

tih veza dispečer može uspostaviti kontakt s ekipama na terenu i povezati se sa susjednim distributivnim područjima, pojnim tačkama iz prenosne mreže itd. Dispečerski centar poduzeća »Elektra-Zagreb« pokazuje sl. 69.

M. Balling

LIT.: C. F. Wagner, R. D. Evans, Symmetrical components, New York 1933. — W. Mangoldt, Die wirtschaftliche Ausgestaltung städtischer Drehstromnetze, Berlin 1933. — S. B. Cray, Power system stability, 2 vol, New York 1945. — D. Matanović, Električni proračun vodova i mreža, Zagreb 1947. — M. Vidmar, Problemi prenošenja električne energije, Ljubljana 1947. — E. W. Kimbark, Power system stability, 3 vol., New York 1948. — R. Pottier, U. Harlieb, Neue Grundsätze für die Errichtung elektrischer Verteilungsnetze, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948. — A. J. Rjabkov, Električne mreže i dalekovodi (prijevod s ruskoga), Zagreb 1949. — G. Kron, Tensor analysis of networks, New York 1949. — L. Musil, Praktische Energiewirtschaftslehre, Wien 1949. — E. Clarke, Circuit analysis of a-c power systems, 2 vol., New York 1950. — W. C. Johnson, Transmission lines and networks, New York 1950. — Z. Fahu, Mreže za prenos energije (prijevod s francuskog), Beograd 1951. — J. R. Mortlock, M. W. Humphrey Davies, Power system analysis, London 1952. — L. F. Woodruff, Principi prijenosa električne energije (prijevod s engleskog), Zagreb 1954. — B. G. A. Skrotzki, Electric transmission and distribution, New York 1954. — Massachusetts Institute of Technology, Electric circuits, New York 1955. — D. Stevenson, Elements of power system analysis, New York 1955. — L. K. Kirchmayer, Economic operation of power systems, New York 1958. — B. I. Aizenberg, H. B. Волович, М. Н. Ивченко, Н. Д. Каменицкий, В. В. Кезевич, Н. И. Медведевский, Городские электрические сети, Москва 1958. — L. K. Kirchmayer, Economic control of interconnected systems, New York 1959. — A. Kaminski, Stabilität des elektrischen Verbundbetriebs, Berlin 1959. — M. Wolf, Enzyklopädie der Energiewirtschaft, Berlin 1959. — S. T. Despotović, Osnovi analize elektroenergetskih sistema, Beograd 1962. — H. Edelmann, Berechnung elektrischer Verbundnetze, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963. — Westinghouse Electric Corporation, Prenos i distribucija električne energije, priručnik (prijevod s engleskog), Beograd 1964. — H. Waddicor, The principles of electric power transmission, London 1964. — C. Я. Сеурен, Электрические станции, подстанции и сети, Киев 1964. — W. W. Lewis, The protection of transmission systems against lightning, New York 1965. — S. T. Despotović, Matematički modeli u analizi elektroenergetskih sistema, Beograd 1965. — H. Ruff, Planung und Bau von Stromversorgungsnetzen für Städte, Frankfurt/Main 1966. — M. Dokmanić, Elektroenergetske mreže, Zagreb 1966. — В. А. Бороваков, В. К. Косарев, П. А. Ходот, Электрические сети и системы, Ленинград 1968. — G. Lorenz, Starkstromleitungen, Leitungsnetze und deren Berechnung, Berlin 1968. — H. A. Мельников, Электрические сети и системы, Москва 1969. — A. E. Knowlton, Standard handbook for electrical engineers, New York 1969. — Siemens-Schuckert-Werke, Planung und Bau von Ortsnetzen, Karlsruhe, s. a. — M. Neidle, Electrical installation technology, London 1970.

B. Stefanini M. Balling

ELEKTRIČNI KRUGOVI (mreže, sklopovi). Skup električnih naprava koje su preko svojih priključnica s pomoću električnih vodiča među sobom spojene naziva se u elektrotehnici električnom mrežom ili sklopom. Električna mreža u kojoj su električne naprave tako spojene da tvore samo jedan zatvoren put struje zove se električni krug (kolo).

Uzimajući konkretnu (realnu) mrežu stvarnih električnih naprava kao uzor, često se u elektrotehničkoj literaturi upotrebljava pojam idealne mreže, mreže koja se sastoji od zamišljenih elektrotehničkih elemenata s idealnim, jednoznačno definiranim električnim svojstvima. Idealne mreže ne mogu se ostvariti. Moderna teorija električnih mreža služi se još apstraktnijim pojmom električne mreže. U njoj je električna mreža orijentirani linearni graf (v. str. 51) čijim su granama pridružene po dvije realne funkcije realne promjenljive t (vremena) — funkcija struje $i(t)$ i funkcija napona $u(t)$ — tako da su zadovoljeni prvi i drugi Kirchhoffov zakon (zakon struje ili čvorišta i zakon napona ili petlje), a odnosi između funkcija $u(t)$ i $i(t)$ pridruženih istoj grani posebno su definirani. U shemama električnih mreža navedeni se odnosi označuju posebnim simbolima, koji predstavljaju elemente mreže.

Prvi i drugi Kirchhoffov zakon i relacije između funkcija $u(t)$ i $i(t)$ jesu postulati teorije električnih mreža.

Teorija električnih mreža aksiomatski je fundirana teorija kojoj su objekti naprijed definirane apstrakne mreže. *Analiza mreže* proučava svojstva električne mreže, a *sinteza mreže* određuje elemente i konfiguraciju mreže na osnovi zadanog analitičkog izraza koji karakterizira traženu mrežu.

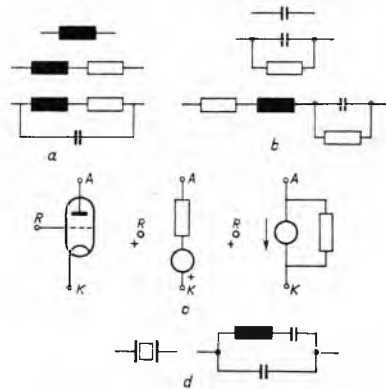
Primjenom teorije mreža mogu se proučavati električna svojstva konkretnih, stvarnih (fizičkih) električnih mreža ili naprava (analiza konkretnih mreža) ili projektirati električne naprave s unaprijed propisanim svojstvima (sinteza konkretnih mreža).

Da bi se odnosi među električnim veličinama neke električne naprave ili konkretne mreže mogli proučavati na temelju apstrakne mreže, potrebno je najprije zadanom električnom objektu pridružiti pogodnu apstraktnu mrežu tako da su odnosi promatranih električnih veličina jednaki odnosima tih veličina u promatranom objektu. Tako pridružena apstraktna mreža zove se *nadomjesna (ekvivalentna) mreža ili shema* zadane konkretne mreže. Nadomjesna mreža predstavlja za određeno područje rada matematički model promatrane konkretne mreže. Teorijom mreže definirano je toliko

apstraktnih elemenata koliko je potrebno da se modelom prikažu sva bitna električna svojstva konkretnih naprava.

Idealnim mrežama ne mogu se obuhvatiti sva električna svojstva nekog električnog uređaja. Tako su npr. odnosi između napona i struje u realnim mrežama samo približno linearni, što se mrežama s elementima koji su definirani kao linearni ne može prikazati. Da električni model nekog uređaja ne bi postao nepregledan, često se izostavljaju elementi koji za prikaz električnih prilika pod specifičnim uvjetima rada ne utječu bitno na tražene vrijednosti. Tako pojednostavnjena nadomjesna mreža vrijedi samo ograničeno i odgovara promatranom uređaju samo u određenim uvjetima rada. Struktura mreže koja treba da služi kao matematički model nekog uređaja ovisi prema tome o uvjetima rada dotičnog uređaja i o mjeri do koje se žele obuhvatiti promatrani električni efekti.

Na sl. 1 prikazane su, kao primjeri, nadomjesne sheme induktivnog svitka, kondenzatora, triode i piezoelektričnog kristala.



Sl. 1. Nadomjesne sheme induktivnog svitka (a) i kondenzatora (b); simboli i nadomjesne sheme triode (c) i piezoelektričnog kristala (d)

Za induktivni svitak i za kondenzator dane su po tri nadomjesne sheme; koja će od ovih triju nadomjesnih shema zadovoljavati, ovisi o pogonskim uvjetima i kvalitetu dotične naprave. Trioda je prikazana dvjema ekvivalentnim nadomjesnim shemama, a izbor sheme će ovdje ovisiti o metodi analize.

Teorija mreža ne obuhvaća metode kojima se danom električnom uređaju pridružuje prikladan model, nego analizira, kao što je već rečeno, odabrani model mreže ili određuje konfiguraciju mreže iz određenih zadanih relacija među električnim veličinama pridruženima mreži.

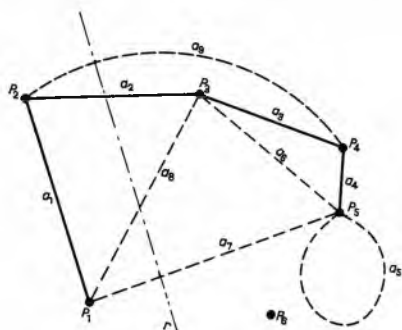
Linearni graf mreže. Prikaz električne mreže u kojemu nisu unijeti elementi mreže, nego su unijeta samo njezina čvorišta i grane, predstavlja *linearni graf mreže*. Linearni graf mreže prikazuje samo njezin geometrijski aspekt, tj. međusobnu povezanost grana i čvorišta mreže. Podaci električne mreže koji su sadržani u njezinom grafu imaju važnu ulogu u analizi i sintezi mreža. Tako se na osnovi linearnog grafa mreže može odrediti broj nezavisnih struja ili napona potrebnih za određivanje svih ostalih struja i napona u mreži.

Topološka svojstva tvorevine kakvu predstavlja električna mreža proučava *teorija linearnih grafova*. U nastavku su navedene neke osnovne definicije iz te teorije.

Linearni graf (konačni) geometrijska je tvorevina (sl. 2) što je tvori konačan skup tačaka i segmenata linija koje spajaju različite ili identične parove tačaka tog skupa. Tačke su *čvorišta*, a segmenti linija, *grane* grafa. Broj grana koji veže par čvorišta može biti bilo koji, uključivši ovamo i nulu. Graf je *planaran* ako se može prikazati u ravni tako da se mimo čvorišta nijedna grana ne ukrštava s drugom; ako to nije moguće, graf je *neplanaran* (sl. 3). Najjednostavniji graf tvori jedno čvorište. Čvorište koje nije povezano nijednom granom zove se *izolirano čvorište*. Grana kojoj oba kraja leže u istom čvorištu naziva se *singularna grana*, a grana koja povezuje par različitih čvorišta, *nesingularna grana*. Čvorište i grana koja spaja to čvorište *incidentni* su jedan s drugim. Broj koji kaže koliko je grana incidentno s nekim čvorištem zove se *red* tog čvorišta. Singularna grana povećava red čvorišta s kojim je incidentna za dva.

Dvije su grane u *seriji* ako imaju tačno jedno zajedničko čvorište koje nije incidentno ni s jednom daljom granom. Čvorište s kojim su obje grane incidentne prema tome je drugog reda. Dvije grane su *paralelne* ako su incidentne s istim parom čvorišta.

Dio grafa koji sadrži samo jedan dio njegovih grana zove se *subgraf*. Dva subgrafa jednog te istog grafa od kojih jedan sadrži sve grane koje nisu sadržane u drugom zovu se komplementarni, a jedan subgraf je *komplement* drugog.



Sl. 2. Linearni graf. $P_1, P_2, \dots, P_6$ čvorovi, $a_1, a_2, \dots, a_6$ grane, P_1, P_2, P_4 čvorovišta 3. reda, P_3 čvorovište 4. reda, P_5 čvorovište 5. reda, P_6 singularno čvorovište, a_5 singularna grana, $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6$ jedan otvoreni put, $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$ jedan jednostavan otvoreni put, $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$ jedan jednostavan zatvoreni put (petlja), $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$ (puna linija) jedno stablo, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (crtkane linije) sustav nezavisnih grana (spojnica), $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$ jedna temeljna petlja; druge petlje temeljnog sustava petlja uz odabrano stablo jesu: $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$; $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$; $P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_6, a_6, P_1$. Grane $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ koje siječe linija r tvore jedan temeljni rez; uklanjanjem tih grana graf se raspada na subgrafe P_1, P_2, a_1 i $P_3, P_4, P_5, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Otvoren put je subgraf što ga tvori uređeni skup grana ovih svojstava:

Grane u tome skupu tvore niz (slijed, lanac); druga i svaka dalja grana osim posljednje u nizu ima jedno čvorovište zajedničko s prethodnom, a drugo sa slijedećom granom niza. Svaka se grana u nizu može pojaviti po volji mnogo puta a može i slijediti samu sebe. Čvorovište prve grane koje nije incidentno s drugom granom puta naziva se početno, a čvorovište posljednje grane koje nije incidentno s prethodnom granom puta naziva se završno čvorovište. Ako su početno i završno čvorovište identični, put je *zatvoren*. U zatvorenom putu sve grane imaju jedno čvorovište zajedničko s prethodnom i jedno sa slijedećom granom.

Sl. 3. Planarna mreža (a) i neplanarna mreža (b); planarni graf (c), i neplanarni graf (d)

otvoren put tako da je jedno čvorovište tog para početno, a drugo završno čvorovište puta. Graf (ili subgraf) koji nije suvisao zove se *nesuvisao* ili *nepovezan*.

Jednostavan otvoren put je suvisao subgraf u kojem je svako čvorovište incidentno s dvjema granama osim dvaju (početnog i završnog čvorovišta puta) koja su incidentna samo s jednom granom. Jednostavan zatvoren put, petlja ili zamka, suvisao je subgraf u kojem je svako čvorovište incidentno s dvjema granama. U suvislom grafu između svakog para čvorovišta postoji bar jedan jednostavan otvoren put. Singularna grana tvori sama zatvoren jednostavan put.

Suvisao subgraf odabran u suvislom grafu tako da sadrži sva čvorovišta grafa, ali ne sadrži petlje, naziva se *stablo* grafa. Svakom suvislom konačnom grafu može se odrediti bar jedno stablo. Komplement stablu grafa zove se sustav *nezavisnih grana* ili *spojnica*. Broj grana u sustavu nezavisnih grana naziva se brojem suvislosti grafa.

Petlja koju u suvislom grafu tvori jedna nezavisna grana (spojnica) s granama stabla zove se *temeljna petlja*. Svakoj grani sustava nezavisnih grana pripada samo jedna temeljna petlja. Sve temeljne petlje u suvislom grafu stvorene na bazi jednog stabla čine *temeljni sustav petlja*.

Temeljni rez u suvislom grafu, u odnosu na jedno stablo, tvori skup grana od kojih jedna pripada stablu a druge sustavu nezavisnih grana, a odabrane su tako da se odstranjenjem ovog skupa grana graf raspada u dva međusobno nesuvisla subgrafa (koji mogu biti i singularne tačke). Svaka grana stabla pripada samo jednom temeljnom rezu. Temeljni rez može tvoriti i samo jedna grana stabla. Temeljni sustav rezova tvore svi temeljni rezi koji se odnose na jedno stablo grafa.

Grana je *orijentirana* ako čvorovišta s kojima je incidentna tvore uređen par. Orijentacija grane označuje se strelicom na grani. Graf s orijentiranim granama je *orijentiran graf*. Petlja u kojoj je (strelicom) označen ciklički redoslijed grana zove se *orijentirana petlja*. Orijentacija petlje u grafu označuje se zavijenom strelicom unutar petlje, a bira se obično tako da se podudara s orijentacijom spojnice. Rez je orijentiran ako se rezom dobiveni subgrafi G_1 i G_2 srede redoslijedom (G_1, G_2) ili (G_2, G_1) . Orijentacija temeljnog reza obično se odabire tako da se podudara s orijentacijom grane stabla obuhvaćene rezom.

Broj grana stabla i broj čvorovišta u suvislom grafu vezani su jednakšću $g_s = v - 1$. Broj grana u sustavu nezavisnih grana jednak je broju petlja u temeljnom sustavu petlja suvislog grafa i dan je izrazom $g_n = g - (v - 1)$. U tim je izrazima v broj čvorovišta u grafu, g broj grana u grafu, g_s broj grana u stablu, g_n broj grana u sustavu nezavisnih grana (spojnica).

Dva su grafa jednaka u topološkom smislu (*izomorfna* ili kongruentna) ako postoji jednoznačna recipročna korespondencija između čvorovišta i jednoznačna recipročna korespondencija između granama jednog i drugog grafa, uz očuvani odnos incidencije.

Postulati teorije električnih mreža jesu Kirchhoffovi zakoni i relacije između funkcija $u(t)$ i $i(t)$.

Kirchhoffovi zakoni. Prvi Kirchhoffov zakon glasi: Suma (funkcijā) struja koje su pridružene granama orijentiranog grafa, ako su ove incidentne s jednim te istim čvorovištem, jednaka je nuli: $\sum i(t) = 0$. U zbroju se struje pridružene granama s orijentacijom prema čvorovištu uzimaju s predznakom protivnim predznaku struja pridruženih granama sa suprotnom orijentacijom.

Drugi Kirchhoffov zakon glasi: Suma (funkcijā) napona pridruženih granama orijentiranog grafa koje tvore petlju (zatvoreni put) jednaka je nuli: $\sum u(t) = 0$. U zbroju se naponi pridruženi granama kojima se orijentacija poklapa s orijentacijom petlje uzimaju sa predznakom protivnim predznaku naponā pridruženih granama kojima se orijentacije ne poklapaju s orijentacijom petlje.

Odnos između napona i struje grana. Funkcije napona i struje pridružene granama vezane su određenim relacijama. Ako su funkcije napona grana izražene pomoću funkcije struje grana i jednom određenom funkcijom napona $u_g(t)$, te su relacije, npr.:

$$u(t) = R i(t) + u_g(t),$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + M \frac{dj(t)}{dt} + u_g(t),$$

$$u(t) = S \int_0^t i(t) dt + u(0) + u_g(t).$$

Ako su funkcije struje grana izražene pomoću funkcije napona grana i jednom određenom funkcijom struje $i_g(t)$, relacije su oblika

$$i(t) = G u(t) + i_g(t),$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} + i_g(t),$$

$$i(t) = \Gamma \int_0^t u(t) dt + W \int_0^t v(t) dt + i(0) + i_g(t).$$

Jedna grupa navedenih relacija proizlazi iz druge.

Simboli koji u mreži označuju prvi član s desne strane tih relacija zovu se *pasivni elementi mreže*, a simboli koji označuju funkcije $u_g(t)$ i $i_g(t)$ nazivaju se *aktivnim elementima mreže*.

ili *izvorima*. $j(t)$ je funkcija struje, a $v(t)$ funkcija napona pridružene nekoj drugoj grani koja je s promatranom granom vezana međuinduktivitetom. Koeficijenti R , L , M , S , odnosno G , C , F , W nazivaju se *parametrima* pasivnih elemenata mreže. U općenitom slučaju svaka grana mreže sadrži jedan pasivan i jedan aktivan element (izvor). Ako je funkcija $u_g(t)$ odn. $i_g(t)$ jednaka nuli za sve vrijednosti od t , grana sadrži samo pasivni element (pasivna grana), a ako je parametar pasivnog elementa jednak nuli, ona sadrži samo izvor (aktivna grana).

Klasifikacija elemenata mreže. Pasivni elementi mreže jesu otpor, induktivitet, međuinduktivitet, kapacitet, a aktivni elementi

Tablica 1
PASIVNI ELEMENTI
ELEKTRIČNE MREŽE

Element	Parametar	Naziv
	R	Otpor
	L	Induktivitet
	C	Kapacitet

naponski i strujni izvori. Parametri *pasivnih elemenata mreže* mogu biti ili ovisni od $u(t)$ odnosno $i(t)$, ili ovisni direktno od neovisne promjenljive t (vremena), ili konstantni. Te ovisnosti karakteriziraju elemente mreže i daju osnovu za ovu klasifikaciju pasivnih elemenata: Pasivni element je *linearan* ako mu je parametar neovisan od $u(t)$ i $i(t)$, u protivnom slučaju je *nelinearan*; pasivni element je *vremenski ovisan* ako mu je parametar direktna funkcija promjenljive t , u protivnom je slučaj *vremenski neovisan* (invarijantan); pasivni element je *linearan* i *vremenski ovisan* ako mu parametar ovisi samo od t ali ne i od $u(t)$ i $i(t)$; pasivni element je *linearan* i *vremenski neovisan* ako je parametar konstanta.

Nazivi pasivnih linearnih, vremenski invarijantnih elemenata i njihovih parametara dani su u tabl. 1, a definicijske jednadžbe dane su u tabl. 2. Pozitivni predznak u definicijskim jednadžbama

Tablica 2
ODNOS IZMEĐU NAPONA I STRUJE NA PASIVNIM
ELEMENTIMA MREŽE

Element	Odnos između napona i struje	Snaga, odnosno energija	Primjedba
	$u = Ri$ $i = Gu$	Utrošena snaga: $p = Ri^2 = Gu^2$	$G = \frac{1}{R}$
	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \Gamma \int_0^t u dt + i(0)$	Akumulirana energija: $T = \frac{1}{2} Li^2$	$\Gamma = \frac{1}{L}$
	$u = S \int_0^t i dt + u(0)$ $i = C \frac{du}{dt}$	Akumulirana energija: $V = \frac{1}{2} Cu^2$	$S = \frac{1}{C}$

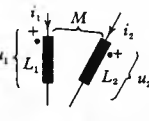
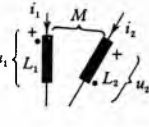
vezan je uz odabrani pozitivni polaritet napona, u shemi označen znakom +, i uz pozitivni smjer struje, u shemi označen strelicom.

Dvije induktivne grane mogu biti jedna s drugom vezane međuinduktivitetom. Međuinduktiviteti se u shemama označuju kako je prikazano u tabl. 3. Tačka uz simbol induktiviteta označuje kojem kraju treba pripisati pozitivni polaritet napona uslijed međuinduktiviteta, ako je na drugom induktivitetu zadan pozitivni polaritet napona i pozitivni smjer struje (u skladu s tabl. 2). Ako se pretpostavljeni polaritet napona na jednom i na drugom induktivitetu podudaraju s obzirom na tačkom označene krajeve, predznak je u definicijskim jednadžbama međuinduktiviteta plus, u suprotnom slučaju minus.

Prema određenim funkcijama $u_g(t)$ i $i_g(t)$ pridruženim granama mreže *aktivni elementi mreže* (izvori) dijele se na naponske i strujne izvore (u elektrotehničkoj literaturi oni se često nazivaju idealni naponski i idealni strujni izvori), a mogu biti neovisni ili ovisni (upravljeni). *Naponski izvor* je aktivni element mreže koji je zadan određenom funkcijom napona (funkcijom realne

promjenljive t): $u(t)$. Parametar naponskog izvora je napon. Naponski izvor s naponom nula (ugašeni naponski izvor) predstavlja u mreži kratki spoj. Nije definiran naponski izvor u kratkom spoju. *Strujni izvor* je aktivni element mreže koji je zadan određenom funkcijom struje (funkcijom realne promjenljive t): $i(t)$.

Tablica 3
INDUKTIVNE GRANE VEZANE
MEĐUINDUKTIVITETOM

Oznaka međuinduktiviteta	Odnos između napona i struje
	$u_1 = M \frac{di_2}{dt}$ uz $i_1 = 0$ $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$ uz $i_2 = 0$
	$u_1 = -M \frac{di_2}{dt}$ uz $i_1 = 0$ $u_2 = -M \frac{di_1}{dt}$ uz $i_2 = 0$
$M = k \sqrt{L_1 L_2}$ $0 \leq k \leq 1$ (k je faktor vezanja)	

Parametar strujnog izvora je struja. Strujni izvor sa strujom jednakom nuli (ugašeni strujni izvor) predstavlja prekid strujnog kruga. Nije definiran strujni izvor u praznom hodu. *Neovisni izvor* je naponski ili strujni izvor čiji je parametar neovisan o nekim drugim naponima ili strujama u mreži. *Ovisni (upravljeni) izvor* je naponski ili strujni izvor čiji je parametar ovisan o nekom drugom naponu ili struji u mreži.

Pri primjeni idealnih izvora u mreži postoje izvjesna ograničenja. Besmisleni su paralelni spoj naponskih izvora različitih napona i serijski spoj strujnih izvora različitih struja.

Nazivi aktivnih elemenata i njihovih parametara dani su u tabl. 4.

Za konkretne, stvarne (fizičke) elemente kojima odnos između napona i struje odgovara relacijama iz tabl. 2 kaže se da imaju otporni, induktivni, odnosno kapacitivni karakter. Takvi su elementi npr. otpornik, induktivni svitak, kondenzator.

Klasifikacija mreža. Mreža je *pasivna* (ne sadrži izvore) ako su sve funkcije $u_g(t)$ i $i_g(t)$ jednake nuli za sve vrijednosti od t ; u protivnom slučaju je *aktivna*. Mreža je *linearna* (aktivna ili pasivna) ako su svi pasivni elementi mreže linearni, u protivnom slučaju je *nelinearna*; *linearne* i *vremenski ovisne* (aktivna ili pasivna) je mreža ako su parametri pasivnih elemenata ovisni samo od t ; *linearne* i *vremenski neovisne* (aktivna ili pasivna) je mreža ako su parametri svih pasivnih elemenata mreže konstante.

U ovom članku osnove proračuna električnih mreža bit će prikazane u dva razmjerno nezavisna poglavlja: u prvom su obrađene aktivne i pasivne, linearne, vremenski nepromjenljive (invarijantne) mreže (linearne mreže s konstantnim parametrima), a u drugom su pored nelinearnih mreža (sklopova) obrađene i linearne mreže (sklopovi) s vremenski promjenljivim elementima, jer se te mreže rješavaju metodama koje su slične metodama primijenjenim za rješavanje nelinearnih mreža.

LINEARNE MREŽE S KONSTANTNIM PARAMETRIMA

Linearne mreže s konstantnim parametrima jesu aktivne ili pasivne, vremenski neovisne mreže u kojima su odnosi između napona i struje koji definiraju pasivne elemente dani linearnim algebarskim, diferencijalnim ili integralnim jednadžbama (v. tabl. 2), a koeficijenti su u tim izrazima (parametri pasivnih elemenata) konstante. Pasivni elementi ovakvih mreža jesu linearni, vremenski neovisni (invarijantni).

Tablica 4
AKTIVNI ELEMENTI
ELEKTRIČNE MREŽE

Element		Parametar	
Simbol	Naziv	Simbol	Naziv
	Naponski izvor	u U	Napon
	Strujni izvor	i I	Struja

Teorija linearnih električnih mreža postoji već preko sto godina. Rad G. Kirchhoffa (1824—1887) iz godine 1845, u kojemu je iznesen zakon čvorišta i zakon petlje, a koji su zakoni u elektrotehničkoj literaturi ušli kao prvi i drugi Kirchhoffov zakon, označuju početak te teorije. Dvije godine kasnije iznio je Kirchhoff teorem reciprocitnosti, a godine 1853 H. Helmholtz (1821—1894) teorem superpozicije te naponsku i strujnu nadomjesnu shemu linearnog generatora.

J. C. Maxwell (1831—1879) je 1873 u djelu «A treatise on electricity and magnetism» prikazao analizu mreže koja je, osim što je imala naponske izvore u granama, bila i strujno napajana u čvorištima. Iz strujnih jednadžbi odredio je potencijale čvorišta, a s pomoću ovih struje u granama mreže.

Krajem XIX st. pojavila se u elektrotehnici i izmjenična struja a s njom pojam kompleksnog otpora (impedancije) i primjena simboličkog računa. Krajem XIX i početkom XX st. iznesene su prve analize pasivnog linearnog četveropola, ali je naziv «četveropol» upotrijebljen u literaturi tek početkom dvadesetih godina ovog stoljeća (F. Breisig).

Posebno se kroz prva tri desetljeća XX st. razvila valna teorija četveropola koja je bazirana na teoriji homogenih linija. Teoriju homogenih linija iznio je O. Heaviside (1850—1925) tokom godina 1886 i 1887.

M. Pupin (1858—1935) postavio je 1900 približnu teoriju tzv. pupiniziranog voda, služeći se rastavljanjem voda u lanac simetričnih četveropola. Tačnu teoriju dao je tri godine kasnije G. A. Campbell (1870—1954).

Valna teorija četveropola našla je svoju najveću primjenu u teoriji električnih filtera. Prvopisni niskopropusni filter dao je već 1903 G. A. Campbell, ali je tek 1915 dao jedan filter patentirati. U to doba je neovisno o tim radovima i K. W. Wagner (1883—1933), razvijajući teoriju lančastih provodnika, došao do valne teorije filtera. Valnu teoriju filtera proširio je i upotunio 1923 O. J. Zobel, pa se filteri proračunati na osnovi te teorije zovu Zobelovi filteri. Proračun filtera na osnovi valnih parametara bio je dugo (1915—1929) jedini upotrebljivi način proračunavanja filtera, a primjenjuje se pored drugih metoda još i danas.

Teorija se četveropola do početka tridesetih godina toliko razvila da je već obuhvaćala zaokruženu cjelinu. God. 1924 R. M. Forster prikazao je analitička svojstva funkcije reaktancije i iznio metodu realizacije reaktantnih dvopola iz zadane funkcije reaktancije. To se može smatrati početkom razvoja nove grane u teoriji linearnih mreža, sinteze linearnih mreža.

Iza R. M. Forstera nosioci su razvoja moderne teorije linearnih mreža W. Cauer, O. Brune, H. Bode, S. Darlington, E. Guillemin i drugi.

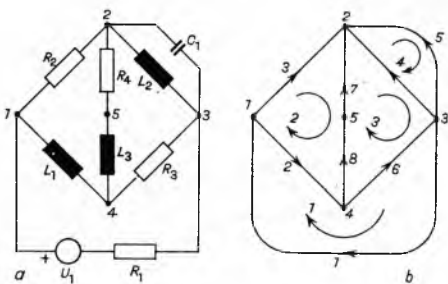
O. Brune je u svojoj doktorskoj disertaciji (1931) pokazao da funkcija impedancije i admittancije (imitancije) spada u određenu klasu funkcija koju je nazvao pozitivno realne funkcije, i iznio jedan način sinteze mreža koje sadrže elemente R , L , M i C (otpor, induktivitet, međuinuktivitet i kapacitet).

