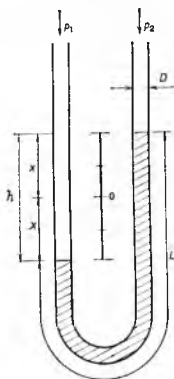


DINAMIKA PROCESA. Za projektiranje i vođenje sustava unutar proizvodnih procesa neobično je važno znati kako se vlada proces pri željenim promjenama karakterističnih veličina i koliko uspješno on može otkloniti posljedice neželjenih promjena tih veličina. Kao temelj za prikazivanje vladanja procesa služi matematički opis. Matematički opis bilo kojeg sustava čini skup izraza, tablica i krivulja koji kvantitativno opisuju veze njegovih karakterističnih veličina; često se takav opis naziva *matematičkim modelom* ili kratko *modelom*. Opis može biti statički ili dinamički. U *statičkom opisu* pretpostavlja se da je sustav u stacionarnom stanju, tj. stanju u kojem se vrijednosti karakterističnih veličina s vremenom nikako ili samo neznatno mijenjaju. Zato se u takvom opisu ne pojavljuju derivacije tih veličina po vremenu (npr. brzina, ubrzanje), a skup odnosa koji iskazuje statičko vladanje vrijedi samo za pretpostavljeno stanje, a ništa ne kazuje o vladanju sustava pri promjenama parametara. Za razliku od statičkog opisa, *dinamički opis* sve vrijednosti karakterističnih veličina uzima kao vremenski promjenljive. Takav matematički opis, dan sustavom diferencijalnih jednadžbi s vremenom kao nezavisnom varijablom, obuhvaća stvarnu sliku promatranog sustava u prostoru i vremenu. Ako se pretpostave stanja u kojima su vremenske promjene karakterističnih veličina zanemarljive, takav opis prikazuje i statičke odnose u istraživanom sustavu.

Istraživanjem i proučavanjem vremenskih promjena stanja sustava i opisivanjem osnovnih zakona njegova vladanja bavi se zasebna znanstveno-tehnička disciplina — *dinamika procesa*.

Neka kao primjer usporedbe statičkog i dinamičkog opisa posluži vladanje jednostavnog U-manometra prema sl. 1.



Sl. 1

Statički promatrano, pri nekoj razlici tlakova $p_1 - p_2$ uspostaviti će se u sustavu ravnoteža sila, pa će sili $p_1 A$, prouzročenoj tlakom p_2 , držati ravnotežu težina stupca tekućine visine h , $h A g \rho$, i sila $p_2 A$ prouzročena tlakom p_2 , tj.

$$p_1 A - h A g \rho - p_2 A = 0. \quad (1)$$

Odatle slijedi statički opis vladanja U-manometra:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{g}, \quad (2)$$

koji pokazuje da visina stupca h zavisi od razlike tlakova, gustoće tekućine i ubrzanja sile teže (geografske širine). Opis ništa ne kazuje o tome kako će se sustav vladati pri promjenljivim tlakovima i kako će stupac slijediti te promjene; do tih se odnosa može doći samo promatranjem dinamičkog vladanja sustava.

Stacionarno stanje nije samo stanje statičke ravnoteže (npr. U-manometra) u kojem su karakteristične veličine i u prostoru i u vremenu nepromjenljive, nego i stanje u kojem nastaju promjene u prostoru, ali u određenoj tački prostora ne nastaju promjene s vremenom. U stacionarnom stanju je npr. kontinuirani kemijski proces, unutar kojeg se zbivaju mnogovrsne promjene, ali je stanje na svakom mjestu unutar procesa uvijek jednako.

Pri dinamičkom promatranju uzima se da u U-manometru djeluju tlakovi $p_1(t)$ i $p_2(t)$ kao funkcije vremena; tada je i visina stupca h vremenska funkcija $h(t)$. Potrebno je uzeti u obzir i tromost tekućine, a zatim i njeno trenje o stijenke cijevi, pa jednadžba dinamičke ravnoteže sila u U-manometru glasi:

$$p_1(t) A - p_2(t) A - F_g(t) - F_t(t) - F_v(t) = 0, \quad (3)$$

gdje je $F_g = h A g \rho$ težina stupca tekućine visine $h = 2x$, $F_t = m a = h A \rho (d^2x/dt^2)$ tromost tekućine, $F_v = 32 L \eta v / D^2$ unutrašnje trenje tekućine; ρ gustoća tekućine, $m = L A \rho$ masa tekućine, η viskozitet tekućine, $v = A (dx/dt) = A \cdot \frac{1}{2} (dh/dt)$ brzina gibanja volumena tekućine, $a = (d^2x/dt^2) = \frac{1}{2} (d^2h/dt^2)$ akceleracija, L ukupna dužina tekućine u cijevi, A površina, a D promjer unutarnjeg presjeka cijevi manometra.

Uređenjem jednadžbe (3) dobije se konačan izraz:

$$\frac{p_1(t) - p_2(t)}{g \rho} = h(t) + \frac{16 \eta L}{g \rho D^2} \frac{dh(t)}{dt} + \frac{L}{2g} \frac{d^2h(t)}{dt^2}. \quad (4)$$

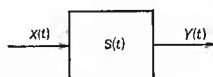
Proučavanje dinamičke jednadžbe daje mnogo detaljniji uvid u vladanje U-manometra, pa se na primjer može istražiti odziv sustava na iznenadne promjene tlaka, uvjeti koje moraju

ispunjavati karakteristične veličine sustava (ρ, η, L, D) da bi se prišlo titranje stupca h uslijed eventualnih varijacija mjerenoj tlaka. Načini i postupci proučavanja dinamičkog vladanja bit će obrađeni u daljnjem izlaganju. Valja, međutim, pokazati da je statički opis (2) poseban slučaj dinamičkog opisa u bilo kojem trenutku vremena $t = t_0$ u kojem vlada stacionarno stanje. Pri takvom stanju vrijedi: $p_1(t_0) = p_1 = \text{konst.}$, $p_2(t_0) = p_2 = \text{konst.}$ i $h(t_0) = h = \text{konst.}$, pa su $\frac{dh}{dt} = 0$ i $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$, a jednadžba (4) poprima oblik jednadžbe (2).

Valja istaknuti da se dinamičkim opisom ne mogu obuhvatiti sve pojave koje utječu na dinamičko vladanje sustava, npr. suho trenje, histereza i druge pojave koje se iskazuju kao statičke karakteristike. Vladanje sustava koji uključuje takve pojave može se opisati — doduše samo približno, ali za praksu često prikladno — slaganjem statičkog i dinamičkog opisa.

Te meljni pojmovi dinamike procesa

Kao temelj promatranja služiti će predodžba prema sl. 2. Prema toj predodžbi istraživanom sustavu S pridijeljeni su skup ulaznih promjena ili *ulaza* X i skup izlaznih promjena ili *izlaza* Y . Njih veže odnos:



Sl. 2

$$S : X \rightarrow Y, \quad (5)$$

koji kazuje da sustav S pridružuje skupu izlaznih promjena Y skup ulaznih promjena X . U općem se slučaju veličine skupova X i Y mijenjaju vremenski, pa im valja dati i oznaku vremenskih funkcija $X(t)$ i $Y(t)$. Obilježja ulaza i izlaza zavise od vrste i prirode istraživanog sustava; njima se daju različiti nazivi kao, na primjer, pojam ulaz: pojenje, djelovanje, pobuda, poremećaj, poticaj itd., a pojam izlaz: proizvod, učinak, posljedica, rezultat, odziv itd. Općenito skup X može sadržavati l ulazih promjena x_i , a skup Y , m izlaznih promjena y_j , pa uz odnos (5) slijedi opis ulaza i izlaza

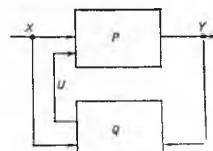
$$\begin{aligned} X(t) &= \{x_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ Y(t) &= \{y_j(t)\}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6)$$

Svaki stvarni istraživani sustav ima beskonačno mnogo svojstava i moguće ga je promatrati kao kutiju s bezbroj ulaza i izlaza. No niti bi bilo koji eksperimentator mogao odrediti tu sveukupnost svojstava, niti je ona praksi potrebna; zato je prvi korak pri istraživanju da se odredi koji će se ulazi i izlazi promatrati, koliko će se uzeti u obzir raznolikost sustava. Odluka o izboru istraživanih svojstava donosi se zavisno od cilja i namjene istraživanja, a dopunjuje se često tokom samog istraživanja.

Tako se npr. u sustavu za pripremu pojne tekućine nekog procesa mogu nesumnjivo istraživati brojna svojstva, ali ako je kao cilj postavljena neutralizacija kiselih sastojaka, bit će predmet promatranja sustav sa četiri ulaza i jednim izlazom: naime, ulazi će biti promjene dotoka pojne tekućine, pH pojne tekućine, promjene dotoka lužnatog reagenta i pH lužnatog reagenta, a izlaz će biti promjena pH neutralizirane pojne tekućine. Primijeti li se u toku istraživanja da valjan rad sustava znatno zavisi od temperature pojne tekućine, bit će potrebno kao peti ulaz promatrati još i temperaturu tekućine.

U sustavima koji imaju određeni smisao ili cilj djelovanja, dakle *suvislim sustavima*, pridruživanje ulaznih promjena izlaznim promjenama podliježe određenim zakonitostima (one i čine sustav suvislim). Zato je potrebno proširiti predodžbu danu slikom 2 i sustav S promatrati kao zajednicu dvaju sustava (prema sl. 3): jedan, opisan skupom funkcija P , iskazuje djelovanje sustava S , a drugi, opisan skupom funkcija Q , upravljačkim odlukama U usmjeruje ta djelovanja:

$$S = \{P, Q\}. \quad (7)$$



Sl. 3

Skup P je opis promjena stanja sustava. U suvislim su sustavima te promjene u skladu sa smislom djelovanja; vođene skupom Q one osiguravaju da se usprkos suprotnog djelovanja poremećaja (na primjer izmjene svojstava ulaznih promjena) održi neko svoji-

stvo ili ostvari određena izlazna promjena. Takva suvisla izmjena stanja skupa P odgovara pojmovima *operacija* i *proces*, a sustav opisan skupom funkcija Q je *sustav za vođenje* operacije ili procesa. Uobičajeno je da se za razliku od operacije, kao užeg pojma, pod pojmom proces misli na skup viševrskih djelovanja i operacija koje nastupaju istodobno ili u slijedu. Istraživanje i proučavanje operacija i procesa sa stajališta iznijete predodžbe osnovni je smisao dinamike procesa, a to znači da dinamiku procesa u osnovi karakterizira skup funkcija P ili, općenito, matematički opis djelovanja (operacijâ, procesâ) koja se zbivaju u promatranom sustavu.

Oblik matematičkog opisa prilagođuje se svrsi istraživanja i svojstvima istraživanog sustava. Primjenjuju se dva temeljna načina sastavljanja matematičkog opisa procesa: analitički i eksperimentalni. *Analitičko* sastavljanje matematičkog opisa polazi od fizičkih, kemijskih ili bioloških djelovanja što se zbivaju u sustavu. Ne služi se eksperimentom i zahtijeva uz dobro poznavanje matematike i vrlo visoku razinu znanja u odgovarajućem području istraživanja. Jedino se pomoću analitičkih postupaka može sastaviti matematički opis sustava svojstven svim djelovanjima koja čine proces. *Eksperimentalno* sastavljanje opisa izvodi se promatranjem odziva izlaznih promjena sustava na poznate ulazne promjene. Razlikuju se aktivni i pasivni postupci. Pri aktivnom eksperimentalnom istraživanju uvode se u istraživani sustav posebna djelovanja koja izazivaju izmjene izlaznih veličina. Pri pasivnom eksperimentalnom istraživanju dolazi se do podataka promatranjem i praćenjem vladanja karakterističnih veličina sustava, u toku njegovog normalnog djelovanja, usporedbom zbivanja na ulazu i izlazu, a da pri tome nisu potrebna nikakva posebna djelovanja. Postoje i široke mogućnosti povezivanja eksperimentalnih i analitičkih načina opisivanja procesa, ali takvim istraživanjima, iako u općim crtama izražavaju zavisnosti i zbivanja unutar sustava dosta podudarno sa stvarnima, nije svojstvena egzaktnost matematičkog opisa.

Osnovni postupci analitičkog proučavanja dinamike procesa

Analitičko opisivanje dinamike procesa temelji se na teorijskoj analizi istraživanog sustava i djelovanja koja se u njemu zbivaju. Iskazuje se to u obliku zadatka ovako:

Dano je stanje sustava u trenutku vremena t_0 , određeno vrijednostima karakterističnih veličina (tlakom, protokom, temperaturom, sastavom i dr.). Treba matematički opisati vremensko vladanje sustava tako da je u bilo kojem trenutku vremena $t > t_0$ opis vjerna slika stanja odabranih veličina i njihova odziva na sve prisutne smetnje ili poremećaje.

U načelu je to težak i složen zadatak koji zahtijeva podrobnu analizu raznovrskih djelovanja i umješnost da se matematički prikažu. Dinamička analiza i jednostavnijeg procesa postaje nemoguć zadatak kad se želi dati njegov potpuni opis. Zato je prvo i najvažnije pravilo izabrati pretpostavke kojima će se pojednostavniti opis procesa. Obično se u tu svrhu istraživani sustav raščlanjuje na jednostavnije dijelove — podsustave — prikladne za analizu, pa sveukupni opis slijedi sastavljanjem opisa svih podsustava. No najznačajnija svrha pojednostavnjenja opisa jest da se uklone poteškoće izazvane nelinearnim zavisnostima karakterističnih veličina procesa. Za složene sustave kojima su svojstvene višestruke zavisnosti karakterističnih veličina, čak i uz pojednostavnjenja konačni je opis vrlo zamršen i njegova praktična primjena moguća jedino upotrebom računala.

