja se pitanje izbora koeficijenta a na takav način da se *prirast* zadane funkcije $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ razlikuje od prirasta linearne funkcije $\Delta Y = Y - y_0 = a\,(x - x_0)$ za veličinu $r\,(x - x_0)$ koja teži nuli brže nego što $\Delta x = x - x_0$ teži nuli, tj. tako da bude

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r\,(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{2}$$

Ako takav koeficijent a postoji, određen je jednoznačno, jer je tada $\Delta y - \Delta Y = r(\Delta x)$, pa je

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{r\,(\Delta x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

odnosno,

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4}$$

jer vrijedi (2). Koeficijent a zove se *derivacija funkcije f* u *tački x* i označuje se sa $f'(x_0)$ ili $y'(x_0)$, tako da je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5}$$

Linearna funkcija $\Delta Y = Y - y_0$ u varijabli $\Delta x = x - x_0$ zove se *diferencijal f u tački* x_0. Varijabla $\Delta x = x - x_0$ se obično označuje sa $\mathrm{d}x$ i zove *diferencijal nezavisne varijable,* dok se sama funkcija $\Delta Y = Y - y_0$ označuje sa $\mathrm{d}y$, tako da je

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

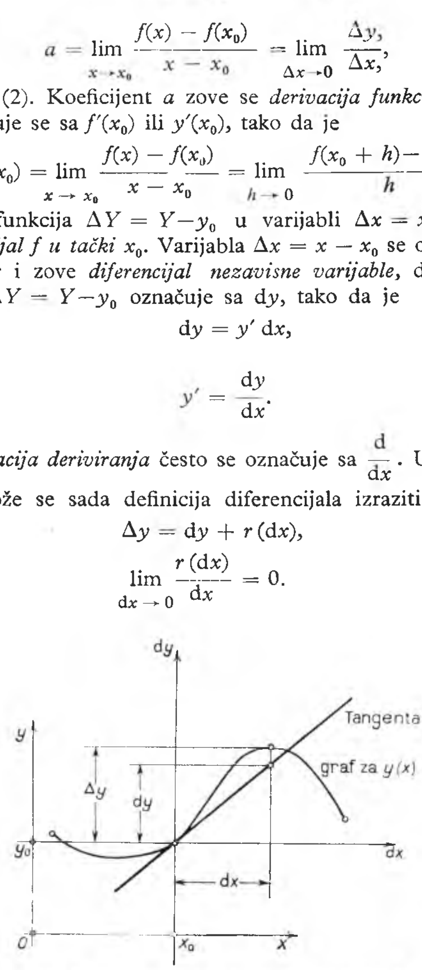
odnosno

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

Sama *operacija deriviranja* često se označuje sa $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Uz navedene oznake može se sada definicija diferencijala izraziti formulom:

$$\Delta y = \mathrm{d}y + r\,(\mathrm{d}x), \tag{8}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{r\,(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{9}$$



Sl. 7. Graf funkcije $y(x)$ i diferencijala $\mathrm{d}y$

Za male vrijednosti od $\mathrm{d}x$ je zbog (8) i (9) Δy približno jednako $\mathrm{d}y$, te se može u aproksimativnim računima Δy zamijeniti sa $\mathrm{d}y$. $\mathrm{d}y$ se, međutim, često lakše izračunava od Δy, te ovaj postupak ima praktičnu vrijednost.

Ako se promatra graf funkcije $f(x)$ (sl. 7), vidi se da diferencijal $\mathrm{d}y$ kao funkcija od $\mathrm{d}x$, u koordinatnom sustavu $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, koji je nastao translacijom sustava x, y tako da ishodište $(0,0)$ pređe u tačku (x_0, y_0), ima za svoj graf tangentu u (x_0, y_0) na krivulju koja predstavlja graf od f. Sama derivacija geometrijski predstavlja koeficijent smjera tangente na graf funkcije f. Kinematičko značenje derivacije je brzina. Ako je $s\,(t)$ put prevaljen u vremenu t, brzina je u času t dana derivacijom $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$; diferencijal je dan jednolikim gibanjem kojim bi se promatrana materijalna tačka gibala kada bi u danom času t od kretanja promjenljivom brzinom prešla na jednoliko kretanje brzinom koju ima u tom času.

Na osnovu definicije diferencijala lako se izvode ova pravila za diferenciranje:

$$\mathrm{d}(f_1 + f_2) = \mathrm{d}f_1 + \mathrm{d}f_2, \tag{10}$$

$$\mathrm{d}(c\,f) = c\,\mathrm{d}f,\ c \text{ je konstanta}, \tag{11}$$

$$\mathrm{d}(f_1 \cdot f_2) = (\mathrm{d}f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot (\mathrm{d}f_2), \tag{12}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2\,(\mathrm{d}f_1) - f_1\,(\mathrm{d}f_2)}{(f_2)^2}. \tag{13}$$

Analogna pravila vrijede i za derivaciju.

Prva dva pravila pokazuju da je diferenciranje linearna operacija u skupu funkcija. Diferencijal konstante c je očito 0, a diferencijal identične funkcije $f(x) = x$ jednak je $\mathrm{d}x$, dakle identična funkcija, jer je derivacija jednaka 1. Derivacija potencije x^n dana je formulom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = n\,x^{n-1}, \tag{14}$$

koja se dokazuje potpunom indukcijom ovako:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n-1} \cdot x) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n-1})\right] \cdot x + x^{n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) =$$
$$(n - 1)\,x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} = n\,x^{n-1}.$$

Kombinirajući (10), (11) i (14) dobiva se formula za derivaciju polinoma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n) =$$
$$n\,a_0\,x^{n-1} + (n - 1)\,a_1\,x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,. \tag{15}$$

Veoma je važna formula za derivaciju složene funkcije. Ako $y = f(u)$ ima derivaciju i $u = g(x)$ ima derivaciju, onda i složena funkcija $y = f(g\,(x))$ ima derivaciju i vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}. \tag{16}$$

To je tzv. Leibnizovo *lančano pravilo.* Ono prima osobito jednostavan oblik ako mjesto $f(u)$ i $g(x)$ označimo ove funkcije sa $y(u)$ i $u(x)$. Tada je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{17}$$

Uz pomoć diferencijala lančano pravilo prima oblik

$$\mathrm{d}(f \circ g) = \mathrm{d}f \circ \mathrm{d}g\,, \tag{18}$$

pri čemu $\mathrm{d}f \circ \mathrm{d}g$ treba shvaćati kao preslikavanje nastalo slaganjem linearnog preslikavanja $\mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}u$ i preslikavanja $\mathrm{d}u = g'\,\mathrm{d}x$.

Ako funkcija $y = f\,(x)$ ima derivaciju $f'(x)$ koja je različita od 0 u okolini tačke x_0, tada je inverzna funkcija $x = g(y) = f^{-1}(y)$ posve određena u okolini tačke $y_0 = f(x_0)$ i ima derivaciju $g'(y)$. Kako je $y = f(g\,(y))$, to se dobiva po pravilu (16) da je $1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}$, tj. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$.