Sa već razvojem elektrotehnike postavljaju se i veći zahtjevi prijenosnim sistemima. Početkom tridesetih godina pronalazi W. Cauer (1900—1945) nov način računanja filtera s povoljnijim pogonskim karakteristikama. Narednih godina, a naročito nakon drugog svjetskog rata, produbljuje se sve više teorija linearnih mreža i pronalaze se nove metode sinteze mreža s propisanim karakteristikom. God. 1948 definirao je B. D. H. Tellegen nov (linearni, neregipročni) element električne mreže, koji je nazvao girator, i time proširio mogućnost prikazivanja elektromehaničkih sistema električnim nadomjesnim shemama. God. 1949 objavio je K. Küpfmüller nov način sistematskog tretiranja prijenosnih sistema. Tako nastalu «teoriju linearnih sistema» proširili su i produbili L. A. Zadeh, N. Wiener i drugi.

U posljednje vrijeme uvedene su «varijable stanja» kao veličine koje određuju dinamičko vladanje mreže (T. R. Bashkov). Prednosti opisivanja mreže ovom metodom jesu da se stanje u mreži umjesto linearnom diferencijalnom jednadžbom n -tog reda opisuje sa n linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Ove potonje su prikladnije za analizu mreža pomoću elektronskih računala. Analiza pomoću varijabli stanja primjenjuje se i kod linearnih mreža sa vremenski promjenljivim parametrima. Elektronska računala danas se sve više primjenjuju u analizi i sintezi mreža.

Analiza mreže. Analizi mreže pristupa se tako da se prvo odabere orijentacija grana i petlja i zatim odredi potreban broj međusobno neovisnih struja ili napona u mreži. Sve ostale struje grana i naponi parova čvorišta mogu se izraziti kao funkcije odabranog sustava međusobno nezavisnih veličina.

Sustav neovisnih varijabli mreže ovisan je o topološkim svojstvima mreže. Informacije o topološkim svojstvima mreže daje mreži pridruženi orijentirani linearni graf. U sl. 4 a prikazana je mreža, a u sl. 4 b pripadni linearni orijentirani graf.



Sl. 4. Shema mreže (a) i orijentirani graf mreže (b) s označenom orijentacijom petlja

Kao sustav međusobno nezavisnih varijabli mreže odabiru se redovito ili struje petlja ili naponi određenih parova čvorišta. Struja petlje ili konturna struja je funkcija $i(t)$ pridružena petlji (konturi petlje). Konturne struje pridružene temeljnom sustavu petlja tvore sustav potrebnog broja međusobno neovisnih varijabli. Ove struje se podudaraju sa strujama spojnice (nezavisnih grana). Potreban broj međusobno neovisnih konturnih struja daje u planarnom grafu i sustav petlja koje odgovaraju «očicama» mreže.

Sustav potrebnog broja međusobno neovisnih napona tvore naponi između jednog, po volji odabranog, čvorišta mreže (referentnog čvorišta) i ostalih čvorišta, odnosno naponi pridruženi temeljnom sustavu rezova, a ti se podudaraju s naponima koji su pridruženi granama stabla mreže.

Pošto je odabran sustav međusobno nezavisnih promjenljivih, orijentiranoj se mreži pridružuje sustav jednadžbi prema prvom, odnosno drugom Kirchhoffovom zakonu, u kojima su struje u granama izražene pomoću sustava međusobno neovisnih napona grana ili parova čvorišta, odnosno naponi grana pomoću sustava međusobno neovisnih konturnih struja. Predznaci u ovim jednadžbama ovise o orijentaciji grana kojima su struje ili naponi pridruženi i o odabranom pozitivnom smjeru struje ili odabranom pozitivnom polaritetu napona (o referencijama struje i napona).

Referencijom struje odnosno napona naziva se simbol kojim se u grafu mreže označuje onaj smjer koji se uzima kao pozitivni smjer struje, odnosno pozitivni polaritet napona. Za referenciju struje se obično upotrebljava znak strelice ($\rightarrow$), a za referenciju napona znak plus (+). Za vrijednosti od t za koje se smjer struje podudara s referencijom struje, odnosno polaritet napona s referencijom napona, vrijednosti su $i(t)$ i $u(t)$ pozitivne. Referencije se odabiru proizvoljno, i to redovito tako da se podudaraju s orijentacijom grana (sl. 4); one ne izjavljuju ništa o pravom smjeru struje ili pravom polaritetu napona.

Pri određivanju zbroja struja u čvorištu prema prvom Kirchhoffovom zakonu, struje koje su orijentirane prema čvorištu (koje ulaze u čvorište) uzimaju se u zbroju s jednim predznakom (npr. plus), a struje s orijentacijom od čvorišta (koje izlaze iz čvorišta) sa suprotnim predznakom (npr. minus).

Pri određivanju zbroja napona na zatvorenom putu prema drugom Kirchhoffovom zakonu uzimaju se naponi koji su orijentirani u petlji u jednom smjeru, s obzirom na orijentaciju petlje, u zbroju s jednim predznakom (npr. plus), a naponi sa suprotnom orijentacijom u petlji, sa suprotnim predznakom (npr. minus).

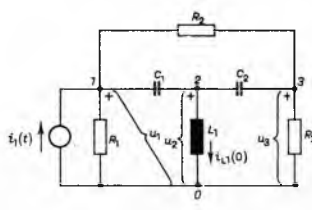
Rješavanje mreže. Rješavati mrežu znači uz zadane parametre pasivnih elemenata i naponskih i strujnih izvora odrediti napone i struje u granama mreže. Primijeni li se pri tome sustav jednadžbi prema prvom Kirchhoffovom zakonu, govori se o rješavanju metodom čvorišta, a primijene li se jednadžbe prema drugom Kirchhoffovom zakonu, o rješavanju metodom petlja (konturnih struja). Postavljanje sustava jednadžbi i prema prvom i prema drugom Kirchhoffovom zakonu daje tzv. mješovitu metodu. U mješovite metode ide i sustav jednadžbi varijabli stanja. Varijable stanja su naponi kapaciteta i struje induktiviteta. Najčešće se mreže rješavaju metodom čvorišta i metodom petlja pa će te metode biti ovdje prikazane.

Rješavanje mreže metodom čvorišta. Ako je v broj čvorišta u suvisloj mreži, $(v - 1)$ Kirchhoffovih strujnih jednadžbi linearno je neovisno.

Ako se struje koje su pridružene granama u jednadžbama čvorišta izraze, prema propisu u tabl. 2, s pomoću napona koji su pridruženi parovima čvorišta što ih tvori $(v - 1)$ čvorišta s referentnim (nultim) čvorištem, dobije se sustav od $(v - 1)$ simultanih jednadžbi s naponima čvorišta prema nultom, referentnom čvorištu i strujama neovisnih izvora (neovisnih aktivnih elemenata) kao varijablama. Referencija napona postavlja se u čvorište s kojim nulto čvorište čini par (ne u samo nulto čvorište).

Uz zadanu mrežu i zadane struje izvora može se ovaj sustav jednadžbi riješiti po naponima između čvorišta i nultog čvorišta kao ovisnim varijablama. Ovako postavljene jednadžbe čvorišta jesu jednadžbe čvorišta u standardnom obliku.

Napon grane može se izraziti kao razlika napona između čvorišta koja su incidentna s tom granom i referentnog čvorišta. Kao primjer dan je u nastavku sustav jednadžbi čvorišta za mrežu prema sl. 5, koja ima 4 čvorišta. To daje sustav od $4 - 1 = 3$



Sl. 5. Mreža uz primjer za rješavanje metodom čvorišta

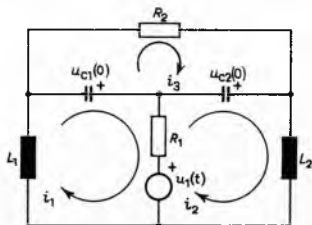
nezavisne jednačbe:

$$\begin{aligned} i_1 &= (G_1 + G_2) u_1 + C_1 \frac{du_1}{dt} - C_1 \frac{du_2}{dt} - G_2 u_3, \\ 0 &= -C_1 \frac{du_1}{dt} + (C_1 + C_2) \frac{du_2}{dt} + \Gamma \int_0^t u_2 dt + i_{L1}(0) - C_2 \frac{du_3}{dt}, \\ 0 &= -G_2 u_1 - C_2 \frac{du_2}{dt} + (G_2 + G_3) u_3 + C_2 \frac{du_3}{dt}, \end{aligned}$$

gdje je G recipročna vrijednost od R (vodljivost), Γ recipročna vrijednost od L , a $i_{L1}(0)$ je struja kroz induktivitet u trenutku $t = 0$.

Rješavanje mreže metodom konturnih struja. Najprikladniji je izbor petlja u planarnoj mreži onaj pri kome petlja odgovara «očici» mreže. U mreži sa g grana i v čvorišta ima $g - (v - 1)$ neovisnih petlja. Uklanjanjem $g - v + 1$ prikladno odabranih grana nestaju sve petlje u mreži. Referencija konturnih struja odabire se obično tako da se podudara s orijentacijom petlje. Konturne struje zadovoljavaju u čvorištima prvi Kirchhoffov zakon.

Struja u grani mreže jednaka je struji petlje ako grana pripada konturi samo jedne petlje i ako se pozitivni smjer struje te grane podudara s pozitivnim smjerom struje petlje (inače je suprotnog predznaka). Struja u grani koja pripada više nego jednoj petlji dobiva se superpozicijom pripadnih konturnih struja. Pri tome se s pozitivnim predznakom uzimaju struje petlja kojima se pozitivni smjer podudara s pozitivnim smjerom struje grane, a s negativnim predznakom struje petlja suprotnog pozitivnog smjera. Ako se na petlje primijeni drugi Kirchhoffov zakon, ali tako da se napon grana izrazi strujama petlji, dobiva se sustav od $g - (v - 1)$ simultanih jednačbi u kojima su varijable struje petlja i naponi neovisnih izvora (neovisnih aktivnih elemenata). Uz zadanu mrežu i zadane napone izvora može se taj sustav jednačbi riješiti po strujama petlja kao ovisnim varijablama. Ovako postavljene jednačbe petlja jesu *jednačbe petlja u standardnom obliku*. Kao primjer rješavanja mreže metodom petlje dana je mreža prema sl. 6 koja ima 6 grana i 4 čvorišta, pa prema tome $6 - 4 + 1 = 3$ petlje. Pripadni sustav jednačbi tih petlja glasi:



Sl. 6. Mreža uz primjer za rješavanje metodom konturnih struja

$$\begin{aligned} -u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + S_1 \int_0^t i_1 dt - u_{C1}(0) - R_1 i_2 - S_1 \int_0^t i_2 dt, \\ u_1 &= -R_1 i_1 + R_1 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + S_2 \int_0^t i_2 dt - u_{C2}(0) - S_2 \int_0^t i_3 dt, \\ 0 &= -S_1 \int_0^t i_1 dt - S_2 \int_0^t i_2 dt + R_2 i_3 + (S_1 + S_2) \int_0^t i_3 dt + u_{C1}(0) + u_{C2}(0). \end{aligned}$$

S_1 i S_2 su recipročne vrijednosti od C_1 i C_2 , a $u_{C1}(0)$ i $u_{C2}(0)$ su početni naponi na kapacitetima u trenutku $t = 0$.

Jednačbe petlja i jednačbe čvorišta u standardnom obliku tvore sustav simultanih običnih, linearnih, integro-diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima. Ovisne varijable u tim jednačbama (naponi ili struje) realne su funkcije vremena $[u(t), i(t)]$.

Funkcije vremena koje se pridružuju izvorima (aktivnim elementima) u mreži zovu se i funkcije poticaja (uzbude) i obično su zadane, a funkcije koje se traže zovu se i funkcije odziva. Početni naponi i struje, tj. naponi u trenutku $t = 0$ na kapacitetima $[u_C(0)]$ i struje u trenutku $t = 0$ u induktivitetima $[i_L(0)]$ uzimaju se kao poticaj. Integro-diferencijalna jednačba mreže veže funkciju odziva s funkcijom poticaja.

Jednačbe čvorišta linearne mreže sa vremenski invarijantnim parametrima za mrežu sa $(n + 1)$ čvorištem dane su u matricnom obliku općenito ovako:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{11}(0) \\ i_{21}(0) \\ \vdots \\ i_{nn}(0) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdje su: $p u(t) = \frac{du(t)}{dt}$ i $\frac{1}{p} u(t) = \int_0^t u(t) dt$, ili sažeto:

$$[i_k] = [G_{kl}] [u_k] + p [C_{kl}] [u_k] + \frac{1}{p} [\Gamma_{kl}] [u_k] + [i_{kk}].$$

Matricna jednačba

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ekvivalentna je sustavu od n linearnih jednačbi sa n nepoznanica

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

jer je prema pravilima računanja s matricama (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 381) umnožak matrica na lijevoj strani matricne jednačbe jednak jednostupčanoj matrici polinoma, te je

$$\begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

što je ekvivalentno navedenom sustavu linearnih jednačbi (dvije su matrice jednake kad su im odgovarajući elementi jednaki).

Za prikazivanje većih sustava linearnih jednačbi njihova zamjena ekvivalentnom matricnom jednačbom vrlo je prikladna jer je tako prikazan sustav jednačbi kratak i pregledan.

Deriviranjem čvorišnih jednačbi dobije se sustav simultanih, linearnih, običnih diferencijalnih jednačbi u kojima jednačba za k -to čvorište ima oblik

$$\frac{di_k}{dt} = f_k(t) = \sum_{l=1}^n C_{kl} \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \sum_{l=1}^n G_{kl} \frac{du_k}{dt} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl} u_k.$$

$i_1(t)$ do $i_n(t)$ jesu struje neovisnih izvora a $u_1(t)$ do $u_n(t)$ naponi čvorišta prema referentnom čvorištu mreže.

G_{kk} je zbroj svih vodljivosti, C_{kk} zbroj svih kapaciteta, a Γ_{kk} zbroj svih recipročnih vrijednosti induktiviteta grana spojenih s k -tim čvorištem; G_{kl} je zbroj svih vodljivosti, C_{kl} zbroj svih kapaciteta a Γ_{kl} zbroj svih recipročnih vrijednosti induktiviteta grana koje vežu k -to i l -to čvorište. G_{kk} , C_{kk} i Γ_{kk} realne su pozitivne konstante, a G_{kl} , C_{kl} i Γ_{kl} realne konstante koje u jednačbe ulaze s pozitivnim ili negativnim predznakom već prema tomu da li se referencije napona čvorišta prema referentnom čvorištu podudaraju u čvorištima ili ne. $i_{11}(0)$ do $i_{nn}(0)$ su zbrojevi početnih vrijednosti struja u induktivitetima, spojenim u čvorištu, koje u trenutku $t = 0$ mogu biti i jednake nuli.

Totalno rješenje sustava diferencijalnih jednačbi (1) daje *sustav slobodnih i sustav prisilnih napona čvorišta* prema referentnom čvorištu mreže (slobodni i prisilni odziv mreže).

Jednačbe konturnih struja u petljama linearne mreže sa vremenski invarijantnim parametrima, za mrežu sa n temeljnih petlji, dane su u matricnom obliku ovako:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \frac{1}{p} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11}(0) \\ u_{21}(0) \\ \vdots \\ u_{nn}(0) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdje su: $p i(t) = \frac{di(t)}{dt}$ i $\frac{1}{p} i(t) = \int_0^t i(t) dt$, ili sažeto:

$$[u_k] = [R_{ki}] [i_k] + p [L_{ki}] [i_k] + \frac{1}{p} [S_{ki}] [i_k] + [u_{kk}].$$

Deriviranjem jednadžbi petlji dobije se sustav simultanih, linearnih, običnih diferencijalnih jednadžbi u kojem jednadžba za k -tu petlju ima oblik

$$\frac{du_k}{dt} = \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^n L_{kl} \frac{di_l}{dt} + \sum_{l=1}^n R_{kl} \frac{di_l}{dt} + \sum_{l=1}^n S_{kl} i_l.$$

$u_l(t)$ do $u_n(t)$ jesu naponi neovisnih izvora, a $i(t)$ do $i_n(t)$ konturne struje pridružene petljama mreže. R_{kk} je zbroj svih otpora, L_{kk} zbroj svih induktiviteta, S_{kk} zbroj svih recipročnih vrijednosti kapaciteta u konturi k -te petlje, a R_{kl} je zbroj svih otpora, L_{kl} zbroj svih induktiviteta i međuinaktiviteta, a S_{kl} zbroj svih recipročnih vrijednosti kapaciteta u zajedničkim granama k -te i l -te petlje. R_{kk} , L_{kk} i S_{kk} realne su pozitivne konstante, a R_{kl} , L_{kl} i S_{kl} realne konstante koje ulaze u jednadžbe s predznakom plus ili minus već prema tome da li se orijentacije susjednih konturnih struja podudaraju ili ne. $u_{11}(0)$ do $u_{nn}(0)$ jesu zbrojevi početnih vrijednosti napona na kapacitetima petlje, koje u trenutku $t = 0$ mogu biti i jednake nuli.

Totalno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi (2) daje sustav slobodnih i sustav prisilnih struja petlja mreže.

Recipročne mreže. Ako su matrice parametara elemenata čvorišta $[G_{kl}]$, $[I_{kl}]$, $[C_{kl}]$, odnosno petlja $[R_{kl}]$, $[L_{kl}]$, $[S_{kl}]$ u matricijalnim jednadžbama (1) i (2) simetrične s obzirom na glavnu dijagonalu, mreže kojima su pridružene takve matrice nazivaju se recipročnim mrežama, te za njih vrijedi teorem recipročnosti (v. str. 57). U linearnim, pasivnim, recipročnim mrežama navedene su matrice definitne ili semidefinitne (v. str. 62). Recipročne mreže ne sadrže zavisne (upravljene) izvore.

Slobodan i prisilan odziv. Sustav jednadžbi mreže riješen po jednom odzivu kao nepoznanici daje diferencijalnu jednadžbu oblika

$$a_m \frac{d^m w(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} w(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dw(t)}{dt} + a_0 w(t) = b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t),$$

gdje je $v(t)$ funkcija poticaja a $w(t)$ funkcija odziva. Koeficijenti a_k i b_k u linearnim su mrežama sa vremenski invarijantnim parametrima konstante karakteristične za određenu mrežu.

Posebno rješenje (partikularni integral) ove diferencijalne jednadžbe daje *prisilni odziv*, a opće rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe (komplementarna funkcija) *slobodni odziv*. Kompletni odziv mreže na dani poticaj dan je totalnim rješenjem nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe i jednak je zbroju prisilnog i slobodnog odziva.

Ako je npr. struja traženi odziv, onda je $i(t) = i_t(t) + i_s(t)$, gdje je $i_t(t)$ kompletna struja (kompletni odziv), $i_t(t)$ prisilna (forirana) struja (prisilni odziv), a $i_s(t)$ slobodna struja (slobodni odziv).

Ako je poticaj periodska funkcija, prisilni je odziv *stacionarno stanje*, a slobodni odziv prelazna pojava ili *transijent*.

Vrijeme od kojeg se promatra odziv u mreži označuje se obično sa $\tau = 0$.

Članovi općeg rješenja homogene diferencijalne jednadžbe jesu tipa $A e^{st}$. Vrijednosti od s koje odgovaraju korijenima karakteristične jednadžbe nazivaju se *vlastite ili prirodne frekvencije mreže*. Prirodne frekvencije mreže određuju valni oblik slobodnog odziva. (Valni oblik napona ili struje je krivulja u pravokutnom koordinatnom sistemu koja prikazuje ovisnost dotične veličine o vremenu.) Korijeni karakteristične jednadžbe homogene diferencijalne jednadžbe (prirodne frekvencije) linearne, pasivne, recipročne mreže sa vremenski invarijantnim parametrima realni su ili kompleksni. Oni ovise samo o strukturi mreže, a neovisni su od pobude i imaju ova svojstva: realni korijeni i realni dio kompleksnih korijena uvijek su negativni; ako je korijen kompleksan, on dolazi samo u konjugirano kompleksnim parovima; kompleksni korijeni kojima je realni dio jednak nuli (imaginarni korijeni) mogu biti samo jednostruki.

Mreže za koje to vrijedi nazivaju se stabilne mreže. Slobodni odziv se u stabilnim mrežama s vremenom prigušuje i teži k nuli (istitavanje mreže) ili, u graničnom slučaju (korijeni imaginarni), ostaje konstantan. Divergencija (raspirivanje) slobodnog odziva u stabilnim mrežama nije moguća. U stabilnim mrežama (sistemima) efekt je svake perturbacije prolazan i mreža nakon dovoljno dugog vremena postaje prazna (mrtva).

Slobodne konstante ($A_1, A_2, \dots, A_N$) u totalnom rješenju diferencijalne jednadžbe mogu se odrediti iz vrijednosti napona i struje u trenutku $t = 0$. Za mrežu u kojoj su u trenutku $t = 0$ sve struje u induktivitetima i svi naponi na kapacitetima jednaki nuli (početni uvjeti jednaki nuli) kaže se da je u trenutku $t = 0$ *prazna ili mrtva*.

Prisilni odziv mreže dobiva se rješavanjem nehomogene diferencijalne jednadžbe jednom od za to prikladnih metoda, npr. metodom neodređenih koeficijenata.

Analiza mreže u frekvencijskoj domeni. Za analizu mreže na osnovi sustava integro-diferencijalnih jednadžbi (1) i (2) u kojima je slobodna varijabla vrijeme (t) kaže se da je provedena u vremenskoj domeni (*analiza u vremenskoj domeni*). Poticaj i odziv su u vremenskoj domeni funkcije vremena (t): $u(t)$, $i(t)$. Primijeni li se Laplaceova transformacija na sustav jednadžbi mreže dan u vremenskoj domeni, dobije se sustav jednadžbi u kojem je slobodna varijabla kompleksna veličina s ($s = \sigma + j\omega$), koja se u teoriji mreža naziva kompleksna frekvencija. Za analizu na osnovi ovakvih jednadžbi mreža kaže se da je provedena u frekvencijskoj domeni (*analiza u frekvencijskoj domeni*). U frekvencijskoj domeni su poticaj i odziv funkcije kompleksne frekvencije: $U(s)$, $I(s)$.

Analiza na bazi Fourierove transformacije ili pomoću simboličke metode za sinusnu pobudu (za stacionarno stanje) također je u frekvencijskoj domeni. Pojam impedancije i prijenosnih (transfernih) funkcija definiran je u frekvencijskoj domeni.

Primjenom Laplaceove transformacije (v. *Laplaceova transformacija*) na sustav integro-diferencijalnih jednadžbi mreže kojoj su pasivni elementi linearni i vremenski invarijantni dobiva se sustav simultanih algebarskih jednadžbi u kojima su varijable Laplaceova transformacija funkcije napona i struje. Laplaceova transformacija prebacuje funkcije napona i struje iz vremenske u frekvencijsku domenu. Sustav algebarskih jednadžbi (jednadžbi mreže u frekvencijskoj domeni), riješen po nepoznanicama i vraćen primjenom inverzne Laplaceove transformacije u vremensku domenu, daje totalno rješenje zadanih integro-diferencijalnih jednadžbi mreže. Pri rješavanju sustava jednadžbi mreže Laplaceovom transformacijom uzeti su automatski u račun početni naponi na kapacitetima i početne struje u induktivitetima mreže.

Jednadžbe petlji mreže u frekvencijskoj domeni dane su u matricijalnom obliku za neku mrežu sa n petlja kojoj su elementi R, S, L, M općenito ovako:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ \vdots \\ i_n(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ \vdots \\ i_n(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} u_{c1}(0) \\ u_{c2}(0) \\ \vdots \\ u_{cn}(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$U_i(s) = \mathcal{L}[u_i(t)]$; $u_i(t)$ funkcija je napona neovisnih izvora i -te petlje, $I_i(s) = \mathcal{L}[i_i(t)]$; $i_i(t)$ funkcija je konturne struje pridružene i -toj petlji, a $u_{ci}(0)$ zbroj je početnih napona na kapacitetima i -te petlje u trenutku $t = 0$.

Ako se sa $Z_{ii}(s)$ označi obilazna impedancija i -te petlje a sa Z_{ij} zajednička impedancija i -te i j -te petlje, bit će sustav jednadžbi (3) dan ovako:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & \dots & Z_{1n}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & \dots & Z_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1}(s) & Z_{n2}(s) & \dots & Z_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ \vdots \\ i_n(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} u_{c1}(0) \\ u_{c2}(0) \\ \vdots \\ u_{cn}(0) \end{bmatrix}$$

ili sažeto pisano:

$$[U_i(s)] = [Z_{ij}(s)] [I_j(s)] - [L_{ij}] [i_j(0)] + \frac{1}{s} [u_{ci}(0)].$$

Ako je mreža u trenutku $t = 0$ prazna, reducira se taj izraz na

$$[U_i(s)] = [Z_{ij}(s)] [I_i(s)]. \quad (4)$$

$[U_i(s)]$ je vektor kojemu su komponente Laplaceova transformacija funkcija napona pridruženih naponskim izvorima u petljama, $[I_i(s)]$ je vektor kojemu su komponente Laplaceova transformacija funkcija struje pridružene petljama, a $[Z_{ij}(s)]$ je matrica impedancija petlji. Matrica $[Z_{ij}(s)]$ pridružena recipročnim mrežama simetrična je s obzirom na glavnu dijagonalu.

Sustav jednačbi čvorišta mreže u frekvencijskoj domeni dan je u matricnom obliku za neku mrežu sa $n + 1$ čvorištem, kojoj su elementi G, C, I , ovako:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} I_{L1}(0) \\ I_{L2}(0) \\ \vdots \\ I_{Ln}(0) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$I_k(s) = \mathcal{L}[i_k(t)]$, $i_k(t)$ funkcija je struje neovisnih izvora u k -tom čvorištu, $U_k(s) = \mathcal{L}[u_k(t)]$; $u_k(t)$ funkcija je napona pridružena paru čvorišta što ga čine k -to čvorište s referentnim čvorištem mreže, a $i_{Lk}(0)$ početna je struja pridružena induktivitetima k -tog čvorišta mreže u trenutku $t = 0$.

Ako se sa $Y_{kk}(s)$ označi admitancija k -tog čvorišta a sa Y_{kl} zajednička admitancija k -tog i l -tog čvorišta, dan je sustav jednačbi (5) ovako:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) & \dots & Y_{1n}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) & \dots & Y_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1}(s) & Y_{n2}(s) & \dots & Y_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \\ \vdots \\ i_{Ln}(0) \end{bmatrix},$$

ili sažeto pisano:

$$[I_k(s)] = [Y_{kl}(s)] [U_k(s)] - [C_{kl}] [u_k(0)] + \frac{1}{s} [i_{Lk}(0)].$$

Ako je mreža u trenutku $t = 0$ prazna, reducira se taj izraz na

$$[I_k(s)] = [Y_{kl}(s)] [U_k(s)]. \quad (6)$$

$[I_k(s)]$ je vektor kojemu su komponente Laplaceova transformacija funkcija struje pridruženih strujnim izvorima uključenim u mrežu. $[U_k(s)]$ je vektor kojemu su komponente Laplaceova transformacija funkcija napona pridruženih parovima čvorišta što ih čine čvorišta mreže s nultim čvorištem. $[Y_{kl}(s)]$ je matrica admitancija čvorišta petlje. Matrica $[Y_{kl}(s)]$ pridružena recipročnim mrežama simetrična je s obzirom na glavnu dijagonalu.

Zamijeni li se u matricama $[Z_{kl}(s)]$ i $[Y_{kl}(s)]$ veličina s veličinom $j\omega$ ($s = 0 + j\omega$) dobije se matrica impedancija petlji $[Z(j\omega)]$ i admitancija čvorišta $[Y(j\omega)]$ za sinusni poticaj u mreži.

Matrice jednačbe (4) i (6) za sinusni poticaj i utitrano stanje jesu

$$\begin{aligned} [U_i] &= [Z_{ij}(j\omega)] [I_i], \\ [I_i] &= [Y_{ki}(j\omega)] [U_k], \end{aligned}$$

gdje su $[U_i]$ i $[U_k]$ vektori kojima su komponente fazori napona, a $[I_i]$ i $[I_k]$ vektori kojima su komponente fazori struje.

Fazor (kazaljka, verzor, vektor) odnosi se na sinusno promjenjive veličine. On je kompleksan broj $A e^{j\varphi}$ pridružen kosinus-funkciji $A \cos(\omega t + \varphi)$ tako da je modul jednak amplitudi, a argument jednak početnom faznom kutu te funkcije. Realni dio fazora pomnožen funkcijom $e^{j\omega t}$ (koja se često naziva jedinični rotirajući vektor ili ort) daje kosinus-funkciju:

$$\begin{aligned} \text{Re } A e^{j\varphi} e^{j\omega t} &= \text{Re } A e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ &= A \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

U elektrotehničkoj literaturi često se izraz $A e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ naziva fazor, kazaljka, verzor ili vektor.

Pri postavljanju jednačbi petlji ili čvorišta u standard-

nom obliku za mreže koje sadrže i ovisne izvore postupa se tako da se parametri ovisnih izvora (napon ili struja ovisnog izvora) izraze kao funkcije odgovarajućih varijabli mreže. Članovi tako dobivenih izraza pridružuju se u odnosnim jednačbama članovima s istom varijablom. Matrice impedancija petlji i admitancija čvorišta mreže sa ovisnim izvorima nesimetrične su, a mreže kojima su takve matrice pridružene nazivaju se *nerecipročne mreže*.

Jednačbe petlji nerecipročne mreže prema sl. 7 jesu, uz

$$U_1 = U_a + I_1 R_k \quad i \quad U_2 = I_1 R_k :$$

$$\begin{bmatrix} R_k(1 + \mu_1) + R_1 & -R_1 \\ -[R_k(\mu_1 - \mu_2) + R_1] & (R_1 + R_2 + R_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 U_a(s) \\ \mu_1 U_a(s) \end{bmatrix}$$

Dvopoli

U elektrotehnici je dvopol električna naprava s dvije priključnice koja se, već prema namjeni, priključuje na druge električne naprave ili uređaje. Električna svojstva takvog dvopola dana su s obzirom na njegove priključnice.

U teoriji električnih mreža dvopol je pojam pridružen mreži kojoj su električna svojstva dana s obzirom na samo jedan par čvorišta. Taj se par čvorišta naziva i *prilazom* mreže, a dotična čvorišta priključnicama. Električna svojstva dvopola dana su odnosom funkcija napona i struje pridruženih prilazu mreže. Ako je jedna od tih funkcija zadana (npr. poticaj), bit će druga određena svojstvima dvopola (mreže).