Iz praktičnih razloga gotovo uvijek se u matematičkom opisu polazi od zakonâ održanja i ravnoteže (zakonâ o održanju energije, mase i impulsa, dinamičke ravnoteže sila, Kirchhoffovih zakona i dr.) i zakonâ prenosa impulsa, mase i energije (Fourierove jednadžbe za tok topline, Ohmovog zakona električne vodljivosti, Fickovog zakona difuzije i dr.). To su zakoni pomoću kojih se mogu obuhvatiti skoro sva djelovanja, a opis izveden njihovom primjenom dan je sustavom običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Operacije, odnosno procesi, prikazani takvim matematičkim opisom promatraju se onda kao dvije skupine: *jednostavni procesi* opisani običnim linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima i *složeni procesi* opisani običnim linearnim jednadžbama višeg reda, nelinearnim diferencijalnim jednadžbama, diferencijalnim jednadžbama s vremenski promjenljivim koefi-

cijentima, parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i sustavima diferencijalnih jednadžbi. Postupci i načini istraživanja jednostavnih procesa podrobno su razrađeni, dok su postupci i načini istraživanja složenih procesa još predmet proučavanja, uglavnom u sklopu zasebnih područja automatske regulacije, npr. teorije nelinearnih regulacijskih sustava, teorije regulacijskih sustava s raspodijeljenim parametrima (procesu opisani parcijalnim diferencijalnim jednadžbama), teorije višestruko zavisnih regulacijskih sustava i dr.

Dinamički se sustav najčešće nastoji svesti na jednostavni i opisati običnom diferencijalnom jednadžbom s konstantnim koeficijentima. Međutim, valja naglasiti da takve jednadžbe redovito predstavljaju približenja, jer u stvarnosti postoji malo sustava kojima bi se vladanje moglo cjelovito prikazati u tom obliku.

U skladu s time uzima se da je odnos određenog para izlaz-ulaz sustava prema slici 2 prikazan jednadžbom

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (8)$$

gdje x i y predočuju ulaznu i izlaznu promjenu, a i b kombinacije fizičkih parametara sustava (pretpostavljene konstantnim) i t vrijeme.

Najjednostavniji proces — *proces prvog reda* (nazivan još i sustav prvog reda, slog prvog reda, operacija prvog reda) opisuje npr. linearna diferencijalna jednadžba prvog reda:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x. \quad (9)$$

Tom se jednadžbom može dovoljno valjano opisati vladanje mnogih sustava, kao npr. spremnika tekućine, jednostavnog termometra, kontinuiranog reaktora s miješanjem i dr.

Uobičajeno je da se jednadžba (9) podijeli sa a_0 i prikazuje u obliku

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K x, \quad (10)$$

gdje se $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ naziva *vremenska konstanta* sustava a $K = \frac{b_0}{a_0}$ *statička osjetljivost* sustava.

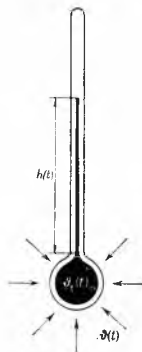
Promotrimo kao primjer takvog vladanja jednostavan stakleni termometar punjen tekućinom (sl. 4). Promjenu temperature ϑ u prostoru oko lukovice termometra slijedi toplinska promjena volumena tekućine i promjena visine stupca u kapilari. Tako je ulazna (mjerena) veličina termometra temperatura prostora oko lukovice, $\vartheta(t)$, a izlazna veličina visina stupca tekućine u kapilari, $h(t)$. Valja pri tome naglasiti pretpostavku da je temperatura $\vartheta(t)$ proizvoljno promjenljiva, ali jednaka u svim tačkama prostora u svakom trenutku vremena.

Povezivanje ulazne i izlazne promjene najpovoljnije je izvesti polazeći od zakona o održanju energije u neizmerno kratkom intervalu vremena: dovedena toplina minus odvedena toplina jednako sačuvana toplina.

Ako se pretpostavi u našem slučaju da gubitaka (odvoda) topline nema, to znači da se toplina dovedena tekućini u lukovici iz prostora oko nje u diferencijalnom intervalu vremena (koja je toplina proporcionalna razlici temperature, površini prijenosa i vremenu) na kraju nalazi u tekućini kao osjetljiva toplina (proporcionalna volumenu, masi i diferencijalnom porastu temperature), tj. matematički izraženo:

$$U A [\vartheta(t) - \vartheta_i(t)] dt = c V \varrho d\vartheta, \\ V \varrho c \frac{d\vartheta}{dt} + U A \vartheta_i = U A \vartheta. \quad (12)$$

U ovim i slijedećim jednadžbama znači A oplošje lukovice (površina kojom se prenosi toplina), a površinu presjeka kapilare, a tempe-



Sl. 4

raturni koeficijent rastezanja tekućine, c specifičnu toplinu tekućine, h visinu stupca tekućine u kapilari, ρ gustoću tekućine, ϑ temperaturu prostora oko lukovice, ϑ_l temperaturu tekućine u lukovici ($\vartheta_l = 0$ kad je $h = 0$), t vrijeme, U ukupni koeficijent prolaza topline, V volumen lukovice.

Masa stupca tekućine u kapilari suprotstavlja se gibanju svojom tromošću. Međutim, ta je tromost zanemarljiva u odnosu na tromost prijenosa topline s okolnog prostora kroz stijenke lukovice na tekućinu. Ta se pretpostavka temelji na iskustvu i procjeni, a mogu se usporediti i redovi veličine tih tromosti. Zanimarenjem mehaničke tromosti stupca tekućine jedino je i moguće opisati termometar kao sustav prvog reda, jer tada je zavisnost visine stupca tekućine u kapilari od temperature tekućine u lukovici prikazana jednostavnim odnosom:

$$h(t) = \frac{V}{a} a \vartheta_l(t). \quad (13)$$

Uvrštenjem ϑ_l , dobivenog iz ovog odnosa, u jednadžbu (12) slijedi

$$\frac{\rho c a}{a} \frac{dh}{dt} + \frac{U A a}{a V} h = U A \vartheta \quad (14)$$

i konačno u obliku jednadžbe (10), ako se koeficijenti uz $\frac{dh}{dt}$ i ϑ označe sa τ i K :

$$\tau = \frac{\rho c V}{U A}, \quad K = \frac{a V}{a}. \quad (15)$$

Ovdje je prikladno ukazati na nekoliko zanemarenih okolnosti koje bi, da su bile obuhvaćene, znatno zamrsile opis i otežale promatranje vladanja sustava. Primjer je to nesuglasnosti matematičkog opisa i stvarnog sustava. Pretpostavljeno je: a) da su stijenke lukovice i film tekućine uz lukovicu čisti otpori prijenosu topline, pa ne zadržavaju nikakvu toplinu. (To se može pretpostaviti ako su toplinski kapaciteti stijenki lukovice i filma mali u usporedbi s toplinskim kapacitetom tekućine u lukovici, $\rho c V$.); b) da je površina A kroz koju se prenosi toplina konstantna. (Širenje i stezanje u zavisnosti od topline uzrok je da se ta površina u stvarnosti mijenja, ali utjecaj tih promjena je neznatan.); c) da je vodljivost konstantna. (Vodljivost se u stvari mijenja u zavisnosti od temperature, ali te su promjene zanemarljive ako se temperatura ne mijenja u širokom području.); d) da ne postoji odvođenje topline iz lukovice kroz stupac tekućine u kapilari. (Stvarno je gubitak topline vrlo malen ako je kapilara malog promjera, ako je kapilara slab vodič topline i ako je izvrnuta temperaturi neznatno različitoj od ϑ i ϑ_l .); e) da je masa tekućine u lukovici stalna. (Masa se stvarno mijenja zavisno od visine stupca tekućine u kapilari, ali je promjena zanemarljiva za male promjere kapilare i veliki volumen lukovice.); f) da je specifična toplina tekućine konstantna. (Svojstva tekućine se mijenjaju zavisno od temperature, ali su promjene neznatne za male promjene temperature.)

Matematički opis iskazan u obliku obične diferencijalne jednadžbe može se riješiti na klasičan način ili pomoću Laplaceove transformacije. U tehničkoj literaturi, posebice u radovima o vođenju procesa, dinamici procesa i sl. općenito je prihvaćena i uobičajena primjena Laplaceove transformacije jer se tako postupci rješavanja svode na algebarske, mogu se prikladno svrstati, upotreba transformacijskih tablica skraćuje rad, granični i početni uvjeti se uključuju sami po sebi, dobivaju se istodobno rješenja za prijelazna i stacionarna stanja, a lako se rješavaju i slučajevi s diskontinuiranim ulazima.

Prema Laplaceu pridružuje se originalnoj funkciji $f(t)$ određena funkcija $F(s)$ kao njena slika, dobivena integralnom transformacijom ili preslikavanjem oblika

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (16)$$

Argument funkcije $F(s)$ je kompleksna veličina, $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$ (v. Laplaceova transformacija).

Transformacijski parovi $F(s) = L[f(t)]$ svrstavaju se u tablicu pa u skladu s pravilima Laplaceove transformacije služe pri rješavanju zadataka. Ista tablica služi za inverznu transformaciju, tj. preslikavanje slike u originalnu funkciju (tabl. 1).

Tablica 1
NEKE LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

R. br.	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	1	$u_t(t)$, jedinični impuls u $t = 0$
2	$\frac{1}{s}$	1 ili $u(t)$, jedinični skok u $t = 0$
3	$\frac{a}{s^2}$	$a t$, uzlazna funkcija
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$, n je pozitivni cijeli broj
5	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$n(t-a)$, jedinični skok koji počinje u $t = a$
6	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$, n je pozitivni cijeli broj
7	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
8	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} e^{-at} - e^{-bt}$
9	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
10	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
11	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
12	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$
13	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} (1 - e^{-at} - at e^{-at})$

Nakon transformacije jednadžbe (8) postoji više mogućnosti rješavanja, a zatim također obrade i prikaza rezultata. Omjer izlazne i ulazne promjene daje naročito dobru predodžbu o vladanju sustava. Obično se upotrebljava omjer Laplaceovih transformata, koji se naziva *prijenosna funkcija*.

Prijenosna funkcija bilo kojeg sustava definirana je kao omjer Laplaceove transformacije izlazne promjene i Laplaceove transformacije ulazne promjene (koja je izazvala izlaznu promjenu) uz početne uvjete nula. Pri tome priroda ulazne promjene nije određena. Za promatrani par izlaz-ulaz, u skladu s jednadžbom (8), prijenosna funkcija glasi:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (17)$$

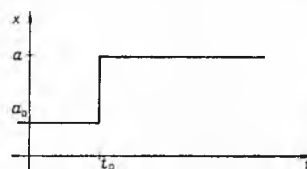
Sustav se pomoću prijenosne funkcije promatra tako da se kao ulazi primjenjuju promjene koje će omogućiti da se lako dođe do zaključaka o vladanju sustava. Primjenjuju se tri vrste ulaznih promjena: *prijelazne* ili *kratkotrajne* (impulsna funkcija, skok i uzlazna funkcija), *periodske* (npr. sinusni, pravokutni, pilasti valovi) i *statističke* (slučajne i pseudoslučajne promjene). Izlazna promjena je umnožak ulazne promjene i prijenosne funkcije

$$Y(s) = W(s) \cdot X(s), \quad (18)$$

pa je uvrštenje transformata pojedinih ulaznih promjena u ovu jednadžbu prvi korak pri istraživanju. Odzivi sustava na pojedine od ulaznih promjena imaju posebne karakteristike i daljnje se istraživanje izvodi zasebno za svaku promjenu. Načini analize i sinteze sustava prilagođeni su tim karakteristikama.

Pri istraživanju dinamike tehničkih i bioloških sustava najčešće se primjenjuju prijelazne ulazne promjene, jer one daju odzive koji karakteriziraju sveukupnu dinamiku istraživanog sustava. Često se kao ulazna promjena primjenjuje i sinusni val, a ostali periodski ulazi znatno rjeđe. U posebnim slučajevima i pri eksperimentalnim istraživanjima upotrebljavaju se ponekad statističke ulazne promjene, ali to zahtijeva solidno razrađene teorijske osnove, primjenu računala i vezano je uz složene i opsežne matematičke operacije.

Skokovita funkcija ili *skok* je vladanje ulazne veličine prema sl. 5; do vremena t_0 ulazna je veličina stacionarna i stalne vrijednosti, a tada skokom mijenja vrijednost i dalje ostaje stacio-



Sl. 5

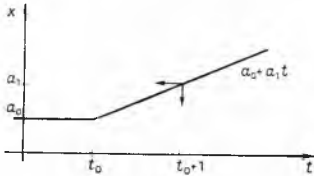
narna na novoj vrijednosti:

$$X = \begin{cases} a_0 & \text{za } t < t_0 \\ a & \text{za } t \geq t_0 \end{cases} \quad (19)$$

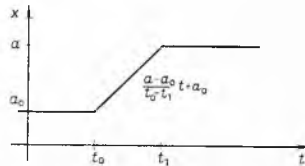
Uzme li se kao iznos veličine skoka jedinica, naziva se takva skokovita promjena *jedinični skok*. Odziv sustava na skokovitu promjenu naziva se *vremenska karakteristika*.