Derivacija inverzne funkcije je, dakle, recipročna vrijednost derivacije polazne funkcije. Npr. ako je $y = \sqrt{x}$, onda je $x = y^2$, pa je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\,y = 2\sqrt{x}$. Zato je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7. Derivacije elementarnih funkcija. Među elementarnim funkcijama osobito važnu ulogu ima *prirodna eksponencijalna funkcija* $y = e^x$ i njoj inverzna funkcija $x = \ln y$, $y > 0$, *prirodni logaritam* (v. *Elementarne funkcije*). Da bi se došlo do derivacije eksponencijalne funkcije, promatra se kvocijent diferencija $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$, kada h teži prema 0. Stavi li se $u = e^h - 1$, izlazi da je $h = \ln(1+u)$, pa se dobiva

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}}.$$

Kako je $\ln x$ neprekidna funkcija (v. *Elementarne funkcije*), to je $\lim\limits_{u \to 0} \ln(1+u)^{1/u} = \ln(\lim\limits_{u \to 0}(1+u)^{1/u}) = \ln e = 1$, pa je

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Prema tome je

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \tag{1}$$

Prirodna eksponencijalna funkcija ima, dakle, svojstvo da se podudara sa svojom derivacijom, tj. da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y' = y$. Osim toga ova funkcija zadovoljava i uvjet $y(0) = 1$. S ova dva uvjeta funkcija e^x je određena jednoznačno (v. *Diferencijalne jednadžbe*), pa se može i na taj način uvesti u matematičku analizu. Iz formule za derivaciju složene funkcije je jasno da je

$$\frac{d}{dx}(e^{cx}) = c\, e^{cx}. \tag{2}$$

Derivacija opće eksponencijalne funkcije a^x, $a > 0$, dobije se najlakše ako se a^x prikaže u obliku $a^x = e^{(\ln a)x}$ (v. *Elementarne funkcije*). Tada iz (2) slijedi

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a. \tag{3}$$

Da se dođe do derivacije prirodnog logaritma, promatra se kvocijent diferencija $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]$. Kako je $\lim\limits_{u \to 0}(1+u)^{1/u} = e$, to je limes promatranog kvocijenta diferencija jednak $\frac{1}{x}$. Prema tome je

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Do istog se rezultata dolazi ako se uzme u obzir da je $y = \ln x$ inverzna funkcija za funkciju $x = e^y$. Stoga je $\frac{dy}{dx} = 1 : \left(\frac{dx}{dy}\right) = 1 : e^y = \frac{1}{x}$.

Derivacija logaritma $\log_a x$ s bazom $a > 0$ najlakše se dobije iz formule (4), ako se uoči da je $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Nalazi se da je

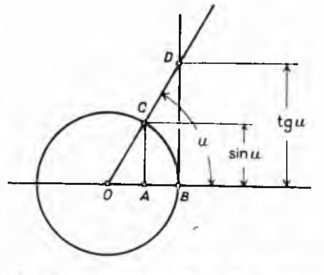
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \tag{5}$$

Derivacija opće potencije $y = x^\mu$, μ proizvoljan realan broj, dobije se također primjenom formule za derivaciju složene funkcije i formula (1) i (4), jer je $x^\mu = e^{(\ln x) \cdot \mu}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{x} e^{(\ln x)\mu} = \frac{\mu}{x} \cdot x^\mu = \mu x^{\mu - 1},$$ tako da je

$$\frac{d}{dx}(x^\mu) = \mu\, x^{\mu - 1}, \quad \mu \in R. \tag{6}$$

Da se odredi derivacija funkcije $y = \sin x$ promatra se izraz $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \cos \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}$. Kako je $\cos x$ neprekidna funkcija, to je $\lim\limits_{h \to 0} \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x$, dok je $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.



Sl. 8. Nejednakost $\sin u \leq u \leq \operatorname{tg} u$

Zaista, ako se na sl. 8 usporedi duljina luka $\widehat{BC}$ s duljinom dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, dobiva se nejednakost $\sin u \leq u \leq \operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$, $0 \leq u < \frac{\pi}{2}$, iz koje se lako zaključi da je $\cos u \leq \frac{\sin u}{u} \leq 1$. Kako je $\lim\limits_{u \to 0} \cos u = 1$, dobiva se zaključak da $\frac{\sin u}{u}$ teži također prema 1 kada u teži prema 0. Prema tome je

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x. \tag{7}$$

Derivacija za funkciju $y = \cos x$ dobije se lako iz (7) i formule $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Nalazi se da je

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x. \tag{8}$$

Formule za derivaciju funkcija $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, dobiju se primjenom formule za derivaciju kvocijenta, jer je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$, odnosno primjenom formule za derivaciju inverzne funkcije, jer su funkcije $\arcsin x$ i $\operatorname{arc\,tg} x$ inverzne za funkcije $\sin x$ i $\operatorname{tg} x$. Dobiju se formule:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = \frac{-1}{\sin^2 x}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{12}$$

8. Diferencijal funkcije od više varijabli. Parcijalne derivacije. Derivacija u smjeru. Za realne funkcije više realnih varijabli definira se diferencijal na isti način kao i za funkcije jedne varijable. Neka je $f : U \to R$, $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ realna funkcija zadana na otvorenom skupu $U \subseteq R^n$ i neka je $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n) \in U$. Promatra se prirast $\Delta y = f(x) - f(x^0)$ funkcije f kada se pređe od tačke x^0 u tačku $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ i nastoji se ovaj prirast aproksimirati nekom linearnom funkcijom $A : R^n \to R$. Općenito je svaka linearna funkcija od n varijabli $A : R^n \to R$, $y = A(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, oblika $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$. Kaže se da je $f(x)$ *diferencijabilna funkcija* ako postoji linearna funkcija $A : R^n \to R$ takva da je

$$\Delta y = f(x) - f(x^0) = A(\Delta x) + r(\Delta x) = \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j - x^0_j) + r(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \tag{1}$$

gdje je

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0, \quad \Delta x = x - x^0 = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n). \tag{2}$$

Ako A postoji, određeno je jednoznačno. Linearna funkcija $A(\Delta x)$ zove se *diferencijal funkcije* $y = f(x)$ u tački x^0 i označava se sa dy ili df. I sada se nova varijabla $\Delta x = x - x^0$ označuje sa $dx_1 = (dx_1, \ldots, dx_n)$ i zove *diferencijal nezavisne varijable* x.

Da se nađe značenje koeficijenta a_i iz relacije (1), stavi se $x_j = x_j^0$, za $j \neq i$, tj. promatra se mijenjanje funkcije f duž pravca koji je paralelan s koordinatnom osi X_i. Dobiva se

$$\Delta_i y = f(x^0_1, \ldots, x_i, \ldots, x^0_n) - f(x^0_1, \ldots, x^0_i, \ldots, x^0_n) = a_i \Delta x_i + r(\Delta x_i).$$

Stoga je

$$a_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x^0_n) - f(x^0_1, \ldots, x^0_i, \ldots, x^0_n)}{\Delta x_i}, \tag{3}$$

jer je zbog (2), $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{r(\Delta x_i)}{\Delta x_i} = 0$. Dobiveni izraz (3) zove se *parcijalna derivacija funkcije f po varijabli* x_i *u tački* x^0 i označava se sa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ ili $f_{x_i}(x^0)$. Ako funkcija ovisi o n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, onda ima n parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$; za $n = 1$ dobiva se obična derivacija $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Označe li se varijable $\Delta x_i = x_i - x_i{}^0$ sa $\mathrm{d}x_i$ kao što je uobičajeno, dobiva se formula za diferencijal u obliku

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n . \tag{4}$$

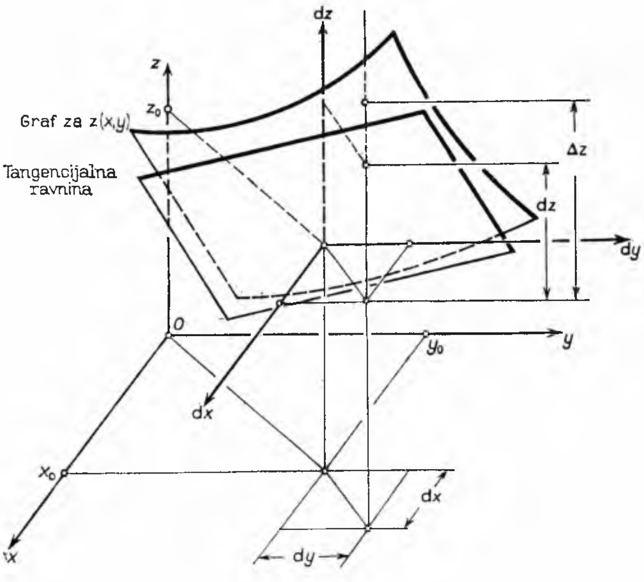
Osnovna veza između prirasta funkcije Δy i diferencijala $\mathrm{d}y$ prima sada oblik

$$\Delta y = \mathrm{d}y + r(\mathrm{d}x), \tag{5}$$

gdje je

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{r(\mathrm{d}x)}{\|\mathrm{d}x\|} = 0. \tag{6}$$

Geometrijska interpretacija prikazana je na sl. 9.