Ako je analitički izraz koji karakterizira dvopol zadan, nije potrebno poznavati sastav dvopola, pa se on simbolički prikazuje prema sl. 8. U toj su shemi uz priključnice označene također referencije napona i struje.

U nadomjesnim shemama električnih naprava, čvorišta označena kao priključnice odgovaraju priključnicama tih naprava.

Dvopoli su aktivni ili pasivni, linearni ili nelinearni, vremenski promjenljivi ili nepromjenljivi (invarijantni). Već prema tomu da li je neka mreža aktivna ili pasivna, linearna ili nelinearna, vremenski promjenljiva ili nepromjenljiva, bit će i dvopol pridružen toj mreži tih svojstava. U daljem tekstu obrađeni su aktivni i pasivni linearni, vremenski invarijantni dvopoli.

Dva dvopola mogu se spojiti serijski ili paralelno, a više njih na bilo koji način tako da opet tvore mrežu. Elementi mreže navedeni u tabl. 2 linearni su, pasivni, vremenski invarijantni dvopoli. Mreža koja je sastavljena od elemenata R, L, C, M , promatrana s obzirom na jedan prilaz, linearan je, pasivan vremenski invarijantan dvopol. Veličine koje karakteriziraju električne osobine linearnog, pasivnog, vremenski invarijantnog dvopola ili linearnu, pasivnu, vremenski invarijantnu mrežu s jednim prilazom jesu impedancija Z i njezina recipročna vrijednost, admitancija Y ($= 1/Z$).

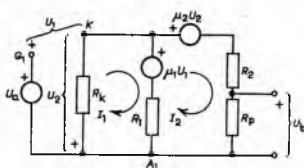
Impedancija pasivnog dvopola (koji osim linearnih, pasivnih, vremenski invarijantnih komponenata može sadržati i ovisne izvore, a koji je u trenutku $t = 0$ prazan, mrtav) dana je omjerom Laplaceove transformacije funkcije napona i Laplaceove transformacije funkcije struje pridružene priključnicama, uz referencije napona i struje kako je to prikazano u sl. 8. Za specijalni slučaj sinusnih napona i struja i utitrano stanje ulazna je impedancija dana omjerom fazora napona i fazora struje.

Impedancija i admitancija linearnog pasivnog dvopola nisu ovisne o elementima koji su izvan dvopola priključeni na priključnice dvopola ni o priključenom naponu ili struji. Dva su linearna pasivna dvopola A i B ekvivalentna s obzirom na električne osobine na prilazu ako su im impedancije (admitancije) jednake.

Impedancija mreže s obzirom na jedan par priključnica (ulazna impedancija linearne, pasivne, vremenski invarijantne mreže) može se odrediti s pomoću jednačbi petlji. Ako mreža ne sadrži ovisne izvore i ako priključnice pripadaju samo jednoj petlji koja se označuje kao prva, ulazna je impedancija dana jednačbom

$$Z_1(s) = \left(\frac{D(s)}{D_{11}(s)} \right)_z. \quad (7)$$

$D(s)$ je determinanta, a $D_{11}(s)$ prvi kofaktor sustava jednačbi petlji, što je u izrazu (7) označeno indeksom z .



Sl. 7. Mreža s neovisnim i ovisnim naponskim izvorima

Ulazna impedancija linearne pasivne mreže (impedancija mreže promatrane kao dvopol) može se odrediti i s pomoću jednadžbi čvorišta.

Ako mreža ne sadrži ovisne aktivne izvore i ako prilaz mreži tvore referentno čvorište i čvorište označeno brojkom 1, ulazna je admitancija dana jednadžbom

$$Y_1(s) = \left(\frac{D(s)}{D_{11}(s)} \right)_y. \quad (8)$$

$D(s)$ je determinanta, a $D_{11}(s)$ prvi kofaktor sustava jednadžbi čvorišta, što je u izrazu (8) označeno indeksom y .

Omjer Laplaceove transformacije funkcije napona pridružene otvorenim priključnicama i Laplaceove transformacije funkcije struje pridružene kratko spojenim priključnicama aktivne linearne mreže s jednim prilazom (aktivnog dvopola) jednaka je ulaznoj impedanciji mreže na tim priključnicama s utrnutim neovisnim izvorima u mreži:

$$Z_u(s) = \frac{U_p(s)}{I_k(s)}.$$

$U_p(s)$ je napon praznog hoda a $I_k(s)$ struja kratkog spoja na priključnicama aktivnog dvopola. Napon na kapacitetima i struja u induktivitetima u trenutku $t = 0$ uzimaju se kao naponski odnosno strujni izvori u mreži.

U analizi električnih mreža često se primjenjuje aktivni dvopol što ga tvori idealni naponski izvor spojen u seriju s linearnim pasivnim dvopolom (impedancije Z_0 u sl. 9 a) i dvopol što ga tvori paralelni spoj idealnog strujnog izvora s linearnim pasivnim dvopolom (admitancije Y_0 u sl. 10). Takvi dvopoli često služe kao nadomjesni spoj fizičkih izvora ili generatora električne energije. Za aktivni dvopol na čije je priključnice priključen pasivni linearni dvopol određene impedancije (admitancije) kaže se da je opterećen ili zaključen tom impedancijom (admitancijom) (sl. 9 b, 10 b). Napon i struja pridruženi priključnicama opterećenog aktivnog dvopola vezani su izrazom:

$$\frac{U_1(s)}{U_0(s)} + \frac{I_1(s)}{I_0(s)} = 1$$

Ovdje znači $U_1(s)$ Laplaceovu transformaciju funkcije napona, a $I_1(s)$ Laplaceovu transformaciju funkcije struje pridružene priključnicama opterećenog aktivnog dvopola, $U_0(s)$ Laplaceovu transformaciju funkcije napona pridružene otvorenim priključnicama, a $I_0(s)$ Laplaceovu transformaciju struje pridružene kratkospojnim priključnicama tog dvopola. Dalje vrijedi:

$$U_0(s) = I_0(s) Z_0(s); \quad I_0(s) = U_0(s) Y_0(s).$$

Za aktivni dvopol prema sl. 10 vrijedi:

$$U_1(s) = U_0(s) - I_1(s) Z_0(s), \quad I_1(s) = \frac{U_0(s)}{Z_0(s) + Z_1(s)},$$

$$U_1(s) = U_0(s) \frac{Z_1(s)}{Z_0(s) + Z_1(s)},$$

a za aktivni dvopol prema sl. 11:

$$I_1(s) = I_0(s) - U_1(s) Y_0(s), \quad U_1(s) = \frac{I_0(s)}{Y_0(s) + Y_1(s)},$$

$$I_1(s) = I_0(s) \frac{Y_1(s)}{Y_0(s) + Y_1(s)}.$$

Aktivni linearni dvopoli prema sl. 9 i sl. 10 ekvivalentni su s obzirom na napon i struju na priključnicama ako su ispunjene relacije:

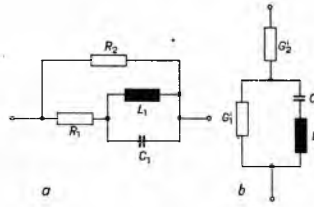
$$I_0(s) = \frac{U_0(s)}{Z_0(s)}, \quad U_0(s) = \frac{I_0(s)}{Y_0(s)}, \quad Z_0(s) = \frac{1}{Y_0(s)}.$$

Inverzni dvopoli. Dva su dvopola A i B inverzna ako je, za sve vrijednosti od s , funkcija admitancije jednog jednaka funk-

ciji impedancije drugog pomnožena nekom realnom pozitivnom konstantom R^2 . U specijalnom slučaju R može biti jednako 1.

Za inverzne dvopole vrijedi relacija:

$$Z_A(s) \cdot \frac{1}{Y_B(s)} = Z_A(s) \cdot Z_B(s) = R^2. \quad (9)$$



Sl. 11. Inverzni dvopoli

Ulazne impedancije dvaju dvopola A i B bit će vezane relacijom (9) ako su mreže koje tvore ove dvopole međusobno dualne i ako je produkt impedancija korespondentnih grana jednak R^2 (v. stranu 59). Primjer inverznih dvopola dan je u sl. 11. Priказani dvopoli inverzni su ako vrijedi relacija:

$$\frac{R_1}{G_1'} = \frac{R_2}{G_2'} = \frac{L_1}{C_1'} = \frac{L_1'}{C_1} = R^2.$$

Komplementarni dvopoli. Dvije impedancije $Z_1(s)$ i $Z_2(s)$ komplementarne su ako im je zbroj za bilo koju vrijednost od s jednak konstanti.

$$Z_1(s) + Z_2(s) = k.$$

Analogno su dvije admitancije $Y_1(s)$ i $Y_2(s)$ komplementarne ako za sve s vrijedi relacija

$$Y_1(s) + Y_2(s) = k.$$

Dva dvopola kojima su ili impedancije ili admitancije komplementarne nazivaju se komplementarni dvopoli.

Ulazna impedancija serijskog spoja dvaju dvopola kojima su impedancije komplementarne konstantna je. Ulazna admitancija paralelnog spoja dvaju dvopola kojima su admitancije komplementarne konstantna je.

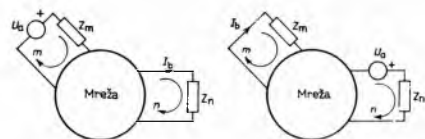
Teoremi mreža

Često je potrebno, radi rješavanja određenih problema mreže, nekoj aktivnoj mreži s jednim prilazom pridružiti ekvivalentni dvopol i odrediti neka električna svojstva mreže na osnovi tog dvopola, ili se, pak, traži odziv ako u mreži djeluje nekoliko poticaja različitih valnih oblika, ili slično. Rješavanje ovakvih specifičnih problema olakšava primjena teorema mreža, od kojih su osnovni ovdje navedeni. Ti teoremi proizlaze iz svojstva linearosti i iz osnovnih zakona teorije mreža.

Teorem superpozicije glasi: Odziv linearne mreže na nekoliko simultanih pobuda (iz neovisnih naponskih ili strujnih izvora) jednak je zbroju pojedinačnih odziva koji se dobiju kad svaka pojedina pobuda sama (bez prisustva drugih) djeluje u mreži. Početni naponi na kapacitetima i početne struje u induktivitetima uzimaju se kao posebne pobude, a zavisni se izvori ne uzimaju kao posebne pobude.

Neovisni naponski izvor uklanja se iz mreže (utrne) tako da se premesti, a strujni izvor tako da se isključi. Superpozicija je direktna posljedica svojstva linearosti mreže.

Teorem recipročnosti. Mreža sastavljena od elemenata R , L , M , C , idealnih transformatora i samo jednog neovisnog naponskog izvora (pobude) neka je u trenutku $t = 0$ prazna i neka je struja u nekoj grani, koja nije identična s granom u kojoj je naponski izvor, traženi odziv. Zamijene li naponski izvor i traženi od-

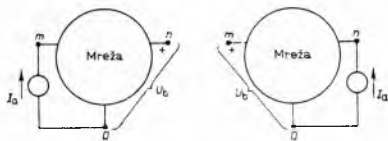


Sl. 12. Teorem recipročnosti. Zamjena mjesta naponskog izvora i struje kao odziv

ziv svoja mjesta u takvoj mreži (uz nepromijenjen raspored pasivnih elemenata), bit će traženi odzivi prije i poslije zamjene jednaki (sl. 12). Ovaj teorem proizlazi iz svojstva da je matrica

impedancijâ petljâ mreže sastavljene od elemenata R, L, M, C simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

Neka je mreža, sastavljena od elemenata R, L, M, C , idealnih transformatora i samo jednog neovisnog strujnog izvora (po-bude), u trenutku $t = 0$ prazan i neka je napon između nekog para čvorišta, koji nije identičan s parom čvorišta u koji je uključen strujni izvor, traženi odziv. Zamijene li strujni izvor i odziv svoja mjesta u mreži (ali tako da razmještaj pasivnih elemenata ostane nepromijenjen), bit će traženi odzivi prije i poslije zamjene jednaki



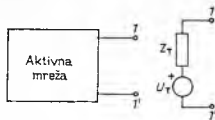
Sl. 13. Teorem recipročnosti, Zamjena mjesta strujnog izvora i napona kao odziv

(sl. 13). To proizlazi iz svojstva da je matrica admitancija čvorišta mreže sastavljena od elemenata R, L, M, C simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

Mreže kojima su matrice impedancijâ petljâ, odnosno matrice admitancijâ čvorišta simetrične s obzirom na glavnu dijagonalu matrice zovu se recipročne mreže. Teorem recipročnosti ne vrijedi za mreže s uvjetno aktivnim elementima niti za giratore (nerecipročne mreže).

Teorem Thévenina primjenjuje se za određivanje nadomjesne sheme aktivnih, linearnih, vremenski invarijantnih mreža s obzirom na jedan par čvorišta (jedan prilaz) iz veličina koje se mogu utvrditi izvana na njezinom prilazu.

Theorem Thévenina glasi: Svaka linearna aktivna mreža s jednim prilazom može se u odnosu prema tom prilazu zamijeniti mrežom koja se sastoji od jednog neovisnog naponskog izvora i pasivnog linearnog dvopola spojenih u seriju. Napon tog neovisnog naponskog izvora jednak je naponu na otvorenim priključnicama dotične mreže, a impedancija dvopola jednaka je ulaznoj impedanciji mreže uz utrnute neovisne izvore i uz početne uvjete jednake nuli (sl. 14).

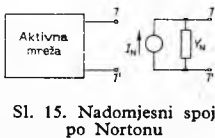


Sl. 14. Nadomjesni spoj po Théveninu

Ekvivalencija se odnosi na napon i struju na priključnicama mreže. Početni uvjeti u mreži obuhvaćeni su naponskim izvorom nadomjesnog dvopola.

Teorem Nortona primjenjuje se jednako kao Théveninov.

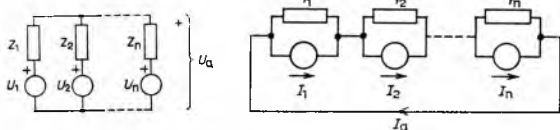
Nortonov teorem glasi: Svaka se linearna aktivna mreža s jednim prilazom može u odnosu prema tom prilazu zamijeniti mrežom koja se sastoji od jednog neovisnog strujnog izvora i pasivnog linearnog dvopola spojenih paralelno. Struja neovisnog strujnog izvora jednaka je struji kratko spojenih priključnica dotične mreže, a admitancija dvopola jednaka ulaznoj admitanciji te mreže uz utrnute neovisne izvore i početne uvjete jednake nuli (sl. 15).



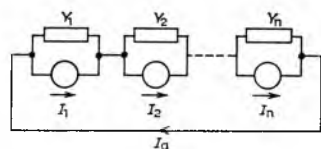
Sl. 15. Nadomjesni spoj po Nortonu

Ekvivalencija se odnosi na napon i struju na priključnicama mreže. Početni uvjeti u mreži obuhvaćeni su strujnim izvorom nadomjesnog dvopola.

Teorem Millmana glasi: Napon na otvorenim priključnicama linearne mreže koja se sastoji od paralelno priključenih pasivnih



Sl. 16. Paralelna kombinacija naponskih izvora (uz Millmanov teorem)



Sl. 17. Serijska kombinacija strujnih izvora (uz Millmanov teorem)

linearnih dvopola i naponskih izvora koji su s ovima u seriji (sl. 16) dan je (s oznakama prema slici) izrazom:

$$U_a = \frac{U_1 Y_1 + U_2 Y_2 + \dots + U_n Y_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}$$

Pri tome je $Y_k = 1/Z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Struja kratko spojenih priključnica linearne mreže koja se sastoji od serijski priključenih paralelnih spojeva pasivnih linearnih dvopola i strujnih izvora dana je (s oznakama prema slici 17) izrazom:

$$I_a = \frac{I_1 Z_1 + I_2 Z_2 + \dots + I_n Z_n}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}$$

Teorem prijenosa maksimuma snage. Ako je linearni pasivni vremenski invarijantni dvopol priključen na linearnu aktivnu vremenski invarijantnu mrežu s jednim prilazom (aktivni dvopol) kojoj je napon na otvorenim priključnicama (ili struja kroz kratko spojene priključnice) sinusna funkcija vremena, primat će on u stacionarnom stanju iz aktivne mreže maksimum djelatne snage samo onda ako je apsolutna vrijednost njegove impedancije jednaka apsolutnoj vrijednosti ulazne impedancije mreže uz utrnute neovisne naponske i strujne izvore (impedancija nadomjesnog dvopola po Théveninu, odnosno Nortonu), a fazni su kutovi suprotnog predznaka.

Impedancija priključenog pasivnog dvopola i nadomjesnog dvopola po Théveninu (Nortonu) dotične mreže pri prijenosu maksimuma snage konjugirano su kompleksne.

S oznakama prema slici 9 i uz $Z_0 = |Z_0| e^{j\theta_0}$, $Z_1 = |Z_1| e^{j\theta_1}$, $U_0 = |U_0| e^{j\varphi}$ izraz za djelatnu snagu na impedanciji Z_1 dan je jednadžbama

$$P = \operatorname{Re} |U_1| |I_1|^* = \frac{|U_0|^2 |Z_1| \cos \theta_1}{|Z_1|^2 + |Z_0|^2 + 2 |Z_1| |Z_0| \cos (\theta_1 - \theta_0)}$$

gdje su φ , θ_0 i θ_1 pripadni kutovi faznog pomaka, $|Z_0|$ i $|Z_1|$ apsolutne vrijednosti impedancije, a $|U_0|$ apsolutna efektivna vrijednost napona.

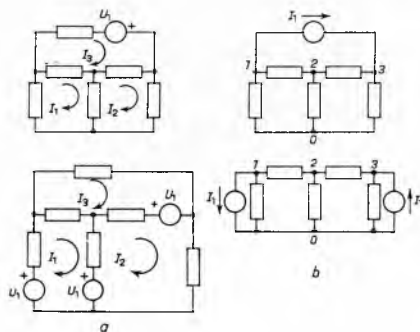
Uvjeti da bi prenesena djelatna snaga bila maksimalna jesu

$$\frac{\partial P}{\partial Z_1} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta_1} = 0. \quad (10)$$

Prvi od tih uvjeta ispunjen je za $|Z_1| = |Z_0|$ a drugi za $\theta_1 = -\theta_0$, što znači da je prijenos maksimuma djelatne snage postignut ako je $Z_1 = Z_0^*$.

U prijenosnim sistemima obično se prilagođuje tako da se uzima $Z_1 = Z_0$. Pri ovom načinu prilagođenja udovoljeno je samo prvom uvjetu (10), pa se dobiva samo jedan relativni maksimum prenesene snage.

Mobilnost naponskih izvora (Blakesleyjeva transformacija). Naponski izvor koji je uključen u neku granu linearne mreže može se s obzirom na struje petljâ nadomjestiti jednim na-



Sl. 18. Premještanje izvora. a Premještanje naponskih izvora, b premještanje strujnih izvora

ponskim izvorom ili većim brojem jednakih naponskih izvora uključenih u druge grane mreže, ali tako da se petljama pridruženi vektor napona naponskih izvora u matričnoj jednadžbi petljâ ne mijenja (sl. 18 a i b). Tom transformacijom ostaju struje petlja, a time i struje grana nepromijenjene.

Ako grana sadrži samo naponski izvor kojemu nije u seriju priključen pasivni element, primjenom će gornje transformacije oba čvorišta između kojih je taj naponski izvor bio priključen

biti kratko spojena, tj. ta dva čvorišta reduciraju se na jedno čvorište.

Mobilnost strujnih izvora. Strujni izvor koji je priključen na neki par čvorišta linearne mreže može se s obzirom na napone čvorišta nadomjestiti jednim strujnim izvorom ili većim brojem jednakih strujnih izvora priključenih na druge parove čvorišta, ali tako da se parovima čvorišta pridruženi vektor struja strujnih izvora u matricnoj jednadžbi čvorišta ne mijenja (sl. 18 c, d). Ovom transformacijom ostaju naponi među čvorištima mreže nepromijenjeni. Ako strujnom izvoru u mreži nije paralelno priključena grana s pasivnim elementom, primjenom će gornje transformacije oba čvorišta između kojih je taj strujni izvor bio priključen biti otvorena (oba čvorišta neće biti izravno povezana granom).

Dualne mreže

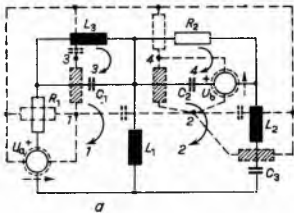
Za dva se fizička sistema kaže da su dualni ako su opisani jednadžbama istog oblika. Dualnost linearnih mreža odnosi se na strukturu mreže i na jednakost matematičkih oblika jednadžbi mreže. Elementi i veličine mreže koji se jedni prema drugima odnose dualno dani su u tabl. 5.

Tablica 5
ELEMENTI I VELIČINE
KOJE SE ODNOSI DUALNO

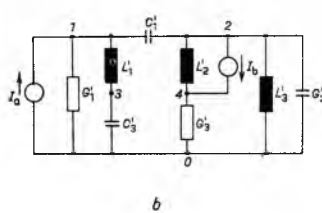
Napon	Struja
Petlja	Par čvorišta
Serijska	Paralelno
Prazni hod	Kratki spoj
Otpor	Vodljivost
Induktivitet	Kapacitet
II Kirchhoffov zakon	I Kirchhoffov zakon

Funkcija od t pridružena izvoru i funkcija pridružena njegovom dualu moraju biti iste. Prvi i drugi Kirchhoffov zakon, nadalje jednadžbe petlji i jednadžbe čvorišta, odnose se među sobom dualno. Samo planarnoj mreži bez međuinduktiviteta može se odrediti dualna mreža. Pri transfiguraciji zadane mreže u dualnu ostaje broj grana nepromijenjen. Broj neovisnih strujnih jednadžbi mreže i broj neovisnih naponskih jednadžbi dualne mreže jednaki su.

Zadanoj mreži može se dualna mreža odrediti tako da se unutar svake petlje koja odgovara »očici« mreže postavi čvorište. To je čvorište korespondentno dotičnoj petlji i pripada dualnoj mreži. Unutar petlje postavljena čvorišta spoje se granama (dualne mreže) tako da grani koja u zadanoj mreži razdvaja dvije susjedne petlje odgovara grana koja spaja čvorišta smještena unutar tih petlji. Takav je par grana korespondentan. Zadana mreža i dualna joj mreža u crtežu se preklapaju. Sve grane u dualnom grafu koje su korespondentne granama vanjske konture mreže spoje se u jedan čvor (referentno čvorište) izvan mreže.



Sl. 19. Određivanje dualne mreže zadanoj



Sl. 20. Dualna mreža dobivena postupkom u sl. 19

U grane dualne mreže dolaze elementi koji su dualni elementima u korespondentnim granama zadane mreže. Orijentacija grane dualnog grafa usmjerena je prema čvorištu ako je orijentacija korespondentne grane zadane mreže u smjeru orijentacije petlje.

U suprotnom slučaju orijentacija je grane dualnog grafa usmjerena od dotičnog čvorišta. U zadanoj mreži moraju sve orijentacije petlji biti istog smjera (npr. u smjeru kazaljke na satu).

Primjer određivanja dualne mreže zadanoj mreži prikazano je u sl. 19.

Sustav jednadžbi petlji u matricnom obliku mreže u sl. 19 dan je ovako:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ -U_2(s) \\ 0 \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} & -sL_1 & -\frac{1}{sC_1} & 0 \\ -sL_1 & s(L_1 + L_2) + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) & 0 & -\frac{1}{sC_2} \\ -\frac{1}{sC_2} & 0 & sL_2 + \frac{1}{sC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & 0 & R_2 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) \end{bmatrix}$$

Zamijene li se simboli u ovim matricama odgovarajućim simbolima prema tabl. 5, dobije se sustav jednadžbi čvorišta dualne mreže (sl. 20):

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ -I_2(s) \\ 0 \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + sC_1 + \frac{1}{sL_1} & -sC_1 & -\frac{1}{sL_1} & 0 \\ -sC_1 & s(C_1 + C_2) + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1} \right) & 0 & -\frac{1}{sL_2} \\ -\frac{1}{sL_2} & 0 & sC_2 + \frac{1}{sL_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{sL_2} & G_2 + \frac{1}{sL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \end{bmatrix}$$

Referentno čvorište jest čvorište koje odgovara vanjskoj konturi zadane mreže.

Svojstvo dualnosti mreža primjenjuje se u analizi mreža jer npr. postavljene jednadžbe neke mreže automatski vrijede uz odgovarajuću zamjenu simbola i za njenu dualnu mrežu, a to često znači pojednostavnjenje postupka u analizi.

Analitička svojstva funkcija mreže

Funkcije mreže (funkcije sistema) $F(s)$ analitičke su funkcije kompleksne frekvencije ($s = \sigma + j\omega$) pridružene linearnim, pasivnim, vremenski invarijantnim mrežama koje su u trenutku $t = 0$ prazne. Funkcije mreže opisuju električne osobine takve mreže na njenim priključnicama (tj. njezino vanjsko ponašanje). One su dane omjerom Laplaceove transformacije funkcije odziva $f_2(t)$ prema Laplaceovoj transformaciji funkcije poticaja $f_1(t)$.

Odziv mreže $F_2(s)$ u frekvencijskoj domeni određen je funkcijom mreže $F(s)$ i Laplaceovom transformacijom funkcije poticaja $f_1(t)$. Uz $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, vrijedi:

$$F_2(s) = F(s) \cdot F_1(s).$$

Pri sinusnoj pobudi i utitranom stanju, fazor odziva jednak je produktu funkcije mreže $F(s)$ za $s = j\omega$ [tj. $F(j\omega)$] i fazora pobude. Funkcije mreže su funkcije impedancije, admitancije i prijenosne (transferne) funkcije. Definicije koje se ovdje navode vrijede i za mreže koje osim elemenata R, L, C, M sadrže i ovisne izvore (nerecipročne mreže).

Funkcija impedancije omjer je Laplaceove transformacije funkcije napona i Laplaceove transformacije funkcije struje pridružene jednom paru priključnica (jednom prilazu) mreže. *Funkcija admitancije* recipročna je vrijednost funkcije impedancije. Funkcije admitancije i impedancije zovu se zajedničkim imenom i *funkcije imitancije* (prema H. W. Bodeu).

Prijenosne ili transferne funkcije definirane su omjerom Laplaceove transformacije funkcije odziva $f_2(t)$ i Laplaceove transformacije funkcije poticaja $f_1(t)$, pridružene različitim prilazima mreže:

$$T(s) = \frac{\mathcal{L}[f_2(t)]}{\mathcal{L}[f_1(t)]} = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}.$$

Prijenosne se funkcije prema tome da li je prilazima mreže pridružen naponski ili strujni poticaj i da li se traži strujni ili naponski odziv dijele kako slijedi:

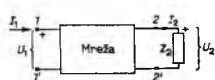
$$\text{funkcije prijenosa napona} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}, \quad (11 \text{ a})$$

$$\text{funkcije prijenosa struje} = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}, \quad (11 \text{ b})$$

$$\text{prijenosna ili transferna impedancija} = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}, \quad (11 \text{ c})$$

$$\text{prijenosna ili transferna admitancija} = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}. \quad (11 \text{ d})$$

Prijenosna admitancija nije recipročna vrijednost prijenosne impedancije.



Sl. 21. Poticaj i odziv u mreži s dva prilaza (U_1 ili I_1 poticaj, U_2 ili I_2 odziv)

U izrazima (11 a) do (11 d) indeks 2 označava odziv a indeks 1 poticaj (sl. 21).

Određivanje funkcija mreže. Funkcija mreže može se odrediti iz sustava jednačbi petlja ili čvorišta. One su dane kvocijentom determinante sustava i odgovarajućeg kofaktora ili linearnom kombinacijom ovakvih kvocijenata. Ako mreža sadrži samo elemente R, L, M, C , tj. ako je pasivna, linearna, recipročna i vremenski invarijantna, elementi su u determinantama sustava realne racionalne funkcije oblika

$$W_{ki}(s) = a_{ki}s + b_{ki} + c_{ki} \cdot \frac{1}{s}.$$

Koeficijenti a_{ki}, b_{ki}, c_{ki} realne su konstante koje mogu biti i jednake nuli.

Funkcije imitancije i prijenosne funkcije linearnih, pasivnih, recipročnih, vremenski invarijantnih mreža prema tome su realne racionalne funkcije općenito dane kvocijentom dvaju polinoma:

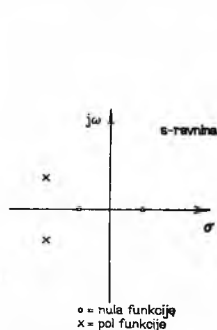
$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0},$$

ili ako se polinom u brojniku i nazivniku rastavi na faktore:

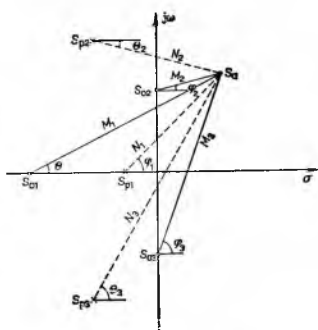
$$F(s) = H \frac{(s - s_{01})(s - s_{02}) \dots (s - s_{0m})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})}. \quad (12)$$

s_{01} do s_{0m} korijeni su polinoma u brojniku i zovu se nule funkcije mreže, a s_{p1} do s_{pn} korijeni su polinoma u nazivniku i zovu se polovi funkcije mreže. Funkcija $F(s)$ ima i nulu u beskonačnosti ako je $n > m$, a red nule je $(n - m)$. Pol u beskonačnosti postoji ako je $m > n$, a red je tog pola $(m - n)$. Polovi i nule funkcije mreže zovu se zajedničkim imenom *karakteristične frekvencije mreže*. Konačni polovi funkcije $F(s)$ jesu *prirodne ili vlastite frekvencije*. U funkcijama imitancije i polovi i nule prirodne su frekvencije mreže jer funkcija kao i njena recipročna vrijednost predstavljaju funkciju mreže. $H = a_m/b_n$ realna je konstanta. Karakteristične frekvencije i konstantni faktor potpuno određuju funkciju $F(s)$.

Grafičko prikazivanje mrežnih funkcija. Polovi i nule funkcije mreže prikazuju se u kompleksnoj (Gaussovoj) ravni tako da se nule funkcija u dijagramu označuju kružićem, a polovi kosim križićem (sl. 22).