Uzlazna funkcija je vladanje prema sl. 6; do vremena t_0 ulazna je veličina stacionarna i stalne vrijednosti, a počevši od t_0 mijenja svoju vrijednost jednolikom brzinom:

$$x = \begin{cases} a_0 & \text{za } t \leq t_0 \\ a_0 + a_1 t & \text{za } t > t_0 \end{cases} \quad (20)$$



Sl. 6

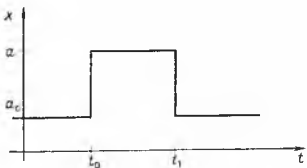


Sl. 7

U određenim okolnostima povezuju se uzlazna i skokovita funkcija u *ograničenu uzlaznu promjenu* (sl. 7):

$$X = \begin{cases} a_0 & \text{za } t \leq t_0 \\ \frac{a - a_0}{t_1 - t_0} t + a_0 & \text{za } t_0 < t < t_1 - t_0 \\ a & \text{za } t_1 - t_0 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (21)$$

Impulsnu funkciju ili *impuls* karakterizira promjena ulazne veličine s njene početne vrijednosti u trenutku t_0 na neku novu vrijednost i povratak na početnu vrijednost nakon vremena T . Postoji više oblika i vrsta impulsa, ali je sa stajališta eksperimentalnog istraživanja i matematičke obrade najprikladniji pravokutni impuls (sl. 8).



Sl. 8

Jedinični impuls $u(t)$ je pravokutni impuls oblika

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t \leq 0 \\ \frac{1}{A} & \text{za } 0 < t < A \\ 0 & \text{za } t \geq A \end{cases} \quad (22)$$

koji omeđuje površinu veličine jedinice.

Trenutačan beskonačno visok i beskonačno kratak jedinični impuls zove se δ -*funkcija* ili *Diracova funkcija*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ \infty & \text{za } t = 0 \\ 0 & \text{za } t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

definirana i na ovaj način:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \text{ za } t \neq 0. \quad (24)$$

Impulsne ulazne promjene, za razliku od funkcije skoka i ulazne funkcije, koje se superponiraju ispitivanim veličinama, posebice su prikladne pri eksperimentalnom istraživanju sustava u toku rada jer ne uzrokuju poremećaje procesnih varijabli.

Analiza sustava prvog reda. Primijenit ćemo prijelazne ulazne promjene da istražimo vladanje sustava prvog reda. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu (10) i postavljanjem omjera izlazne i ulazne promjene određuje se najprije prijelazna funkcija sustava:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (25)$$

Zatim se redom mogu primjenjivati prijelazne ulazne promjene i zaključivati o vladanju sustava.

Odziv sustava prvog reda na jedinični skok slijedi uvrštenjem

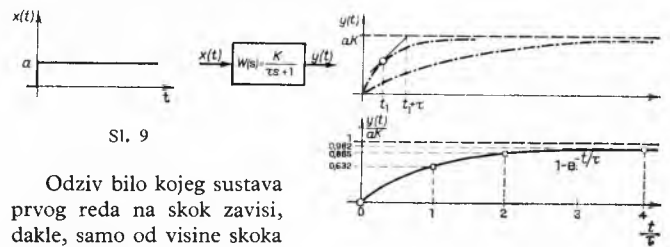
Laplaceove transformacije jediničnog skoka, $X(s) = \frac{1}{s}$, i jedn. (25) u izraz (18):

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad (26)$$

Razloži li se tako dobiveni odziv u zbroj dvaju razlomaka i preslika natrag u realno područje, iskazuje jednadžba

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) \quad (27)$$

vladanje sustava prvog reda pri $y(0) = 0$. Odziv je eksponencijalna krivulja (sl. 9) koja u beskonačnosti teži određenoj konstantnoj vrijednosti K . Tangenta povučena u bilo kojoj tački krivulje, recimo u vrijeme t_1 , siječe pravac $y = K$ za jednu vremensku konstantu τ kasnije, tj. u tački s apscisom $t_1 + \tau$. Kada je $t/\tau = 1$, odziv je postigao 63,2% svoje konačne vrijednosti. To omogućuje da se iz odziva na jednostavan način zaključi o vrijednosti vremenske konstante: $t = \tau$ kad je $y = 0,632 K$. Za sustave s malom vremenskom konstantom kaže se da imaju brz odziv. Kada je $t/\tau = 4$, odziv je postigao 98,2% svoje konačne vrijednosti. Tako je nakon «četiri vremenske konstante» pojava praktički završena i uspostavljeno je stacionarno stanje.



Sl. 9

Odziv bilo kojeg sustava prvog reda na skok zavisi, dakle, samo od visine skoka (konačne vrijednosti umanjene za početnu vrijednost) i vremenske konstante.

U naprijed navedenom primjeru termometra može se istraživati vladanje visine stupca tekućine u kapilari (odziv) na skokovitu promjenu temperature (skok ulazne veličine). Prema (15) vremenska konstanta termometra je $\tau = \rho c V/UA$, pa zaključujemo da će se vremenska konstanta moći smanjiti, tj. da će se dobiti brz odziv, ako se povećaju U i A ili smanje ρ , c i V . Gustoća ρ i specifična toplina c svojstva su tekućine u termometru, pa se traži tekućina koja ima mali umnožak ρc . Konstrukcijom je potrebno postići povoljan odnos V/A .

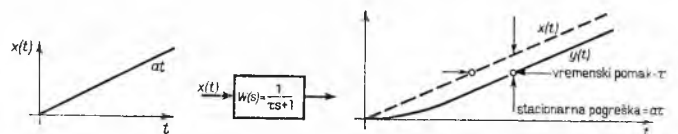
Odziv sustava prvog reda na uzlaznu funkciju dobije se ako se u jedn. (18) uvrsti Laplaceova transformacija uzlazne funkcije $x = at$ i jedn. (25):

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \cdot \frac{a}{s^2} \quad (28)$$

U realnom području za $y(0) = 0$ to je krivulja:

$$y(t) = aK[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]. \quad (29)$$

Oblik krivulje pokazuje sl. 10, a njegove značajke se mogu



Sl. 10

uočiti promatranjem razlike uzlazne ulazne promjene i odziva, tj.

$$x(t) - \frac{y(t)}{K} = -a e^{-t/\tau} + a\tau. \quad (30)$$

Prvi član izraza se tokom vremena postupno smanjuje i naziva se *prijelazna pogreška*; drugi član je stalan i naziva se *stacionarna pogreška* sustava. Prijelazna pogreška nestaje brže ako je vremenska konstanta manja, a stacionarna pogreška je proporcionalna vremenskoj konstanti. Vremenski pomak ulazne i izlazne promjene je jednak vremenskoj konstanti, pa to znači da u sustavu prvog reda izlazna promjena slijedi ulaznu s vremenskom razlikom jednaku vremenskoj konstanti sustava.

Impulsni odziv sustava prvog reda dobije se primjenom impulsne ulazne funkcije. Oblik odziva za različita trajanja impulsa pokazuje sl. 11; sl. 11a pokazuje tipični odziv, sl. 11b utjecaj smanjenja trajanja impulsa, a sl. 11c odziv kad trajanje impulsa T teži k nuli ($T \rightarrow 0$).

Pretpostavi li se početni uvjet $y(0) = 0$, odziv opisuje funkcija

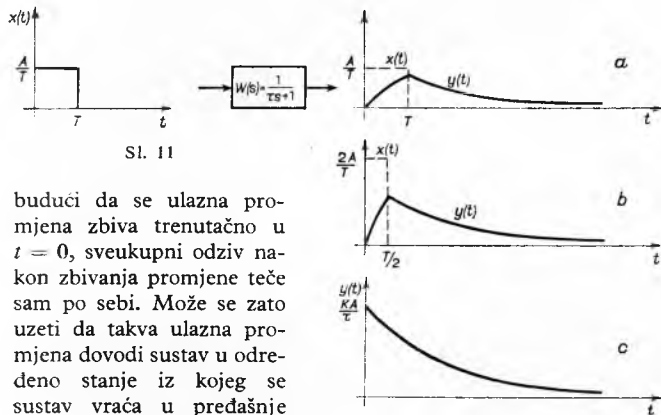
$$y(t) = \frac{KA}{T} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{za } 0 \leq t < T \quad (31 a)$$

$$y(t) = \frac{KA (1 - e^{-T/\tau}) e^{-t/\tau}}{T e^{-T/\tau}} \quad \text{za } t > T \quad (31 b)$$

Ako se T uzima kraće, tj. ako $T \rightarrow 0$, dobije se impulsni odziv kao

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{KA (1 - e^{-T/\tau}) e^{-t/\tau}}{T e^{-T/\tau}} = \frac{KA}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (32)$$

Impulsni odziv je prema (32) eksponencijalno smirivanje ili eksponencijalni pad i, za razliku od vremenske karakteristike, daje podatke o dinamici sustava s potpuno novog stajališta. Naime,



Sl. 11

budući da se ulazna promjena zbiva trenutačno u $t = 0$, sveukupni odziv nakon zbijanja promjene teče sam po sebi. Može se zato uzeti da takva ulazna promjena dovodi sustav u određeno stanje iz kojeg se sustav vraća u pređašnje stanje. Sa stajališta energetskog stanja to znači da impulsni poticaj unosi trenutačno u sustav određenu količinu energije, a odziv koji slijedi karakterizira način na koji se energija troši.

Za fizičke sustave takvo je vladanje stvarno nemoguće jer zahtijeva prijenos energije u beskonačnom iznosu. Tako bi u primjeru našeg termometra trebalo prenijeti beskonačan iznos topline da bi se dobio iznenađen skok stupca tekućine. Zato se u praksi uzima da su kratkotrajni pravokutni impulsi podudarni s jediničnim impulsom ako se za vrijeme trajanja impulsa ne pojavi nikakav značajan odziv.

Analiza sustava drugog reda. Vladanje sustava drugog reda opisuje obična linearna diferencijalna jednadžba drugog reda

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x. \quad (33)$$

Obično se za sustav drugog reda uvode pojmovi *statička osjetljivost* K , *neprigušena frekvencija prirodnog titranja* ω_n i *koeficijent*

prigušenja ζ , jer se na taj način prikladnije iskazuju obilježja takvog sustava. Te veličine definirane su kao:

$$K = \frac{b_0}{a_0}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad \zeta = \frac{a_1}{2 a_0 a_2}, \quad (34, 35, 36)$$

što daje jednadžbu vladanja sustava drugog reda u preuređenom obliku

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2 \zeta}{\omega_n} \frac{dy}{dt} + y = K x. \quad (37)$$

Jednadžba vladanja U-manometra (4) obična je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda, pa i o manometru govorimo kao o sustavu drugog reda. On će poslužiti kao primjer primjene opisanih postupaka na sustav drugog reda; valja samo uzeti u obzir da $y \triangleq h$ i $x \triangleq p = p_1 - p_2$.

Laplaceovom transformacijom, uz početni uvjet da je za $t = 0$, $h = 0$ i $\frac{dh}{dt} = 0$, dobije se prijenosna funkcija sustava drugog reda, odnosno U-manometra:

$$W(s) = \frac{H(s)}{P(s)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2 \zeta s}{\omega_n} + 1}, \quad (38)$$

gdje su $H(s)$ i $P(s)$ slike funkcija $h(t)$ i $p(t)$.

Uz ovaj oblik prijenosne funkcije primjenjuje se i ekvivalentni oblik:

$$W(s) = \frac{K}{\left(\frac{T}{\alpha} s + 1\right)(\alpha T s + 1)}, \quad (39)$$

a vezu određuju odnosi:

$$\omega_n = \frac{1}{T}, \quad \zeta = \frac{1 + \alpha^2}{2 \alpha}. \quad (40)$$

Polazeći od izvedenih prijenosnih funkcija može se sada posebno ispitati vladanje sustava; postoje četiri različita slučaja određena vrijednostima koeficijenata prigušenja. Naime, karakteristična jednadžba sustava drugog reda ima oblik:

$$f(s) = s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2,$$

a njena dva rješenja su određena rješenjem kvadratne jednadžbe:

$$s_{1,2} = \zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Odatle slijedi da ζ određuje da li je diskriminanta pozitivna ili negativna, a prema tome i da li su rješenja jednadžbe realna ili kompleksna. Četiri su slučaja moguća:

- $\zeta > 1$, dva negativna i realna rješenja,
- $\zeta = 1$, jedno dvostruko realno rješenje,
- $0 < \zeta < 1$, dva konjugirano kompleksna rješenja,
- $\zeta = 0$, jedno imaginarno rješenje.