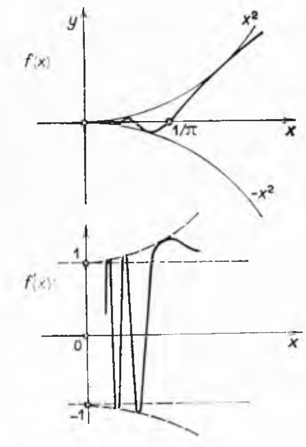
Sl. 9. Graf funkcije $z(x, y)$ i diferencijala $\mathrm{d}z$

Koeficijenti $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ tvore komponente jednog vektora iz R^n koji se označuje sa grad f ili ∇f i zove *gradijent funkcije f* (v. *Vektorska analiza*).

Parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ i diferencijal $\mathrm{d}f$ ovise o tački x^0 u kojoj su izračunati. Može se dogoditi da parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ postoji za svako x^0 iz nekog otvorenog skupa $V \subseteq R^n$. Tada je sama derivacija $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funkcija od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, pa se može govoriti npr. o neprekidnosti derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Slično je i s diferencijalom. Važan je teorem prema kojemu je svaka funkcija f koja ima neprekidne sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, u okolini x^0 diferencijabilna u toj tački. Općenito, za diferencijabilne funkcije f može se prirast napisati u obliku $\Delta f = \mathrm{d}f + r(\Delta x)$, gdje $\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$, za $\Delta x \to 0$. Odavde se razabire da diferencijabilnost, dakle i neprekidnost svih parcijalnih derivacija, ima za posljedicu neprekidnost same funkcije f, jer je očito da $\Delta x \to 0$ povlači $r(\Delta x) \to 0$ i $\mathrm{d}f \to 0$, dakle, i $\Delta f \to 0$. U slučaju funkcije $f(x)$ od jedne realne varijable $x \in R$ diferencijabilnost i postojanje derivacije su ekvivalentna svojstva, pa već postojanje derivacije povlači za sobom neprekidnost funkcije. Naprotiv, kod funkcija od više varijabli postoje protuprimjeri koji pokazuju da funkcija može biti prekidna i imati sve parcijalne derivacije. Također treba imati na umu da postoje funkcije koje imaju derivaciju, ali derivacija nije neprekidna funkcija. Takva je npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0, \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{(sl. 10).}$$

Lako se vidi da $f'(x)$ postoji i u tački 0, gdje je $f'(0) = 0$, ali ne postoji $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.



Sl. 10. Graf funkcije $f(x) = 0$, $x \leq 0$, $f(x) = x^2 \sin 1/x$, $x > 0$, i derivacije $f'(x)$

Iz formula (5) i (4) dobiva se važno *lančano pravilo* za deriviranje složene funkcije: ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ diferencijabilna funkcija od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$, a $x_i(t)$ su diferencijabilne funkcije od t, $i = 1, \ldots, x$, tada složena funkcija $g(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ ima derivaciju i ona se dobiva po formuli

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Za diferencijal $\mathrm{d}g$ se dobiva formula

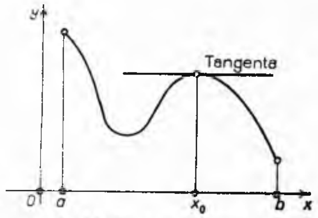
$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i , \tag{8}$$

koja je istog oblika kao da su $x_1, \ldots, x_n$ nezavisne varijable. To važno svojstvo diferencijala omogućava da se s diferencijalima računa i u slučaju zavisnih varijabli kao da se radi o nezavisnim varijablama. Npr. ako je dan kvocijent $\frac{u(t)}{v(t)}$ dviju funkcija $u(t)$ i $v(t)$, diferencijal je $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{v^2}$, gdje je $\mathrm{d}u = u'(t)\,\mathrm{d}t$. $\mathrm{d}v = v'(t)\,\mathrm{d}t$.

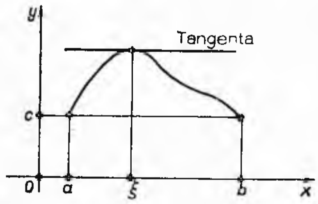
Poopćenje parcijalne derivacije je *derivacija funkcije duž vektora*. Ako je dana funkcija $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ u okolini tačke x^0 i vektor $s \in R^n$, promatra se mijenjanje funkcije f samo duž pravca $x = x^0 + \lambda s$, $\lambda \in R$, koji prolazi tačkom x^0 i određen je vektorom s (v. *Analitička geometrija*). Derivacija duž vektora s u tački x^0 se definira kao $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{f(x^0 + \lambda s) - f(x^0)}{\lambda}$, tj. kao derivacija po λ složene funkcije $f(x^0 + \lambda s)$ u tački $\lambda = 0$. Ako je $s = (s_1, \ldots, s_n)$, onda se primjenom formule (7) nalazi formula za derivaciju duž vektora s u obliku $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i$. Uz pomoć gradijenta i skalarnog produkta vektora dobiva izraz za derivaciju duž vektora s pregledan oblik $(\mathrm{grad}\, f) \cdot s$. Najčešće je s jedinični vektor, pa se govori o *derivaciji u smjeru vektora s*.

9. Teorem o srednjoj vrijednosti. Proučavanje derivacije $f'(x)$ funkcije $f(x)$, $x \in R$, može dati dragocjene podatke o ponašanju funkcije, osobito za pronalaženje *lokalnih maksimuma (minimuma)* funkcije, tj. tačaka x_0 za koje je prirast $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0 \ (\geq 0)$, za sve x iz neke okoline U tačke x_0 (v. pobliže u t. 13). Napose vrijedi ovaj teorem P. de Fermata: ako je $f(x)$ realna funkcija definirana na otvorenom intervalu $(a, b) \subseteq R$, ako je $x_0 \in (a, b)$ lokalni maksimum ili minimum funkcije i ako postoji derivacija $f'(x_0)$ u tački x_0, tada je $f'(x_0) = 0$. Zaista, u slučaju maksimuma je $f(x) - f(x_0) \leq 0$, za sve x iz neke okoline $U \subseteq (a, b)$ oko x_0. Zato je kvocijent $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, za $x > x_0$, dok je ≥ 0, za $x < x_0$. Pusti li se, dakle, da x teži prema x_0 zdesna, dobiva se $f'(x_0) \leq 0$, a ako pak x teži ka x_0 slijeva, dobiva se $f'(x_0) \geq 0$. Prema tome mora biti $f'(x_0) = 0$ (sl. 11). Slično se zaključuje i u slučaju minimuma.

Iz navedenog teorema izvodi se teorem M. Rollea: ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, ako ima derivaciju $f'(x)$ u svakoj tački otvorenog intervala (a, b) i ako je $f(a) = f(b) = c$, tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $f'(\xi) = 0$. Zaista, po teoremu K. Weierstrassa (v. t. 5), $f(x)$ ima maksimum u nekoj tački $\xi \in [a, b]$ i minimum u nekoj tački $\xi' \in [a, b]$. Moguća su dva slučaja: a) Obje tačke ξ i ξ' su krajnje tačke intervala. Tada su vrijednosti maksimuma i minimuma



Sl. 11. Teorem Fermata



Sl. 12. Teorem Rollea

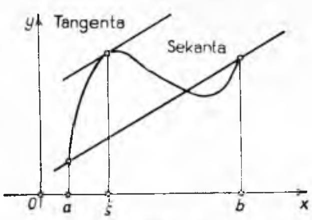
jednake c, pa je promatrana funkcija $f(x) = c$ konstanta, a njena derivacija je u svakoj tački intervala (a, b) jednaka 0. b) Jedna od tačaka ξ, ξ', npr. ξ, leži u intervalu (a, b). Tada je prema teoremu Fermata $f'(\xi) = 0$ (sl. 12).