Sl. 22. Ravnina kompleksne frekvencije s ($s = \sigma + j\omega$)



Sl. 23. Određivanje argumenta i modula funkcije mreže u $s = s_a$ ako su zadani polovi i nule funkcije

Tako je, npr., s oznakama prema sl. 23, za $s = s_a = \sigma_a + j\omega_a$:

$$|F(s_a)| = H \frac{M_1 M_2 M_3}{N_1 N_2 N_3},$$

$$\arg F(s_a) = \Phi(s_a) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3).$$

Ovim se postupkom mogu tačku po tačku odrediti krivulje npr. za $|F(j\omega)|$ i $\Phi(\omega)$ u ovisnosti o kružnoj frekvenciji ω ako se za dovoljan broj vrijednosti slobodne varijable s na osi $j\omega$ iz dijagrama odrede pripadne apsolutne vrijednosti i argumenti te funkcije.

Svojstvo je realne racionalne funkcije $F(s)$ da za realne vrijednosti varijable s poprima realne vrijednosti, a za konjugirano kompleksne vrijednosti od s (označene zvjezdicom) konjugirano kompleksne vrijednosti, tj.:

$$F(s^*) = F^*(s),$$

zatim da su korijeni polinoma u brojniku i nazivniku funkcije $F(s)$ ili realni ili dolaze u konjugirano kompleksnim parovima.

Rastavljanje funkcije na parne i neparne dijelove omogućuje prikazivanje mnogih karakterističnih svojstava funkcije mreže. U tom je slučaju:

$$F(s) = F_p(s) + F_n(s),$$

gdje je

$$F_p(s) = \text{Par } F(s) = \frac{1}{2} [F(s) + F(-s)] \text{ parni dio,}$$

$$F_n(s) = \text{Nep } F(s) = \frac{1}{2} [F(s) - F(-s)] \text{ neparni dio.}$$

Kako je $F(s)$ kvocijent dvaju polinoma, rastavljanje polinoma u brojniku i nazivniku na parni i neparni dio daje izraz:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P_p(s) + P_n(s)}{Q_p(s) + Q_n(s)},$$

koji se množenjem brojnika i nazivnika sa $Q_p(s) - Q_n(s)$ može preurediti u oblik

$$F(s) = \frac{P_p(s)Q_p(s) - P_n(s)Q_n(s)}{Q_p^2(s) - Q_n^2(s)} + \frac{P_n(s)Q_p(s) - P_p(s)Q_n(s)}{Q_p^2(s) - Q_n^2(s)},$$

u kojemu je prvi član s desne strane jednak $F_p(s)$ a drugi jednak $F_n(s)$.

Ovi izrazi često se primjenjuju u sintezi mreža. Na osi $j\omega$, tj. za $s = j\omega$, vrijedi:

$$F_p(j\omega) = \text{Re } F(j\omega) = R(\omega),$$

$$F_n(j\omega) = j \text{Im } F(j\omega) = jX(\omega).$$

Analitička svojstva mrežnih funkcija. Da bi se iz zadane funkcije imitancije ili iz prijenosne funkcije moglo zaključiti da li ta funkcija odgovara mreži koja sadrži elemente R, L, M, C , potrebno je znati koja su analitička svojstva tih funkcija.

Iz činjenice da su linearne, pasivne, recipročne, vremenski invarijantne mreže stabilne, tj. da amplituda slobodnog odziva s porastom vremena t teži k nuli ili da je, u graničnom slučaju, konstanta, nadalje iz činjenice da su funkcije mreže realne racionalne funkcije, proizlazi da te funkcije imaju ova analitička svojstva:

a) Polovi i nule funkcije $F(s)$ ili su realni ili dolaze u konjugirano kompleksnim parovima; b) funkcija $F(s)$ nema polova u desnoj polovini s -ravnine, a polovi na osi $j\omega$ jednostruki su; c) za $s = j\omega$ realni je dio funkcije $F(j\omega)$ parna funkcija od ω , a imaginarni dio te funkcije neparna funkcija od ω ; d) za $s = j\omega$, $|F(j\omega)|$ parna je funkcija od ω ; e) za $s = j\omega$, $\arg F(j\omega)$ neparna je funkcija od ω ako je $\arg F(j\omega)$ jednak nuli za $\omega = 0$.

I recipročna vrijednost funkcije imitancije funkcija je mreže, ali to po definiciji ne vrijedi za prijenosne funkcije. Funkcije imitancije imaju još i ova svojstva: f) funkcija imitancije nema nula u desnoj polovini s -ravnine; g) realni dio funkcije imitancije za $s = j\omega$ ili je veći od nule ili je jednak nuli; h) polovi i nule na osi $j\omega$ jednostruki su uključivši i $s = 0$ i ∞ . Najviše potencije polinoma u nazivniku i brojniku mogu se prema tome razlikovati najviše za 1, a tako i najniže potencije.

Funkcije imitancija linearnih, pasivnih, vremenski invarijantnih recipročnih mreža tvore specijalnu klasu racionalnih funkcija: *pozitivno realne funkcije*. Takva je funkcija $F(s)$ analitička funkcija kompleksne promjenljive $s = \sigma + j\omega$ ovih svojstava:

Iz rasporeda polova i nula u s -ravnini i zadane konstante H može se s pomoću jednačbe (12) za neki $s = s_a$ odrediti apsolutna vrijednost i argument funkcije $F(s)$ u toj tački kompleksne ravni.

regularna je u području $\sigma > 0$; realna je ako je s realno; za njezin realni dio vrijedi $\operatorname{Re} F(s) \geq 0$ za $\sigma \geq 0$. Iz definicije pozitivno realne funkcije slijedi da je i njezina recipročna vrijednost pozitivno realna funkcija. Ako je impedancija nekog dvopola pozitivno realna funkcija, i admitancija je tog dvopola pozitivno realna funkcija, i obratno. S tog razloga pozitivno realna funkcija ne može imati nule u desnoj polovini s -ravnine. Zbroj dviju ili više pozitivno realnih funkcija opet je pozitivno realna funkcija.

Da bi se provjerilo da li je neka realna racionalna funkcija i pozitivno realna, tj. da li je ona funkcija imitancije, potrebno je provjeriti da li zadovoljava nužne i dovoljne uvjete. Tako su npr. nužni i dovoljni uvjeti dani ovim teoremom:

Racionalna funkcija $F(s)$ s realnim koeficijentima pozitivno je realna onda i samo onda ako je regularna u području $\sigma > 0$; ako su joj polovi na osi $j\omega$, uključivši $s = 0$ i ∞ , jednostruki s realnim pozitivnim reziduuumima i ako joj je $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$ za sve ω , osim u polovima.

Realni dio funkcije imitancije ispunjava na osi $j\omega$ također određene uvjete karakteristične za te funkcije. $\operatorname{Re} F(j\omega) = R(\omega)$ parna je funkcija od ω , pozitivna je ili jednaka nuli za sve vrijednosti od ω i ne može imati pol na osi $j\omega$.

Realna funkcija $R(\omega)$ realne promjenljive ω realni je dio pozitivno realne funkcije na osi $j\omega$ onda i samo onda ako je ona parna racionalna funkcija s realnim koeficijentima; ako je $R(\omega)$ ograničena za sve ω i ako je $R(\omega) \geq 0$ za sve ω .

Funkcije imitancije mreže koje sadrže samo po dva od elemenata R , L i C , tj. L i C ili R i C ili R i L , čine posebne klase pozitivno realnih funkcija koje osim navedenih imaju i neke specifične osobine.

Funkcija reaktancije (funkcija susceptancije) funkcija je impedancije (susceptancije) mreže koja sadrži samo elemente L i C . Funkcija reaktancije je na osi $j\omega$ neparna funkcija od ω . Realni dio ove funkcije za svaku je vrijednost od ω na osi $j\omega$ jednak nuli, polovi i nule leže samo na osi $j\omega$, a svi su reziduuumi realni i pozitivni. Gradijent funkcije reaktancije na osi $j\omega$ za sve je vrijednosti od ω pozitivan osim u polovima, pa polovi i nule alterniraju. Za $\omega = 0$ i ∞ ima funkcija reaktancije pol ili nulu.

Realna racionalna funkcija od s funkcija je reaktancije onda i samo onda ako su joj svi polovi i nule jednostruki; ako svi polovi i nule leže samo na osi $j\omega$ i ako joj polovi i nule alterniraju.

Funkcija imitancije dvopola RC i RL. Funkcija impedancije mreže sastavljene od elemenata RC (RC -dvopol) i funkcija admitancije mreže sastavljene od elemenata RL (RL -dvopol) čine jednu klasu, a funkcije admitancije RC -dvopola i funkcija impedancije RL -dvopola čine drugu klasu pozitivno realnih funkcija.

Svojstva funkcije impedancije RC -dvopola i funkcije admitancije RL -dvopola jesu: $Z_{RC}(s)$ i $Y_{RL}(s)$ racionalne su funkcije s jednostrukim polovima na negativnoj osi σ , reziduuumi svih polova su pozitivni, nema pola u $\sigma = \infty$, nule su jednostruke i leže na negativnoj osi σ , polovi i nule alterniraju, prva karakteristična frekvencija na osi σ jest pol, gradijent funkcije $Z_{RC}(s)$ i $Y_{RL}(s)$ uvijek je negativan, imaginarni dio funkcije $Z_{RC}(s)$ i $Y_{RL}(s)$ na osi $j\omega$ negativan je a realni dio je monotono padajuća funkcija s minimumom u beskonačnosti ($\omega = \infty$).

Od navedenih svojstava nužna i dovoljna su ova svojstva da bi neka funkcija bila funkcija impedancije RC -dvopola ili admitancije RL -dvopola: da je ona racionalna funkcija s jednostrukim polovima samo na negativnoj osi σ , da su joj reziduuumi za sve polove pozitivni i da nema pola u beskonačnosti.

Svojstva funkcije impedancije RL -dvopola i funkcije admitancije RC -dvopola jesu ova: funkcija $Z_{RL}(s)$ i $Y_{RC}(s)$ racionalne su funkcije s jednostrukim polovima na negativnoj osi σ , reziduuumi od $Z_{RL}(s)$ i $Y_{RC}(s)$ pozitivni su, nema pola u $s = 0$, nule su jednostruke i leže na negativnoj osi σ , polovi i nule alterniraju, prva karakteristična frekvencija na osi σ je nula, gradijent funkcije $Z_{RL}(s)$ i $Y_{RC}(s)$ na osi σ uvijek je pozitivan, imaginarni dio funkcije $Z_{RL}(s)$ i $Y_{RC}(s)$ na osi $j\omega$ pozitivan je a realni dio je monotono rastuća funkcija s minimumom u $s = 0$.

Da bi neka funkcija bila funkcija admitancije RC -dvopola, odnosno impedancije RL -dvopola, nužni su i dovoljni ovi uvjeti: da je ona racionalna funkcija s jednostrukim polovima samo na

negativnoj osi σ , da su reziduuumi od $R_{RL}(s)$ i $Y_{RC}(s)$ pozitivni i da nema pol u $s = 0$.

Funkcije minimuma. S obzirom na razmještaj polova i nula u s -ravnini razlikuju se ovi tipovi funkcija mreže: funkcija minimuma reaktancije funkcija je impedancije koja nema polova na osi $j\omega$; funkcija minimuma susceptancije funkcija je admitancije koja nema polova na osi $j\omega$.

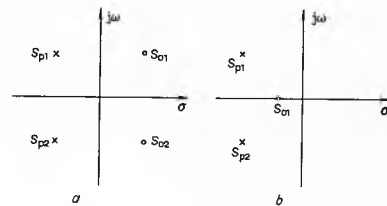
Stupanj je polinoma u brojniku navedenih funkcija minimuma jednak stupnju polinoma u njihovom nazivniku. Recipročna vrijednost funkcije minimuma reaktancije funkcija je susceptancije koja nema nula na osi $j\omega$. Isto tako recipročna vrijednost funkcije minimuma susceptancije funkcija je reaktancije koja nema nula na osi $j\omega$. Funkcijom minimuma reaktancije i minimuma susceptancije naziva se funkcija reaktancije, odnosno susceptancije, koja nema ni polova ni nula na osi $j\omega$. Općenito funkcija koja je minimum reaktancije ne mora ujedno biti i minimum susceptancije i obratno.

Funkcija minimuma rezistancije funkcija je impedancije kojoj je realni dio bar za jednu vrijednost $\omega = \omega_a$ na osi $j\omega$ jednak nuli: $\operatorname{Re} Z(j\omega_a) = 0$. Funkcija minimuma konduktancije funkcija je admitancije kojoj je realni dio bar za jednu vrijednost $\omega = \omega_a$ na osi $j\omega$ jednak nuli: $\operatorname{Re} Y(j\omega_a) = 0$.

Ako je recipročna vrijednost funkcije minimuma rezistancije funkcija minimuma konduktancije (ili obratno), naziva se takva funkcija funkcijom minimuma rezistancije i minimuma konduktancije. Općenito funkcija koja je minimum rezistancije ne mora ujedno biti i funkcija minimuma konduktancije (i obratno).

Funkcija minimuma rezistancije koja je ujedno i funkcija minimuma reaktancije i minimuma susceptancije također je funkcija minimuma konduktancije.

Funkcija minimuma pozitivno je realna funkcija koja je minimum reaktancije, minimum susceptancije i minimum konduktancije (a time i minimum susceptancije).



Sl. 24. Primjer razmještaja polova i nula u ravnini s . a Svepropusne funkcije, b funkcije minimuma faze

Funkcija minimuma faze prijenosna je funkcija koja nema nule u desnoj polovini s -ravnine (sl. 24 b).

Svepropusna funkcija (engl. all-pass function) prijenosna je funkcija koja ima jednak broj polova i nula (potencija polinoma u nazivniku jednaka je potenciji polinoma u brojniku) koji su u s -ravnini razmješteni tako da su sve nule u desnoj, a svi polovi u lijevoj polovini s -ravnine kao zrcalne slike nula s obzirom na os $j\omega$ (sl. 24 a). Modul (apsolutna vrijednost) svepropusne funkcije konstantan je za sve vrijednosti od $s = j\omega$ (otuda ime) a argument (fazni kut) funkcija je od ω .

Svaka se prijenosna funkcija $T_1(s)$ koja nije ni minimum faze ni svepropusna funkcija može prikazati kao produkt funkcije minimuma faze $T_m(s)$ i svepropusne funkcije $T_s(s)$:

$$T_1(s) = T_m(s) \cdot T_s(s)$$

Funkcije energije u frekvencijskoj domeni kvadratne su forme:

$$F_0(s) = [I_t^*(s)]^{(t)} [R_{kl}] [I_l(s)] = \sum_{k,l=1}^n R_{kl} I_k(s) I_l^*(s), \quad (13)$$

$$T_0(s) = [I_t^*(s)]^{(t)} [L_{kl}] [I_l(s)] = \sum_{k,l=1}^n L_{kl} I_k(s) I_l^*(s), \quad (14)$$

$$V_0(s) = [I_t^*(s)]^{(t)} [S_{kl}] [I_l(s)] = \sum_{k,l=1}^n S_{kl} I_k(s) I_l^*(s). \quad (15)$$

One su pridružene (linearnoj, pasivnoj, recipročnoj, vremenski invarijantnoj) mreži koja je u trenutku $t = 0$ prazna. Ovako

dane funkcije energije dobivaju se iz sustava jednadžbi petlja tako da se matricna jednadžba sustava pomnoži konjugirano transponiranim vektorom struje $[I_i^*(s)]^{(t)}$:

$$[I_i^*(s)]^{(t)} [U_i(s)] = [I_i^*(s)]^{(t)} [R_{ki}] [I_i(s)] + s [I_i^*(s)]^{(t)} [L_{ki}] [I_i(s)] + \frac{1}{s} [I_i^*(s)] [S_{ki}] [I_i(s)],$$

što s oznakama u izrazima (13) do (15) daje:

$$[I_i^*(s)]^{(t)} [U_i(s)] = \sum_{l=1}^n I_i^*(s) U_l(s) = F_0(s) + s T_0(s) + \frac{1}{s} V_0(s). \quad (16)$$

Kvadratne forme $F_0(s)$, $T_0(s)$ i $V_0(s)$ pridružene mrežama R , L , M , C pozitivno su semidefinitne i realne za sve vrijednosti od s . Pozitivno semidefinitni karakter ovisi o matricama kvadratnih forma, tj. o matricama $[R_{ki}]$, $[L_{ki}]$ i $[S_{ki}]$. Ako je kvadratna forma semidefinitna i njezina je matrica semidefinitna, što znači da su determinanta te matrice i svi glavni kofaktori pozitivni ili jednaki nuli. Matrice parametara petlja mreže prema tome su pozitivno semidefinitne.

Na analogan način mogu se funkcije energije odrediti i na bazi jednadžbi čvorišta mreže. Matrice parametara čvorišta mreže $[G_{kl}]$, $[I_{kl}]$, i $[C_{kl}]$ također su pozitivno semidefinitne. Funkcije energije dane izrazima (13), (14), (15) ne mogu se fizikalno interpretirati kao izrazi za snagu privedenu pasivnim elementima mreže ili kao izrazi za akumuliranu energiju. Analogno uvedene funkcije u vremenskoj domeni, međutim, predstavljaju izraze za snagu odnosno energiju; odatle ime funkcijama energije. Ovakva interpretacija može se dati kvadratnim formama ako su varijable fazori napona i struje. S pomoću funkcija energije mogu se odrediti neka analitička svojstva funkcije imitancije mreže R , L , M , C .

Ako u mreži djeluje samo jedan naponski izvor tako da je npr. samo: $U_1(s) \neq 0$, glasi će izraz (16):

$$I_1^*(s) U_1(s) = F_0(s) + s T_0(s) + \frac{1}{s} V_0(s). \quad (17)$$

Ako je petlja u kojoj leži jedini naponski izvor ulazna petlja pasivne mreže, a čvorišta označena brojkama 1—1' ulazne su priključnice (sl. 25), bit će impedancija mreže na tim priključnicama:

$$\frac{U_1(s)}{I_1(s)} = Z_1(s) = \frac{1}{[I_1(s)]^2} \left((F_0(s) + s T_0(s) + \frac{1}{s} V_0(s)) \right). \quad (18)$$

Taj je izraz dobiven dijeljenjem izraza (17) produktom $I_1(s) \cdot I_1^*(s)$.

Izraz za impedanciju rastavljen na realni i imaginarni dio, uz $s = \sigma + j\omega$, glasi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_1(s) &= \frac{1}{[I_1(s)]^2} \left(F_0(s) + \sigma T_0(s) + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} V_0(s) \right), \\ \operatorname{Im} Z_1(s) &= \frac{\omega}{[I_1(s)]^2} \left(T_0(s) - \frac{V_0(s)}{\sigma^2 + \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Ovi izrazi vrijede za sve vrijednosti od s osim u nulama funkcije $I_1(s)$.

Izraz (18) realan je za realnu vrijednost od s , a izraz (19) pozitivan je ili jednak nuli za $\sigma \geq 0$. Funkcije s ovim svojstvima pozitivno su realne funkcije.

Korijeni izraza (18) nule su impedancije a dani su izrazom

$$s = -\frac{F_0(s)}{2 T_0(s)} \pm \sqrt{\frac{F_0^2(s)}{4 T_0^2(s)} - \frac{V_0(s)}{T_0(s)}}. \quad (20)$$

To nije eksplicitni izraz za korijene jer su funkcije energije također funkcije od s . Funkcije energije realne su i nisu nikad negativne, pa nule funkcije impedancije prema (20) ne mogu imati pozitivnog realnog dijela.

U specijalne klase mreža idu sklopovi sa samo dvije vrste elemenata; to su LC -, RC -, i RL -mreže. Za LC -mreže je $F_0(s) = 0$, za RC -mreže je $T_0(s) = 0$, a za RL -mreže je $V_0(s) = 0$. Korijeni imitancije LC -mreže dani su izrazom: $s = \pm j \sqrt{V_0(s)/T_0(s)}$ i leže na osi $j\omega$ kompleksne ravnine. Korijeni imitancije RC -mreže jesu $s = -V_0/F_0$, a RL -mreže: $S = -F_0/T_0$ i leže na negativnoj realnoj osi.

Četveropoli

U elektrotehnici četveropol je električna naprava s dva para priključnica, kojoj je namjena prijenos električne energije (ili signala) od generatora (ili izvora signala) do potrošača (ili prijemnika signala). Ovakvi četveropoli jesu npr. transformatori, atenuatori, filtri, pojačala, električni vodovi i sl. Električna svojstva četveropola dana su s obzirom na njegova dva para priključnica.

U teoriji električnih mreža četveropol je pojam pridružen mreži kojoj su električna svojstva dana s obzirom na samo dva para čvorišta. Ti se parovi čvorišta nazivaju i prilazima mreže, odnosno četveropola. Svaki četveropol ima dva prilaza. Električna svojstva četveropola dana su odnosima funkcija napona i struja pridruženih prilazima četveropola. Ako su analitički izrazi koji karakteriziraju četveropol zadani, nije potrebno poznavati njegov sastav, pa se četveropol prikazuje simbolički prema sl. 26, gdje su ujedno označene i odabrane referencije napona i struje na prilazima. Par priključnica (npr. 1—1') na koji je priključena pobuda, zove se *ulaz* (ulazne priključnice) četveropola, a suprotni par (2—2') zove se *izlaz* (izlazne priključnice) četveropola.

Četveropoli su aktivni ili pasivni, linearni ili nelinearni, vremenski promjenljivi ili nepromjenljivi (invarijantni), recipročni ili nerekipročni. Već prema tome da li je neka mreža aktivna ili pasivna, linearna ili nelinearna, vremenski promjenljiva ili nepromjenljiva, bit će i četveropol pridružen toj mreži tih svojstava. Linearan, pasivan, recipročan, vremenski invarijantan četveropol je npr. četveropol sastavljen od elemenata R , L , M , C . (Ovi četveropoli nazivat će se u daljem tekstu $RLMC$ -četveropolima.) Četveropol koji sadrži osim navedenih elemenata i ovisne izvore (naponske ili strujne) jest linearan, aktivan, nerekipročan, vremenski invarijantan.

Jednadžbe pasivnih četveropola. Funkcije napona i struje pridružene priključnicama četveropola vezane su *jednadžbama četveropola*. Za linearne četveropole to je par linearnih jednadžbi. Predznaci uz napone i struje u tim jednadžbama ovise o odabranim referencijama. Od četiri veličine U_1 , U_2 , I_1 i I_2 na prilazu četveropola, dvije su neovisne. Prema tome koje su od tih veličina neovisne, može se postaviti šest pari jednadžbi četveropola, koje se zovu naponske, strujne, prijenosne i hibridne jednadžbe četveropola.

Ako se naponi izraze kao funkcije struja dobivaju se *naponske jednadžbe četveropola* koje glase:

$$U_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2, \quad U_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2, \quad (21)$$

gdje su koeficijenti $z_{11} \dots z_{22}$ parametri četveropola koji predstavljaju impedancije (ulazne i prijenosne) i nazivaju se impedancijski parametri četveropola.

Ako se struje prikazu kao funkcije napona, dobiju se *strujne jednadžbe četveropola*:

$$I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2, \quad I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2,$$

gdje su koeficijenti $y_{11} \dots y_{22}$ parametri četveropola koji predstavljaju admittancije (ulazne i prijenosne) i nazivaju se admittancijski parametri četveropola.

Ako se ulazne veličine izraze kao funkcije izlaznih veličina, dobivaju se *prijenosne jednadžbe*:

$$U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} I_2, \quad I_1 = a_{21} U_2 + a_{22} I_2.$$

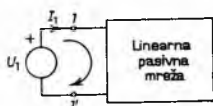
U tom slučaju a_{11} i a_{22} bezdimenzioni su koeficijenti, a_{12} je recipročna vrijednost prijenosne admittancije, a a_{21} recipročna vrijednost prijenosne impedancije.

Ako su, međutim, ulazne veličine neovisne, mogu se izlazne veličine prikazati kao funkcije tih veličina, pa se dobiva drugi oblik prijenosnih jednadžbi:

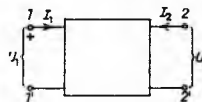
$$U_2 = b_{11} U_1 + b_{12} I_1, \quad I_2 = b_{21} U_1 + b_{22} I_1.$$

Ovdje su b_{11} i b_{22} koeficijenti bez dimenzija, a b_{12} je recipročna vrijednost prijenosne admittancije, b_{21} recipročna vrijednost prijenosne impedancije.

Parametri a i b nazivaju se prijenosni parametri četveropola.



Sl. 25. Pasivna mreža s nezavisnim naponskim izvorom u prvoj petlji



Sl. 26. Četveropol

Prijenosne jednadžbe električnih vodova (v. *Električni vodovi*) jesu jednadžbe četveropola jer su postavljene promatrajući vodove kao četveropole.

Ako je neovisna jedna ulazna i jedna izlazna veličina, dolazi se do *hibridnih jednadžbi četveropola*:

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} U_2, & I_1 &= g_{11} U_1 + g_{12} I_2, \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} U_2, & U_2 &= g_{21} U_1 + g_{22} I_2, \end{aligned}$$

gdje su h_{12} , h_{21} , g_{12} i g_{21} bezdimenzioni koeficijenti, h_{11} i g_{22} su impedancije, a h_{22} i g_{11} admitancije. Parametri g i h zovu se hibridni parametri četveropola.

U i I su fazoni napona i struje kad je posrijedi sinusni poticaj, a općenito su Laplaceova transformacija funkcije napona i struje.

Matrice četveropola. Za analizu četveropola prikladno je pisati jednadžbe četveropola u matričnom obliku. Npr. naponska jednadžba četveropola (21) glasi u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

gdje se $[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ zove matrica impedancija četveropola.

Tablica 6
JEDNADŽBE ČETVEROPOLA

Naponska i strujna jednadžba	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$
Prijenosne jednadžbe	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$
Hibridne jednadžbe	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$

Svih šest pari jednadžbi četveropola prikazane su u tabl. 6 u matričnom obliku. Predznaci su prema referencijama na sl. 26.

Parametri četveropola su koeficijenti jednadžbi četveropola, odnosno elementi kvadratnih matrica u matričnim jednadžbama četveropola. Parametri linearnih, pasivnih, recipročnih četveropola racionalne su funkcije kompleksne frekvencije s ($s = \sigma + j\omega$) s realnim koeficijentima. Njihova osnovna analitička svojstva odgovaraju svojstvima prijenosnih funkcija i funkcije imitancije linearne, pasivne, recipročne, vremenski nepromjenljive mreže.

Grupa od četiri parametra koji pripadaju jednom paru jednadžbi potpuno određuju električna svojstva četveropola s obzirom na njegove prilaze. Dovoljno je znati jednu grupu parametara da bi se mogli odrediti parametri i svih ostalih grupa. U općem slučaju linearnog, pasivnog, vremenski invarijantnog četveropola, parametri jedne grupe među sobom su neovisni, te je, prema tome, takav četveropol opisan četirima parametrima. Četveropoli koji su i recipročni zadani su trima, a ako su i simetrični, dvjema parametrima.

Parametri (koeficijenti) imaju i svoje fizikalno značenje, a njihove veličine mogu se utvrditi mjerenjem na četveropolu. Parametri prikazani u tablici predstavljaju ili ulaznu imitanciju, ili prenosnu funkciju, ili recipročnu vrijednost prenosne funkcije četveropola u praznom hodu (naprazno) ili u kratkom spoju (nakratko). Četveropol je u praznom hodu kad su priključnice koje leže nasuprot onima na koje je priključena pobuda otvorene, a u kratkom je spoju četveropol kad su priključnice nasuprot onima na koje je priključena pobuda kratko spojene. Značenje parametara proizlazi neposredno iz dotičnog para jednadžbi četveropola ako se one primjenjuju na četveropol u praznom hodu ili kratkom spoju. Značenje parametara prikazano je u tabl. 7.

Ako je mreža koja tvori četveropol zadana, parametri se mogu odrediti s pomoću jednadžbi konturnih struja ili s pomoću jednadžbi čvorišta mreže. Npr. Y -parametri četveropola mogu se odrediti s pomoću jednadžbi petlja time što se petlje u mreži odabiraju tako da par ulaznih priključnica pripada samo jednoj petlji, i to petlji 1, a izlazne priključnice samo drugoj petlji (2). Napon

U_1 leži tako samo u konturi prve, a napon U_2 samo u konturi druge petlje. Ako se sustav jednadžbi petlja riješi po I_1 i po I_2 , gdje su I_1 i I_2 konturne struje prve i druge petlje, dobije se par jednadžbi

$$I_1 = U_1 \left(\frac{D_{11}}{D} \right)_Z + U_2 \left(\frac{D_{21}}{D} \right)_Z,$$

$$I_2 = U_1 \left(\frac{D_{12}}{D} \right)_Z + U_2 \left(\frac{D_{22}}{D} \right)_Z,$$

gdje je D determinanta matrice impedancija petlja, a D_{11} , D_{12} , D_{21} i D_{22} kofaktori. Indeks Z označuje da su elementi u determinantama impedancije. Dobivene jednadžbe strujne su jednadžbe zadane linearne pasivne mreže promatrane kao četveropol, a koeficijenti uz napone jesu y -parametri (admitancijski parametri) tog četveropola:

$$y_{11} = \left(\frac{D_{11}}{D} \right)_Z, \quad y_{12} = \left(\frac{D_{21}}{D} \right)_Z, \quad y_{21} = \left(\frac{D_{12}}{D} \right)_Z, \quad y_{22} = \left(\frac{D_{22}}{D} \right)_Z.$$

Na analogan način bi se primjenom jednadžbi čvorišta (uz priključnicu 1' kao referentno čvorište) odredili z -parametri četveropola.

Recipročni četveropoli. Četveropoli za koje među parametrima vrijede relacije

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_{21}, & y_{12} &= y_{21}, \\ D_a &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1, & D_b &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 1, \end{aligned} \quad (23)$$

$$h_{12} = -h_{21}, \quad g_{12} = -g_{21}$$

nazivaju se recipročni četveropoli. Oni su zadani samo trima među sobom neovisnim parametrima. Dovoljno je da samo jedna od navedenih relacija vrijedi jer su tada i ostale relacije automatski ispunjene. Za recipročne četveropole vrijedi teorem recipročnosti.