Prvi slučaj je prigušen ili aperiodski odziv, drugi slučaj je granično prigušen ili granično aperiodski odziv, treći slučaj su

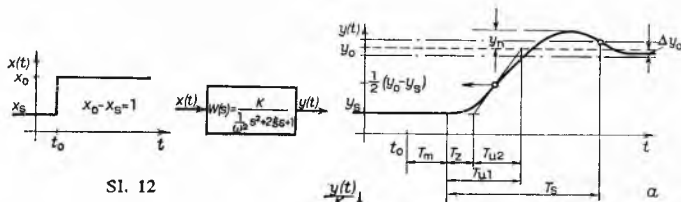
Tablica 2
ODZIVI SUSTAVA 2. REDA
na jedinični skok i na impuls, uz različite koeficijente prigušenja

Koeficijent prigušenja	Prijenosna funkcija $W(s)$	Odziv na jedinični skok	Impulsni odziv
$\zeta = 0$	$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 1}$	$1 - \cos \omega_n t$	$\omega_n \sin \omega_n t$
$0 < \zeta < 1$	$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2 \zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$	$1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arcsin \frac{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right)$
$\zeta = 1$	$\frac{1}{(Ts + 1)^2}, T = \frac{1}{\omega_n}$	$1 - \left(\frac{t}{T}\right) e^{-t/T}$	$\left(\frac{t}{T^2}\right) e^{-t/T}$
$\zeta > 1$	$\frac{1}{(\alpha T s + 1) \left(\frac{T}{\alpha} s + 1\right)}$	$1 + \frac{1}{\alpha^2 - 1} (e^{-t/\alpha T} - \alpha^2 e^{-\alpha t/T})$	$\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha^2 - 1} (e^{-\alpha t/T} - e^{-t/\alpha T})$

titrajni odzivi sa smirivanjem, a četvrti slučaj je čisti titrajni ili oscilatorni odziv. Za svaki od tih slučajeva prilagođuje se opis prijelazne funkcije, a zatim se zasebno izvode analize s pojedinim ulaznim funkcijama, kao što je to pokazano u primjeru sustava prvog reda. Ovdje se navode samo konačni rezultati analize pomoću prijelaznih ulaznih promjena svrstani u tablicu 2. Promatranjem tih karakteristika zaključuje se o vladanju sustava 2. reda.

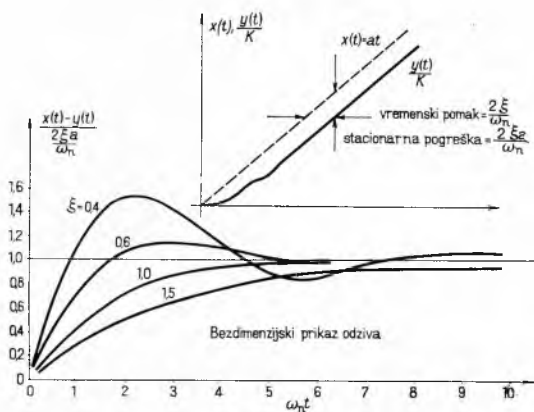
Za U-manometar je neprigušena frekvencija prirodnog titranja $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ i obično ne prelazi vrijednost 10 rad/s. Koeficijent prigušenja je $\zeta = \frac{16\eta}{\rho D \omega_n}$; zavisi dakle od svojstava tekućine (gustoće i viskoznosti) i dimenzija cijevi. Praktične izvedbe imaju koeficijent prigušenja ζ reda veličine od 10^{-1} do 10. Tako svi slučajevi vladanja sustava drugog reda navedeni u tablici 2 mogu načelno biti i slučajevi vladanja U-manometra.

Odziv sustava drugog reda na jedinični skok, vremensku karakteristiku sustava drugog reda, pokazuje sl. 12; osnovna obilježja vremenske karakteristike, važna za ocjenu vladanja sustava, pokazana su na sl. 12 a, a sl. 12 b prikazuje zavisnost oblika odziva od koeficijenta prigušenja. Postotak nadvišenja y_n mjerilo je stabilnosti sustava pri djelovanju poremećaja. Male vrijednosti nadvi-

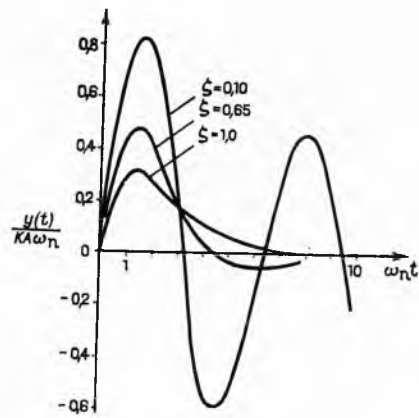


Sl. 12

šenja pokazuju da sustav ima dobru stabilnost, a dopuštena vrijednost nadvišenja zavisi od svakog sustava posebno; čest iznos postotka nadvišenja je 20% do 30%. Ako je odziv sustava bez nadvišenja, znači da takav sustav ima malu brzinu odziva. Brzina odziva se određuje iz vremena uspona ili uzlaznog vremena T_u . U literaturi je to vrijeme različito definirano. Na sl. 12 je sa T_{u1} označeno vrijeme uspona potrebno da izlazna veličina pri promjeni dostigne željenu vrijednost y ; to je jedna od uobičajenih definicija. Druga definicija daje vrijeme uspona označeno sa T_{u2} , određeno uz pomoć tangente u tački $\frac{1}{2}(y_0 - y_s)$, kako to pokazuje slika. Važno je još definirati mrtvo vrijeme, vrijeme zadržavanja i vrijeme smirivanja. *Mrtvo vrijeme* T_m je vrijeme koje je prošlo od početka djelovanja ulazne promjene do trenutka reagiranja sustava. *Vrijeme zadržavanja* T_z je vrijeme koje je prošlo od trenutka djelovanja ulazne promjene do njene pojave na izlazu. *Vrijeme smirivanja* T_s je vrijeme potrebno da se promjena ustali na nekoj vrijednosti unutar dopuštenih granica željene vrijednosti. Ono je



Sl. 13



Sl. 14

mjera i brzine odziva i stabilnosti sustava, pa služi za ocjenu sveukupnog vladanja. Uzme li se koeficijent prigušenja kao parametar, dobiju se slike različitog vladanja sustava drugog reda; utjecaj koeficijenta prigušenja ζ , koji nije jasno uočljiv iz jednadžbe, lijepo je vidljiv na krivuljama. Smanjenje koeficijenta ζ smanjuje titraje i prigušuje ih, ali i usporuje odziv sustava. Izbor koeficijenta zavisi od zahtjeva postavljenih sustavu, a kao općenito povoljne vrijednosti uzimaju se $\zeta = 0,6 \dots 0,7$.

Odziv sustava drugog reda na uzlaznu funkciju pokazuje sl. 13. Stacionarna pogreška je $2\zeta a/\omega_n$; za dani ω_n smanjenje ζ daje povećanje titraja. Vremenski pomak ulazne i izlazne promjene je $2\zeta/\omega_n$.

Krivulje odziva sustava drugog reda na impuls prikazuje sl. 14.

Istraživanje pomoću sinusne prijenosne funkcije

Idealni linearni dinamički sustav propušta s ulaza na izlaz neprigušene promjene u području frekvencija od nula do beskonačno. Međutim, u realni msustavima sužuje se opseg propuštanja i prigušuje prenošena promjena. Zato je primjena periodskih ulaznih promjena različitih frekvencija i oblika prikladna za proučavanje vladanja realnih sustava.

Najprikladniji je način proučavanja sustava da se kao ulazna promjena uzme sinusni val i odvojeno istražuju odzivi za svaku frekvenciju. Uz sinusni val upotrebljava se u eksperimentalnom istraživanju dinamike procesa i pravokutni val (uzastojanje impulsa) i val pilastih, trokutnih ili trapeznih impulsa. Analitičko istraživanje ne upotrebljava te ulazne veličine, nego se služi isključivo pretpostavkom sinusnog ulaznog vala. Kao temelj za razradu postupka služi i ovdje prijenosna funkcija.

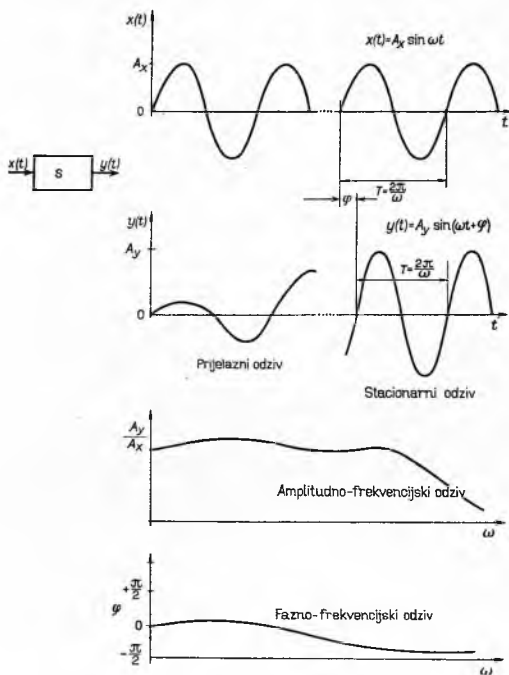
Sinusna prijenosna funkcija dobije se ako ulazna promjena ima oblik sinusoida, tj. $x(t) = A_x \sin \omega t$. Izlazna promjena je tada također sinusni val čija se frekvencija ω potpuno podudara s frekvencijom ulaznog sinusnog vala, ali čija je amplituda različita i koji je vremenski pomaknut u odnosu na ulazni val tako da je $y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$ (sl. 15).

Ako je ulazna promjena počela djelovati u trenutku mirovanja sustava, proći će određeno vrijeme, karakterizirano prijelaznim stanjem, dok se u sustavu uspostavi stacionarno stanje. Prijelazno stanje se određuje uz pomoć već opisanih postupaka i nije predmet istraživanja. Istraživanje sledi nakon uspostavljanja stacionarnog stanja, tj. stanja u kojem se vremenski ne mijenjaju omjer amplituda izlaznog i ulaznog vala i njihov vremenski (fazni) pomak. To su ujedno i veličine koje služe kao osnova promatranja.

Obje te vrijednosti, *omjer amplituda* $M = A_x/A_y$ i *fazni pomak* φ , kako se obično naziva vremenski pomak, tj. zaostajanje izlaznog za ulaznim sinusnim valom, mijenjaju se u zavisnosti od frekvencije ulaznog vala i, ako se ispituje linearni sustav, daju čiste frekvencijske zavisnosti. Te su zavisnosti — *frekvencijski odzivi sustava* — različite za različite sustave, pa služe kao prikladna mjera za ocjenu vladanja sustava. Posebna je prednost postupka da se može lako izračunati odziv iz prijelazne funkcije i, obrnuto, da se mogu određivati prijelazne funkcije iz eksperimentalno određenih frekvencijskih odziva.

Frekvencijskim odzivom dobivaju se brojni novi podaci o vladanju sustava, naročito u području viših frekvencija. Za cje-

lovitu sliku o vladanju sustava valja primijeniti i postupke s prijelaznim i postupke s frekvencijskim ulaznim djelovanjima.



Sl. 15

Smisao sinusne prijenosne funkcije dobije se uvrštenjem $j\omega$ namjesto s u izraz za prijenosnu funkciju (17):

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (41)$$

Prema toj jednadžbi omjer $Y(j\omega)/X(j\omega)$ za danu je frekvenciju kompleksni broj koji se može prikazati u polarnom obliku $M e^{j\varphi}$, pri čemu je veličina M omjer amplituda, a φ kut za koji ulaz x prethodi izlazu y .

U općem se slučaju može sinusna prijenosna funkcija prikazati kao umnožak kompleksnih brojeva:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \dots W_r(j\omega), \quad (42)$$

gdje funkcije $W(j\omega)$ prikazuju različite članove na koje se može razložiti izraz (41). Oblik dobivene prijenosne funkcije prikladan je za logaritmiranje, tako da se umnožak zamjenjuje zbrojem. To je razlog toga da se frekvencijski odziv prikazuje kao zavisnost logaritama odgovarajućih vrijednosti, tj. kao logaritamski amplitudno-frekvencijski ili Bodeov prikaz dan u obliku:

$$\log M = f_M(\log \omega) \quad (43)$$

i kao logaritamski fazno-frekvencijski prikaz dan u obliku:

$$\varphi = f_\varphi(\log \varphi). \quad (44)$$

Budući da se Bodeov prikaz mnogo primjenjuje pri analizi sustava za automatsko vođenje, posvećuje mu se posebna pažnja i pri istraživanju dinamike sustava. Neka ponovo kao primjer posluži sustav prvog reda.

Primjenom Bodeovog prikaza na prijelaznu funkciju prvog reda dobije se:

$$\log M = \log |W(j\omega)| = \log K - \frac{1}{2} \log [1 + (\omega\tau)^2]. \quad (45)$$

Prvi je koristan rezultat da se konstanta K pribraja ostalim članovima. Nadalje, moguća su i značajna pojednostavnjenja. Tako, ako ω teži nuli, teži nuli i član $\log [1 + (\omega\tau)^2]$, pa je niskofrekvencijska asimptota definirana kao:

$$\log M = \log K, \quad \omega\tau \ll 1, \quad (46)$$

što u Bodeovom prikazu daje pravac kao što to pokazuje sl. 16. Slično se pojednostavnjenje može izvesti kada $\omega\tau$ postaje vrlo

veliko; visokofrekvencijska asimptota je tada definirana kao:

$$\log M = \log K - \log(\omega\tau), \quad \omega\tau \gg 1. \quad (47)$$

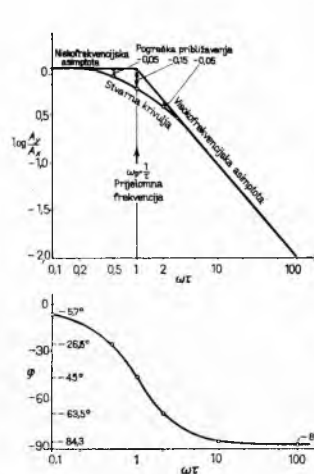
To je u log-log-koordinatnom sustavu pravac s nagibom -1 , nezavisan od K . Važno je praktično značenje nagiba -1 da vrijednost omjera amplituda pada za jednu jedinicu logaritamske skale, tj. za deset po svakoj dekadi ili za dva po svakoj oktavi frekvencije.