Sada se lako dokaže osnovni Lagrangeov *teorem o srednjoj vrijednosti:* ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i ako postoji derivacija $f'(x)$ u svakoj tački $x \in (a, b)$, tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{1}$$

Dokaz izlazi primjenom Rolleovog teorema na funkciju

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \; x \in [a, b]. \tag{2}$$



Sl. 13 Teorem Lagrangea

Teorem pokazuje da između brojeva a i b postoji neka »srednja vrijednost« ξ, $a < \xi < b$, takva da je tangenta u tački $(\xi, f(\xi))$ na graf funkcije f paralelna sekanti koja prolazi tačkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (sl. 13).

Formuli (1) se često daje oblik

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0), \tag{3}$$

gdje je ϑ neki broj između 0 i 1, $0 < \vartheta < 1$, tako da je $x_0 + \vartheta(x - x_0)$ neka srednja vrijednost iz intervala (x_0, x).

Iz formule (3) lako slijedi ovaj zaključak: ako je derivacija $f'(x) \geqq 0$, za svako $x \in (a, b)$, funkcija $f(x)$ *monotono raste*, tj. iz $x_1 \leqq x_2$ slijedi $f(x_1) \leqq f(x_2)$; analogno, ako je $f'(x) \leqq 0$, onda funkcija *monotono pada*, tj. iz $x_1 \leqq x_2$ slijedi $f(x_1) \geqq f(x_2)$.

Glavni je značaj teorema o srednjoj vrijednosti u tome što se može primjenom tog teorema procjenjivati prirast funkcije ako je poznata međa derivacije $f'(x)$ u intervalu (a, b). Zaista, ako je $|f'(x)| \leqq M$, za $x \in (a, b)$, onda je

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq M|x - x_0|, \; x_0 \in [a, b], \; x \in [a, b]. \tag{4}$$

Napose, ako je $f'(x) = 0$ za sve $x \in (a, b)$, može se u (4) staviti $M = 0$, pa se dobija $|f(x) - f(x_0)| = 0$, odnosno, $f(x) = f(x_0)$ je konstanta.

Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti lako se poopći na ovaj *Cauchyjev teorem o srednjoj vrijednosti*: ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije u zatvorenom intervalu $[a, b]$, ako postoje derivacije $f'(x)$ i $g'(x)$, za svako $x \in (a, b)$, i ako je $g'(x) \neq 0$, za svako $x \in (a, b)$, onda je $g(a) \neq g(b)$ i postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{5}$$

Teorem o srednjoj vrijednosti se prenosi i na funkcije od više varijabli i glasi ovako: neka je U otvoren skup iz R^n koji

Sl. 14. Zvjezdasti skup

je *zvjezdast* sa središtem u tački $x^0 \in U$, tj. ima svojstvo da je svaku tačku $x \in U$ moguće spojiti sa x^0 unutar U dužinom (sl. 14). Nadalje, neka je $f: U \to R$ diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\vartheta (x_i - x^0_i), \tag{6}$$

gdje je $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\vartheta$ parcijalna derivacija u tački $x^0 + \vartheta(x - x^0)$, $0 < \vartheta < 1$. Da se teorem dokaže, promatra se funkcija $g(t) = f(x^0 + t(x - x^0))$, $0 \leqq t \leqq 1$. Prema (3) je $g(1) - g(0) = g'(\vartheta)$, što se podudara sa (6), jer je $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(t)\right](x_i - x^0_i)$.

Ako je $\|\operatorname{grad} f\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq M$ na U, onda se lako zaključi da je

$$|f(x) - f(x^0)| \leqq M\|x - x^0\|, \text{ za svako } x \in U. \tag{7}$$

Zaista, prema poznatoj *Schwartozvoj nejednakosti* za skalarni produkt vektora a i b jest $|a \cdot b| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$ (v. *Vektorski i tenzorski račun*), što primijenjeno na (6), tj. na vektore $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\vartheta, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_\vartheta$ i $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)$ daje (7). Pri tome je dobro uočiti da $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqq N$, $i = 1, \ldots, n$, ima za posljedicu $\|\operatorname{grad} f\| \leqq M = \sqrt{n}\, N$.

Sl. 15. Povezan skup i slomljena crta

Iz (7) se lako izvodi ovaj teorem: ako je U otvoren povezan skup iz R^n, a $f: U \to R$ diferencijabilno preslikavanje i ako je $df = 0$ na čitavom U, tada je $f(x)$ konstanta na U. Pri tome se kaže da je otvoren skup U *povezan* ako je moguće svake dvije tačke x^0, $x^1 \in U$ spojiti konačnom *slomljenom crtom* unutar U (sl. 15).

Jedna od neposrednih posljedica Cauchyjevog teorema o srednjoj vrijednosti jest teorem L'Hospitala: neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, b]$, neka imaju derivacije $f'(x)$ i $g'(x)$, za sve $x \in (a, b)$, i neka je $x_0 \in [a, b]$ takva tačka da je $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Tada, ako $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji, onda postoji i $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i ta dva limesa se podudaraju. Ovaj teorem omogućuje da se u izvjesnim slučajevima odredi vrijednost »neodređenog izraza« oblika $\frac{0}{0}$. Npr. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$. Na ovaj oblik se mogu svesti i neodređeni izrazi oblika ∞/∞, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0 i $\infty - \infty$.

10. Diferencijal preslikavanja. Jacobijeva matrica. Neka je U otvoren skup iz R^n, a $f: U \to R^m$ neko preslikavanje. f je zadano u koordinatama funkcijama

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

I za ovakvo preslikavanje može se definirati pojam diferencijala df u tački $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n)$ i to na način iz t. 6 i 8. U ovom slučaju aproksimacija se vrši linearnim preslikavanjima $A: R^n \to R^m$. To su preslikavanja karakterizirana svojstvom da je $A(x + x') = A(x) + A(x')$ i $A(\lambda x) = \lambda A(x)$, $x, x' \in R^n$, $\lambda \in R$. Označi li se tačka Ax sa $y = (y_1, \ldots, y_m)$, dana su linearna preslikavanja sistemom od m linearnih funkcija

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Vidi se da je linearno preslikavanje A posve određeno matricom koeficijenta

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

U skladu s definicijom u t. 8 kaže se da je preslikavanje $f: U \to R^m$ *diferencijabilno* u tački $x^0 \in U$ ako postoji linearno preslikavanje $A: R^n \to R^m$ takvo da je

$$f(x) - f(x^0) = A(\Delta x) + r(\Delta x), \tag{3}$$

gdje je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0, \; \Delta x = x - x^0. \tag{4}$$

Ako A postoji, određeno je jednoznačno. Linearno preslikavanje A zove se *diferencijal* $\mathrm{d}f$ preslikavanja f. U koordinatama (3) prima oblik

$$f_i(x) - f_i(x^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_j + r_i(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \tag{5}$$

pa se lako vidi da je $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ u tački x^0. Matrica diferencijala $\mathrm{d}f$ je, dakle, oblika

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Ova matrica je poznata pod nazivom *Jacobijeva matrica*, a označava se često sa $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}$; ako je $m = n$, posve je određena njena determinanta koja se zove *Jacobijeva determinanta* ili *jakobijan*.

Ako funkcije $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, imaju neprekidne parcijalne derivacije $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, u okolini tačke x^0, onda je preslikavanje f sigurno diferencijabilno.

Osnovno svojstvo da je diferencijal kompozicije dvaju preslikavanja $\mathrm{d}(f \circ g)$ jednak kompoziciji diferencijala tih preslikavanja $\mathrm{d}f \circ \mathrm{d}g$ vrijedi i u ovom slučaju, baš kao i u t. 6 i 8. Nadalje, diferencijal identičkog preslikavanja je identičko preslikavanje. To ima za posljedicu svojstvo Jacobijevih matrica da je matrica složenog preslikavanja produkt matrica zadanih preslikavanja.