Simetrični četveropoli jesu četveropoli za koje među parametrima vrijede relacije:

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_{22}, & y_{11} &= y_{22}, \\ a_{11} &= a_{22}, & b_{11} &= b_{22}, \end{aligned} \quad (24)$$

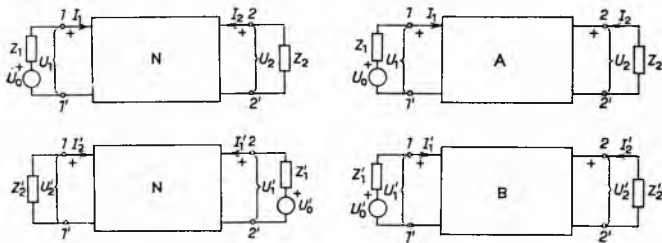
$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = 1.$$

Dovoljno je da je jedna od navedenih relacija ispunjena jer su tada automatski i sve ostale ispunjene. Linearni, pasivni, recipročni, vremenski invarijantni četveropoli koji su i simetrični zadani su dvjema parametrima. Ako se na simetričnom četveropolu ulazne i izlazne priključnice zamijene, bit će, uz nepromijenjene

Tablica 7
DEFINICIJE PARAMETARA ČETVEROPOLA

Shema	Definicijske jednadžbe parametara			
	$z_{11} = \frac{U_1}{I_1}$	$a_{11} = \frac{U_1}{U_2}$	$g_{11} = \frac{U_1}{I_1}$	uz $I_2 = 0$
	$z_{22} = \frac{U_2}{I_2}$	$b_{11} = \frac{U_2}{U_1}$	$h_{22} = \frac{I_2}{U_2}$	uz $I_1 = 0$
	$y_{11} = \frac{I_1}{U_1}$	$a_{22} = \frac{I_1}{-I_2}$	$h_{11} = \frac{U_1}{I_1}$	uz $U_2 = 0$
	$y_{22} = \frac{I_2}{U_2}$	$b_{22} = \frac{I_2}{-I_1}$	$g_{22} = \frac{U_2}{I_2}$	uz $U_1 = 0$

vanjske priključke, napon i struja na ulazu odnosno izlazu prije i poslije zamjene jednaki (sl. 27).



Sl. 27. Simetrični četveropol: uz $Z_1' = Z_1$, $Z_2' = Z_2$, $U_0' = U_0$, su $U_1' = U_1$, $U_2' = U_2$, $I_1' = I_1$, $I_2' = I_2$.

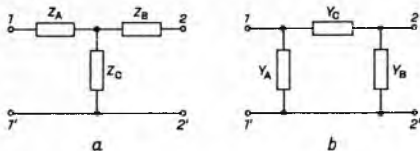
Sl. 28. Ekvivalentni četveropol: uz $Z_1' = Z_1$, $Z_2' = Z_2$, $U_0' = U_0$, su $U_1' = U_1$, $U_2' = U_2$, $I_1' = I_1$, $I_2' = I_2$.

Ekvivalentni četveropoli. Dva su četveropola ekvivalentna ako su im parametri za sve frekvencije jednaki. Četveropoli A i B prema sl. 28 ekvivalentni su ako vrijedi:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} B$$

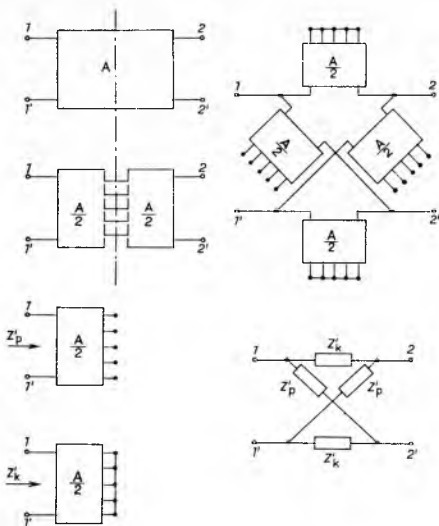
Ako je ova jednakost ispunjena, i parametri su svih ostalih grupa parametara A i B jednaki. Ovakvo definirana ekvivalencija odnosi se na napon i struje na priključnicama četveropola. Ako se, uz zadane vanjske priključke, četveropol zamijeni ekvivalentnim četveropolom, ostat će naponi i struje nepromijenjeni (sl. 28).

Redovno se linearnom pasivnom recipročnom vremenski invarijantnom četveropolu može odrediti ekvivalentan četveropol u T-spoju (u spoju zvijezde) ili Π -spoju (u spoju trokuta) (sl. 29).



Sl. 29. Osnovni spojevi četveropola: a T-spoj, b Π -spoj

Impedancije elemenata ekvivalentnog T-spoja kao i admitancije elemenata ekvivalentnog Π -spoja ne moraju biti pozitivno realne funkcije i ako je četveropol linearan, pasivan, recipročan, s vremenski invarijantnim parametrima. To znači da se npr. dvopol impedancije Z_A koji je element u horizontalnoj grani T-spoja (sl. 29) ne mora moći ostvariti elementima R , C , L , M .

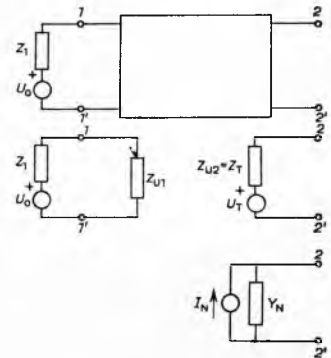


Sl. 30. Određivanje ekvivalentnog četveropola u X-spoju zadanom simetričnom četveropolu (Bartlettov teorem). A simetrično građeni četveropol, $\frac{A}{2}$ polučlan tog četveropola

Bartlettov teorem. Svakom se simetričnom četveropolu koji je i simetrično građen može odrediti ekvivalentan simetrični četveropol u X-spoju, i taj se uvijek može i realizirati. X-četveropol ekvivalentan simetrično građenom četveropolu može se jednostavno konstruirati. U svaku horizontalnu granu X-četveropola dolazi dvopol koji odgovara polučlanu zadanog simetričnog četveropola u kratkom spoju, a u svaku poprečnu granu tog četveropola dvopol koji odgovara polučlanu zadanog simetričnog četveropola naprazno (sl. 30).

Ulazna impedancija četveropola dana je omjerom Laplaceove transformacije funkcije napona i Laplaceove transformacije funkcije struje, a kad su posrijedi sinusne pobude, omjerom fazora napona i fazora struje pridruženih jednom paru priključnica četveropola (uz referencije napona i struje prema sl. 26); suprotni je par priključnica pri tom ili otvoreno (četveropol u praznom hodu), ili kratko spojen, ili zaključen linearnim pasivnim dvopolom određene impedancije. Četveropol promatran na jednom paru priključnica prikazuje se kao dvopol. Ulazna impedancija četveropola može se izraziti s pomoću parametara četveropola i impedancije opteretnog dvopola (tabl. 8).

Četveropol koji je na jednom paru priključnica zaključen linearnim aktivnim dvopolom može se na suprotnom paru nadomjestiti aktivnim dvopolom po Théveninu ili Nortonu (slika 31, vidi također str. 58).



Sl. 31. Nadomjesna shema po Théveninu za četveropol s obzirom na priključnice 2-2'

Svojstva parametara z i y RCLM-četveropola. Mreža sastavljena od elemenata R , C , L , M neka tvori četveropol. Matična jednadžba petlja te mreže (koja je u trenutku $t = 0$ prazna) glasi:

$$[U_k] = [R_{kl}] [I_k] + s [L_{kl}] [I_k] + \frac{1}{s} [S_{kl}] [I_k], \quad (25)$$

gdje su sve komponente vektora napona osim U_1 i U_2 (naponâ pridruženih prilazima četveropola) jednake nuli. Pomnoži li se jednadžba (25) s konjugirano transponiranim vektorom struje (zvjezdicom je označena konjugirano kompleksna vrijednost) dobiva se izraz:

$$I_1^* U_1 + I_2^* U_2 = [I_k^*]^{(t)} [R_{kl}] [I_k] + s [I_k^*]^{(t)} [L_{kl}] [I_k] + \frac{1}{s} [I_k^*]^{(t)} [S_{kl}] [I_k].$$

Kvadratne forme na desnoj su strani te jednadžbe funkcije energije linearne, pasivne, recipročne, vremenski invarijantne mreže, tako da je:

$$I_1^* U_1 + I_2^* U_2 = F_0(s) + s T_0(s) + \frac{1}{s} V_0(s) = W_2(s), \quad (26)$$

gdje je izraz u sredini pozitivno realna funkcija.

Jednadžba (26) izražena s pomoću z -parametara četveropola glasi (ako je $[z]$ matrica z -parametara):

$$[I^*]^{(t)} [U] = [I^*]^{(t)} [z] [I] = W_2(s),$$

Tablica 8
FORMULE ZA ULAZNU IMPEDANCIJU U ČETVEROPOL

Shema	Priključena impedancija	Ulazna impedancija, odnosno admitancija
	$Z_2 = \frac{U_2}{-I_2}$ $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$	$Z_{u1} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_2} = \frac{a_{11} z_2 + a_{12}}{a_{21} z_2 + a_{22}}$ $Y_{u1} = y_{11} - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{22} + Y_2}$
	$Z_1 = \frac{U_1}{-I_1}$ $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$	$Z_{u2} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_1} = \frac{b_{11} z_1 + b_{12}}{b_{21} z_1 + b_{22}}$ $Y_{u2} = y_{22} - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{11} + Y_1}$

odnosno:

$$I_1^* U_1 + I_2^* U_2 = I_1^* I_1 z_{11} + (I_1^* I_2 + I_1 I_2^*) z_{12} + I_2^* I_2 z_{22}, \quad (27)$$

gdje su $I_1^* \cdot I_1$ i $I_2^* \cdot I_2$ realne veličine, a $(I_1^* I_2 + I_1 I_2^*) = 2 \operatorname{Re} I_1 I_2^*$.

Ako je matrica y -parametara četveropola zadana, bit će:

$$[U^*]^{(t)} [I] = [U^*]^{(t)} [y] [U] = W_y(s),$$

odnosno:

$$U_1^* I_1 + U_2^* I_2 = U_1^* U_1 y_{11} + (U_1^* U_2 + U_1 U_2^*) y_{12} + U_2^* U_2 y_{22}, \quad (28)$$

gdje su $U_1^* \cdot U_1$ i $U_2^* \cdot U_2$ realne veličine a $(U_1^* U_2 + U_1 U_2^*) = 2 \operatorname{Re} U_1 U_2^*$.

$$U_1^* I_1 + U_2^* I_2 = F_0^*(s) + s V_0^*(s) + \frac{1}{s} T_0^*(s) = W_y(s).$$

Izraz u sredini pozitivno je realna funkcija. Funkcije $W_z(s)$ i $W_y(s)$, a time i kvadratne forme u izrazima (27) i (28), pozitivno su realne.

Za matricu pozitivno realne kvadratne forme kaže se da je pozitivno realna. Matrica z -parametara i matrica y -parametara linearnog, pasivnog recipročnog četveropola koji je sastavljen od elemenata sa vremenski invarijantnim parametrima (RCLM-četveropol) pozitivno su realne.

Budući da su $W_z(s)$ i $W_y(s)$ pozitivno realne funkcije, reziduumi su u polovima tih funkcija na osi $j\omega$ realni i pozitivni, što zahtijeva da matrica reziduuma z -parametra odnosno y -parametra u tim polovima bude pozitivno semidefinitna.

Da matrica reziduuma i -tog pola na osi $j\omega$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} \end{bmatrix} = [k^{(i)}]$$

bude pozitivno definitna ili semidefinitna, nužno je i dovoljno da determinanta te matrice i svi njezini glavni kofaktori ispunjavaju uvjete:

$$k_{11}^{(i)} k_{22}^{(i)} - k_{12}^{(i)} k_{21}^{(i)} \geq 0, \quad k_{11}^{(i)} \geq 0, \quad k_{22}^{(i)} \geq 0$$

To je uvjet reziduuma parametara z i y .

Dalji uvjet koji moraju ispuniti parametri z i y RLCM-četveropola, a koji također proizlazi iz analitičkih svojstava pozitivno realnih funkcija, jest da je

$$\operatorname{Re} z_{11} \geq 0, \quad \operatorname{Re} z_{22} \geq 0, \quad \operatorname{Re} z_{11} \operatorname{Re} z_{22} - (\operatorname{Re} z_{12})^2 \geq 0,$$

odnosno:

$$\operatorname{Re} y_{11} \geq 0, \quad \operatorname{Re} y_{22} \geq 0, \quad \operatorname{Re} y_{11} \operatorname{Re} y_{22} - (\operatorname{Re} y_{12})^2 \geq 0$$

za $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Zrcalni ili valni parametri četveropola linearnog, pasivnog, recipročnog, vremenski invarijantnog četveropola jesu ulazna i izlazna zrcalna impedancija Z_{c1} i Z_{c2} i zrcalna konstanta prijenosa g . Zrcalna impedancija i zrcalna konstanta prijenosa su izrazima (29).

Ako se sa Z_{k1} označi impedancija nakratko a sa Z_{p1} impedancija naprazno na priključnicama 1—1', te sa Z_{k2} impedancija nakratko a sa Z_{p2} impedancija naprazno na priključnicama 2—2', zrcalni su parametri pasivnog, linearnog, recipročnog četveropola dani izrazima

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{k1} Z_{p1}}, \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_{k2} Z_{p2}}, \quad \tanh g = \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}} = \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{p2}}}. \quad (29)$$

Pri određivanju zrcalnih parametara uzima se u obzir samo pozitivni predznak drugog korijena.

Zrcalna konstanta prijenosa $g = a + jb$ kompleksna je veličina; realni dio a te veličine zove se zrcalna konstanta gušenja, a imaginarni dio b zrcalna konstanta faze.

Faktor simetrije (omjer transformacije) četveropola zove se omjer $n = \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}}$. Kod simetričnih četveropola je $Z_{c1} = Z_{c2}$,

pa je faktor simetrije jednak 1. Zrcalna impedancija tih četveropola označuje se sa Z_c .

Ako se prijenosni parametri četveropola u prijenosnim jednažbama izraze s pomoću zrcalnih parametara, poprimaju ove jednažbe (uz referencije prema sl. 32) oblik:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cosh g & n Z_{c2} \sinh g \\ \frac{1}{n Z_{c2}} \sinh g & \frac{1}{n} \cosh g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \cosh g & -\frac{1}{n} Z_{c1} \sinh g \\ -\frac{1}{n Z_{c1}} \sinh g & n \cosh g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}.$$

Za simetrični četveropol treba u te jednažbe za n uvrstiti 1, a za Z_{c1} i Z_{c2} uvrstiti Z_c .

Ulazne impedancije četveropola izražene s pomoću zrcalnih parametara dane su u posljednjim recima tabl. 9.

Tablica 9
ZRCALNI PARAMETRI I ULAZNE IMPEDANCIJE RECIPROČNOG ČETVEROPOLA IZRAŽENI POMOĆU ZRCALNIH PARAMETARA

Zrcalna impedancija četveropola	$Z_{c1} = \sqrt{\frac{a_{11} a_{22}}{a_{21} a_{12}}} = \sqrt{Z_{k1} Z_{p1}}$ $Z_{c2} = \sqrt{\frac{a_{22} a_{11}}{a_{21} a_{12}}} = \sqrt{Z_{k2} Z_{p2}}$	
Faktor simetrije četveropola	$n = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}}$	Za simetrični četveropol je $n = 1$
Zrcalna konstanta prijenosa četveropola	$g = a + jb = \ln \left(\sqrt{\frac{a_{11} a_{22}}{a_{21} a_{12}}} + \sqrt{\frac{a_{11} a_{22}}{a_{21} a_{12}}} \right)$ $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{p2}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{p2}}}}$ $\tanh g = \sqrt{\frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}} = \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}} = \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{p2}}}$	
Ulazna impedancija na priključnicama 1—1', četveropola zaključenog sa Z_2	$Z_{u1} = \frac{\sinh g + \frac{Z_2}{Z_{c2}} \cosh g}{\cosh g + \frac{Z_2}{Z_{c2}} \sinh g} Z_{c1} = Z_{c1} \tanh(g + r_2) = Z_{c1} \frac{e^{2g} + p_2}{e^{2g} - p_2}$	
Ulazna impedancija na priključnicama 2—2', četveropola zaključenog sa Z_1	$Z_{u2} = \frac{\sinh g + \frac{Z_1}{Z_{c1}} \cosh g}{\cosh g + \frac{Z_1}{Z_{c1}} \sinh g} Z_{c2} = Z_{c2} \tanh(g + r_1) = Z_{c2} \frac{e^{2g} + p_1}{e^{2g} - p_1}$	

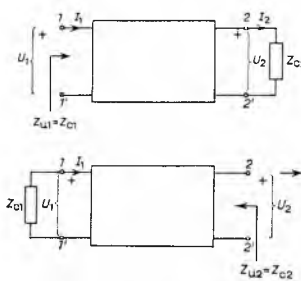
Za slučaj kratkog spoja na suprotnom paru priključnica ulazne su impedancije dane izrazima $Z_{k1} = Z_{c1} \tanh g$ i $Z_{k2} = Z_{c2} \tanh g$, a u slučaju praznog hoda dane su izrazima $Z_{p1} = Z_{c1} \coth g$ i $Z_{p2} = Z_{c2} \coth g$.

Prilagođenje po zrcalnim impedancijama. Specijalan je slučaj opterećenja četveropola kad impedancije na prilaze priključnih dvopola iznose: $Z_2 = Z_{c2}$

i $Z_1 = Z_{c1}$. U tom slučaju je $Z_{u1} = Z_{c1}$, odnosno $Z_{u2} = Z_{c2}$ (sl. 32). To znači: ako je četveropol na prilazu 2—2' zaključen dvopolom komu je impedancija jednaka Z_{c2} , bit će ulazna impedancija $Z_{u1} = Z_{c1}$, odnosno ako su priključnice 1—1' zaključene sa Z_{c1} , bit će $Z_{u2} = Z_{c2}$. Za četveropol koji je tako zaključen kaže se da je prilagođen po zrcalnim impedancijama. Često se polazi od tog specijalnog slučaja pri definiranju zrcalne impedancije.

Za četveropol koji je prilagođen po zrcalnim impedancijama vrijedi:

$$\frac{U_1}{U_2} = n e^g, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n} e^g.$$



Sl. 32. Četveropol zaključen zrcalnim impedancijama

U tehnici se prilagođenje po zrcalnim impedancijama često primjenjuje. Prijenosne jednadžbe i formule postaju onda vrlo jednostavne i pregledne. Međutim, zrcalna impedancija redovito nije pozitivno realna funkcija, pa je prilagođenje s pomoću priključenih dvopola RLC moguće postići samo približno za određeni pojas frekvencija (tačno samo za diskretan broj frekvencija). Kao mjera za postignuto prilagođenje služi koeficijent refleksije (ili pogreška prilagođenja) i koeficijent odstupanja zrcalne impedancije od ulazne.

Pogreška prilagođenja (koeficijent refleksije) dana je izrazima

$$p_1 = \frac{Z_1 - Z_{c1}}{Z_1 + Z_{c1}} \text{ za prilaz 1—1'},$$

$$p_2 = \frac{Z_2 - Z_{c2}}{Z_2 + Z_{c2}} \text{ za prilaz 2—2'},$$

gdje Z_1 znači impedanciju priključenu na priključnice 1—1', a Z_2 impedanciju priključenu na priključnice 2—2' četveropola. p_1 i p_2 kompleksne su veličine. Za slučaj pravilnog prilagođenja p_1 i p_2 jednaki su nuli, za slučaj kratkog spoja jednaki su -1 , a za slučaj praznog hoda, $+1$.

Koeficijent odstupanja ulazne impedancije Z_u od zrcalne Z_c dan je izrazima

$$d_1 = \frac{Z_{u1} - Z_{c1}}{Z_{u1} + Z_{c1}} \text{ za prilaz 1—1'},$$

$$d_2 = \frac{Z_{u2} - Z_{c2}}{Z_{u2} + Z_{c2}} \text{ za prilaz 2—2'}.$$

Koeficijent refleksije i koeficijent odstupanja ulazne impedancije od zrcalne vezani su među sobom relacijama:

$$d_1 = e^{-2g} p_2 \quad \text{i} \quad d_2 = e^{-2g} p_1.$$

Pogreška prilagođenja na jednom prilazu četveropola izaziva odstupanje ulazne impedancije od zrcalne na suprotnom prilazu. To je odstupanje proporcionalno pogreški prilagođenja, a faktor proporcionalnosti je e^{-2g} . Uz neku konačnu vrijednost pogreške prilagođenja odstupanje je ulazne impedancije od zrcalne to manje što je veće a , realni dio zrcalne konstante prijenosa (zrcalna konstanta gušenja). Ako je zrcalna konstanta gušenja dovoljno velika ($a \geq 2,5$ Np) može se uzeti da je ulazna impedancija približno jednaka zrcalnoj, bez obzira na pogrešku prilagođenja na suprotnom prilazu.

Uvede li se za mjeru prilagođenja izraz

$$r_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{c1} - Z_1}{Z_{c1} + Z_1} = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{p_1} \right),$$

odnosno izraz

$$r_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{c2} + Z_2}{Z_{c2} - Z_2} = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{p_2} \right),$$

(r_1 i r_2 su od Kennellyja uvedene hiperbolične mjere prilagođenja), može se ulazna impedancija izraziti izrazima

$$Z_{u1} = Z_{c1} \tanh(g + r_2) \quad \text{i} \quad Z_{u2} = Z_{c2} \tanh(g + r_1).$$

Ako su U_1, I_1, U_2, I_2 naponi i struje na priključnicama četveropola kad je ovaj prilagođen po zrcalnim impedancijama, bit će $e^{2g} = U_1 I_1 / U_2 I_2$, odnosno:

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} = \ln \frac{I_1}{I_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}.$$

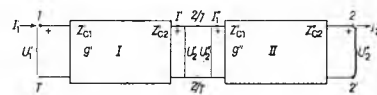
Zrcalna konstanta gušenja, kao realni dio od g , dana je izrazom

$$a = \ln \left| \frac{U_1}{U_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}} \right|.$$

Spajanje četveropola

Četveropoli mogu se jedni s drugima spojiti na više načina: u lanac (kaskadu), u seriju, paralelno, serijski-paralelno i paralelno-serijski. Svaka takva kombinacija četveropola predstavlja novi četveropol s parametrima koji ovise o parametrima međusobno spojenih četveropola i o načinu spajanja.

Spajanje u lanac ili kaskadu (sl. 33). Pri ovom se načinu spajanja na izlazne priključnice prvog četveropola priključuju ulazne priključnice narednog, itd. Priključnice lanca koje su u slici označene brojkama 1—1' i 2—2' zovu se vanjske priključnice ili prilaz lanca, a priključnice označene sa 2/1 i 2'/1' (na koje se nadovezuje naredni četveropol) unutarnje priključnice lanca.



Sl. 33. Spajanje četveropola u lanac

U lancu četveropola napon i struja na ulazu narednog četveropola jednaki su naponu, odnosno struji, na izlazu prethodnog četveropola: $U_2' = U_1''$, $I_2' = I_1''$, itd.

Prijenosni parametri lanca četveropola određuju se tako da se matrice prijenosnih parametara pojedinih četveropola množe

Tablica 10
PARAMETRI DVAJU MEĐUSOBNO SPOJENIH ČETVEROPOLA

Način spajanja	Odnos između napona i struje na priključnicama	Jednadžbe kombinacije četveropola	Parametri kombinacije četveropola
lanac (sl. 33)	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' \\ a_{21}'' & a_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}' a_{11}'' + a_{12}' a_{21}'' & a_{11}' a_{12}'' + a_{12}' a_{22}'' \\ a_{21}' a_{11}'' + a_{22}' a_{21}'' & a_{21}' a_{12}'' + a_{22}' a_{22}'' \end{bmatrix}$
serijski (sl. 35 a)	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$	$[U] = ([Z]' + [Z]'') [I]$	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}' + z_{11}'' & z_{12}' + z_{12}'' \\ z_{21}' + z_{21}'' & z_{22}' + z_{22}'' \end{bmatrix}$
paralelno (sl. 35 b)	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}$	$[I] = ([Y]' + [Y]'') [U]$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}' + y_{11}'' & y_{12}' + y_{12}'' \\ y_{21}' + y_{21}'' & y_{22}' + y_{22}'' \end{bmatrix}$
serijski-paralelno (sl. 35 c)	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = ([h]' + [h]'') \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}' + h_{11}'' & h_{12}' + h_{12}'' \\ h_{21}' + h_{21}'' & h_{22}' + h_{22}'' \end{bmatrix}$
paralelno-serijski (sl. 35 d)	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ U_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = ([g]' + [g]'') \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}' + g_{11}'' & g_{12}' + g_{12}'' \\ g_{21}' + g_{21}'' & g_{22}' + g_{22}'' \end{bmatrix}$

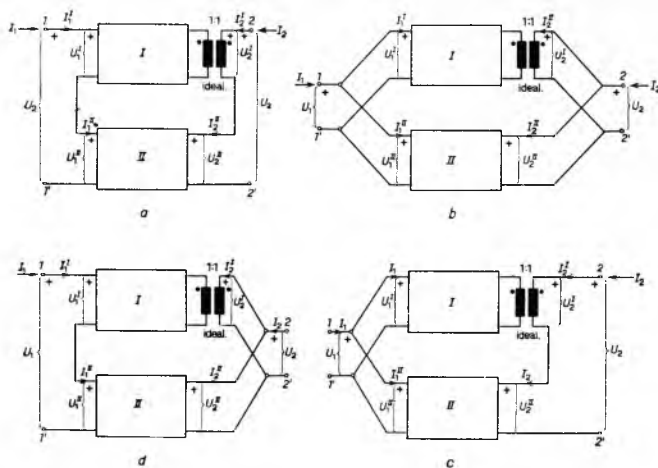
(redosljedom kao što stoje četveropoli u lancu): $[a] = [a^I] \cdot [a^{II}]$ (tabl. 10).

Ako su četveropoli koji su spojeni u lanac na unutarnjim priključcima prilagođeni po zrcalnim impedancijama, što znači za dva u lanac spojena četveropola da je $Z_{c2}' = Z_{c1}'$ (sl. 33), zrcalne su impedancije dane izrazima $Z_{c1} = Z_{c1}'$, $Z_{c2} = Z_{c2}'$, a zrcalna konstanta prijenosa izrazom $g = g' + g''$.

Dva jednaka nesimetrična četveropola vezana u lanac tako da su na unutarnjim priključnicama prilagođeni po zrcalnim impedancijama tvore simetrični četveropol (sl. 34).

Specijalan je slučaj lanac od n simetričnih četveropola jednake zrcalne impedancije Z_c i jednake zrcalne konstante prijenosa g_1 . U tom je slučaju zrcalna impedancija lanca četveropola jednaka zrcalnoj impedanciji četveropola Z_c , a zrcalna konstanta prijenosa lanca $g = n g_1$.

Serijsko spajanje četveropolâ. Pri tom su načinu spajanja prilazi četveropola spojeni u seriju (sl. 35 a). Parametri kombinacije četveropolâ što je tvore dva četveropola spojena u seriju mogu se odrediti s pomoću z -parametra pojedinih četveropola tako da se njihove z -matrice zbroje: $[z] = [z^I] + [z^{II}]$ (tabl. 10). Ovaj



Sl. 35. Spajanje četveropola: a) u seriju, b) paralelno, c) serijski-paralelno, d) paralelno-serijski

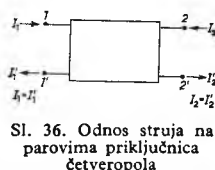
način određivanja z -parametara serijskog spoja dozvoljen je samo ako je i nakon spajanja četveropolâ u seriju za svaki četveropol ispunjen uvjet da je struja koja ulazi u jednu priključnicu prilazi jednaka struji koja izlazi iz druge priključnice tog prilaza. To znači prema sl. 36 da je $I_1 = I_1'$, $I_2 = I_2'$. Da bi taj uvjet bio sigurno ispunjen, uključi se u jedan par priključnica idealni transformator omjera prijenosa 1 : 1. Taj transformator nije potreban jedino ako je unutarnji spoj četveropola takav da je i bez njega ispunjen traženi uvjet.

Paralelno spajanje četveropolâ.

Pri tom su načinu spajanja četveropolâ prilazi spojeni paralelno (sl. 35 b). Ako je za svaki četveropol i nakon spajanja ispunjen uvjet da je $I_1 = I_1'$, i $I_2 = I_2'$ (sl. 36), matrica je y -parametara kombinacije četveropolâ što je tvore paralelno spojeni četveropoli jednaka zbroju y -parametara pojedinih četveropola $[y] = [y^I] + [y^{II}]$ (tabl. 10).

Serijsko-paralelno spajanje četveropolâ. U tom su slučaju ulazne priključnice spojene serijski, a izlazne paralelno (sl. 35 c). Uz ispunjen uvjet $I_1 = I_1'$ i $I_2 = I_2'$ (sl. 36) za svaki četveropol, bit će matrica h -parametara kombinacije četveropola što je tvore serijsko-paralelno spojeni četveropoli jednaka zbroju matrica h -parametara pojedinih četveropola: $[h] = [h^I] + [h^{II}]$ (tabl. 10).

Paralelno-serijsko spajanje četveropolâ. Ulazne priključnice spojene su paralelno a izlazne u seriju (sl. 35 d). Uz ispunjen



Sl. 36. Odnos struja na parovima priključnica četveropola

uvjet $I_1 = I_1'$ i $I_2 = I_2'$ (sl. 36) matrica g -parametara kombinacije četveropolâ što je tvore paralelno-serijski spojeni četveropoli jednaka je zbroju matrica g -parametara pojedinih četveropola $[g] = [g^I] + [g^{II}]$ (tabl. 10).

Mjere prijenosa

Svojstva prijenosnog sistema (sistema koji se sastoji od izvora ili generatora signala, četveropola kao prijenosnika signala i prijemnika signala) ocjenjuju se pomoću tzv. mjere prijenosa g . Mjera prijenosa definirana je općenito prirodnim logaritmom kvadratnog korijena omjera dviju kompleksnih snaga. Kompleksna snaga P dana je polovicom produkta fazora napona i fazora struje pridruženih jednom paru priključnica:

$$g = \ln \frac{P_{k0}}{P_{k2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{k0}}{P_{k2}} = a + j b, \quad (30)$$

gdje su: $P_{k0} = \frac{1}{2} U_0 I_0$, $P_{k2} = \frac{1}{2} U_2 I_2$, $U = |U| e^{j\varphi}$ fazor napona, a $I = |I| e^{j\varphi}$ fazor struje, P_{k2} je kompleksna snaga pridružena prijemniku (pasivnom dvopolu) impedancije Z_2 , a P_{k0} je kompleksna snaga koja služi za uspoređivanje sa snagom P_{k2} . Već prema tomu kako je snaga P_{k0} odabrana, razlikuju se pogonska i unesena mjera prijenosa.