Posebno je važno odrediti sjecište niskofrekvencijske i visokofrekvencijske asimptote. Jednadžbe (46) i (47) su jednake samo kada je $\log(\omega\tau) = 0$, tj. za $\omega\tau = 1$. Odatle se određuje prijelomna frekvencija ω_p , koja označuje prijelaz s konstantne niskofrekvencijske asimptote na visokofrekvencijsku asimptotu s nagibom -1 . Tako je u prikazu sustava prvog reda jedina posljedica promjene veličina K i τ pomicanje asimptota; jedne gore ili dolje, a druge lijevo ili desno.

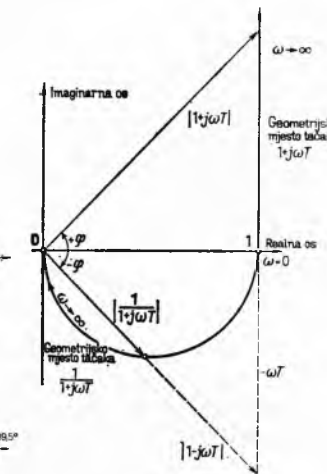
Znatna netačnost približenja pri prikazivanju Bodeova prikaza s pomoću asimptota pokazuje se samo u okolišu prijelomne frekvencije. Međutim, stvarna se krivulja može prilično tačno grafički konstruirati tako da se za jednu oktavu na lijevo i desno od prijelomne frekvencije unesu tačke kojima je vrijednost ordinata umanjena za 0,15 logaritma vrijednosti ordinate asimptota u tim frekvencijama (v. sl. 16).

Bodeov prikaz fazno-frekvencijske karakteristike izveden je prikazivanjem odnosa $\varphi = -\arctg \omega\tau$ u koordinatnom sustavu s fazom kao ordinatom u linearnom mjerilu i frekvencijom kao apscisom u logaritamskom mjerilu. Za osnovni sustav prvog reda faza mijenja vrijednost od 0° pri frekvenciji nula do -90° (fazno zaostajanje) kako frekvencija teži prema beskonačnom. Konstanta K ne utječe na tu krivulju.

Često se namjesto Bodeova prikaza primjenjuje polarni prikaz frekvencijskog odziva. To je neposredan prikaz omjera amplituda i faze u kompleksnoj ravnini, a kako se frekvencija mijenja od nule u beskonačnost, prikaz je geometrijsko mjesto tačaka vektora $W(j\omega)$ kojem je oblik određen prijenosnom funkcijom sustava.



Sl. 16



Sl. 17

Na sl. 17 dan je polarni prikaz frekvencijskog odziva sustava prvog reda, izveden iz odnosa:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau + 1}. \quad (48)$$

Frekvencijski odziv sustava drugog reda, npr. U-manometra, dobije se ako se u prijenosnoj funkciji (38) s zamijeni sa $j\omega$:

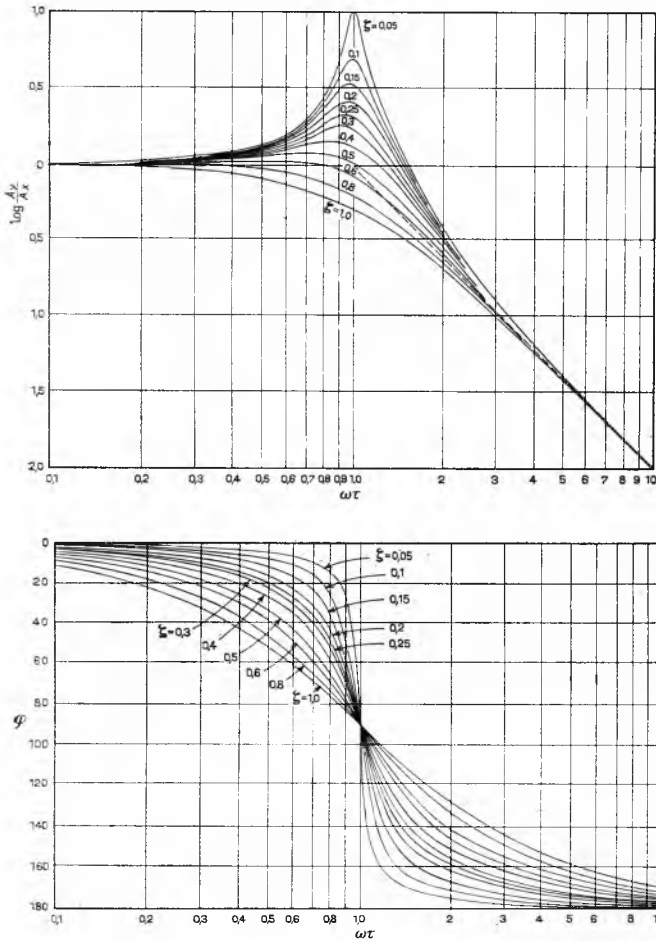
$$W(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}. \quad (49)$$

Odatle su apsolutna vrijednost omjera amplituda i faze

$$|W(j\omega)| = \frac{K}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (50)$$

$$\varphi = - \arctg \frac{2 \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}, \quad (51)$$

pa Bodeov prikaz uz ζ kao parametar ima oblik prema sl. 18.



Sl. 18

Za $\zeta < 1$ važi slijedeće:

Za sve vrijednosti ζ manje od 0,707 pri $K = 1$ u određenom području frekvencija omjer amplituda nadmašuje jedinicu. Maksimum omjera amplituda ili rezonancija postiže se u takozvanoj rezonantnoj frekvenciji ω_r . Za $\zeta > 0,707$ ne postoji rezonancija.

Rezonantna frekvencija ω_r manja je od neprigušene frekvencije prirodnog titraja ω_n :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (52)$$

Maksimum omjera amplituda pri rezonantnoj frekvenciji jest:

$$M_{\max} = \frac{1}{2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (53)$$

Vrijednost omjera amplituda pri neprigušenoj frekvenciji prirodnog titranja jest:

$$M_{\omega_n} = \frac{1}{2 \zeta} \quad (54)$$

i pri tome je φ uvijek -90° .

Za $\zeta \geq 1$ prikladno je Bodeove prikaze sustava drugog reda promatrati polazeći od prijenosne funkcije (39):

$$W(j\omega) = \frac{K}{\left(\frac{T}{a} j\omega + 1 \right) (a T j\omega + 1)}, \quad (55)$$

odatle se prikaz dobije superponiranjem dvaju prikaza prvog reda. Jedna prijelomna frekvencija je $1/a$ a druga a .

Superponiranje i povezivanje u kaskadu

Ako je sustav linearan i takvih svojstava da ima više ulaza koji odjednom djeluju, mogu se djelovanja tih sustava promatrati zasebno, pa kombiniranjem zasebnih odziva sastaviti cjelokupni odziv sustava. Slično vrijedi i za uzastopni slijed — kaskadu — linearnih sustava.

Neka na ulazu linearnog sustava prvog reda djeluju npr. tri veličine $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$:

$$\frac{dy}{dt} + y = K x_1 + x_2 + x_3. \quad (56)$$

Tada je rješenje jednačbe:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} X_1(s) + \frac{1}{\tau s + 1} X_2(s) + \frac{1}{\tau s + 1} X_3(s),$$

što pokazuje da je moguće za svaki od ulaza postaviti prijenosnu funkciju $\frac{Y(s)}{X_1(s)}$, $\frac{Y(s)}{X_2(s)}$, $\frac{Y(s)}{X_3(s)}$, promatrati ih zasebno i zatim superpozicijom sastaviti odziv cjelokupnog sustava.

Dva linearna sustava povezana u kaskadu pokazuje sl. 19: ulaz u prvi stupanj je $x(t)$; izlaz iz prvog stupnja, $y(t)$, ulaz je u drugi stupanj, a izlaz iz drugog stupnja je $z(t)$. Vrijedi, dakle,

$$W_1(s) \frac{Y(s)}{X(s)} \text{ i } W_2 = \frac{Z(s)}{Y(s)}. \quad (57)$$

To daje

$$Z(s) = W_2(s) Y(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s)$$

i cjelokupni odziv sustava

$$W(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = W_1(s) W_2(s). \quad (58)$$

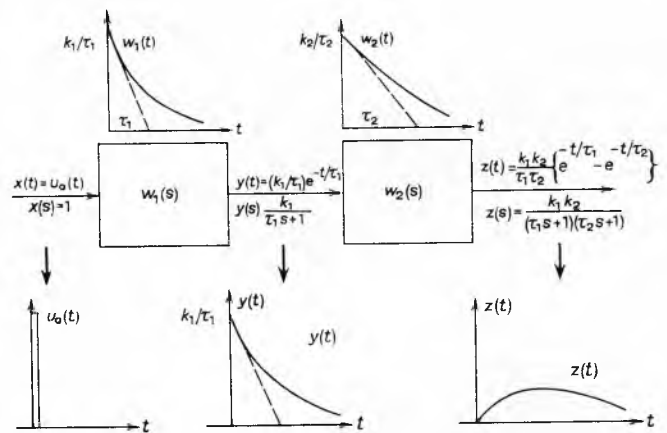
Poopćeno za kaskadu od r stupnjeva s prijenosnim funkcijama $W_1(s)$, $W_2(s)$, ..., $W_r(s)$ vrijedi:

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) \dots W_{r-1}(s) W_r(s). \quad (59)$$

Ova činjenica je posebice važna pri proučavanju sustava viših redova, jer omogućava relativno lako procjenu odziva. Za sustav na slici 19 vrijedi:

$$W(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}, \quad (60)$$

pa zaključujemo da on kao cjelina djeluje poput sustava drugog reda. To pokazuje i odziv kaskade na jedinični impuls razrađen podrobno na slici.



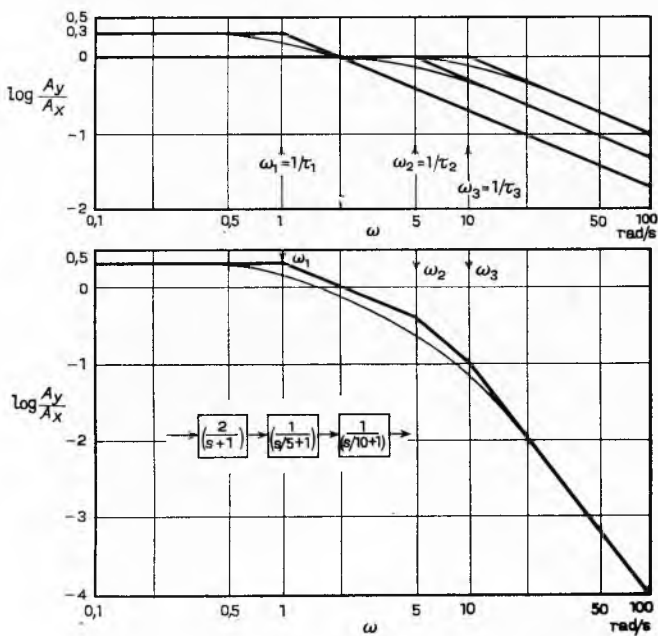
Sl. 19

Na primjeru kaskade od tri stupnja prvog reda pokazat će se istraživanje frekvencijskog odziva takve cjeline. Neka su $\tau_1 = 1$ s, $\tau_2 = 0,2$ s i $\tau_3 = 0,1$ s, a $K_1 = 10$, $K_2 = 2$ i $K_3 = 1$, onda je

$$W(s) = W_1 W_2 W_3 = \frac{20}{(j\omega + 1) (j\omega \cdot \frac{1}{5} + 1) (j\omega \cdot \frac{1}{10} + 1)}. \quad (61)$$

Najprije se konstruiraju Bodeovi prikazi za svaku od prijenosnih funkcija zasebno, a zatim se superponiranjem dobije odziv

cjelokupnog sustava. Postupak je pokazan na sl. 20, a za konstrukciju prikaza poslužilo je približenje s pomoću asimptota.



Sl. 20

Fazno-frekvencijski odziv sustava dobije se također superpozicijom zasebnih odziva.

Sustavi višeg reda, nelinearni sustavi i sustavi s raspodijeljenim parametrima

Gore izloženi postupci istraživanja procesa prvog i drugog reda predstavljaju temelje za postupke istraživanja gotovo svih procesa, ali se na složene procese, zbog zamršenosti njihovog matematičkog opisa, ne mogu uvijek neposredno primijeniti. U nastavku su za neke vrste složenih procesa kratko navedeni načini kojima se pristupa njihovom proučavanju.

Analiza sustava viših redova. Stvarno su najčešće predmet istraživanja dinamike procesa sustavi viših redova, ali opću sliku njihova vladanja nije moguće dobiti na način prikazan za sustave prvog i drugog reda. Pogodni način istraživanja takvih sustava treba u svakom konkretnom slučaju zasebno odrediti. Najprikladnije je ako se opis sustava može razložiti tako da se sustav promatra raščlanjen u stupnjeve prvog i drugog reda, a može se primijeniti i simuliranje s pomoću računala.

Uzmimo, npr., osnovni oblik sustava trećeg reda koji ima prijenosnu funkciju oblika

$$W(s) = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (62)$$

Nazivnik funkcije može imati tri realna rješenja ili jedno realno i dva kompleksna, pa se može raščlaniti ovako:

$$W(s) = \frac{1/a_0}{(\tau_1 s + 1) \left(\frac{\tau s}{a} + 1 \right) (a \tau s + 1)} \quad (63)$$

ili ovako:

$$W(s) = \frac{1/a_0}{(\tau_1 s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right]} \quad (64)$$

Tada se npr. Bodeovi prikazi mogu brzo odrediti na način opisan pri stupnjevanju jednostavnih sustava, a prijelazni se odzivi analiziraju neposredno s pomoću Laplaceovih transformacija, ali, jasno, uz znatnije teškoće nego pri analizi sustava prvog i drugog reda.