U specijalnom slučaju kad je $m = 1$ dobiva se slučaj funkcije od više varijabli obrađen u t. 8, a Jacobijeva matrica se svodi na vektor grad f. Važan je i slučaj $n = 1$, $m \geqq 1$. Tada se radi o *vektorskoj funkciji* jedne realne varijable. Diferencijal $\mathrm{d}f$ je u tom slučaju vektor kojemu su komponente derivacije komponenata vektora f.

11. Diferencijali i derivacije višeg reda. Neka je $y = f(x)$ realna funkcija jedne realne varijable x zadane u intervalu (a, b). Ako u svakoj tački $x \in (a, b)$ postoji derivacija, onda je derivacija $f'(x)$ nova realna funkcija definirana na (a, b), pa se može pitati za derivaciju te funkcije u nekoj tački $x_0 \in (a, b)$. Ako ta derivacija postoji, označava se sa $f''(x_0)$ ili $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ i zove se *druga derivacija* zadane funkcije f u tački x_0. Induktivno se definira *p-ta derivacija* $f^{(p)}(x_0)$ ili $\dfrac{\mathrm{d}^p f}{\mathrm{d}x^p}(x_0)$ u tački $x_0 \in (a, b)$ kao derivacija $(p-1)$-ve derivacije $f^{p-1}(x)$ u tački x_0.

Slično se postupa i kod diferencijala, pa se *p-ti diferencijal* $\mathrm{d}^p f$ definira kao diferencijal $(p-1)$-og diferencijala. Pri tome se prvi diferencijal $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}(x)$ shvaća kao funkcija od x, tako da se nalazi za drugi diferencijal izraz $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = f''(x)\,\mathrm{d}x\,\delta x$, gdje se sa δx označava novi diferencijal (prirast) nezavisne varijable x koji se javio pri drugom diferenciranju. Najčešće se uzima da je $\delta x = \mathrm{d}x$, pa se dobiva za drugi diferencijal formula $\mathrm{d}^2 f = f''(x)\,\mathrm{d}x^2$ i slično za p-ti diferencijal formula $\mathrm{d}^{(p)} f = f^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x^p$, gdje $\mathrm{d}x^p$ znači $(\mathrm{d}x)^p$.

Kod funkcija od više varijabli definiraju se *parcijalne derivacije višeg reda*. Ako je $f: U \to R$, $U \subseteq R^n$, realna funkcija od n realnih varijabli $x_1, \ldots, x_n$ zadana na otvorenom skupu U, te ako u svakoj tački $x \in U$ postoji parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, onda je ta derivacija i sama realna funkcija na U, pa se može pitati da li ima parcijalnu derivaciju po varijabli x_j u nekoj tački $x^0 \in U$. Tako dobivena derivacija zove se *druga parcijalna derivacija* i označava se sa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ ili sa $f_{x_i x_j}$. Analogno se definiraju *parcijalne derivacije p-tog reda* $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}$.

Prvi diferencijal $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$ je linearna realna funkcija $\mathrm{d}f: R^n \to R$, te se može smatrati vektorom iz prostora R^n u kojemu $\mathrm{d}x_i$ tvore bazu. Na taj način može se $\mathrm{d}f(x)$ shvatiti kao preslikavanje skupa $U \subseteq R^n$ u R^n. Stoga se može pitati za diferencijal ovog preslikavanja u danoj tački $x^0 \in U$ (v. t. 10). Tako se dobiva *drugi diferencijal* $\mathrm{d}^2 f$ u tački x^0. Drugi diferencijal $\mathrm{d}^2 f$ je, dakle, linearno preslikavanje od R^n u R^n. Ako nove diferencijale nezavisnih varijabli x_j označimo sa δx_j, onda se za drugi diferencijal dobiva *bilinearna forma*

$$\mathrm{d}^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\, \delta x_j. \tag{1}$$

U primjenama je najčešće $\delta x_i = \mathrm{d}x_i$, pa izraz za drugi diferencijal prima oblik

$$\mathrm{d}^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j. \tag{2}$$

Slično se za p-ti diferencijal dobiva izraz

$$\mathrm{d}^p f = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}\,\mathrm{d}x_{i_1}\, \mathrm{d}x_{i_2} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}. \tag{3}$$

Vrlo je važan *Schwartzov teorem* koji utvrđuje da je forma (3) simetrična, tj. da kod parcijalnih derivacija $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}$ redoslijed indeksa $i_1, \ldots, i_p$ ne utječe na vrijednost derivacije. Napose je za funkciju od dvije varijable $f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \tag{4}$$

tako da je

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2. \tag{5}$$

Pokazuje se da su funkcije koje imaju neprekidne parcijalne derivacije do uključivo reda p diferencijabilne p puta i da je $\mathrm{d}^p f$ neprekidno. Za ovakve funkcije se kaže da su *klase* C^p. Ako je neka funkcija klase C^p za svako p, kaže se da je *klase* C^∞.

12. Taylorova formula. Analitičke funkcije. Ako je

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) + \cdots a_n(x - x_0)^n \tag{1}$$

polinom stupnja n u realnoj varijabli $x - x_0$, tada se lako dokazuje uzastopnim deriviranjem da je

$$a_0 = p(x_0),\; a_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \ldots, a_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{2}$$

tako da je

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3}$$

Ako je mjesto polinoma dana realna neprekidna funkcija $f(x)$ definirana na intervalu (a, b) i ako $f(x)$ ima neprekidne derivacije do uključivo reda $n-1$ u svakoj tački od (a, b) i ima derivaciju reda n u tački $x_0 \in (a, b)$, onda se također može formirati polinom

$$q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{4}$$

tzv. *Taylorov polinom*, a *ostatak*

$$r_n(\Delta x) = f(x) - q_n(x) \tag{5}$$

teži ka 0 brže nego $|x - x_0|^n$, kada $\Delta x = x - x_0 \to 0$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(\Delta x)}{|x - x_0|^n} = 0. \tag{6}$$

Formule

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + r_n(x - x_0) \tag{7}$$

i (6) su, dakle, poopćenje definicijskih formula za diferencijal (8) i (9) iz t. 6. Formula (7) je poznata pod nazivom *Taylorove formule*. Tvrdnja se lako dokaže indukcijom po n uzimajući u obzir definiciju diferencijala, odnosno derivacije.

Značajno je da se uz dodatni uvjet da je i n-ta derivacija neprekidna u (a, b) i da postoji $(n+1)$-va derivacija u (a, b) može dokazati da je ostatak $r_n(\Delta x)$ oblika

$$r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\vartheta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}, \quad (8)$$

gdje je ϑ neki broj iz intervala $(0, 1)$, a $p > 0$ pozitivan broj koji može biti odabran po volji; (8) je tzv. *Schlömilch-Rocheov oblik* ostatka $r_n(\Delta x)$. Dva najvažnija slučaja dobiju se za $p = n+1$, kada je

$$r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (9)$$

tzv. *Lagrangeov oblik* ostatka, i za $p = 1$, kada je

$$r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!}(1-\vartheta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad (10)$$

tzv. *Cauchyjev oblik* ostatka.

Da bi se izvela formula za Schlömilch-Rocheov ostatak, promatraju se funkcije

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n, \quad (11)$$

$$\psi(z) = (x-z)^p \quad (12)$$

u zatvorenom intervalu $[x_0, x]$, $x_0 < x$, odnosno $[x, x_0]$, $x < x_0$, $x \in (a, b)$. Primjenom Cauchyjevog teorema o srednjoj vrijednosti (v. t. 9.) nalazi se da je

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad (13)$$

gdje je $\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0), 0 < \vartheta < 1$. Kako je $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(\Delta x)$, $\varphi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)^p$, $\psi'(\xi) = -p(x-\xi)^{p-1}$, to uvrštavanje u (13) odmah daje izraz (8) za Schlömilch-Rocheov ostatak.