Veličina a , realni dio mjere prijenosa, zove se *mjera gušenja* i osnovna je veličina pri ocjenjivanju vrijednosti prijenosnog sistema. Mjera gušenja (izražena u neperima) dana je prirodnim logaritmom kvadratnog korijena prividnih snaga P_{s0} i P_{s2}

$$a = \ln \sqrt{\frac{P_{s0}}{P_{s2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{s0}}{P_{s2}}.$$

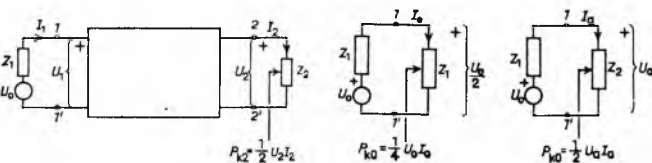
Veličina b , imaginarni dio mjere prijenosa, zove se *mjera faze*.

Pogonska mjera prijenosa definirana je jednadžbom (30) s time da je snaga s kojom se vrši uspoređivanje, $P_{k2} = \frac{1}{2} U_0 I_0$, kompleksna snaga koja se pridružuje priključnicama izvora (generatora signala) kada je na izvor priključen dvopol impedancije Z_1 koja je prilagođena izvoru, tj. jednaka impedanciji izvora (sl. 37 i 38).

Pogonsko gušenje, uz oznake prema sl. 38, iznosi prema tomu (u neperima):

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{P_{k0}}{P_{k2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{s0}}{P_{s2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{|U_0 I_0|}{|U_2 I_2|} = \ln \frac{|U_0|}{2|U_2|} + \frac{1}{2} \ln \frac{|Z_2|}{|Z_1|}.$$

Unesena mjera prijenosa definirana je jednadžbom (30) s time da je snaga s kojom se vrši uspoređivanje, $P_{k0} = \frac{1}{2} U_a I_a$, kompleksna snaga pridružena priključnicama generatora, uz priključeni pasivni dvopol impedancije jednake impedanciji prijemnika (Z_2 , sl. 37 i 39).



Sl. 37. Prijenosni sistem

Sl. 38. Značenje snage P_{k0} uz definiciju pogonskog gušenja

Sl. 39. Značenje snage P_{k0} uz definiciju unesenog gušenja

Uneseno gušenje iznosi prema tomu (u neperima, uz oznake prema sl. 39):

$$a_u = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{P_{k0}}{P_{k2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{s0}}{P_{s2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{|U_a I_a|}{|U_2 I_2|} = \ln \frac{|U_0|}{|U_2|} + \ln \frac{|Z_2|}{|Z_1 + Z_2|}.$$

Mjere prijenosa i gušenja definirane su i pomoću dekadskog logaritma, pa su tada pogonsko gušenje, odnosno uneseno gušenje dani (u decibelima) pomoću izraza:

$$a_p = 10 \log \left| \frac{P_{s0}}{P_{s2}} \right| = 20 \log \frac{|U_0|}{2|U_2|} + 10 \log \frac{|Z_2|}{|Z_1|},$$

$$a_u = 10 \log \frac{P_{s0}}{P_{s2}} = 20 \log \frac{|U_0|}{|U_2|} + 20 \log \frac{|Z_2|}{|Z_1 + Z_2|}.$$

Omjeri u logaritmičkom mjerilu, kakve predstavljaju mjera prijenosa i gušenja, izražavaju se obično u bezdimenzionim jedinicama: neperima ili belima, odn. decibelima. O tome v. u članku *Električna mjerenja*, TE 3, str. 633 i 636.

Analiza filtara pomoću zrcalnih parametara

Filtiri su četveropoli koji se primjenjuju prvenstveno u telekomunikacijskim napravama, npr. u visokofrekventnim telefonskim kanalnim uređajima, za razdvajanje sinusnih signala različitih frekvencija. Zadatak je filtra da propusti, uz što manje gušenje (slabljenje), samo struje i napone onih frekvencija koje leže u *propusnom području*, a da struje i napone svih ostalih frekvencija iz područja gušenja (*zapornog područja*) što više priguše. Filtiri se grade najčešće od kondenzatora i svitaka malih gubitaka (velikog faktora dobrote), koji se sastavljaju u sklopove oblika Π , T ili X. Da bi se poboljšala svojstva filtara, takvi se sklopovi ili njihove polovine sklapaju u lanac.

Na osnovi zrcalnih parametara električni se filter definira kao četveropol u kojem je zrcalna konstanta gušenja a (koja je funkcija frekvencije ω) u području propuštanja jednaka nuli, a u području gušenja različita od nule. Zrcalni parametri četveropola određuju se iz impedancija kratkog spoja i praznog hoda pripadnog para priključnica, a te su impedancije u četveropolima sastavljenim od elemenata L i C funkcije reaktancije. Funkcije su reaktancije na osi $j\omega$ pozitivne ili negativne, pa se na osnovi toga razlikuju dva slučaja: a) reaktancija pri kratkom spoju i praznom hodu promatrana na istom paru priključnica *istog je predznaka*, tj. pozitivna ili negativna:

$$Z_k = jX_k(\omega) = \pm j|X_k(\omega)|, \quad Z_p = jX_p(\omega) = \pm j|X_p(\omega)|;$$

b) reaktancija pri kratkom spoju i praznom hodu promatrana na istom paru priključnica *suprotnog je predznaka*, tj. jedna je pozitivna, a druga negativna:

$$Z_k = jX_k(\omega) = \pm j|X_k(\omega)|, \quad Z_p = jX_p(\omega) = \mp j|X_p(\omega)|.$$

U području frekvencija u kojemu su reaktancije $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ istog predznaka zrcalna je impedancija imaginarna veličina, a u području u kojemu su $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ suprotnog predznaka, realna veličina. Ako je pri nekoj frekvenciji jedna od vrijednosti pod korijenom nula ili beskonačno, i vrijednost je zrcalne impedancije nula ili beskonačno. Za pojas frekvencija u kome su $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ istog predznaka, $\tanh g$ je u izrazu (29) realan, a za frekvencije na kojima su $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ suprotnog predznaka, on je imaginaran. Izraz $\tanh g = \tanh(a + jb)$ može se rastaviti na realni i imaginarni dio:

$$\tanh(a + jb) = \frac{\sinh(a + jb)}{\cosh(a + jb)} = \frac{\sinh a \cosh b + j \cosh a \sinh b}{\sinh^2 a + \cosh^2 a + j \sinh a \cosh b + j \cosh a \sinh b} \quad (31)$$

Za slučaj a) mora imaginarni dio izraza (31) biti jednak nuli, a za slučaj b) mora realni dio biti jednak nuli. Za slučaj a): ako su $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ u nekom području frekvencije istog predznaka, tj. kad je $\tanh(a + jb)$ realan, u tom je području vrijednost zrcalne konstante gušenja veća od nule, a fazna konstanta ima za sve ω iz tog područja konstantnu vrijednost. To je područje gušenja filtra. Za slučaj b): ako su $X_k(\omega)$ i $X_p(\omega)$ u nekom području frekvencije suprotnog predznaka, to jest kad je $\tanh(a + jb)$ imaginaran, u tom je području vrijednost zrcalne konstante gušenja jednaka nuli, a fazna konstanta je funkcija od ω . To je područje propuštanja filtra. U području gušenja zrcalna impedancija Z_c je imaginarna, a u području propuštanja realna.

Sl. 40. Pojasi propuštanja i gušenja različitih tipova filtara. N. P. niski propust, V. P. visoki propust, P. P. pojasni propust, P. B. pojasna brana, p.p. pojas propuštanja, p.g. pojas gušenja, ω_1 i ω_2 granične frekvencije

bilo da prolazi kroz nulu ili kroz pol. Ako su u pojasu gušenja pri nekoj frekvenciji reaktancije jednake: $X_k = X_p$, pri toj je frekvenciji konstanta gušenja a beskonačno velika.

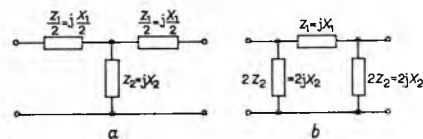
Frekvencija na granici dvaju pojasa (pojasa propuštanja i pojasa gušenja) zove se granična frekvencija. Ona se nalazi na mjestu gdje jedna od reaktancija (X_k ili X_p) mijenja predznak,

Prema rasporedu područja propuštanja i područja gušenja filtri se dijele na četiri temeljne grupe (sl. 40) s područjima propuštanja i gušenja prema ovoj tablici:

Vrst filtra	Područje propuštanja nalazi se između:	Područja gušenja nalazi se između:
niski propust	$0 < \omega < \omega_1$	$\omega_1 < \omega < \infty$
visoki propust	$\omega_1 < \omega < \infty$	$0 < \omega < \omega_1$
pojasni propust	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	$0 < \omega < \omega_1$ $\omega_2 < \omega < \infty$
pojasna brana	$0 < \omega < \omega_1$ $\omega_2 < \omega < \infty$	$\omega_1 < \omega < \omega_2$

ω_1 i ω_2 su granične frekvencije.

Simetrični reaktantni četveropol u spoju T ili Π prema slici 41 sastavljen je od elemenata s reaktancijama $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$.



Sl. 41. Simetrični filter: a u T-spoju, b u Π -spoju

Izraz za zrcalnu impedanciju simetričnog T-spoja je:

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}$$

a simetričnog Π -spoja:

$$Z_{c\Pi} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}$$

U oba je slučaja Z_c realan samo ako su $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$ suprotnog predznaka i $\frac{|X_1|}{4|X_2|} < 1$, inače je imaginaran.

Za područje propuštanja mora prema tome biti ispunjen uvjet:

$$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} < 0.$$

Frekvencija pri kojoj je

$\frac{X_1}{4X_2} = -1$ ili 0 granična je frekvencija.

Ako se polazi od izraza:

$$\sinh \frac{g}{2} = \sinh \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}},$$

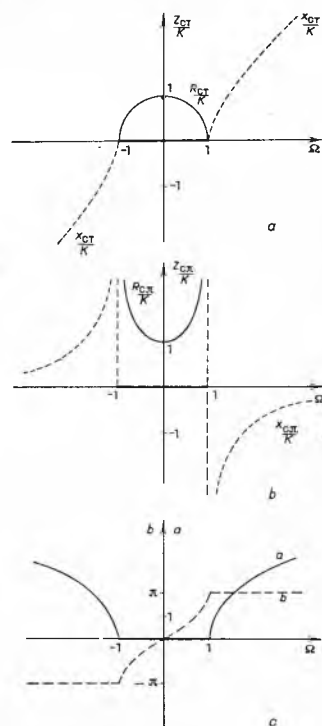
bit će za područje frekvencije za koje su $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$ istog predznaka:

$$\sinh \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \sqrt{\frac{|X_1|}{4|X_2|}} = p(\omega) > 0.$$

Za vrijednosti $p(\omega) > 0$ je područje gušenja.

U području frekvencija u kojem su $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$ suprotnog predznaka, bit će:

$$\sinh \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \pm j \sqrt{\frac{|X_1|}{4|X_2|}} = \pm j p(\omega).$$



Sl. 42. Karakteristične krivulje K-filtara: a zrcalna impedancija T-spoja, b zrcalna impedancija Π -spoja; c krivulja zrcalne konstante gušenja (a) i faze (b) T- i Π -spoja

To je ispunjeno za vrijednosti od $0 < p(\omega) < 1$, što odgovara području propuštanja, i za $p(\omega) > 1$, što odgovara području gušenja.

Tablica 11
FORMULE ZRCALNIH PARAMETARA FILTRA TIPa K

Područje	Parametri	Normirana frekvencija
propuštanja $-2K \leq X_1 \leq +2K$	$Z_{CT} = R_{CT} = K \sqrt{1 - \Omega^2}$ $Z_{CN} = R_{CN} = \frac{K}{\sqrt{1 - \Omega^2}}$ $a = 0$ $b = 2 \arcsin \Omega$	$\Omega = \frac{X_1}{2K}$
gušenja $X_1 < -2K$ $X_1 > +2K$	$Z_{CT} = jX_{CT} = jK \sqrt{\Omega^2 - 1}$ $Z_{CN} = jX_{CN} = \frac{K}{j\sqrt{\Omega^2 - 1}}$ $a = 2 \operatorname{arcosh} \Omega $ $b = \pm \pi$	

Filtri tipa K. Ako su elementi s impedancijama Z_1 i Z_2 simetričnog reaktantnog četveropola u spoju T ili Π odabrani tako da je:

$$Z_1 Z_2 = j X_1 \cdot j X_2 = K^2$$

(impedancije Z_1 i Z_2 su inverzne, K je neovisan o frekvenciji), bit će $X_1(\omega)$ uvijek suprotnog predznaka. U području gušenja filtera tipa K vrijedi: $-2K < X_1(\omega) < +2K$. Ostale veličine karakteristične za ovaj tip filtera dane su u tabl. 11 i 12.

Ovi se filtri obično zaključuju otporom R_1 . U filterima u T-spoju uzima se obično $R_1 = 0,8K$, a u filterima u Π -spoju obično $R_1 = 1,25K$.

Krivulja zrcalne impedancije kao funkcije frekvencije za filtre tipa K pokazuje da vrijednost impedancije jako varira u ovisnosti od ω , pa nije moguće postići prilagođenje ako je četveropol zaključen otporom R . Što se tiče krivulje gušenja u ovisnosti o frekvenciji, ona razmjerno sporo raste u području gušenja, i to počevši od vrijednosti nula na graničnoj frekvenciji pa do vri-

jednosti beskonačno (sl. 42). Za dobre filtre, međutim, traži se da je R_C što konstantniji i da krivulja $a(\omega)$ u blizini granične frekvencije što strmije raste. Stoga se filtri tipa K upotrebljavaju kao baza za proračun tzv. filtera tipa M, koji imaju povoljnije karakteristike i s kojima se ti filtri spajaju u lanac radi postizanja povoljnijih krivulja gušenja.

Filtri tipa M (Zobelovi filtri) izvedeni su iz filtera tipa K. Strmina je njihove krivulje $a(\omega)$ u blizini granične frekvencije velika. Elementi od kojih je sastavljen M-filtr određuju se iz elemenata filtera tipa K.

Izraz za konstantu $g/2$ M-filtra izraženu pomoću impedancije pri kratkom spoju Z_k i impedancije pri praznom hodu Z_p polučana filtera tipa K (sl. 43) glasi:

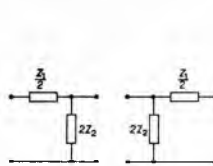
$$\tanh \frac{g}{2} = m \sqrt{\frac{Z_k'}{Z_p'}} = \sqrt{(m Z_k') \left(\frac{m}{Z_p'} \right)},$$

gdje je parametar m realan broj ($0 < m < 1$) odabran tako da je $\tanh g/2 = 1$ pri nekoj konačnoj frekvenciji u području gušenja u blizini granične frekvencije.

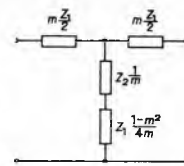
Zrcalna je impedancija tog četveropola

$$Z_c' = \sqrt{m Z_k' \cdot \frac{Z_p'}{m}} = \sqrt{Z_{kc} Z_p'}.$$

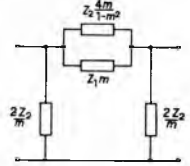
Ona je jednaka impedanciji K-filtra iz kojeg se M-filtr izvodi.



Sl. 43. Polučlanovi simetričnog filtra



Sl. 44. M-filtr u T-spoju



Sl. 45. M-filtr u Π -spoju

Za izvedeni filter u T-spoju (sl. 44) impedancije su u horizontalnoj grani:

$$Z_a = m Z_1,$$

a u vertikalnoj grani:

$$Z_b = \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1 - m^2}{4m},$$

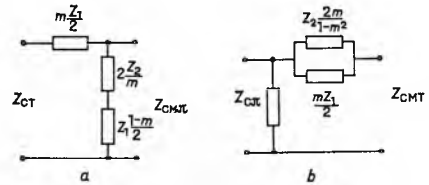
Tablica 12
POLUČLANOVI FILTRA TIPa K

Vrsta filtra	Filterarski polučlan	Elementi filtra	Normirana frekvencija	Granična frekvencija
Niski propust		$L_1 = \frac{2K}{\omega_1}$ $C_2 = \frac{2}{\omega_1 K}$	$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$	$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}$
Visoki propust		$C_1 = \frac{1}{2\omega_1 K}$ $L_2 = \frac{K}{2\omega_1}$	$\Omega = \frac{\omega_1}{\omega}$	$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}$
Pojasni propust		$L_1 = \frac{2K}{\omega_2 - \omega_1}$ $C_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1 \omega_2 K}$ $L_2 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)K}{2\omega_1 \omega_2}$ $C_2 = \frac{2}{(\omega_2 - \omega_1)K}$	$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_1 \omega_2}{\omega(\omega_1 - \omega_2)}$	$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{C_1 L_1}} \pm \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$
Pojasna brana		$L_1 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)2K}{\omega_1 \omega_2}$ $C_1 = \frac{1}{2K(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_2 = \frac{K}{2(\omega_2 - \omega_1)}$ $C_2 = \frac{2(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_2 \omega_1 K}$	$\Omega = \frac{(\omega_2 - \omega_1)\omega}{\omega_1 \omega_2 - \omega^2}$	$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}}$

gdje su Z_a i Z_b impedancije elemenata novog filtra, a Z_1 i Z_2 elemenata osnovnog filtra (K -filtra). Elementi Z_a i Z_b filtra u spoju II jesu (sl. 45)

$$Z_b = \frac{Z_2}{m},$$

$$Z_a = \frac{1}{\frac{1}{Z_2} \cdot \frac{1-m^2}{4m} + \frac{1}{mZ_1}}.$$



Sl. 47. Polučlanovi MT- i MII-filtra

Širina pojasa propuštanja i granična frekvencija M -filtra iste su kao za pripadni K -filtr iz kojeg je M -filtr izveden. Karakteristične veličine filtra tipa M dane su u tabl. 13.

danciju koja odgovara zrcalnoj impedanciji K -prototipa u spoju T. Zrcalna impedancija s desne strane po frekvencijskoj ovisnosti razlikuje se od zrcalne impedancije prototipa u spoju II.

Tablica 13
KARAKTERISTIČNE VELIČINE I FORMULE FILTARA TIPRA M (ZOBELOVIH FILTARA)

	M -filtr u T-spoju	M -filtr u II-spoju
Elementi filtra	$Z_a = mZ_1$ $Z_b = \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m}$	$Z_a = \frac{1}{\frac{1}{Z_2} \cdot \frac{1-m^2}{4m} + mZ_1}$ $Z_b = \frac{1}{m} Z_2$
Zrcalne impedancije	$Z_{CT} = K\sqrt{1-\Omega^2}$ sl. 41 a $Z_{CMT} = \frac{K\sqrt{1-\Omega^2}}{1-(1-m^2)\Omega^2}$ sl. 44	$Z_{CII} = \frac{K}{\sqrt{1-\Omega^2}}$ sl. 41 b $Z_{CMI} = K \frac{1-(1-m^2)\Omega^2}{\sqrt{1-\Omega^2}}$ sl. 45
Područje propuštanja	$-1 < \Omega < +1$	$a = 0$ $b = 2 \arcsin \frac{m\Omega}{\sqrt{1-(1-m^2)\Omega^2}}$
Područje gušenja	$1 < \Omega < \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \Omega_\infty$ $-\Omega_\infty = -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} < \Omega < -1$	$a = 2 \operatorname{arccosh} \frac{m \Omega }{\sqrt{1-(1-m^2)\Omega^2}}$ $b = +\pi$ $b = -\pi$
	$\Omega > \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \Omega_\infty$ $\Omega < -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = -\Omega_\infty$	$a = 2 \operatorname{arsinh} \frac{m \Omega }{(1-m^2)\Omega^2 - 1}$ $b = 0$
	$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} a = 2 \operatorname{arsinh} \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$	
	$a = \infty$ u $\Omega = \Omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$	

Z_1, Z_2 i K se odnose na osnovni filter (K -filtr)

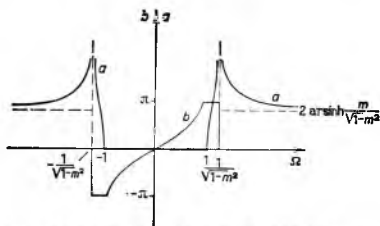
$\Omega = \frac{X_1}{2K}$ je normirana frekvencija ($Z_1 = jX_1$)

Ako su poznati elementi s reaktancijom $X_1(\omega)$ i K , odnosno $X_2(\omega)$ i K , osnovnog K -filtra, i ako je zadana kružna frekvencija ω_∞ unutar područja gušenja pri kojoj treba da je $a(\omega_\infty) = \infty$, pripadna se vrijednost m koja određuje elemente izvedenog filtra (M -filtra) dobiva iz izraza

$$m = \sqrt{1 + \frac{4X_2(\omega_\infty)}{X_1(\omega_\infty)}} = \sqrt{1 - \frac{4K^2}{X_1^2(\omega_\infty)}}.$$

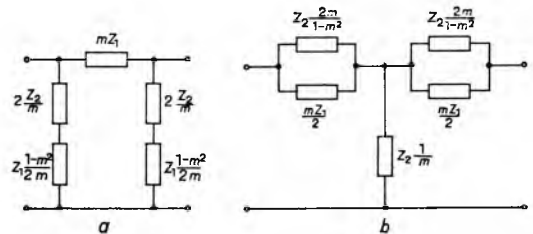
Tim je izrazom dana ovisnost m o izboru frekvencije ω_∞ . X_1 je element filtra tipa K .

Sl. 46 prikazuje ovisnost veličina a i b filtra tipa M o veličini $\Omega = X_1/2K$ osnovnog filtra. Ω je realna veličina ovisna o frekvenciji a zove se normirana frekvencija.

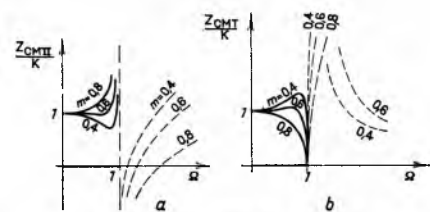
Sl. 46. Krivulja $a(\Omega)$ i $b(\Omega)$ M -filtra

Prikazani filtri tipa M izvedeni su iz osnovnog filtra tipa K u spoju T ili II tako da je zrcalna impedancija izvedenog filtra ostala jednaka zrcalnoj impedanciji osnovnog filtra. Ako se M -filtr u konfiguraciji T raspolovi, kao što je to prikazano na sl. 47 a, tako dobiveni filterski polučlan ima s lijeve strane zrcalnu impe-

Ako se dvije takve polovice sastave u novi spoj II (sl. 48 a), imat će novi filter jednaku krivulju gušenja i krivulju fazne konstante kao filter tipa M u spoju T, od kojeg su i dobivene te polovice, a tok krivulje Z_C bit će prema sl. 49 a.

Sl. 48. M -filtr u II-spoju izveden iz T-spoja (a) i M -filtr u T-spoju izveden iz II-spoja (b)

Ako se opisani postupak primijeni na filter tipa M u spoju II (sl. 47 b), dobiva se zaokrenuti filter tipa M u spoju T (sl. 48 b). Ovako sastavljeni filter ima istu karakteristiku gušenja i iste fazne



Sl. 49. Krivulje zrcalne impedancije

konstante kao M -filtr u spoju II, a razlikuje se od tog filtra po toku krivulje zrcalne impedancije u ovisnosti o frekvenciji (sl. 49 b).

Krivulje u sl. 49 a i b pokazuju da je za $m = 0,6$ zrcalna impedancija filtera dobivenih na opisani način u velikom dijelu područja propuštanja gotovo konstantna.

Sinteza mreža

Pod sintezom mreže razumijeva se određivanje strukture mreže ili iz zadane funkcije imitancije, ili iz zadane prijenosne funkcije, ili iz zadanog sloga ovakvih funkcija. Da bi se na osnovi funkcije imitancije ili prijenosne funkcije mogla provesti sinteza mreže, zadana funkcija mora da zadovoljava sve nužne i dovoljne uvjete koje dotičnu funkciju čine funkcijom mreže. Ako zadana funkcija nije takva, treba je aproksimirati funkcijom koja zadovoljava spomenute uvjete. To se često događa ako je funkcija mreže zadana krivuljom koja odgovara pretpostavljenim idealnim pogonskim zahtjevima. Često je karakteristična funkcija linearne, pasivne, recipročne, vremenski invarijantne mreže zadana parcijalno, to jest, zadan je samo realni ili samo imaginarni njezin dio, ili pak samo modul (apsolutna vrijednost) ili argument (fazni kut). Tako zadanim podacima mogu se odrediti ostali dijelovi funkcije koji zajedno sa zadanima daju kompletnu funkciju mreže koja zadovoljava nužne i dovoljne uvjete. Ako postoji rješenje postavljenog zadatka, ono nije jedino. Postoji općenito beskonačan broj rješenja, a prema tome i mreža koje su s obzirom na zadanu karakterističnu funkciju ekvivalentne. Koja će se od rješenja primijeniti ovisi o nekim drugim postavljenim zahtjevima.

Sinteza mreža obuhvaća tri osnovna problema: a) problem aproksimacije zadane funkcije funkcijom koja zadovoljava nužne i dovoljne uvjete da bi mogla biti realizirana mrežom određene vrste; b) problem realizacije, tj. odabiranje i provođenje jednog postupka realizacije koji dovodi do sheme mreže; c) problem ekvivalencije, tj. određivanje mreža ekvivalentnih mreži koja je dobivena odabranim postupkom. Ako zadana funkcija predstavlja funkciju imitancije, dobiva se kao rješenje zadatka (ako ono uopće postoji) mreža kojoj je imitancija na određenom paru čvorišta jednaka zadanjoj. Već prema klasi kojoj pripada zadana funkcija bit će tražena mreža sastavljena od elemenata C i L , R i L , R i C ili R , L , M , C . Određivanje elemenata mreže koja sadrži samo dvije vrste elemenata može se provesti tako da se zadana funkcija (koja mora zadovoljavati sve nužne i dovoljne uvjete funkcije imitancije dotične klase mreže) rastavi na parcijalne razlomke ili u verižni razlomak. Tim su postupkom dobivene mreže (dvopoli), tzv. kanonske mreže (dvopoli), koje realiziraju zadanu funkciju s najmanjim brojem potrebnih elemenata. Sintezu CL -dvopola rastavljanjem na parcijalne razlomke proveo je prvi R. M. Foster (1924), a RC - i RL -dvopola W. Cauer (1926).

Za sintezu $RLMC$ -mreža ima više postupaka. Prvu sintezu mreže sastavljene od elemenata R , L , M , C iz zadane funkcije impedancije proveo je O. Brune (1931), pa se od njega primijenjena metoda po njemu i naziva. Bruneovom metodom dobiveni dvopol sadrži općenito elemente R , C , L i M .

Prema S. Darlingtonu realizacija funkcije imitancije može se provesti uvijek tako da dobivena mreža sadrži samo jedan otpor, a ostalo su reaktantni elementi. Prema Bott-Duffinu se svaka pozitivno realna funk-

cija može realizirati kao funkcija imitancije mreže koja ne sadrži transformatore. Dalje metode realizacije mreža sa zadanom funkcijom imitancije dali su Miyata, Fialkov-Gerst, Nai-ta Ming i drugi.

Metoda realizacije mreža s dva prilaza (četveropola) uz zadanu funkciju prenosa ima više. Pored toga što se zadaje funkcija prijenosa, redovito se postavlja i zahtjev da četveropol mora biti sastavljen od određene vrste elemenata, npr. od elemenata L i C ili elemenata R i C , i da je zaključen na propisani način, redovito otporom. U područje sinteze idu različite metode realizacije filtera, zaokretača faza, linija za kašnjenje (zateznih četveropola), korektora i sl.

Sinteza LC -dvopola. Funkcija reaktancije (susceptancije) $W(s)$ neparna je funkcija kompleksne frekvencije (s) kod kojih je $\text{Par } W(s) = 0$ [gdje $\text{Par } W(s)$ znači parni dio funkcije $W(s)$], a dana je izrazima

$$W(s) = \frac{P_v(s)}{Q_n(s)}, \text{ odnosno } W(s) = \frac{P_n(s)}{Q_v(s)}.$$

Kako razlika između potencije polinoma u brojniku i nazivniku smije biti samo jednaka 1, funkcija reaktancije (susceptancije) može imati ova četiri oblika:

$$W_1(s) = \frac{a_{2n} s^{2n} + a_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_0}{b_{2n-1} s^{2n-1} + b_{2n-3} s^{2n-3} + \dots + b_3 s^3 + b_1 s},$$

$$W_2(s) = \frac{a_{2n} s^{2n} + a_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_0}{b_{2n+1} s^{2n+1} + b_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + b_3 s^3 + b_1 s},$$

$$W_3(s) = \frac{a_{2n-1} s^{2n-1} + a_{2n-3} s^{2n-3} + \dots + a_3 s^3 + a_1 s}{b_{2n} s^{2n} + b_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + b_2 s^2 + b_0},$$

$$W_4(s) = \frac{a_{2n+1} s^{2n+1} + a_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + a_3 s^3 + a_1 s}{b_{2n} s^{2n} + b_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + b_2 s^2 + b_0}.$$

Zbroj polinoma u brojniku i nazivniku funkcije reaktancije (susceptancije) daje tzv. Hurwitzov polinom.

Polinomi u brojniku i nazivniku gornjih izraza pisani u faktorskom obliku i uz $s = j\omega$ daju:

$$W_1(j\omega) = \frac{H (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{j\omega (\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n}^2 - \omega^2)}, \quad (32)$$

$$W_2(j\omega) = \frac{H (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}{j\omega (\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n}^2 - \omega^2)}, \quad (33)$$

$$W_3(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}, \quad (34)$$

$$W_4(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}, \quad (35)$$

gdje je H pozitivna, realna veličina, a

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2n-1} < \omega_{2n} < \infty$$

Indeks uz ω ovisan je o najvećoj potenciji polinoma u nazivniku, odnosno brojniku. ω_1 do ω_{2n} interni su polovi ili nule funkcije reaktancije (susceptancije). Karakterističan tok ovih funkcija prikazan je u sl. 50.

Recipročna vrijednost funkcije reaktancije opet je funkcija reaktancije.