Općenita predodžba o vladanju sustava četvrtog i viših redova ne postoji. Moguće je kvalitativno procijeniti odzive sustava sa četiri realna korijena ili četiri kompleksna korijena, ali za ostale

moguće kombinacije primjenjuje se isključivo numeričko rješavanje ili eksperimentalno istraživanje i simuliranje.

Primjer za to kako utječe povišenje reda na oblik odziva sustava dan je na sl. 21. Pokazan je usporedni prikaz odziva na skok za sustave različitog reda bez oscilatornih stanja. Vidi se da sustavi viših redova imaju sve znatnije izraženo vremensko zaostajanje i da postoji konačan vremenski razmak od trenutka djelovanja poticaja do trenutka kad se pojavljuje odziv.

Nelinearni sustavi. Posebnu teškoću pri istraživanju čine nelinearni sustavi. Razlikuju se dvije vrste nelinearnosti: kontinuirane i nekontinuirane. Kad ulaz i izlaz sustava veže kontinuirana nelinearnost, odziv sustava je monotona nelinearna funkcija poticaja. Takav odziv ima npr. sustav kojem je ulazna veličina koncentracija a izlazna veličina pH tekućine, jer pH i koncentraciju veže logaritamska zavisnot. Veže li ulaz i izlaz sustava diskontinuirana nelinearnost, odziv je diskontinuirana funkcija poticaja. Uzrok takvih nelinearnosti su zasićenje, histereza i trenje.

Neke od kontinuiranih nelinearnosti mogu se analizirati lineariziranjem uz pomoć različitih približenja, ili se istraživanje izvodi s malim amplitudama pobude oko neke radne tačke, pa se mogu upotrijebiti postupci za linearne sustave. Ako su približenja nemoguća, zadatak obično postaje vrlo zamršen. Kad se istražuje sama nelinearna pojava, najprikladnije je primijeniti analogno računalo, ali su razrađene i brojne numeričke i grafičke metode za istraživanje pojedinih vrsta nelinearnosti. Međutim, istraživanje postaje naročito zamršeno ako se pojava ne može izlučiti i promatrati zasebno. Tako pri eksperimentalnom istraživanju procesa, čak i u najjednostavnijim slučajevima, ako se ništa ne zna o prirodi pojedinih parametara, zadatak je izvanredno težak pa može biti i nerješiv. Načini i postupci analize nelinearnih sustava predmet su intenzivnog istraživanja, posebice u okviru teorije automatskog vođenja procesa (v. *Regulacija*).

Sustavi s raspodijeljenim parametrima. Za većinu se sustava pri istraživanju njihova dinamičkog vladanja uzima da im karakteristične veličine (parametri) nisu prostorno raspodijeljene, tj. uzima se da su usredotočene, pa da se i sva djelovanja zbivaju istodobno i podudarno za čitav prostor. Međutim, postoje brojni sustavi za koje ne odgovara takva predodžba; njihovi parametri moraju se promatrati kao raspodijeljeni, a djelovanja što se zbivaju u takvim sustavima ne mogu se uzeti kao podudarna za čitav prostor. Ta se djelovanja opisuju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a sustavi se označuju kao sustavi s raspodijeljenim ili distribuiranim parametrima, za razliku od sustava s usredotočenim ili koncentriranim parametrima.

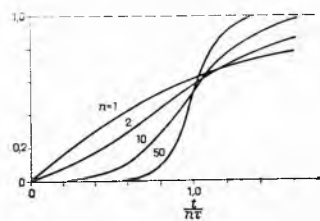
Jednostavan primjer sustava s raspodijeljenim parametrima je cjevovod. Opisuje li se tok tekućine kroz takav cjevovod npr. tako da se njegov otpor protoku, njegov kapacitet i masa tekućine u cjevovodu uzmu kao usredotočeni, zanemaruje se činjenica da su tlak duž cjevovoda i protok funkcije mjesta i vremena, a time i to da se duž cjevovoda prenose tlačni valovi. Uzme li se, naprotiv, da cjevovod karakteriziraju otpor *R*, inertnost *L* i kapacitet *C* jednoliko raspodijeljeni duž cjevovoda, tada za malu dužinu cjevovoda vrijede jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} L \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + R q(x, t) &= - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \\ C \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (65)$$

koje obuhvaćaju i raspodjelu tlaka i protoka duž cjevovoda.

Matematički opis cjevovoda dan je, dakle, parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, jer su karakteristične veličine, tlak i protok, funkcije i vremena i mjesta. Dobivene jednadžbe mogu se riješiti pomoću Laplaceove transformacije tako da se članovi koji su funkcije mjesta transformiraju bez promjene, a članovi koji su funkcije vremena transformiraju se u odgovarajuće funkcije od *s*.

Istraživanje sustava s raspodijeljenim parametrima, na isti način kao i istraživanja



Sl. 21

nelinearnih sustava, usko je povezano sa rješavanjem zadataka automatskog vođenja procesa.

Prvo eksperimentalno istraživanje sustava s raspodijeljenim parametrima izveo je Ångström sredinom prošlog stoljeća. Metalni štap nepoznate toplinske vodljivosti izmjenično je na jednom kraju grijao i hladio, a na nekoj udaljenosti od tog kraja na štapu mjerio je temperaturne titraje. Iz omjera amplituda i faznog pomaka, dakle amplitudno- i fazno-frekvencijskom analizom izračunao je tada toplinsku vodljivost štapa.

Sustav s višestruko zavisnim veličinama je svaki sustav unutar kojeg postoji više ulaznih i izlaznih veličina u takvoj međusobnoj zavisnosti da promjena bilo koje od tih veličina izaziva i promjenu ostalih. Opis takva sustava dan je sustavom diferencijalnih jednadžbi, ali opći analitički pristup takvim sustavima najčešće se izvodi pomoću matrice algebre, a istraživanje se izvodi također pomoću analognih i digitalnih računala. Znatne poteškoće nastaju pri rješavanju kad je broj varijabli vrlo velik. Najbolje je takve sustave promatrati u zajednici sa sustavom za automatsko vođenje (v. *Regulacija*).

Istraživanje dinamičkog vladanja proizvodnih procesa

Radi lakoće i sustavnosti pristupa svrstava se opsežno područje proizvodnih procesa u cjeline sa zajedničkim obilježjima i jednakim svojstvima. Najprikladnije je analitički pristup istraživanju dinamike procesa temeljiti na fizičkim obilježjima pojedinih procesnih djelovanja. Ta su obilježja: gibanje i oblikovanje materijala, toplinska djelovanja i promjena stanja, djelovanja vezana uz strukturu atoma ili molekula i biološka djelovanja. Međutim, postoje brojni zadaci još nerazrađeni sa stajališta dinamičkog istraživanja, a mnoge (npr. metalurške procese) zbog zamršenosti i međuzavisnosti različitih djelovanja vrlo je teško obuhvatiti matematičkim opisom. Najčešće je to zbog toga što su u proizvodnim sustavima gotovo uvijek istodobno zastupljena viševrsna djelovanja: kemijski procesi uključuju kemijske reakcije, prijenos topline i gibanje materijala; procesi toplog valjanja (valjaonička staza) toplinska djelovanja i oblikovanje, itd.

Nedovoljna proučenost promatranog sustava, zahtjev da istraživanje vodi široko obrazovan stručnjak i nužnost upotrebe računala razlozi su za to da analitički postupci matematičkog opisanja dinamičkog vladanja često nisu prikladni za praktičnu primjenu. Zato se u takvim prilikama primjenjuju *eksperimentalni postupci istraživanja*. Osnovni je smisao eksperimentalnog istraživanja da se na temelju promatranja promjena izlaznih i ulaznih veličina zaključi o vladanju sustava kojem su djelomično ili potpuno nepoznati odnosi izlaznih i ulaznih veličina.

Valja razlikovati dva temeljna pristupa eksperimentalnom istraživanju: *zadatak analiziranja* i *zadatak identifikiranja*. Zadatak analiziranja polazi od pretpostavke da su odnosi u sustavu dovoljno poznati (npr. na temelju analitičkog istraživanja), pa mu je cilj istraživanje vladanja izlaznih veličina ili pojedinih parametara sustava. Naprotiv, zadatak identifikiranja pretpostavlja da su odnosi u sustavu nepoznati ili slabo poznati, pa mu je svrha praćenje ulaznih i izlaznih promjena, istraživanje njihovih odnosa i izvođenje matematičkog opisa sustava na temelju ostvarenih podataka.

U skladu s predodžbom sustava prema sl. 2, u zadatku analiziranja poznate su, dakle, veličine $X(t)$ i $S(t)$, pa se traži $Y(t)$, a u zadatku identifikiranja traži se $S(t)$ iz poznatih $X(t)$ i $Y(t)$. Veličine $X(t)$, $S(t)$ i $Y(t)$ povezuje kompozicija funkcija $X(t)$ i $S(t)$ (v. *Laplaceova transformacija*):

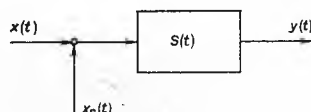
$$Y(t) = \int_{-\infty}^t X(t) S(t - \tau) d\tau. \quad (66)$$

Rješenje te jednadžbe u slučaju zadatka analiziranja ne predstavlja posebne teškoće, ali je zato ekstremno teško u slučaju zadatka identifikiranja. Doduše, ispravnim izborom ispitnog signala uvedenoga u proces na način pokazan na sl. 22, moguće je relativno lako djelomično riješiti zadatak, ali cjelovit opis procesa gotovo je nemoguće ostvariti.

Prema slici 22 ulazna veličina u proces ima oblik

$$x_1(t) = x_s(t) + x(t), \quad (67)$$

gdje je $x_s(t)$ ispitni signal, a $x(t)$ normalni ulaz u proces.



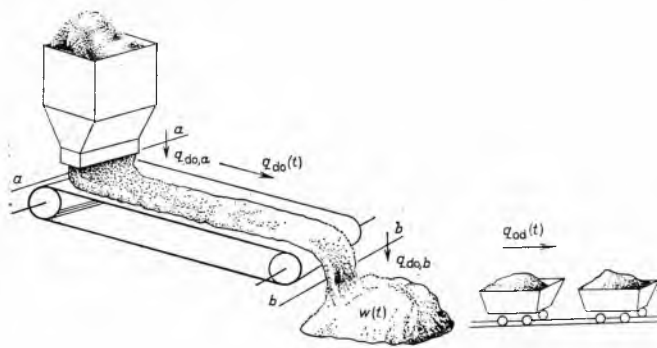
Sl. 22

Ako se kao ispitni signal primjenjuju prijelazne ili periodske ulazne promjene, istraživanje se vodi u skladu s izloženim analitičkim postupcima. Znatno su zamršeniji postupci s primjenom slučajnih ulaznih promjena ili u slučaju da se iz bilo kojeg razloga ne smije uvoditi u proces strani signal, pa valja ispitivanje izvoditi praćenjem normalnog ulaznog zbivanja.

Identificiranje procesa razvilo se je posljednjih godina u zasebnu disciplinu (v. *Identificiranje procesa*). Tome je pridonio razvoj novih pogleda na istraživanje bioloških sustava i daljnji napredak tehnike automatskog vođenja procesa. U prilagodljivim i samoukim sustavima za vođenje, identificiranje je temeljno važno za prikupljanje podataka o vladanju procesa.

Dinamički pristup istraživanju pokazat ćemo na dva primjera: najprije na jednostavnom primjeru skladištenja, a zatim na primjeru kemijskog reaktora.

1. primjer: skladištenje. Između dva stupnja procesnih operacija materijal se skladišti (sl. 23). Potrebno je izvesti matematički



Sl. 23

opis procesa skladištenja i proučiti utjecaj mogućih poremećaja na stanje skladišta, pa odlučiti o načinu poništavanja njihovog neželjenog djelovanja reguliranjem procesa.

Skladišti se količina $w(t)$ materijala. Ako se u skladište doprema nakon operacije prethodnog stupnja, jednoliko i kontinuirano, količina $q_{do}(t)$ u jedinici vremena, a otprema k sljedećem stupnju količina $q_{od}(t)$ u jedinici vremena, brzina je promjene stanja skladišta u svakom trenutku vremena dana jednadžbom:

$$\frac{dw(t)}{dt} = q_{do}(t) - q_{od}(t), \quad (68)$$

koja vezuje stanje skladišta s količinom dopremanog i otpremanog materijala. Uzme li se kao promjenljiva veličina razlika u dopremanoj i otpremanoj količini, tj. $q(t) = q_{do}(t) - q_{od}(t)$, i zatim na jednadžbu (67) primijeni Laplaceova transformacija [$w(t)$ se preslikava u $W(s)$, a $q(t)$ u $Q(s)$], slijedi prijenosna funkcija sustava

$$\frac{W(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s}.$$

Pretpostavljeno je da u vrijeme $t = 0$ stanje skladišta $w(0) = 0$.

Promatrani sustav djeluje, dakle, kao posebni slučaj sustava prvog reda. Za razliku od općeg sustava prvog reda kod kojeg je odziv na prijelazne promjene eksponencijalno smirivanje na određenoj vrijednosti, ovom je sustavu odziv izlazne veličine integral ulazne promjene, tj.