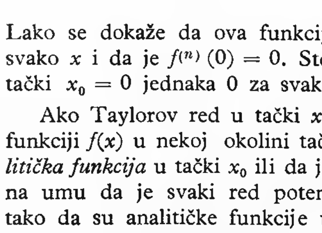
Ako funkcija $f(x)$, zadana na intervalu (a, b), ima derivacije $f^{(n)}(x)$ svakog reda n, tj. ako je ona klase C^∞, može se formirati *red potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (14)$$

tzv. *Taylorov red* funkcije $f(x)$ u tački $x_0 \in (a, b)$. Međutim, ovaj red ne mora konvergirati prema funkciji $f(x)$. Takav je npr. slučaj s funkcijom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

(sl. 16).



Sl. 16. Graf funkcije $f(x) = 0$, $x \leqq 0$; $f(x) > e^{-1/x}$, $x > 0$

Lako se dokaže da ova funkcija ima derivacije svih redova za svako x i da je $f^{(n)}(0) = 0$. Stoga je i suma Taylorovog reda u tački $x_0 = 0$ jednaka 0 za svako x, dok je $f(x) \neq 0$, za $x > 0$.

Ako Taylorov red u tački x_0 funkcije $f(x)$ konvergira prema funkciji $f(x)$ u nekoj okolini tačke x_0, onda se kaže da je f *analitička funkcija* u tački x_0 ili da je f *funkcija klase* C^ω. Treba imati na umu da je svaki red potencija Taylorov red svoje sume, tako da su analitičke funkcije upravo one koje se mogu razviti u neki red potencija. Ostatak u Taylorovoj formuli često omogućuje da se dokaže analitičnost neke funkcije.

Primjena Taylorove formule s Lagrangeovim ostatkom na eksponencijalnu funkciju e^x u tački $x_0 = 0$ daje formulu

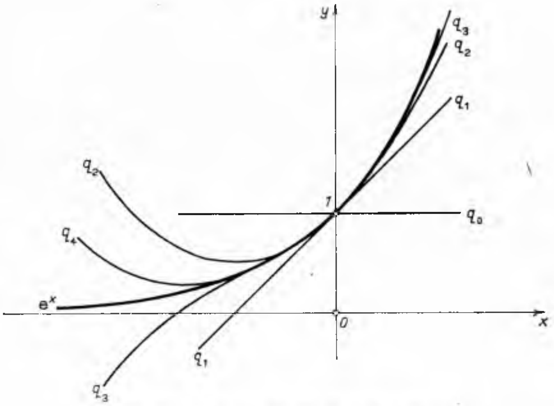
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (15)$$

$0 < \vartheta < 1$. Kako je e^x monotono rastuća funkcija jer ima pozitivnu derivaciju, to je $e^{\vartheta x}$ sadržano u intervalu $(1, e^x)$. Stoga je, za čvrsto x, $e^{\vartheta x}$ omeđeno bez obzira na n o kojem inače ovisi ϑ.

S druge strane se lako pokaže da $\frac{x^n}{n!}$ teži prema 0 kada $n \to \infty$. Prema tome $r_n(x) \to 0$, za $n \to \infty$, i to za svako x. Time je dokazano da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira prema e^x i da vrijedi razvoj

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad (16)$$

za svako x.



Sl. 17. Graf funkcije e^x i Taylorovih polinoma $q_n(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Slično se može dokazati valjanost, za svako x, ovih razvoja:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots, \quad (17)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots, \quad (18)$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad (19)$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots. \quad (20)$$

Na sl. 17 i 18 prikazani su polinomi koji predstavljaju parcijalne sume redova (16) i (17) i aproksimiraju funkciju e^x, odnosno $\sin x$.

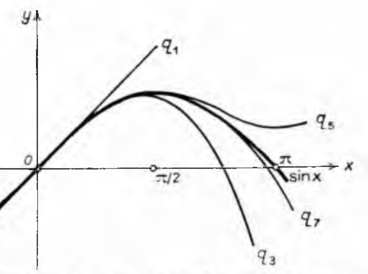
Za $x = 1$ dobiva se iz razvoja (16) za e^x prikaz

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots, \quad (21)$$

iz kojeg se može računati približna vrijednost broja e. Lagrangeov ostatak omogućuje procjenu veličine pogreške $r_n(1)$, ako se za e uzme vrijednost $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Pogreška je

$$r_n(1) = e^\vartheta \frac{1}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} \leqq \frac{3}{(n+1)!}, \quad (22)$$

jer je $e \leqq 3$ (v. t. 4).



Sl. 18. Graf funkcije $\sin x$ i Taylorovih polinoma $q_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $n = 0, 1, 2, 3,$

Prema tome, ako se želi odrediti e npr. s tačnosti do 10^{-5}, dovoljno je uzeti $n = 8$, jer je tada $(n+1)! = 9! = 362\,880$, pa je $r_n(1) < \frac{3}{9!} < 10^{-5}$. Tako se dobije

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2{,}7182\ldots,$$

gdje su navedene decimale zajamčene; ovaj račun također pokazuje da bi peta decimala mogla biti 7, 8 ili 9; u stvari je 8.

Navedeni redovi mogu se upotrijebiti i za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$ i hiperboličkih funkcija $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

I logaritmička funkcija $\ln x$ može se razviti u red potencija uz pomoć Taylorove formule, ali dakako ne u okolini tačke 0 u kojoj nije definirana. Najčešće se upotrebljava razvoj u okolini tačke $x_0 = 1$. Pogodno je raditi s ostatkom u Cauchyjevom obliku. Nalazi se da je

$$r_n(x-1) = (-1)^n (x-1)^{n+1} \frac{1}{1+\vartheta(x-1)} \left[\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta(x-1)}\right]^n. \quad (23)$$

Lako se vidi da je $0 < \dfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta(x-1)} < 1$, ako je $|x-1| < 1$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x-1) = 0$. Dobiveni razvoj glasi

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + $$
$$+ \frac{1}{3}(x-1)^3 - + \ldots, \quad (24)$$

a vrijedi za $|x-1| < 1$.

Promatranjem Cauchyjevog ostatka dolazi se i do tzv. *binomnog reda*

$$x^\mu = 1 + \mu(x-1) + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} (x-1)^k, \quad (25)$$

koji vrijedi za $|x-1| < 1$ i za bilo kakav realni broj μ.

Taylorova formula vrijedi i za funkcije od više varijabli. Ako je $U \subseteq R^m$ otvoren skup, $x^0 \in U$, i ako je U zvjezdast skup sa središtem u tački x^0, te ako je $f: U \to R$ realna funkcija od m varijabli koja ima neprekidne derivacije do uključivo reda n i osim toga ima $(n+1)$-vi diferencijal $d^{(n+1)}f$ u U, onda je

$$f(x) = f(x^0) + \frac{(df)(x^0)}{1!} + \frac{(d^2f)(x^0)}{2!} + \ldots + \frac{(d^nf)(x^0)}{n!} +$$
$$+ r_n(x - x^0), \ x \in U, \quad (26)$$

gdje je, npr. u Lagrangeovom obliku, ostatak $r_n(x - x^0)$ dan formulom

$$r_n(x - x^0) = \frac{1}{(n+1)!}(d^{(n+1)}f)\,(x^0 + \vartheta(x - x^0))\,(x - x^0)^{n+1}. \quad (27)$$

Ako se diferencijali detaljno ispišu, dobivaju se dugački izrazi. Npr. ako je $n = 2$ i $m = 2$, tj. ako je U otvoren skup u ravnini $X\,Y$, onda je

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0,y_0)\,dx^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,dx\,dy + f_{yy}(x_0,y_0)\,dy^2] +$$
$$+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}(\xi,\eta)\,dx^3 + 3f_{xxy}(\xi,\eta)\,dx^2\,dy + 3f_{xyy}(\xi,\eta)\,dx\,dy^2 +$$
$$+ f_{yyy}(\xi,\eta)\,dy^3], \quad (28)$$

gdje je $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, $\eta = y_0 + \vartheta(y - y_0)$, $0 < \vartheta < 1$, $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.