Izrazi (32) do (35) rastavljeni na parcijalne razlomke daju:

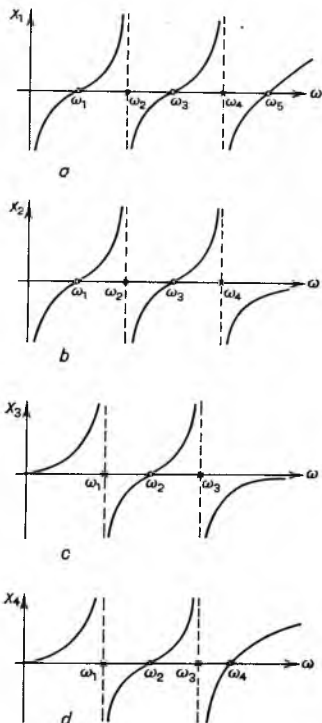
$$W_1(j\omega) = j\omega k_\infty + \frac{k_0}{j\omega} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{j\omega k_{2l}}{\omega_{2l}^2 - \omega^2}, \quad (36)$$

$$W_2(j\omega) = \frac{k_0}{j\omega} + \sum_{l=1}^n \frac{j\omega k_{2l}}{\omega_{2l}^2 - \omega^2}, \quad (37)$$

$$W_3(j\omega) = \sum_{l=1}^n \frac{j\omega k_{2l-1}}{\omega_{2l-1}^2 - \omega^2}, \quad (38)$$

$$W_4(j\omega) = j\omega k_\infty + \sum_{l=1}^n \frac{j\omega k_{2l-1}}{\omega_{2l-1}^2 - \omega^2}. \quad (39)$$

Značenje članova u ovim izrazima dano je u tabl. 14. k_{2l} i k_{2l-1}



Sl. 50. Tipovi krivulja funkcije reaktancije (susceptancije) LC -dvopola. Krivulje a...d odgovaraju izrazima (32) ... (35)

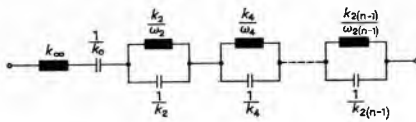
pozitivne su realne veličine. (Za jednu vrijednost od l u tabl. 14 označene su obje sa k_a .)

Tablica 14
ELEMENTI FOSTEROVIH KANONSKIH LC-DVOPOLA

Mreža	$Z(s)$		$Y(s)$	
	$k_\infty s$	$L = k_\infty$	$\frac{k_0}{s}$	$L = \frac{1}{k_0}$
	$\frac{k_0}{s}$	$C = \frac{1}{k_0}$	$k_\infty s$	$C = k_\infty$
	$k_\infty s + \frac{k_0}{s}$	$L = k_\infty$ $C = \frac{1}{k_0}$	$\frac{s k_a}{\omega_a^2 + s^2}$	$L = \frac{1}{k_a}$ $C = \frac{k_a}{\omega_a^2}$
	$\frac{s k_a}{\omega_a^2 + s^2}$	$L = \frac{k_a}{\omega_a^2}$ $C = \frac{1}{k_a}$	$k_\infty s + \frac{k_0}{s}$	$L = \frac{1}{k_0}$ $C = k_\infty$

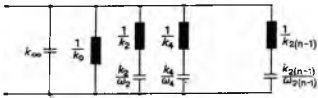
$$\omega_a = 1/\sqrt{LC}$$

Znače li $W_1(j\omega)$ do $W_4(j\omega)$ reaktancije, desna strana izraza (36) do (39) odgovara zbroju reaktancija dvopola prema tabl. 14, stupac $Z(s)$, i serijskom spoju tih dvopola prema sl. 51.



Sl. 51. Fosterov kanonski oblik LC-dvopola (realizacija iz zadane reaktancije)

Znače li $W_1(j\omega)$ do $W_4(j\omega)$ susceptancije, desna strana izraza (36) do (39) odgovara zbroju susceptancija dvopola prema tabl. 14, stupac $Y(s)$, i paralelnom spoju tih dvopola prema sl. 52. LC-dvopoli prema slikama 51 i 52 zovu se *Fosterovi kanonski oblici LC-dvopola*.



Sl. 52. Fosterov kanonski oblik LC-dvopola (realizacija iz zadane susceptancije)

(susceptancije), uvijek se može LC-dvopol odrediti u kanonskom obliku. Njegova funkcija reaktancije (susceptancije) jednaka je onda zadanoj funkciji (sinteza LC-dvopola po Fosteru). Sinteza LC-dvopola na osnovi zadane funkcije reaktancije (susceptancije) može se provesti i razvijanjem zadane funkcije u verižni razlomak (sinteza LC-dvopola po Caueru). Razvoj se prekida kod posljednjeg člana koji predstavlja ili reaktanciju ili susceptanciju induktiviteta ili kapaciteta. Primjena tog postupka daje LC-dvopole u tzv. ljestvičastom spoju (v. npr. sl. 59).

Sinteza dvopola RC i RL. Funkcija impedancije RC-dvopola, odn. funkcija admitancije RL-dvopola pozitivno su realne funkcije tipa

$$W_1(s) = \frac{K}{s} \frac{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m-1})}{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}, \quad (40)$$

$$W_2(s) = K \frac{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}, \quad (41)$$

$$W_3(s) = \frac{K}{s} \frac{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}, \quad (42)$$

$$W_4(s) = K \frac{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}, \quad (43)$$

Funkcija impedancije RL-dvopola, odn. funkcija admitancije RC-dvopola pozitivno su realne funkcije tipa

$$W_1(s) = K s \frac{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}, \quad (44)$$

$$W_2(s) = K \frac{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}, \quad (45)$$

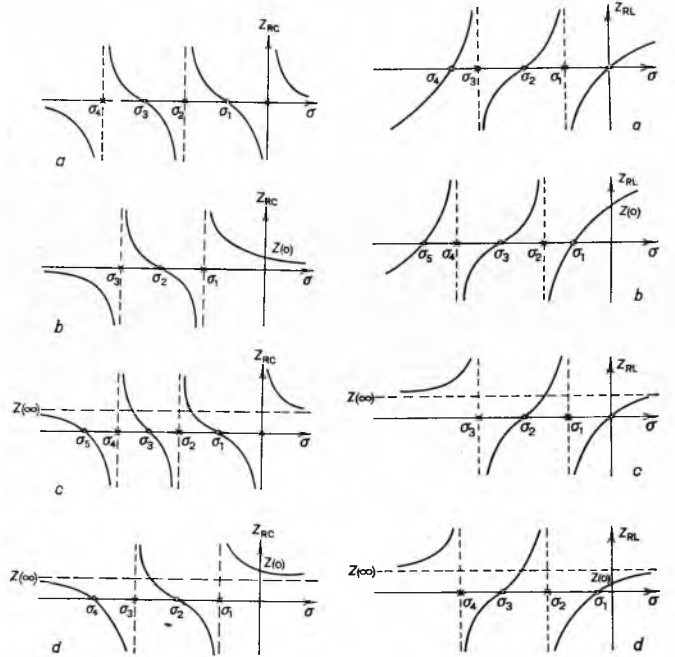
$$W_3(s) = K s \frac{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}, \quad (46)$$

$$W_4(s) = K \frac{(s - \sigma_1)(s - \sigma_3) \dots (s - \sigma_{2m+1})}{(s - \sigma_2)(s - \sigma_4) \dots (s - \sigma_{2m})}. \quad (47)$$

K je pozitivna realna konstanta, $2m$ odnosno $(2m+1)$ ukupni je broj internih polova i nula (koji ne leže u $s = 0$ ili ∞), s time da vrijede relacije

$$-\infty < \sigma_{2m+1} < \sigma_{2m} < \dots < \sigma_2 < \sigma_1 < 0$$

Karakterističan je tok ovih funkcija za $s = \sigma + j0$ (za vrijednosti na realnoj osi), tj. tok krivulja $W(\sigma)$ koje su prikazane u sl. 53 i 54.



Sl. 53. Tipovi krivulja funkcije $Z_{RC}(\sigma)$ i $Y_{RL}(\sigma)$. Krivulje a ... d odgovaraju izrazima (40) ... (43)

Sl. 54. Tipovi krivulja funkcije $Z_{RL}(\sigma)$ i $Y_{RC}(\sigma)$. Krivulje a ... d odgovaraju izrazima (44) ... (47)

Zadanoj funkciji koja zadovoljava sve uvjete funkcije imitancije RC- ili RL-dvopola može se uvijek odrediti RC-, odnosno RL-dvopol kojemu je imitancija jednaka zadanoj (sinteza RC- ili RL-dvopola). Sinteza se može provesti tako da se zadana funkcija imitancije rastavi na parcijalne razlomke ili razvije u verižni razlomak.

Rastavljanje izrazâ (40) do (43) na parcijalne razlomke daje:

$$W_1(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_{l=1}^m \frac{k_{2l}}{s - \sigma_{2l}}, \quad (48)$$

$$W_2(s) = \sum_{l=0}^m \frac{k_{2l+1}}{s - \sigma_{2l+1}}, \quad (49)$$

$$W_3(s) = k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum_{l=1}^m \frac{k_{2l}}{s - \sigma_{2l}}, \quad (50)$$

$$W_4(s) = k_\infty + \sum_{l=1}^m \frac{k_{2l-1}}{s - \sigma_{2l-1}}. \quad (51)$$

k_0 , k_∞ i k_{2l-1} , k_{2l} , k_{2l+1} su pozitivne realne veličine, a $2m$, odnosno $(2m-1)$, ukupni je broj internih polova i nula, k_{2l-1} , k_{2l} , k_{2l+1} su reziduumi koji pripadaju polovima funkcije $W(s)$.

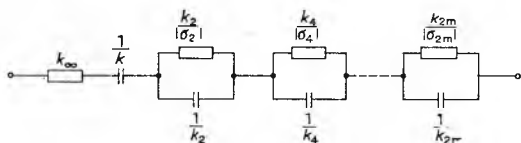
Ako je $W(s)$ funkcija impedancije RC -dvopola, desna strana izraza (48) do (51) odgovara zbroju impedancija dvopola prema

Tablica 15
ELEMENTI RC - I RL -DVOPOLA

Mreža	$Z(s)$		$Y(s)$	
	k_{∞}	$R = k_{\infty}$	k_0	$R = \frac{1}{k_0}$
	$\frac{k_0}{s}$	$C = \frac{1}{k_0}$	$s k_{\infty}$	$C = k_{\infty}$
	$k_{\infty} + \frac{k_0}{s}$	$R = k_{\infty}$ $C = \frac{1}{k_0}$	$\frac{s k_2}{s - \sigma_a}$	$R = \frac{1}{k_a}$ $C = \frac{k_a}{-\sigma_a}$
	$\frac{k_a}{s - \sigma_a}$	$R = \frac{k_a}{-\sigma_a}$ $C = \frac{1}{k_a}$	$k_0 + s k_{\infty}$	$R = \frac{1}{k_0}$ $C = k_{\infty}$
	k_0	$R = k_0$	k_{∞}	$R = \frac{1}{k_{\infty}}$
	$s k_{\infty}$	$L = k_{\infty}$	$\frac{k_0}{s}$	$L = \frac{1}{k_0}$
	$k_0 + s k_{\infty}$	$R = k_0$ $L = k_{\infty}$	$\frac{k_a}{s - \sigma_a}$	$R = \frac{-\sigma_a}{k_a}$ $L = \frac{1}{k_a}$
	$\frac{s k_a}{s - \sigma_a}$	$R = k_a$ $L = \frac{k_a}{-\sigma_a}$	$k_{\infty} + \frac{k_0}{s}$	$R = \frac{1}{k_{\infty}}$ $L = \frac{1}{k_0}$

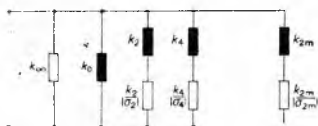
$$\sigma_a = -\frac{1}{RC}, \text{ za } RC\text{-dvopol} \quad \sigma_a = -\frac{R}{L}, \text{ za } RL\text{-dvopol}$$

tabl. 15, a $W(s)$ je impedancija serijskog spoja dvopola prema sl. 55. Veličine k_{2l-1} , k_{2l} , odn k_{2l+1} za jednu vrijednost od l označene su u tabl. 16 sa k_a .



Sl. 55. RC -dvopol (realizacija iz zadane $ZRC(s)$)

Ako je $W(s)$ funkcija admitancije RL -dvopola, članovi s desne strane izraza (48) do (51) odgovaraju admitancijama elemenata



Sl. 56. RL -dvopol (realizacija iz zadane $YRL(s)$)

prema tabl. 15, a $W(s)$ je admitancija paralelnog spoja dvopola prema sl. 56.

Izrazi (44) do (47) podijeljeni sa s , rastavljeni na parcijalne razlomke i ponovo pomnoženi sa s daju:

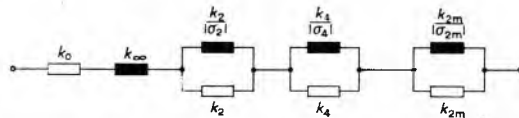
$$W_1(s) = k_{\infty} s + \sum_{l=1}^m \frac{s k_{2l-1}}{s - \sigma_{2l-1}},$$

$$W_2(s) = k_{\infty} s + k_0 + \sum_{l=1}^m \frac{s k_{2l}}{s - \sigma_{2l}},$$

$$W_3(s) = \sum_{l=0}^m \frac{s k_{2l+1}}{s - \sigma_{2l+1}},$$

$$W_4(s) = k_0 + \sum_{l=1}^m \frac{s k_{2l}}{s - \sigma_{2l}}.$$

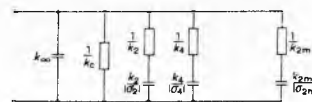
$k_0, k, k_{2l-1}, k_{2l}, k_{2l+1}$ pozitivne su realne veličine, $k_{2l-1}, k_{2l}, k_{2l+1}$ su reziduumi koji pripadaju polovima funkcije $W(s)$, a $2m$, odnosno $(2m+1)$, ukupni je broj internih polova i nula.



Sl. 57. RL -dvopol (realizacija iz zadane $ZRL(s)$)

Ako je $W(s)$ funkcija impedancije RL -dvopola, desna strana upravo navedenih izraza odgovara zbroju impedancija dvopola prema tabl. 15, a $W(s)$ je impedancija serijskog spoja dvopola prema sl. 57.

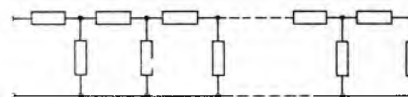
Ako je $W(s)$ funkcija admitancije RC -dvopola, članovi s desne strane tih izraza odgovaraju admitancijama elemenata pre-



Sl. 58. RC -dvopol (realizacija iz zadane $YRC(s)$)

ma tabl. 15, a $W(s)$ je admitancija paralelnog spoja dvopola prema sl. 58.

Razvijanjem zadane funkcije imitancije RC - ili RL -dvopola u verižni razlomak mogu se odrediti elementi tih dvopola u ljestvičastom spoju. Razvoj u verižni razlomak funkcije impedancije



Sl. 59. Dvopol u ljestvičastom spoju

ili admitancije RC - odnosno RL -dvopola, počevši od najviše ili najniže potencije, daje dvopol u ljestvičastom spoju oblika prema sl. 59.

M. Plohl

NELINEARNI KRUGOVI I SKLOPOVI

Krugovi i sklopovi su nelinearni kad sadrže jedan ili više nelinearnih sastavnih dijelova (elemenata). Parametri takvih krugova i sklopova (otpor, induktivitet, faktor pojačanja, itd.) nisu svi konstantni, nego se neki od njih mijenjaju s promjenom pojedinih ovisnih varijabli (naboja, struje, napona, itd.). Prikaz svojstava nelinearnih sklopova prirodno se nadovezuje na opis linearnih sklopova. Ipak treba pri tome imati na umu da se linearni i nelinearni sklopovi po svojim svojstvima veoma razlikuju. Osnovna je karakteristika te razlike što prilikom analize i sistematizacije svojstava nelinearnih sklopova postoji znatno manja mogućnost uopćavanja nego prilikom analize linearnih sklopova. To ima kao posljedicu razliku u načinu izlaganja materije nelinearnih sklopova. Za linearne sklopove može se postaviti sasvim općenita teorija sklopova, a pojedini problemi samo su ilustracija te opće teorije. Pri prikazu nelinearnih sklopova, naprotiv, uobičajeno je poći od svojstava tipičnih nelinearnih sklopova. Više karakterističnih osobina nelinearnih sklopova, i bez opće teorije, dobro ilustrira koji se sve efekti u nelinearnim sklopovima mogu očekivati. U tom smislu sastavljen je i ovaj pregled nelinearnih sklopova. Na nekoliko karakterističnih primjera određena su i naglašena ona svojstva nelinearnog sklopa koja proizlaze upravo iz nelinearnosti nekog elementa u sklopu.

Problematika nelinearnih sklopova i načini njihove analize

Svako tačnije i općenito razmatranje nelinearnih sklopova polazi od fizičkih svojstava realnog (za razliku od idealnog) sklopa, koja se istražuju matematičkim sredstvima. Da bi se problem struje ili napona u sklopu mogao formulirati matematički, svojstva stvarnog sklopa treba u manjoj ili većoj mjeri pojednostavniti. Neka vrsta obrnutog razmjera postoji između stepena pojednostavnjenja i količine zaključaka o svojstvima sklopa koja se mogu analizom izvedenih jednadžbi predvidjeti ili opisati. Većem pojednostavnjenju odgovara manji broj predvidljivih svojstava i obrnuto, ali uz veće pojednostavnjenje lakša je analiza, što opravdava ovakav pristup.

Linearna analiza nelinearnih sklopova omogućuje izračunavanje osnovnih svojstava realnog sklopa. Rezultati vrijede, naravno, samo u tačno određenim granicama ovisnih varijabli i u granicama tačno definiranih svojstava elemenata koji u ekvivalentnoj shemi predstavljaju realni sklop. Osnovnim elementima sklopa (otpornicima, zavojnicama, kondenzatorima) u tom slučaju ne mijenja se otpor R , induktivitet L i kapacitet C s promjenom strujnog ili naponskog opterećenja. Naponska i strujna pojačala, elektronke i tranzistori definiraju se faktorom naponskog pojačanja μ , strminom g i faktorom strujnog pojačanja β , za fiksnu radnu tačku neovisno o amplitudi napona ili struje. Svi parametri sklopa neovisni su o vremenu. Posljedica je svih tih ograničenja da se rješenja za struje i napone koji se mogu uspostaviti u sklopu dobivaju u obliku elementarnih funkcija koje se mogu jedne drugima superponirati. Stacionarne struje proporcionalne su naponima, vlastite frekvencije neovisne su o amplitudi, a nema stabilnih vlastitih stacionarnih oscilatornih stanja. Niz svojstava linearnih sklopova koja se analizom mogu predvidjeti u realnom sklopu se ne opažaju, niti su moguća, kao npr. porast amplitude oscilacija u neizmjenjnost, generacija potpuno periodičnih titraja. Nekoliko svojstava realnih sklopova s kojima se redovito susrećemo, kao što su stabilna oscilatorna stacionarna stanja i stabilna nelinearna ravnoteže struja i napona sklopa, prirodna su osobina nelinearnih sklopova.

Uspoređenje osnovnih svojstava nelinearnih i linearnih sklopova. Nelinearni su sklopovi prirodno proširenje grupe linearnih sklopova u fizičkom i matematičkom smislu. Sa stanovišta problematike nelinearnih sklopova, linearni su sklopovi poseban slučaj električnih sklopova veoma idealiziranih svojstava. U sasvim tačnom i općem značenju naziva, linearni sklopovi u stvari ne postoje, ali je za praktične potrebe linearni sklop dobra aproksimacija u širem opsegu ovisnih varijabla, pa se mnogi sklopovi definiraju kao linearni. Neovisna varijabla u nelinearnim, kao i u linearnim sklopovima obično je vrijeme. Ovisne varijable obično su nabor, struja i napon za elemente sklopa: otpornik, kondenzator, zavojnicu, naponsko ili strujno pojačalo, u linearnoj su analizi parametri (otpor R , kapacitet C , induktivitet L i faktor pojačanja μ ili β) konstantni. U nelinearnim sklopovima otpor, kapacitet, induktivitet i pojačanje na određen su način ovisni o trenutnom iznosu napona u na otporniku, naboju q na kondenzatoru i struje i kroz zavojnicu ili pojačivački element, te se veličine pojedinih elemenata sklopova izražavaju kao funkcije pripadnih ovisnih varijabla, npr. $R(u)$, $C(q)$, $L(i)$, $\mu(u)$ ili $\beta(i)$. Pri tome se pretpostavlja da se linearni i nelinearni elementi sklopa mogu razmatrati kao koncentrirani parametri.

Osim ove nelinearne ovisnosti veličina pojedinih elemenata u sklopu o ovisnoj varijabli, postoji u nizu sklopova i ovisnost veličina njihovih elemenata o nezavisnoj varijabli, tj. o vremenu t , kao npr. $R(t)$, $C(t)$, $L(t)$, $\mu(t)$ ili $\beta(t)$.

Prema vrsti elemenata u sklopu poprima i diferencijalna jednadžba koja obuhvata svojstva sklopa, a dobiva se polazeći od Kirchhoffovih zakona, sasvim određen karakter i ide u određen tip jednadžbi.

Tako linearne sklopove istražujemo na temelju izvedenih linearnih diferencijalnih jednadžbi. Svojstva realnih nelinearnih sklopova nalazimo u rješenjima odgovarajućih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. Isto tako, sklop čiji su elementi funkcije neovisne varijable istražujemo polazeći od odgovarajuće diferencijalne jednadžbe s vremenski promjenljivim koeficijentima. Mogući su i sklopovi u kojima dolaze nelinearne i vremenski

promjenljive komponente, pa su i diferencijalne jednadžbe koje opisuju uvjete dinamičke ravnoteže u sklopu nelinearne s vremenski promjenljivim koeficijentima.

Primjer je linearnog sklopa obični titrajni krug koji sadrži konstantan kondenzator kapaciteta C i zavojnicu induktiviteta L . Ako u taj titrajni krug umjesto kondenzatora stalnog kapaciteta C stavimo kondenzator čiji je kapacitet ovisan o naboju q na njegovim oblogama, $C(q)$, dobit ćemo nelinearni sklop. Isto bi postigli da smo umjesto zavojnice induktiviteta L u krug stavili zavojnicu sa željeznom jezgrom u kojoj je induktivitet ovisan o struji kroz namotaj, $L(i)$. U svaki od ovih nelinearnih sklopova može se uključiti i vremenski promjenljivi otpor $R(t)$, pa se dobiva sklop složenijih svojstava predstavljen diferencijalnom jednadžbom koju je teže riješiti.

Podjela nelinearnih sklopova može se provoditi prema fizičkim svojstvima ili prema tipu jednadžbi kojima su opisani.

Podjela prema fizičkim svojstvima. Prema fizičkim svojstvima nelinearni sklopovi mogu se podijeliti na dvije osnovne grupe: nelinearne sklopove bez gubitaka i nelinearne sklopove sa gubicima. (Na isti način mogu se podijeliti i linearni sklopovi.) Pri tome, sklopovi bez gubitaka imaju jednostavnija svojstva od sklopova s gubicima. Neovisno o ovoj podjeli, složenost odziva sklopa raste s brojem stupnjeva slobode nelinearnog sklopa, odnosno s redom odgovarajuće diferencijalne jednadžbe. Nelinearni sklopovi bez gubitaka razmatrani su donedavno isključivo iz teoretskog interesa. To su reaktivni (L , C)-krugovi bez otpora. Međutim, razvoj tehnike supravodljivih krugova doveo je i do neposredne primjene rezultata analize nelinearnih sklopova bez gubitaka. Disipacija, doduše, postoji u svim fizičkim sistemima, pa i u supravodljivom krugu (npr. zbog nehomogenosti kristalne rešetke), ali je ponekad tako mala da se njezin utjecaj može zanemariti. To dakako ovisi o vremenu promatranja, pa oscilacija za koju se nakon kraćeg promatranja može zaključiti da je neprihvatljiva, promatrana kroz vrlo dugo vrijeme, pokazuje izrazite značajke istitravanja. Sa stanovišta analize prirodno je da se najprije istražuju nelinearni sklopovi s jednostavnijim karakteristikama, a to su upravo sklopovi bez gubitaka. U linearnim sklopovima s gubicima ne mogu se uspostaviti stabilne periodičke oscilacije. Linearni i nelinearni sklopovi bez gubitaka, pak, mogu poprimiti proizvoljno mnogo oscilatornih stanja, a njihove su amplitude određene početnim uvjetima. Od osobitog su interesa sklopovi u kojima su amplitude periodičkih oscilacija određene elementima sklopa, a ne mijenjaju se mnogo pri maloj promjeni nekih elemenata sklopa. Sklopovi bez gubitaka, općenito, nisu takvih svojstava. Ispostavilo se da su nelinearni sklopovi s gubicima značajni upravo zbog toga što se u njima mogu uspostaviti oscilatorna stanja stabilnih amplituda, neovisno o određenom opsegu početnih uvjeta. Isto tako su stanja stabilne ravnoteže koja poprima sklop neovisna o početnim uvjetima iz određenog diapazona. Lako je uvidjeti da se ovdje radi o svojstvima nelinearnog sklopa koja su karakterističnija za te sklopove nego što su bila rješenja za vlastite funkcije odgovarajućih linearnih sklopova, budući da se uspostavljaju neovisnije od spoljašnjih utjecaja na sklop.

Podjela prema redu diferencijalnih jednadžbi kojima je obuhvaćeno stanje dinamičke ravnoteže nelinearnih sklopova najopćenitija je. Pri takvom svrstavanju najprije se razmatraju sklopovi definirani jednom nelinearnom diferencijalnom jednadžbom prvoga reda. Tipičan je primjer takvog sklopa spoj zavojnice i otpornika u seriji s električnim lukom i istosmjernim izvorom. Ovamo ide i spoj paralelne kombinacije tinjalice i kondenzatora u seriji s otpornikom i izvorom istosmjernog napona. Za prvu je kombinaciju karakteristično pojavljivanje diskretnih stabilnih stanja, a u drugoj nailazi se na pojavu relaksacionih oscilacija (v. strana 81). Po složenosti iza takvih sklopova dolaze sklopovi opisani dvjema nelinearnim diferencijalnim jednadžbama prvoga reda. Tipičan je nelinearni sklop ove kategorije serijski spoj zavojnice i električnog luka u paraleli s kondenzatorom, priključen preko otpora na izvor istosmjernog napona. Nadalje se u ovu grupu ubraja i nelinearni sklop poznat pod nazivom bistabil. Ako se za taj sklop upotrijebe dvije elektronke, anode su im preko djeliteља povezane s rešetkom susjedne elektronke, a katode uzemljene. Ako je sklop izveden sa dva tran-

zistora, kolektori su spojeni preko djelatnika s bazom susjednog tranzistora, a emiteri uzemljeni. U ovu grupu ide i nelinearni sklop poznat pod imenom multivibrator, koji je izveden istom vezom između dva aktivna nelinearna elementa kao i bistabil, ali su povratne veze anoda-rešetka u sklopu s elektronkama ili kolektor-baza u sklopu s tranzistorima ostvarene pomoću kondenzatora, pa se sklop zadržava u drugom električnom stanju kroz ograničeno vrijeme.

Određen broj nelinearnih sklopova složenijih svojstava također je analitički obrađen. Pri tome je moguće manje uopćavanje nego u teoriji linearnih sklopova jer postoji veća raznovrsnost u svojstvima sklopa. Ta raznovrsnost svojstava, pak, preduvjet je za širu primjenu nelinearnih sklopova u praksi.

Značenje nelinearnih sklopova

Nelinearni sklopovi i njihova svojstva imaju velik značaj za suvremenu elektrotehniku. Dva osnovna područja elektrotehnike u kojima posljednjih godina materijalnu osnovu razvoja čine upravo nelinearni sklopovi i njihova specifična svojstva jesu telekomunikacije i računski strojevi. U telekomunikacijama široko se primjenjuju visokofrekventni generatori izmjeničnog napona koji služi kao val nosilac informacije. Osnovu tih generatora čine stabilni oscilatori, tvorevine upravo karakteristične za nelinearne sklopove. U računanju strojeva osnova su za električno provođenje računskih operacija binari, nelinearni sklopovi sa dva stabilna stanja, također karakteristične tvorevine za ovu grupu sklopova. Svaka od navedene dvije značajne grupe nelinearnih sklopova može se praktički ostvariti u širokom području frekvencija oscilatora, odnosno brzina prebacivanja bistabila. Opseg tih područja frekvencija ili brzina obuhvaća oko petnaest dekada za sklopove s koncentriranim parametrima. Unutar toga područja frekvencija, koje se za oscilatore proteže od reda veličine desetinke herca do reda veličine gigaherca, mogu se svrstati svi oscilatori u niskofrekventnoj tehnici, radiju, televiziji, ultrakratkovalnoj tehnici, itd. Isto se tako bistabilni sklopovi, s prebacivanjem između dva stabilna stanja koje može trajati od nekoliko sekundi do pikosekunde, primjenjuju kako u regulacionim krugovima i logičkim sklopovima tako i u običnim i brzim računalima.

Primjena navedenih dvaju tipova nelinearnih sklopova u suvremenoj elektronici pokazuje kako se na njihovim jednostavnim karakterističnim svojstvima razvila najsloženija tehnika današnjice. Analogno se može prikazati značenje drugih tipičnih nelinearnih sklopova, kao npr. sklopova za miješanje ili parametarsko pojačanje.

Nelinearnost realnih sklopova ima kao važnu posljedicu stabilizacione efekte u praktičnim slučajevima kada struje ili naponi prekorače određene iznose. Tipični nelinearni karakter imaju npr. pojave pri zasićenju struje elektronke i tranzistora, indukcije i toka u magnetskom materijalu, polarizacije dielektrika i slično. Ovi efekti usporavaju i ograničavaju porast nekih električnih veličina iznad određenih iznosa. Tipični električni sklopovi koji su većinom predviđeni upravo za rad u linearnom području jesu pojačala s elektronkama, tranzistorska i magnetska pojačala. Međutim, kad je uzbuda prevelika, sva ova pojačala postaju nelinearni sklopovi s karakterističnim svojstvima, izobličenjem, ograničenjem i odrezivanjem signala.

Analiza nelinearnih sklopova jedinstveno razmatra elektrotehničke probleme i tzv. jake i tzv. slabe struje. Ona može npr. ustanoviti da paralelni spoj dvaju jednakih istosmjernih generatora na zajednički otporni teret ima dva stabilna i jedno nestabilno ravnotežno stanje struj i napon a sklopa jednako kao poznati spoj dviju elektronki ili dvaju tranzistora u bistabilu. Zajedničke osobine tako raznorodnih sklopova, u ovom slučaju, osnovne su funkcionalne osobine nelinearnih sklopova.