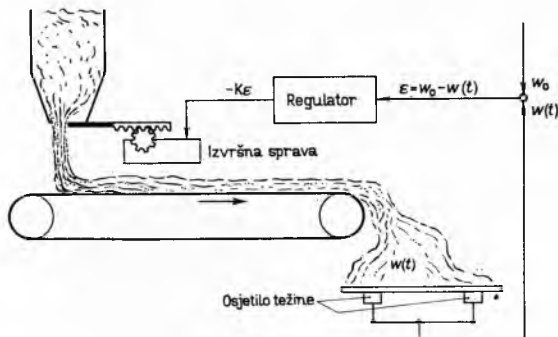
$$w(t) = \int_0^t q(t) dt. \quad (69)$$

Posljedica poremećaja u obliku skoka u razlici dopremanog i otpremanog materijala iskazuje se ovdje kao linearni porast materijala na skladištu, a poremećaj u obliku linearnog porasta daje porast materijala u skladištu po kvadratnom zakonu.

Želi li se količina materijala na skladištu održati stalnom, takvo je vladanje nepoželjno. Proces valja voditi, odnosno regulirati, i nametnuti mu takvo vladanje da odziv poprimi oblik karakterističan za vladanje općeg sustava prvog reda. Potrebno je, dakle, kao cilj vođenja postaviti uvjet da se vođenjem integral razlike dopremanog i otpremanog materijala održava na vrijednosti nula. To se može postići ako se dopremana ili otpremana količina mate-

rijala uzme promjenljivom, pa se zavisno od stanja materijala na skladištu djeluje na odabranu veličinu u smislu postavljenog cilja vođenja.

Neka je kao jedinica za vođenje promatranom sustavu pridružen regulator (sl. 24). Sa osjetila težine prenose se na regulator



Sl. 24

podaci o odstupanju težine uskladištenog materijala (težina je uzeta kao mjera količine) od zadane vrijednosti. Na temelju tih podataka regulator usmjeruje dopremu materijala, pa povećava ili smanjuje otvor dovodnog kanala zavisno od odstupanja količine od zadane vrijednosti. Promatra li se sada vladanje sustava, jednadžbi procesa treba pridružiti opis vladanja regulatora. Prema (67) jednadžba procesa glasi:

$$\frac{dw(t)}{dt} = q_{do}(t) - q_{od}(t), \quad (70)$$

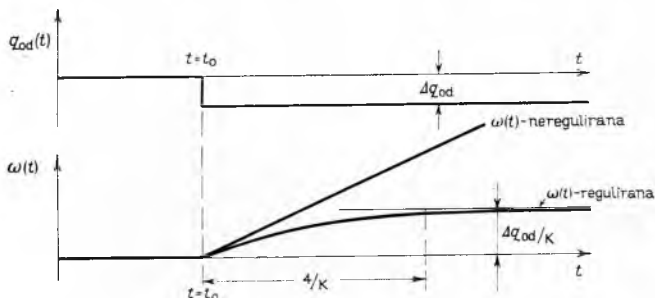
a djelovanje regulatora odabrano je takvo da osigurava dopremu materijala q_{do} proporcionalnu odstupanju težine:

$$q_{do} = K \varepsilon. \quad (71)$$

Odstupanje težine uskladištenog materijala je $\varepsilon = w_0 - w(t)$, gdje je w_0 zadana vrijednost količine uskladištenog materijala, a $w(t)$ količina materijala u bilo kojem trenutku. To daje jednadžbu (70) u preuređenom obliku:

$$\frac{dw(t)}{dt} + K w(t) = K w_0 - q_{od}(t). \quad (72)$$

Razlika vladanja vođenog procesa opisanog jednadžbom (72) i nevođenog procesa opisanog jednadžbom (67) može se najbolje uočiti usporedbom odziva na skok danom na sl. 25. Pretpostavljen



Sl. 25

je skokovit poremećaj u otpremi materijala u nekom trenutku t_0 (npr. izostao je trajno jedan od vagoneta za otpremu), pa kao posljedica slijedi porast materijala na skladištu. U nevođenom procesu to je, u skladu s izloženim, linearni porast, dakle neprekidno povećavanje količine materijala na skladištu. Naprotiv, u vođenom procesu stanje se uskladuje s nastalom promjenom i stabilizira nakon prijelazne pojave.

Iz jednadžbe (72) slijedi da je vremenska konstanta vođenog sustava $\tau = \frac{1}{K}$, pa u skladu sa zaključcima izvedenim za vladanje sustava prvog reda zaključujemo da će se za velike vrijednosti

konstante proporcionalnosti K (koja je dana izvedbom regulatora) prijelazna pojava zbivati brže i da će mali poremećaji u otpremi materijala izazvati tek neznatne promjene stanja skladišta.

Analiza vladanja sustava za različite vrste regulatora predmet je teorije automatskog reguliranja. Međutim, ovim je pokazano da karakteristike sustava za vođenje, odnosno regulatora, bitno utječu na vladanje procesa i da se njihovim djelovanjem mogu ostvariti željeni odzivi procesa.

Ako je skladištenje dio neke operacije ili procesa, ono se naziva *zadržka*. To je nakupljanje materijala koje se ne može isključiti ili izlučiti iz operacije. Zadržka materijala postoji u posudi kemijskog reaktora; zadržka plina u cijevima plinovoda; plina, para i tekućine u destilacijskoj koloni; materijala na prijenosnim trakama itd. Utjecaj zadržke je neobično važan pri istraživanju dinamike procesa, a posebice kada u procesu uz gibanje materijala postoje i različita druga djelovanja (npr. toplinsko djelovanje).

Uz zadržku je vezano *zaostajanje* koje je posljedica vremenskog razmaka između zbivanja promjene na jednom mjestu u procesu i njene pojave ili zapažanja na drugom mjestu. Npr. neka se presjekom $a-a$ prijenosne trake dane na sl. 23 prenosi u trenutku t materijal obilježja $s_a(t)$, istodobno se presjekom $b-b$, udaljenim za razmak d , prenosi materijal obilježja $s_b(t)$. Da bi materijal $s_a(t)$ iz presjeka $a-a$ stigao pri stalnoj brzini gibanja v u presjek $b-b$, potrebno je vrijeme $\Delta t = d/v$, pa je u trenutku $t - \Delta t$ obilježje $s_b(t)$ jednako obilježju $s_a(t)$ koje je materijal u presjeku $a-a$ imao u vrijeme za Δt ranije od trenutka promatranja t , tj.

$$s_b(t) = s_a(t - \Delta t). \quad (73)$$

Kaže se da promjena svojstva $s_b(t)$ u presjeku $b-b$ zaostaje za promjenom svojstva $s_a(t)$ u presjeku $a-a$ za vrijeme *zaostajanja* Δt .

U skladu s ovim promatranjem potrebno je dopuniti opis procesa danog slikom 23. Naime, promjena količine materijala nastala na početku trake u trenutku t_0 zapaža se na kraju trake, odnosno na skladištu, tek nakon vremena Δt . Ako se sa $q_{do,a}(t)$ i $q_{do,b}(t)$ označe količine dopremljenog materijala u presjecima $a-a$ i $b-b$, vrijedi:

$$q_{do,b}(t) = q_{do,a}\left(t - \frac{d}{v}\right) \quad (74)$$

a jednadžbe (70) i (71) poprimaju oblik

$$\frac{dw(t)}{dt} = q_{do,b}(t) - q_{od}(t), \quad (75)$$

$$q_{do,a}(t) = K \varepsilon = [w_0 - w(t)] K. \quad (76)$$

Prema (74) i (76)

$$q_{do,b}(t) = w_0 - w\left(t - \frac{d}{v}\right), \quad (77)$$

što uvršteno u jednadžbu (75) daje proširenu jednadžbu vladanja sustava

$$\frac{dw(t)}{dt} + K w\left(t - \frac{d}{v}\right) = K w_0 - q_{od}(t). \quad (78)$$

Zaostajanje bitno utječe na oblik odziva. Radi jednostavnosti prvotno je ono u primjeru na slici 23 bilo zanemareno, no u praksi se u načelu ne zanemaruje. U navedenom primjeru je zaostajanje zanemarljivo za male vrijednosti d i velike brzine gibanja v materijala.

Prijenosna funkcija za sustav s čistim zaostajanjem, tj. za sustav kojemu vladanje opisuje jednadžba

$$y(t) = x(t - \tau_d), \quad (79)$$

ima oblik

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \exp(-\tau_d s). \quad (80)$$

U sustavima sa zaostajanjem izraz $\exp(-\tau_d s)$ naziva se *Laplaceov pomoćni operator*.

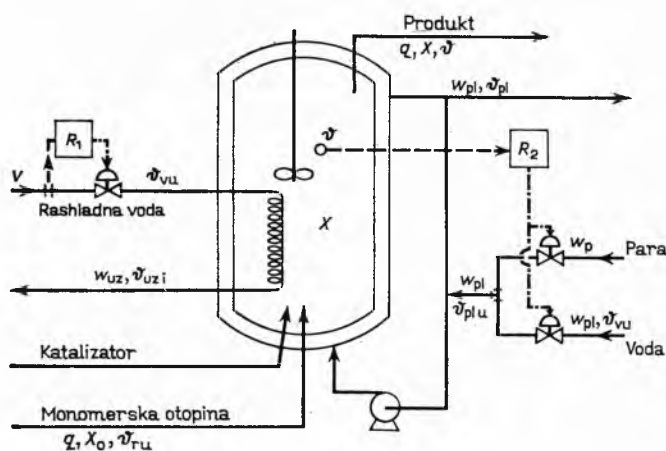
Najčešće se analiza prijelaznih odziva sustava sa zaostajanjem izvodi razvojem prijenosne funkcije (80) u Taylorov red

$$\exp(-\tau_d s) = 1 - \tau_d s + \frac{(\tau_d s)^2}{2!} - \frac{(\tau_d s)^3}{3!} + \dots, \quad (81)$$

ali to nije naročito prikladno jer eksponencijalni redovi brzo konvergiraju u okolišu nule. Primjenjuju se zato različita približenja. Navodimo Padéovo približenje, Bodeovo približenje i približenje Stubbsa i Singlea (v. *Metode aproksimacija*).

U vodenim sustavima zaostajanje djeluje na stabilnost tako da je smanjuje, pa mu se u teoriji automatske regulacije poklanja posebna pažnja.

2. primjer: dinamički opis kemijskog reaktora. U reaktoru se kontinuirano obavlja katalitička polimerizacija nekog monomera. To je vrlo egzotermna reakcija, te za odvođenje topline, radi održanja konstantne temperature, u stacionarnom stanju nije dovoljno hlađenje površine reaktora vodom koja protječe kroz vodeni plašt, već je predviđena i cijevna uzvojnica kroz koju protječe rashladna voda. Međutim, u pojedinim periodima kad sustav nije u stacionarnom stanju (npr. pri stavljanju u pogon ili kad reakcija zapne), radi postignuća ili održanja potrebne temperature treba reaktor dogrijavati parom. Za održanje temperature na konstantnoj razini može se zamisliti više načina regulacije: mijenjanjem količine i/ili temperature rashladne vode, mijenjanjem temperature otopine monomera, brzine kojom se ona poji u reaktor, koncentracije monomera u njoj, itd. I letimično razmatranje procesa pokazuje da će najpovoljnije biti temperaturu



Sl. 26

održavati konstantnom reguliranjem topline odvedene rashladnom vodom, te je, na osnovi razmatranja o kojima će biti još govora, izabran način regulacije prikazan na sl. 26.

Na temelju te slike može se proces i način regulacije opisati ovako: Otopina monomera konstantne koncentracije kontinuirano se dovodi u reaktor u nominalno konstantnoj količini, koja se ne regulira. Katalizator se dovodi kontinuirano u nominalno konstantnoj količini; pretpostavlja se da mala kolebanja u njegovoj količini i koncentraciji nemaju utjecaja na brzinu reakcije. Protok vode kroz uzvojnica održava se konstantnim s pomoću regulatora koji reagira na promjene dinamičkog tlaka u mjernom zaslonu. Da bi u plaštu voda strujala brzinom dovoljnom za postizanje potrebnog koeficijenta prolaza topline, a da se pri tome ne bi trošilo nepotrebno mnogo rashladne vode, kroz plašt i vanjski cirkulacijski vod održava se cirkulacija vode i u taj cirkulacijski krug ubacuje se manja struja vode po potrebi zagrijane miješanjem s parom. Protok i temperatura te vode dovode se na vrijednost potrebnu za stabilizaciju željene temperature u reaktoru s pomoću regulatora koji, na temelju mjerenja temperature u reaktoru, djeluje na protok hladne vode i pare kojom se ona grije. Budući da je količina vode koja cirkulira znatno (pet i više puta) veća od one koja se dovodi, kolebanja u brzini dovedene vode praktički nemaju utjecaja na brzinu strujanja u plaštu, te se koeficijent prolaza topline može održati konstantan na optimalnoj vrijednosti. Iz reaktora izlazi volumen produkta jednak volumenu otopine monomera koji ulazi; u prijelaznim periodima koncentracija polimera u produktu (i monomera koji nije reagirao) varira s temperaturom. Iz uzvojnice i plašta izlazi rashladna voda u količinama jednakim onima koje ulaze, a s temperaturama nižim od temperature reakcije koliko je potrebno radi prenosa topline.