Dokazi se provode lako svođenjem na slučaj formula za funkcije jedne varijable; dovoljno je promatrati pomoćnu funkciju

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \ t \in [0,1].$$

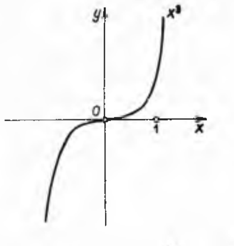
I za funkcije od više varijabli promatra se Taylorov red. To je sada red potencija u više varijabli.

13. Ekstremi funkcija. Neka je $f(x)$ realna funkcija definirana na skupu $D \subseteq R^n$. Kaže se da je $x_0 \in D$ *tačka maksimuma* funkcije f ako je $f(x_0) \geqq f(x)$, za svako $x \in D$, a x_0 da je *tačka minimuma* ako je $f(x_0) \leqq f(x)$, za svako $x \in D$. Kaže se da je tačka $x_0 \in D$ *tačka lokalnog* ili *relativnog maksimuma* ako postoji okolina U tačke x_0 takva da je $f(x_0) \geqq f(x)$, za sve $x \in U \cap D$. Analogno, x_0 je *tačka lokalnog minimuma* ako je $f(x_0) \leqq f(x)$, za sve $x \in U \cap D$. *Tačka ekstrema* zajednički je naziv za tačke maksimuma i tačke minimuma. Očito je da je tačka ekstrema uvijek i tačka lokalnog ekstrema. Ako je tačka x_0 *nutarnja tačka* za D, tj. ako je D okolina tačke x_0, onda se proučavanjem diferencijala funkcije f u tački x_0 može odrediti da li se radi o tački lokalnog ekstrema.

Ako funkcija $f(x)$ jedne varijable $x \in R$ ima u tački lokalnog ekstrema x_0 prvu derivaciju $f'(x_0)$, onda zbog teorema Fermata (v. t. 9) mora biti $f'(x_0) = 0$, dakle i $(df)(x_0) = 0$. Lako se pokaže da je za funkcije $f(x)$ od više varijabli uvjet $(df)(x^0) = 0$ nuždan uvjet da nutarnja tačka $x_0 \in D \subseteq R^n$ bude tačka lokalnog ekstrema. Uvjet se može ekvivalentno iskazati i sistemom jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) = 0. \quad (1)$$

Tačka x^0 za koju je $(df)(x^0) = 0$ zove se *kritična* ili *stacionarna* tačka funkcije f.



Sl. 19. Graf funkcije x^3. Tačka infleksije

Tačka može biti kritična a da ne bude lokalni ekstrem. Npr. ako je $f(x) = x^3$, onda je $x_0 = 0$ kritična tačka, jer je $f'(0) = 0$, ali 0 očito nije relativni ekstrem za x^3 (sl. 19).

Primjenom Taylorove formule nalazi se, za funkcije koje imaju drugi diferencijal, da je u kritičnoj tački x_0

$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{1}{2}(d^2f)(x_0) + r_2(x - x_0), \quad (2)$$

gdje je $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r_2(x-x_0)}{|x - x_0|^2} = 0$. Odavde se može zaključiti da se predznak izraza $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ podudara s predznakom *kvadratne forme*

$$d^2f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \quad (3)$$

u tački x^0, ukoliko je ova *nedegenerirana*, tj. ako se poništava jedino za $x = x^0$. Forma (3) je nedegenerirana ako je matrica

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

u tački x^0 regularna, tj. ako je pripadna determinanta $\neq 0$. Ova matrica zove se *Hesseova matrica.*

Prema tome, u nedegeneriranom slučaju, x^0 je tačka ekstrema ako je kvadratna forma (3) stalnog znaka, tj. *definitna;* i to, x_0 je minimum ako je forma (3) *pozitivno definitna,* tj. > 0 za svako $x \neq x^0$, a maksimum ako je forma (3) *negativno definitna,* tj. < 0, za sve $x \neq x^0$. Ako je forma (3) *indefinitna,* tj. za neke vrijednosti $x \neq x^0$ je > 0, a za druge $x \neq x^0$ je < 0, onda x^0 nije tačka ekstrema.

Da se raspozna da li je forma $(d^2f)(x^0)$ definitna, vrlo je pogodan kriterij J. J. Sylvestera: ako su determinante

$$f_{x_1x_1} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} \cdots f_{x_1x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{x_nx_1} \cdots f_{x_nx_n} \end{vmatrix} > 0, \quad (5)$$

onda je forma (3) pozitivno definitna, tj. funkcija f ima minimum u tački x^0. Ako pak vrijede analogne nejednakosti u kojima alternativno dolaze znakovi < 0 i > 0, onda je forma (3) negativno definitna, tj. funkcija f ima maksimum u tački x^0.

U degeneriranom slučaju potrebna su složenija ispitivanja. Ali ako je posrijedi funkcija od jedne varijable, može se diskusija u tom slučaju lako provesti i dalje. U slučaju funkcije $f(x)$ jedne varijable $x \in R$ degeneracija naprosto znači da je $f''(x_0) = 0$. Tada se promatra najmanji n za koji je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, dok je $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$. Ako je n paran broj, tada je x_0 ekstrem, i to minimum ako je $f^{(n)}(x_0) > 0$, a maksimum ako je $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ako je n neparan broj, funkcija nema ekstrem u tački x_0, već je to *prevojna tačka* ili *tačka infleksije* za funkciju f. Takva je npr. tačka $x_0 = 0$ za funkciju x^3 (sl. 19).

14. Inverzija preslikavanja. Implicitno zadane funkcije. Neka je U otvoren skup iz R^n, a $f: U \to R^n$ preslikavanje zadano funkcijama

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x \ , \ldots , x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1 , \ldots , x_n) . \end{aligned} \tag{1}$$

Veoma je važno pitanje da li u nekoj okolini V tačke $y^0 = f(x^0)$ postoji *inverzno* ili *obratno* preslikavanje $g : V \to R^n$, tj. takvo jednoznačno preslikavanje da su složena preslikavanja $f \circ g$ i $g \circ f$ identička preslikavanja. Teorem o inverziji preslikavanja daje nuždan i dovoljan uvjet za egzistenciju diferencijabilnog inverznog preslikavanja g u slučaju kada je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje, tj. preslikavanje klase C^1. Uvjet se sastoji u tome da je diferencijal $\mathrm{d}f$ regularno linearno preslikavanje; drugim riječima, da je Jacobijeva matrica $\dfrac{\partial(f_1 , \ldots , f_n)}{\partial(x_1 , \ldots , x_n)}$ regularna, odnosno da je Jacobijeva determinanta različita od 0. U slučaju funkcija od jedne varijable je $n = 1$, pa se ovaj uvjet svodi na zahtjev da je derivacija $f'(x) \neq 0$.

Kako je $f \circ g$ identitet, a diferencijal identiteta je opet identitet, to se nalazi da je i $(\mathrm{d}f) \circ (\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(f \circ g)$ identitet, što pokazuje da je $\mathrm{d}g$ inverzno preslikavanje od $\mathrm{d}f$. Prema tome, Jacobijeva matrica za g dobije se kao inverzna matrica Jacobijeve matrice za f. Ako je preslikavanje f klase C^r, C^∞ ili C^ω, može se dokazati da je tada i inverzno preslikavanje g iste klase C^r, C^∞, odnosno C^ω.

Za funkcije (1) kaže se da su *funkcijski zavisne* ako postoji funkcija $h(y_1 , \ldots , y_n)$ koja nije identički jednaka 0, a takva je da je $h \circ f = 0$, tj. da je $h(f_1(x_1 , \ldots , x_n) , \ldots , f_n(x_1, \ldots , x_n)) = 0$, za sve $x \in (x_1 , \ldots , x_r)$. Na osnovu teorema o inverziji nalazi se nuždan i dovoljan uvjet za zavisnost funkcija $f_i(x)$, $i = 1 , \ldots , n$, koji se sastoji u iščezavanju determinante matrice

$$\frac{\partial(f_1 , \ldots , f_n)}{\partial(x_1 , \ldots , x_n)} .$$

Teorem o inverziji preslikavanja igra važnu ulogu i pri proučavanju *implicitno zadanih funkcija.* Neka su

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1 , \ldots , x_n, y_1 , \ldots y_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m &= f_m(x_1 , \ldots , x_n, y_1 , \ldots , y_m) \end{aligned} \tag{2}$$

realne funkcije koje definiraju preslikavanje $f : U \to R^m$, $z = f(x, y)$, gdje je U otvoren skup iz R^{n+m}. Ako je f klase C^1, ako prevodi neku tačku $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots , x_n^0, y_1^0, \cdots , y_m^0) \in U$ u tačku $0 = (0 , \ldots , 0) \in R^m$, i ako je determinanta Jacobijeve matrice $\dfrac{\partial(f_1 , \ldots , f_m)}{\partial(y_1 , \ldots , y_m)}$ različita od 0 u tački (x^0, y^0), onda postoje okoline $U' \subseteq R^n$ oko x^0 i $V \subseteq R^m$ oko y^0 takve da postoji jednoznačno određeno preslikavanje $h : U' \to V$ sa svojstvom da je $h(x^0) = y^0$ i da je

$$f(x, h(x)) = 0, \text{ za sve } x \in U'. \tag{3}$$

Preslikavanje h je pri tome neprekidno diferencijabilno, tj. klase C^1. Ako je f klase C^r, C^∞ ili C^ω, onda je i h odgovarajuće klase.

Diferencijal preslikavanja h kao i parcijalne derivacije od h lako se odrede iz (3). Zaista, formula (3) napisana u koordinatama glasi

$$f_i(x_1 , \ldots , x_n, h_1(x_1, \ldots , x_n) , \ldots , h_m(x_1 , \ldots , x_n)) = 0, \quad i = 1 , \ldots , m . \tag{4}$$

Deriviranjem npr. po x_j dobiva se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial h_m}{\partial x_j} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f_m}{\partial x_j} + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\frac{\partial h_m}{\partial x_j} = 0 . \end{aligned} \tag{5}$$

Rješavanjem ovog linearnog sistema po nepoznanicama $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots , m$, dobiju se vrijednosti za parcijalne derivacije. Kako je determinanta sustava upravo Jacobijeva determinanta, koja je po pretpostavci $\neq 0$, to se sistem (5) može riješiti npr. po Cramerovom pravilu (v. *Aritmetika i algebra*). O preslikavanjima dobivenim na opisani način govori se kao o *implicitno zadanim preslikavanjima,* odnosno funkcijama.

Neka su npr. zadane funkcije

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 y_2 \\ z_2 &= x_1^2 x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 4 . \end{aligned} \tag{6}$$

Lako se provjeri da se z_1 i z_2 poništavaju u tački $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = (1, -1, 1, -2)$. Determinanta Jacobija ima vrijednost 14 u toj tački. Zato postoje diferencijabilne funkcije $y_1 = y_1(x_1, x_2)$ i $y_2 = y_2(x_1, x_2)$ u okolini tačke $(1, -1)$ takve da je

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 y_2 &= 0 \\ x_1^2 x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 4 &= 0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Da se dobije npr. $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}$ u tački $(1, -1)$ derivira se sistem (7) po x_1, shvaćajući y_1 i y_2 kao funkcije od x_1 i x_2. Dobiva se linearni sistem

$$2x_1 + 2y_1 y_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + y_1^2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

$$x_1 x_2 + y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 ,$$

odnosno nakon uvrštavanja vrijednosti za x_1, x_2, y_1, y_2

$$2 - 4\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

$$-1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - 2\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 .$$

Iz ovog sistema se lako izračuna da je $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(1, -1) = \dfrac{3}{7}$.

LIT.: a) Domaća djela: *R. Kašanin*, Viša matematika, Beograd 1949. — *Ž. Marković*, Uvod u višu analizu I i II dio, Zagreb 1945 i 1952. — *Đ. Kurepa*, Teorija skupova, Zagreb 1951. — *T. Pejović*, Matematička analiza I, II, III, Beograd 1949. — *D. Blanuša*, Viša matematika I, sv. 1 i 2, Zagreb 1963 i 1965. — *Z. Mamuzić, B. Đerasimović* i *V. Vučković*, Osnovi matematičke analize, Beograd 1964.

b) Strana djela: *C. H. Hardy*, Pure Mathematics, 9. izd., Cambridge 1942. — *E. Goursat*, Cours d'analyse I, II, 6. izd., Paris 1943. — *G. Valiron*, Théorie des fonctions, 2. izd., Paris 1948. — *A. Duschek*, Vorlesungen über höhere Mathematik I, Wien 1949. — *N. Bourbaki*, Fonctions d'une variable réelle, Paris 1949. — *R. Rothe*, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Berlin 1952. — *A. Ostrovski*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I. Basel 1952. — *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики I, Москва 1954. — *R. Courant*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I, II, 3. izd., Berlin 1955. — *R. C. Buck*, Advanced calculus, New York 1956. — *H. K. Nickerson, D. C. Spencer, N. E. Steenrod*, Advanced calculus, Princeton 1959. — *J. Dieudonné*, Foundations of modern analysis, New York 1960. — *T. M. Apostol*, Calculus I, II, New York 1961. — *Г. М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления I, 5. izd., Москва 1962. — *G. F. Simmons*, Introduction to topology and modern analysis, New York 1963. — *S. Lang*, A first course in calculus, Reading, Mass., 1964. — *S. Lang*, A second course in calculus, Reading, Mass. 1964. — *W. Rudin*, Principles of mathematical analysis, 2. izd., New York 1964. — *W. H. Fleming*, Functions of several variables, Reading, Mass. 1965.

S. Mardešić

DIFUZIJA, u širem smislu, migracija jedne vrste čestica materije između drugih čestica. Takav način prelaza materije s jednog mesta na drugo po pravilu je srazmerno spor; stoga je on »usko grlo« mnogih važnih operacija u tehnici, njegova brzina često određuje brzinu kojom se odvija ceo proces. Odatle je razumljiv interes proučavanja difuzije za razumevanje tih tehničkih operacija i za proračunavanje aparature u kojoj se izvode. U nuklearnoj tehnici postale su u poslednje vreme važne neke operacije koje koriste razlike u brzini difuzije za razdvajanje izotopa. I u operacijama koje se služe polupropusnim membranama zakoni difuzije su od bitne važnosti.

Kretanje čestica materije između drugih čestica sa jednog mesta na drugo može da bude prouzrokovano raznim pogonskim silama. Na osnovu kinetičke teorije idealnog gasa poznato je da čestice idealnog gasa koje se nalaze na nekoj temperaturi iznad apsolutne nule poseduju odgovarajuću kinetičku energiju i slobodno se kreću sa podjednakim stepenom verovatnoće u svim pravcima u prostoru unutar sistema kojim su obuhvaćene. Pri svom kretanju čestice se sudaraju; veličina puta što ga pojedina čestica u proseku prevali između dva sudara zove se *srednji slobodni put*; on je manji ili veći u zavisnosti od prečnika čestica i od njihove koncentracije u datom prostoru.

Do pojave difuzije čestica pretežno u nekom određenom pravcu doći će onda kada se na neki način izazove neravnoteža u posmatranom sistemu. Neravnoteža postoji na primer kada je na pojedinim mestima u sistemu koncentracija posmatrane vrste čestica različita. U tom slučaju dolazi do difuzije čestica sa mesta više