Radi utvrđivanja režima rada i akcije regulatora potrebno je bilo najprije odrediti dinamiku procesa, tj. odrediti zavisnost među brzinama promjene parametara procesa. Drugim riječima, trebalo je postaviti dinamički model procesa.

Dinamički model procesa sastoji se od materijalne i toplinske bilance reaktora.

Materijalna bilanca (bilanca monomera). Koncentracija monomera X u reaktoru, za bilo koji trenutak vremena t , izračunala bi se iz rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$V \frac{dX}{dt} = q (X_0 - X) - V k X^2, \quad (82)$$

gdje je V volumen reakcijskog prostora, q volumenska brzina pjenja monomerske otopine, X koncentracija monomera u toj otopini (funkcija temperature), k konstanta brzine reakcije, zavisna od temperature prema sl. 27.

Lijeva strana reakcije predstavlja brzinu promjene količine monomera u reakcijskom prostoru, na desnoj strani prvi član predstavlja brzinu kojom se povećava količina monomera u reaktoru uslijed dovođenja monomerske otopine, drugi član brzinu kojom se smanjuje količina monomera uslijed polimerizacije (polimerizacija je reakcija drugog reda s brzinom reakcije $dx/dt = -kX^2$). Ta količina monomera odgovara količini polimera koja izlazi iz reaktora kao produkt. U stacionarnom stanju količine monomera prikazane dvjema članovima na desnoj strani jednadžbe (82) jednake su, ali u prijelaznim stanjima nisu, jer im je zavisnost od temperature različita.

Bilanca topline reaktora glasi:

$$V c_r \varrho_r \frac{d\vartheta}{dt} = q \varrho_r c_r (\vartheta_{ru} - \vartheta) + U_{pl} A_{pl} (\vartheta_{pl} - \vartheta) + w_{uz} c_v (\vartheta_{vu} - \vartheta_{uzl}) + \varrho_r V X^2 \Delta H, \quad (83)$$

gdje je ϱ gustoća, c specifična toplota, ϑ temperatura, U koeficijent prolaza topline, A površina prenosa topline, w brzina protjecanja mase, ΔH toplota reakcije. Indeks r odnosi se na reaktante, indeks u na ulaz, indeks i na izlaz iz reaktora, indeks pl na plašt, indeks uz na uzvojnica, indeks v na vodu. ϑ bez indeksa je temperatura u reakcijskom prostoru.

Lijevo je brzina promjene sadržaja topline (entalpije) u reaktoru, desno prvi je član brzina promjene količine topline predate monomerskoj otopini, drugi član brzina promjene količine topline odvedene u plašt, treći član brzina promjene količine topline odvedene u uzvojnica, četvrti član brzina oslobađanja topline reakcije.

Materijalna i toplinska bilanca kombinirane opisuju dinamiku reaktora. Da bi se izrazi u njima mogli podvrgnuti računu, potrebno je postaviti još toplinske bilance plašta, uzvojnice i grijača vode kako je navedeno u nastavku.

Bilanca topline plašta (uključivši cirkulaciju rashladne vode) glasi:

$$V_{pl} \varrho_v c_v \frac{d\vartheta_{pl}}{dt} = w_{pl} c_v (\vartheta_{pl u} - \vartheta_{pl}) + U_{pl} A_{pl} (\vartheta - \vartheta_{pl}), \quad (84)$$

gdje je značenje oznaka isto kao u jedn. (83).

Lijevo je brzina promjene sadržaja topline u plaštu, desno je prvi član brzina odnošenja topline iz plašta vodom koja izlazi iz sustava cirkulacije, drugi član brzina kojom toplota prelazi iz unutrašnjosti reaktora na vodu u plaštu ili obrnuto. Te dvije posljednje brzine u stacionarnom su stanju jednake, ali nisu u prelaznim stanjima.

Bilanca topline uzvojnice prikazana je ovom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (parcijalnom jer se temperatura mijenja ne samo s vremenom nego i s mjestom uzduž uzvojnice):

$$A_{uz} \varrho_v c_v \frac{\partial \vartheta_{uz}}{\partial t} + A_{uz} \varrho_v c_v v \frac{\partial \vartheta_{uz}}{\partial l} + \pi D U_{uz} (\vartheta - \vartheta_{uz}) = 0.$$

U njoj v znači brzinu strujanja vode u uzvojnici, l duljinu, a D promjer uzvojnice.

Prvi član prikazuje promjenu temperature s vremenom (prijelaznu pojavu), drugi član promjenu temperature uzduž uzvojnice, a treći član promjenu temperature uzvojnice s promjenom temperature u unutrašnjosti reaktora.

Ako se zbog malog volumena uzvojnice zanemari prijelazna pojava, dobiva se obična diferencijalna jednadžba

$$\varrho_v c_v (D^2 \pi / 4) v d\vartheta_{uz} = -(\vartheta - \vartheta_{uz}) \pi D U_{uz} dl,$$

koja integrirana između granica $l = 0$, $\vartheta_{uz} = \vartheta_{vu}$ i $l = l$, $\vartheta_{uz} = \vartheta_{uzl}$ daje:

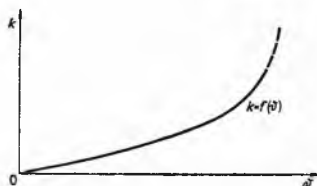
$$\vartheta_{uzl} = \vartheta - (\vartheta - \vartheta_{vu}) \exp \frac{-4 U_{uz} l}{v \varrho_v c_v D}. \quad (85)$$

Bilanca miješanja vode i pare, ako se zanemari količina kondenzata zbog toga što je mala u usporedbi s količinom vode, glasi:

$$H_p w_p = w_v c_v (\vartheta_{pl u} - \vartheta_{vu}), \quad (86)$$

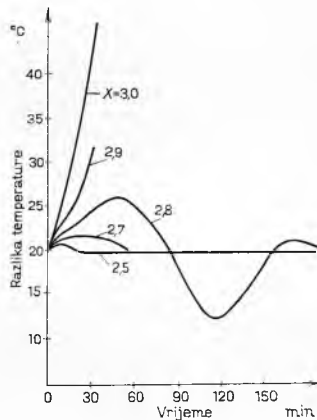
gdje je H_p sadržaj topline (entalpija) pare, w_p masena brzina strujanja pare.

Ako se jednadžbe (87) i (88) uvrste u jednadžbe (82), (83) i (84), dobiju se konačno tri jednadžbe koje u daljim matematičkim operacijama služe kao opis dinamike procesa.



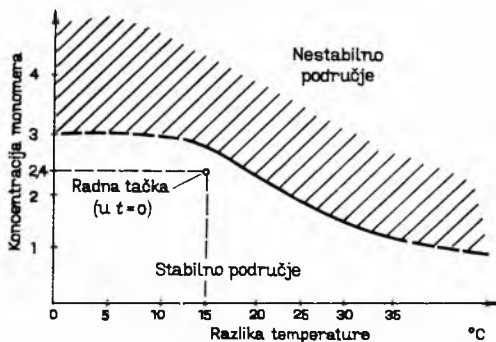
Sl. 27

Iz jedn. (83) vidi se da se toplina razvijena reakcijom mijenja s kvadratom koncentracije monomera i eksponencijalno s temperaturom (sl. 27), što ukazuje na vrlo nelinearan proces, koji, prema tome, nije lako regulirati. Budući da brzina prolaza topline s brzinom strujanja rashladne vode ne raste ni približno linearno, nego se kod visokih brzina strujanja vode približava konstantnoj vrijednosti (zbog ograničavajućeg djelovanja koeficijenta prelaza topline na strani reakcijskog prostora), regulacija temperature mijenjanjem samo brzine strujanja rashladne vode ne bi mogla biti djelotvorna, naročito kad se očekuje da će razvijena toplina rasti eksponencijalno s temperaturom. Stoga je izabran način regulacije temperature prikazan u sl. 26, u kojemu je, u stvari, primarna varijabla regulacije temperatura rashladne vode, a sekundarne su varijable koeficijent prolaza topline i protok rashladne vode kroz plašt reaktora. Zbog velike nelinearnosti sustava izabran je regulator koji ima proporcionalno, diferencijalno i integralno regulacijsko djelovanje (v. *Regulacija*). Da se ni takvim regulatorom nije mogla postići stabilnost sustava, morala bi se primijeniti kaskada od više regulatora i osjetila. Da bi se među sobom uskladili režim rada i namještene vrijednosti regulatora, potrebno je onim trima jednadžbama koje opisuju dinamiku procesa dodati još tri jednadžbe koje predstavljaju prijelazne funkcije mjernog osjetila temperature, regulatora i izvršne sprave (regulacijskih ventila), pa na osnovi tih 6 jednadžbi promatrati dinamičko vladanje cijelog sustava. To je gotovo nemoguće bez primjene računala; simuliranjem opisanog sustava analognim računalom, pak, mogu se razmjerno jednostavno istražiti djelovanje promjena parametara i utjecaji poremećaja na rad procesa i odrediti namještene vrijednosti regulatora. Postupak simuliranja ovdje se ne može dati, nego se daju samo neki njegovi rezultati. Sl. 28 prikazuje

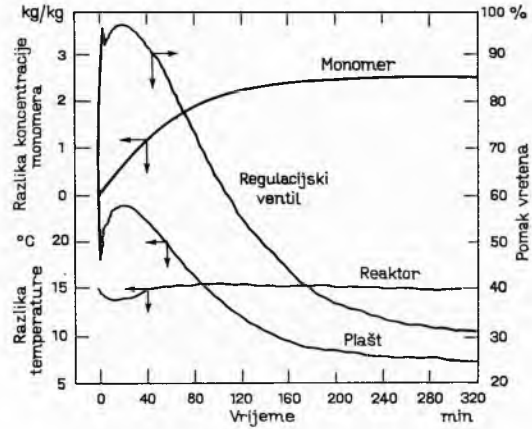


Sl. 28

utjecaj promjene koncentracije monomera na konstantnoj temperaturi reaktora. Vidi se da pri povišenju razlike koncentracije (prema nekoj referentnoj) od 2,8 na 2,9 kg/kg, proces postaje nestabilan. Krivulja koja prikazuje tu zavisnost dijeli ravninu koncentracija i temperatura na stabilno i nestabilno područje (sl. 29). Na temelju rezultata dobivenih analognim računalom utvrđen je režim reaktora i postavljene su namještene vrijednosti regulatora.



Sl. 29



Sl. 30

Vladanje se reaktora u potpunosti slagalo s izračunanim, regulator je automatski doveo temperaturu na željenu vrijednost i u tako ekstremno prelaznom stanju kao što je stavljanje u pogon (sl. 30) i održao ju je za cijelo vrijeme rada reaktora, a da se namještene vrijednosti nisu morale nijedanput mijenjati.

LIT.: D. P. Campbell, Process dynamics, New York 1958. — G. D. Shilling, Process dynamics and control, New York 1963. — P. S. Buckley, Techniques of process control, New York 1964. — B. M. Ордынец, Математическое описание объектов автоматизации, Москва 1965. *J. Božičević*

DOBIVANJE (RUDARSKO) BEZ UPOTREBE EKSPLOZIVA.

Dobivanjem naziva se u rudarstvu skup radova kojima se odvajaju delovi stena iz prirodne zajednice pri otkopavanju mineralne sirovine, a i pri izradi pripremnih i pomoćnih rudničkih objekata radi tog otkopavanja. Razlikuje se dobivanje bez upotrebe eksploziva (kopanje, zasecanje i podsecanje, glodanje i struganje, a u novije vreme i bušenje) i dobivanje uz upotrebu eksploziva (bušenje minskih bušotina i miniranje). Dobivanje uz upotrebu eksploziva obrađeno je u člancima *Miniranje* i *Otkopne metode*, u nastavku opisano je dobivanje bez upotrebe eksploziva.

Podesnost radne sredine za dobivanje bez primene eksploziva. Izbor opreme i izvođenje radova pri dobivanju zavisi od fizičko-mehaničkih i tehničkih osobina stena u kojima se radi. Dok fizičko-mehaničke osobine zavise samo od vrste stene, tehničke osobine (otpor prema bušenju, otpor prema rezanju itd.) zavise i od vrste mašinske opreme i režima rada. Pored toga, stene mogu biti jedre (kompaktne), slojevite, raspucane itd., i te strukturne osobine radne sredine takođe imaju znatan uticaj na njezine tehničke osobine. Budući da se mnogostruki utjecaji na tehničke osobine radne sredine ne mogu obuhvatiti kvantitativnim karakteristikama, kao osnova za klasifikaciju stena s gledišta dobivanja služe neke njihove mehaničke osobine, naročito čvrstoća i tvrdoća.

Tabela 1
KLASIFIKACIJA RADNE SREDINE U RUDARSTVU po Protodjakonovu st.

Kategorija	Naziv	Koeficijent f	Kategorija	Naziv	Koeficijent f
I	Vanredno čvrste stene	20	VI	Meke stene	2...1,5
II	Vrlo čvrste stene	15	VII	Vrlo meke stene	1,0
III	Čvrste stene	10	VIII	Zemljaste stene	0,6
IV	Umereno čvrste stene	6...5	IX	Rastresite stene	0,5
V		4...3	X	Tekući materijal	0,3

U tehničkoj klasifikaciji radne sredine po M. M. Protodjakonovu st. stene se dele u deset kategorija prema vrednosti njihova koeficijenta čvrstoće (tabela 1). Koeficijent čvrstoće *f* je prosečno stoti deo jednoaksijalne pritisne čvrstoće određene na uzorku stene u laboratoriji: $f = 0,01 \sigma_p$.