Neka svojstva nelinearnih elemenata i sklopova

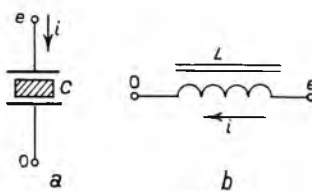
Impedancija nelinearnih elemenata. Bitno je svojstvo linearnih elemenata sklopa neovisnost njihove impedancije o amplitudi struje ili napona. Za nelinearne sklopove uvodi se pojam *nelinearne impedancije*. Pokazuje se da je nelinearna impedancija ovisna o struji ili naponu nelinearnog elementa. Tu se

jasno očituje veća raznovrsnost osobina nelinearnih elemenata, pa i sklopova. Nelinearna impedancija može se odrediti npr. za kondenzator čiji dielektrik pokazuje znakove zasićenja i za svitak sa zasićenom željeznom jezgrom.

Nelinearna reaktancija kondenzatora. Napon e na kondenzatoru (sl. 60 a) iznosi:

$$e = \frac{q}{C_0} (1 + a^2 q^2). \quad (52)$$

C_0 je linearna komponenta kapaciteta kondenzatora. Zbog porasta



Sl. 60. Nelinearni elementi. a Kondenzator s nelinearnim kapacitetom C , b prigušnica s nelinearnim induktivitetom L

stupnja polarizacije dielektrika s povećanjem količine naboja q na oblogama, napon raste brže od porasta naboja. Faktor a^2 je koeficijent koji određuje nelinearna svojstva. Eksperiment pokazuje da je ovisnost $e(q)$ u aproksimaciji zaista kubnog karaktera, i omogućuje da se za svaki pojedini kondenzator odrede konstante C_0 i a^2 .

Ako se pretpostavi sinusoidna promjena naboja na kondenzatoru

$$q = Q \cos \omega t, \quad (53)$$

gdje je Q amplituda naboja, a ω kružna frekvencija, dobiva se za struju izraz:

$$i = \frac{dq}{dt} = -Q \omega \sin \omega t = -I \sin \omega t; \quad I = Q \omega.$$

Uvrštenjem izraza (53) u jednadžbu (52) dobiva se

$$e = \left(\frac{I}{C_0 \omega} \right) \left(1 + \frac{3a^2 I^2}{4 \omega^2} \right) \cos \omega t + \frac{a^2 Q^3}{4 C_0} \cos 3 \omega t.$$

Po analogiji sa slučajem linearnog sklopa, reaktancija za prvi harmonički član (uz zanemarenje člana frekvencije 3ω) iznosi:

$$X_c = \frac{E}{I} = \frac{1}{C_0 \omega} \left(1 + \frac{3a^2 I^2}{4 \omega^2} \right). \quad (54)$$

Pretpostavi li se da je nelinearnost mala, i ako se za a stavi da je jednak nuli, dobiva se reaktancija linearnog kondenzatora

$$X_c = \frac{1}{C_0 \omega}.$$

Za reaktanciju nelinearnog kondenzatora čija su svojstva definirana izrazom (52) dobiva se ovisnost o frekvenciji i kvadratu amplitude struje prema izrazu (54).

Nelinearna reaktancija svitka sa željeznom jezgrom određuje se istim postupkom (sl. 60 b). Uslijed polarizacije magnetskih dipola dolazi do zasićenja željezne jezgre, pa tok Φ raste sporije nego struja uzbude u području od interesa, što se vidi iz odnosa

$$N \Phi = L_0 i (1 - b^2 i^2), \quad (55)$$

gdje je N broj zavoja namotaja, L_0 induktivitet linearne komponente, a b^2 koeficijent koji obuhvaća nelinearna svojstva. Aproksimacija izraza (55) ima smisla samo do $b^2 i^2 = 1$, a dalje je i kvalitativno pogrešna. Za struju kroz svitak,

$$i = I \cos \omega t,$$

dobiva se napon na priključnicama

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = I L_0 \omega \left(1 - \frac{3b^2 I^2}{4} \right) \cos \omega t - \frac{3b^2 L_0 \omega I^3}{4} \sin 3 \omega t.$$

Ako se zanemari treći harmonik napona, reaktancija za prvi harmonički član iznosi:

$$X_L = \frac{E}{I} = L_0 \omega \left(1 - \frac{3b^2 I^2}{4} \right). \quad (56)$$

Za reaktanciju nelinearnog svitka sa željezom dobivena je tako ovisnost o frekvenciji i kvadratu amplitude struje.

Rezonancija nelinearnog titrajnog kruga. Nelinearni titrajni krug čine serijski ili paralelno spojeni nelinearni induktivitet i nelinearni kapacitet ili samo nelinearni kapacitet s li-

nearnim induktivitetom, odnosno nelinearni induktivitet s linearnim kapacitetom. Svojstva prve kombinacije složenija su nego kad je samo jedan sastavni dio sklopa nelinearan. Prisustvo otpora u krugu dalje modificira analizu i rezultate.

Ilustrativno je razmotriti pojavu rezonancije titrajnog kruga koji se sastoji od serijskog spoja svitka *nelinearnog induktiviteta*, kondenzatora *linearnog kapaciteta* i otpornika *linearnog otpora*.

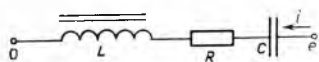
Ako je induktivitet ovisan o struji kroz namotaj prema jednadžbi (56), slijedi za efektivni iznos struje I_r :

$$L = L_0 \left(1 - \frac{3b^2 I_r^2}{2} \right).$$

Impedancija sklopa prikazanog na sl. 61 jest:

$$Z = [R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2} \\ = \left\{ R^2 + \left[L_0 \omega \left(1 - \frac{3b^2 I_r^2}{2} \right) - \frac{1}{C\omega} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (57)$$

Impedancija (57) omjer je efektivnih iznosa napona E_r i struje I_r .



Sl. 61. Nelinearni serijski rezonantni krug

Izraz za *normiranu impedanciju* Z/R (impedanciju normiranu s obzirom na aktivni otpor u krugu) može se svesti na bezdimenzionu varijablu ako se izvrše ove supstitucije:

$$\omega_0 = \frac{1}{(L_0 C)^{1/2}}, \quad Q = \frac{L_0 \omega_0}{R}, \quad w = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \mathcal{I} = b I_r, \quad \mathcal{E} = \frac{b E_r}{R}.$$

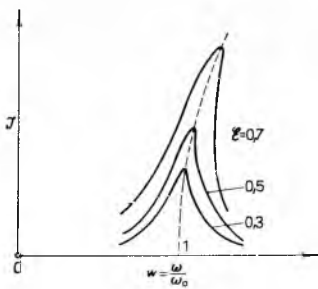
Nakon supstitucije dobiva se za normiranu impedanciju izraz:

$$\frac{Z}{R} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{I}} = \left\{ 1 + Q^2 \left[w \left(1 - \frac{3\mathcal{I}^2}{2} \right) - \frac{1}{w} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (58)$$

Vidi se da impedancija ovisi o normiranoj frekvenciji w i struji kroz sklop $\mathcal{I}$. Iz izraza (58) može se izračunati struja $\mathcal{I}$ kao funkcija normirane frekvencije w , uz napon $\mathcal{E}$ kao parametar.

Ova ovisnost prikazana je grafički na sl. 62.

Za male iznose pobudnog napona $\mathcal{E}$ i male struje $\mathcal{I}$ postoji uobičajeno rezonantno nadvišenje poznato iz linearnih sklopova. Kad su jakosti struje kroz svitak veće, dolaze do izražaja utjecaji zasićenja, a efekt ovih nelinearnih osobina očituje se u priklanjanju rezonantnog vrha prema osi w . Ovo povećanje rezonantne frekvencije posljedica je smanjenja efektivnog induktiviteta sa porastom struje.



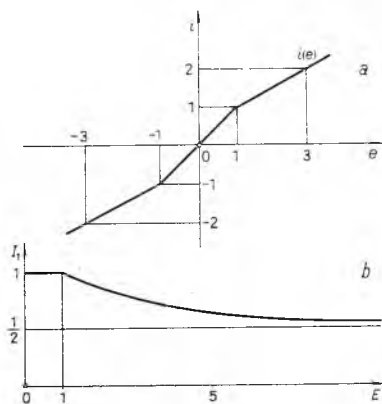
Sl. 62. Ovisnost struje $\mathcal{I}$ nelinearnog serijskog rezonantnog kruga o relativnoj frekvenciji w i amplitudi narinutog napona $\mathcal{E}$

Opisna funkcija nelinearnog sklopa.

Ovisnost impedancije nelinearnog kapaciteta, induktiviteta i titrajnog kruga o amplitudi strujnog opterećenja izložena je na strani 75 i na strani 76. Ona je samo poseban slučaj općenitijeg postupka uvođenja tzv. opisnih funkcija za nelinearne sklopove.

Metoda opisne funkcije temelji se na kvazi-linearizaciji nelinearnih sklopova ili elemenata, a osobito je podesna za predočavanje efekta nelinearnosti kad postoji jednoznačna veza između ulazne i izlazne veličine (sl. 63 a). Tako se za nelinearni sklop ili element s karakteristikom $i(e)$ dobije, mijenjajući amplitudu ulaznog napona $e = E \cos \omega t$, opisna funkcija čiji opći karakter pokazuje sl. 63 b. To je grafički prikaz ovisnosti amplitude struje prvog harmoničkog člana I_1 o amplitudi napona E . Uvođenje ove vrste opisne funkcije nelinearnog sklopa ili elemenata vezano je za sinusoidnu uzbudu. I kad je ulazna veličina sinusoidna, pojavljuju se na izlazu nelinearnog sklopa također harmoničke komponente osnovne frekvencije, ali su često filtri-

rane. Nelinearni sklop se tada može karakterizirati tzv. *prosječnim pojačanjem*, koje se dobije ako se amplituda osnovnog harmoničkog člana na izlazu podijeli s ulaznom amplitudom. Prosječno pojačanje istovjetno je s opisnom funkcijom uz uvjet da je ulazna amplituda jednaka jedinici i da ulazna i izlazna veličina imaju iste fizičke dimenzije. Nelinearna karakteristika sklopa može se tada zamijeniti prosječnim pojačanjem za vrijeme jednog perioda.



Sl. 63. Nelinearna karakteristika i njezina opisna funkcija. a Izlomljena karakteristika $i(e)$ nelinearnog sklopa ili elementa, b opisna funkcija za nelinearnu karakteristiku pod a

Opisne funkcije i prosječna pojačanja većinom su neovisni o frekvenciji. I kad dođe do ovisnosti o frekvenciji, osnovna komponenta izlazne struje često je oblika $i = I_1(E) \cos[\omega t + \vartheta(E)]$, gdje ϑ znači kut pomaka faze, koji ovisi o naponu.

Nakon prethodnih definicija može se odrediti opisna funkcija nelinearnog sklopa čija je izlazna struja

$$i = C e + D e^2 \frac{de}{dt}, \quad (59)$$

gdje su C i D konstante. Ako je ulazni uzbudni napon

$$e = E \cos \omega t, \quad (60)$$

amplituda i faza izlazne struje funkcije su ulazne amplitude, ali frekvencija oscilacije na izlazu pasivnog nelinearnog sklopa ostaje identična s frekvencijom uzbude.

Supstitucija (60) u (59) i upotreba trigonometrijskih identiteta daje

$$i = C E \cos \omega t + D \frac{\omega E^3}{4} \left[2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(3\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (61)$$

Amplituda osnovnog harmoničkog člana na desnoj strani jednadžbe (61) predstavlja opisnu funkciju razmatranog nelinearnog sklopa. Napisana u ovisnosti o amplitudi ulaznog uzbudnog napona E u kompleksnom obliku, ona glasi:

$$I_1 = C E + j D \frac{\omega E^3}{4}. \quad (62)$$

Prosječna strmina S_1 nelinearnog sklopa (pojam analogan prije uvedenom pojmu prosječnog pojačanja) dobije se ako se izraz (62) za I_1 podijeli s amplitudom ulaznog napona E , što daje:

$$S_1 = C + j \frac{D \omega E^2}{4}.$$

Dakle, opisne funkcije nelinearnog sklopa, osim što su nelinearno ovisne o ulaznoj amplitudi, mogu biti i kompleksne.

Miješanje i multiplikacija frekvencija u nelinearnom sklopu. Princip superpozicije vrijedi samo za linearne sklopove. U složenom linearnom sklopu na koji je priključeno nekoliko izvora izmjeničnog napona različitih frekvencija teku samo struje tih istih frekvencija, a ne pojavljuju se struje kojima su frekvencije višekratnici i kombinacije frekvencija izvora napajanja. Za nelinearne sklopove princip superpozicije ne vrijedi. Već prema tipovima nelinearnosti, u složenom nelinearnom sklopu pojav-

Izju se višekratnici i kombinacije frekvencija izvora napajanja. Kombinacije mogu biti veoma složene. Jasnu sliku tog procesa dobiva se analizom relativno jednostavnog slučaja.

Ako se dva izmjenična sinusoidna napona malo različitih frekvencija dodaju na linearnom sklopu jedan drugome, rezultirajući valni oblik, premda naliči valnom obliku modularanog vala, ne sadrži komponente novih frekvencija. Jedinke frekvencije koje su sadržane u aditivno sintetiziranom valu jesu frekvencije dvaju izvornih napona. Ako, međutim, sintetizirani val narinemo na nelinearni element za koji se struja u ovisnosti o naponu izražava redom potencija

$$i = \sum_{j=1}^n a_j e^j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad a_j = \text{konst.} \quad (63)$$

u struji se pojavljuju komponente koje imaju nove frekvencije. Frekvencije tih komponenata potječu od članova koje daju umnošci osnovnih valova narinutih frekvencija. Karakteristika nelinearnog elementa naziva se kubnom ako sadrži samo prva tri člana iz izraza (63). Jednostavan nelinearni sklop s takvom karakteristikom, u kojem dolazi do miješanja, prikazan je na sl. 64. Strujom nelinearnog elementa upravljaju naponi

$$e_1 = E_1 \cos \omega_1 t$$

$$i \quad e_2 = E_2 \cos \omega_2 t$$

dodani u seriju tako da čine napon uzbude

$$e = e_1 + e_2 = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t. \quad (64)$$

Uvrštenjem jedn. (64) u (63) i ako se uzmu u obzir samo članovi do kubnoga uključivo, dobiva se za struju nelinearnog elementa izraz:

$$\begin{aligned} i = & \left(\frac{1}{2} a_1 E_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 E_2^2 \right) + (a_1 E_1 + \frac{3}{2} a_3 E_1^3 + \frac{3}{2} a_3 E_1 E_2^2) \cos \omega_1 t + \\ & + (a_2 E_2 + \frac{3}{2} a_3 E_2^3 + \frac{3}{2} a_3 E_1^2 E_2) \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 \cos 2\omega_1 t + \\ & + \frac{1}{2} a_2 E_2^2 \cos 2\omega_2 t + \frac{1}{4} a_3 E_2^3 \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{4} a_3 E_2^3 \cos 3\omega_2 t + \\ & + a_2 E_1 E_2 \cos (\omega_1 + \omega_2) t + a_2 E_1 E_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t + \\ & + \frac{3}{2} a_3 E_1^2 E_2 \cos (2\omega_1 + \omega_2) t + \\ & + \frac{3}{2} a_3 E_1^2 E_2 \cos (2\omega_1 - \omega_2) t + \\ & + \frac{3}{2} a_3 E_1 E_2^2 \cos (2\omega_2 + \omega_1) t + \\ & + \frac{3}{2} a_3 E_1 E_2^2 \cos (2\omega_2 - \omega_1) t. \end{aligned} \quad (65)$$

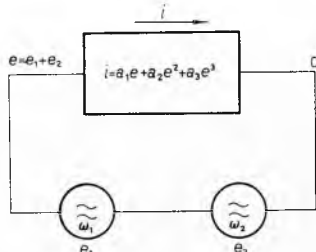
Osobito je značajno da se prema izrazu (65) u struji koju su u nelinearnom elementu izazvali uzbudni naponi e_1 i e_2 frekvencija ω_1 i ω_2 pojavljuju komponente niza novih frekvencija koje nisu sadržane u uzbudnim naponima, i to: $2\omega_1$, $2\omega_2$, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 + \omega_1$, $2\omega_2 - \omega_1$.

Svaka od tih komponenata može se podesnim filtriranjem izdvojiti. To znači da se polazeći od dvije osnovne frekvencije mogu pomoću nelinearnog elementa kubnog karaktera ostvariti harmoničke oscilacije s deset različitih frekvencija.

Ovisnost svojstava nelinearnih sklopova o osobinama nelinearnih elemenata

Monotona prelazna pojava. Nelinearni element u sklopu općenito modificira tok prelaznih pojava u poređenju s tim pojavama u analognom linearnom sklopu. Pokazano je kako nelinearni član u otporu utječe na izbijanje kondenzatora. Na sl. 65 prikazan je nelinearni sklop koji se sastoji od linearnog kondenzatora kapaciteta C i diode s kvadratnom karakteristikom koja je određena ovisnošću između struje i napona

$$i = a_1 e + a_2 e^2,$$



Sl. 64. Nelinearni sklop za miješanje i multiplikaciju dviju frekvencija

gdje su a_1 i a_2 konstante. Vremenska promjena napona na kondenzatoru kapaciteta C , nakon zatvaranja sklopke, slijedi iz jednadžbe:

$$C \frac{de}{dt} = -a_1 e - a_2 e^2, \quad (66)$$

koja je nelinearna diferencijalna jednadžba prvog reda.

Supstitucijom $F = a_1/C$ i $G = a_2/C$ i uvođenjem bezdimenzionog parametra μ u jednadžbi (66) može se pisati:

$$\frac{de}{dt} = -F e - \mu G e^2. \quad (67)$$

Ako je $\mu = 1$, jednadžba (67) predstavlja nelinearni sklop, a ako je $\mu = 0$, otpada nelinearni kvadratni član i jednadžba predstavlja linearni sklop koji se može razmotriti pomoću odgovarajuće linearne diferencijalne jednadžbe. Pretpostavi li se rješenje jednadžbe (67) u obliku

$$e = e_0(t) + \mu e_1(t) + \mu^2 e_2(t) + \dots, \quad (68)$$

nakon supstitucije toga izraza u (67) i ograničenja na članove do μ^2 dobiva se izraz:

$$\mu^0 (\dot{e}_0 + F e_0) + \mu^1 (\dot{e}_1 + F e_1 + G e_0^2) + \mu^2 (\dot{e}_2 + F e_2 + 2 G e_0 e_1) = 0, \quad (69)$$

gdje tačke iznad e označavaju diferenciranje po vremenu. Jednadžba (69) bit će zadovoljena bilo za koji μ između 0 i 1 ako članovi uz svaku potenciju od μ budu jednaki nuli. Počevši sa μ^0 dobiva se:

$$\dot{e}_0 + F e_0 = 0,$$

odakle je

$$e_0 = E_0 \exp(-F t),$$

uz početni uvjet $e_0 = E_0$ za $t = 0$.

Polazeći od ovog rješenja za e_0 može se iz diferencijalne jednadžbe koja se dobiva kad se izjednači s nulom množitelj uz parametar μ^1 u (69) izračunati e_1 , a na identičan način dalje i e_2 iz poznatih e_0 i e_1 . Aproximativno rješenje jednadžbe (66) koje uključuje članove do drugog reda dobiva se uvrštenjem izračunatih $e_0(t)$, $e_1(t)$ i $e_2(t)$ u (68) uz zamjenu $\mu = 1$.

Iz prednjeg se izvođenja dobiva jednadžba:

$$\begin{aligned} e = E \exp(-F t) & \left(1 + \frac{G E_0}{F} \left[\exp(-F t) - 1 \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{G E_0}{F} \right)^2 \left[\exp(-F t) - 1 \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Tačnija analiza pokazuje da se veličina $G E_0/F$ pojavljuje u izrazu za e kao red potencija, pa treba da je manja od jedinice da bi izraz za e bio brzo konvergentan te da bi prvih nekoliko članova bilo dovoljno za rješenje. Iz jedn. (70) jasno se vidi na koji način kvadratni član otpora diode modificira tok izbijanja kondenzatora, u poređenju s analognim linearnim sklopom.

Frekvencija stacionarne oscilacije nelinearnog titrajnog kruga bez gubitaka.

Na strani 76 provedena je aproksimativna analiza rezonancije nelinearnog titrajnog kruga s gubicima, a na str. 80 analiza frekvencije oscilacije oscilatora s gubicima i s aktivnim elementom. Utjecaj nelinearnog elementa na vlastitu frekvenciju sklopa može se tačno izračunati za titrajni krug bez gubitaka (sl. 66) koji se sastoji od zavojnice konstantnog induktiviteta L i kondenzatora kapaciteta $C(q)$ čiji se napon e mijenja u ovisnosti o naboju q prema jednadžbi

$$e = \frac{q}{C_0} (1 + a^2 q^2).$$

Budući da je napon na induktivitetu

$$e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2},$$

dobiva se da je, uz

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L C_0},$$



Sl. 66. Nelinearni kapacitet $C(q)$ i linearni induktivitet L u titrajnom krugu

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + a^2 q^2) q = 0. \quad (71)$$

Ova se jednadžba dinamičke ravnoteže naboja u sklopu svodi na podesniji oblik ako joj se najprije prenese drugi član na desnu stranu, a zatim pomnoži lijeva strana s lijevom stranom a desna s desnom stranom izraza

$$2 \left(\frac{dq}{dt} \right) dt = 2 dq.$$

Integriranje dobivene jednadžbe

$$\int 2 \left(\frac{dq}{dt} \right) \left(\frac{d^2 q}{dt^2} \right) dt = -2 \omega_0^2 \int (1 + a^2 q^2) q dq$$

daje jednadžbu

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = -\omega_0^2 \left(\frac{a^2 q^4}{2} + q^2 - C_1^2 \right). \quad (72)$$

Oдавде se za $a = 0$, tj. za linearni kondenzator kapaciteta C_0 (dakle i linearni sklop), dobiva nakon jednostavnog računa za naboj izraz

$$q = C_1 \sin \omega_0 (t + C_2),$$

gdje je C_2 druga konstanta integracije. U daljoj analizi nelinearnog sklopa titrajnog kruga može se konstanta integracije u (72)

odrediti iz početnog uvjeta da je $q = Q_0$ za $\frac{dq}{dt} = 0$. Taj uvjet daje:

$$C_1^2 = Q_0^2 + \frac{a^2 Q_0^4}{2}.$$

Tako se izraz (72) može nakon separacije varijabli pisati u obliku:

$$\int \omega_0 dt = \pm \int \frac{dq}{[(Q_0^2 - q^2) + \frac{a^2}{2} (Q_0^4 - q^4)]^{1/2}}.$$

Ako se izabere $t = 0$ za $q = Q_0$ i negativni predznak integrala, račun daje nakon uvođenja nove varijable:

$$q = Q_0 \cos \varphi$$

i zamjenom

$$k^2 = \left[2 \left(1 + \frac{1}{a^2 Q_0^2} \right) \right]^{-1} \quad (73)$$

standardni eliptički integral prve vrste

$$\omega_0 t = (1 + a^2 Q_0^2)^{1/2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Taj se izraz može pisati u obliku

$$\omega_0 t = (1 + a^2 Q_0^2)^{-1/2} F(k, \varphi), \quad (74)$$

što daje zavisnost naboja o vremenu.

Ako se izračuna eliptički integral prve vrste iz izraza (74) za $\varphi = 2\pi$ i $t = T$, trajanje jedne periode razmatranog nelinearnog titrajnog kruga bez gubitaka iznosi:

$$T = \frac{4 K(k)}{\omega_0 (1 + a^2 Q_0^2)^{1/2}}; \quad K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right).$$

Trajanje jedne periode T_0 linearnog titrajnog kruga vlastite frekvencije ω_0 jednako je:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Omjer između trajanja jedne periode u nelinearnom titrajnom krugu bez gubitaka i linearnom krugu pokazuje jednadžba:

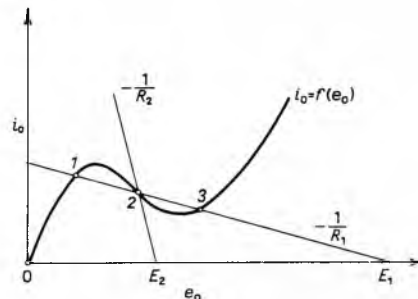
$$\frac{T}{T_0} = \frac{2 K(k)}{\pi (1 + a^2 Q_0^2)^{1/2}}.$$

Ova jednadžba daje, dakle, relativnu ovisnost trajanja periode (frekvencije) stacionarne oscilacije o amplitudi naboja Q_0 u nelinearnom titrajnom krugu. Kao što se vidi, trajanje jedne periode oscilacije nelinearnog titrajnog kruga određeno je produktom $a^2 Q_0^2$. S porastom toga produkta raste i modul k (73), premda je njegov maksimalni izraz u ovom slučaju $k^2 = \frac{1}{2}$. Porast

k uzrokuje porast funkcije $K(k)$, ali faktor $a^2 Q_0^2$ u nazivniku uzrokuje skraćanje perioda s porastom $a^2 Q_0^2$.

Ovisnost trajanja jedne periode T i kutne frekvencije ω o najvećem iznosu naboja Q_0 na oblogama kondenzatora, odnosno o naponu i struji, tipična je za nelinearne sklopove. Period i frekvencije linearnih sklopova ne ovise o naboju, naponu i struji u sklopu. Jasna je i ovisnost o faktoru a koji određuje nelinearnosti sklopa.

Ispitivanje svojstava tačaka ravnoteže nelinearnog sklopa. Na strani 77 i strani 80 istraživani su vremenski tok struja i napona u nelinearnom sklopu na osnovi rješenja pripadne nelinearne diferencijalne jednadžbe. Singularne tačke te diferencijalne jednadžbe osnova su za određivanje svojstava sklopa. Ispitivanje svojstava singularnih tačaka izvodi se najprije za sav neposredni okoliš tačaka ravnoteže, ali njihov karakter utječe i na vladanje sklopa za sve iznose struja i napona.



Sl. 67. Radne tačke stabilne i nestabilne ravnoteže na karakteristici nelinearnog elementa

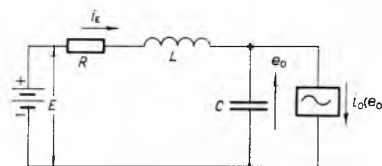
Radi primjera provest će se analiza svojstava nelinearnog sklopa čije struje i napone u potpunosti definira sistem od dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda koji je ekvivalentan jednoj nelinearnoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda. Nelinearni element sklopa neka ima karakteristiku prikazanu na sl. 67, a određenu općenito izrazom

$$i_0 = f(e_0). \quad (75)$$

Taj tip karakteristike ima npr. tunelska dioda. Inkrementalni otpor u svakoj tački ove karakteristike dobiva se kao diferencijalni kvocijent

$$r = \frac{de_0}{di_0} = \frac{1}{\frac{di_0}{de_0}}.$$

Za nelinearni sklop prikazan na sl. 68, koji sadrži nelinearni ot-



Sl. 68. Bistabilan sklop s nelinearnim otporom (desno)

por čija je karakteristika određena izrazom (75), prema Kirchhoffu vrijede jednadžbe:

$$E = L \frac{di_E}{dt} + R i_E + e_0,$$

$$i_E = C \frac{de_0}{dt} + f(e_0),$$

što se može pisati kao sistem

$$\begin{aligned} \frac{di_E}{dt} &= \frac{1}{L} (E - R i_E - e_0), \\ \frac{de_0}{dt} &= \frac{1}{C} [i_E - f(e_0)]. \end{aligned} \quad (76)$$

Tačke ravnoteže struja i napona nalaze se na mjestima na kojima je prva derivacija struje i napona po vremenu jednaka nuli:

$$\frac{di_E}{dt} = 0, \quad \frac{de_0}{dt} = 0,$$

što daje zajedno sa (76) jednadžbu

$$E = R i_{E3} + e_{03} = R i_{03} + e_{03}, \quad (77)$$

$$i_{E3} = f(e_{03}) = i_{03},$$

gdje e_{03} i i_{03} znače napon i struju u tački ravnoteže. Iz prve se jednadžbe vidi da u stanju ravnoteže istosmjerni napon baterije E pokriva konstantni pad napona na otporu R koji je spojen u seriji s naponom nelinearnog elementa, jer nema pada napona na L zbog $di_E/dt = 0$. Struja baterije konstantna je i jednaka struji nelinearnog elementa budući da kroz kondenzator ne teče struja jer je $de_0/dt = 0$.

Singularne tačke mogu se naći grafičkom konstrukcijom ako se na sl. 67 ucrtta pravac s nagibom $-1/R$ polazeći od tačke E na osi e_0 . Presjek ovog pravca s karakteristikom nelinearnog elementa $i_0 = f(e_0)$ daje tačke ravnoteže struje i napona sklopa. Na slici prikazana su dva slučaja. U slučaju malih E i R (E_2, R_2) postoji jedno presjecište. Kad su E i R dovoljno veliki (E_1, R_1), postoje tri presjecišta, tj. tri tačke ravnoteže.

Ponašanje struje i napona za mali poremećaj (e, i), iz tačke ravnoteže (e_{03}, i_{03}) u tačku $e_0 = e_{03} + e, i_0 = i_{03} + i = f(e_{03}) + i$, dobije se uvrštavanjem ovih izraza za e_0, i_0 u (76). To daje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri - e), \quad (78)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{C} (i - \frac{1}{r} e).$$

U drugoj jednadžbi (78) razvijena je funkcija $f(e_{03} + e)$ po Tayloru, da se dobije izraz

$$f(e_0) = f(e_{03}) + \left. \frac{df(e_0)}{de_0} \right|_{e_{03}} \cdot e + \dots, \quad (79)$$

i zanemareni su članovi višeg reda; inkrementalni otpor je

$$\frac{1}{r} = \left. \frac{df(e_0)}{de_0} \right|_{e_{03}}.$$

Ako se gornja jednadžba (78) podijeli s donjom, dobiva se kvocijent

$$\frac{di}{de} = \frac{\frac{1}{L} (-e - Ri)}{\frac{1}{C} [-\frac{1}{r} e + i]}.$$

Ovaj izraz može se primijeniti duž karakteristike $i_0 = f(e_0)$ u cijeloj ravlini (e_0, i_0) da se odredi gradijent funkcije $i(e)$ ili $e(i)$ za svaku pojedinu tačku, a zatim i tzv. lokalni fazni portret ovog nelinearnog sklopa.

Analiza stabilnosti tačaka ravnoteže u sklopovima prikazat će se uz primjenu uobičajenih formalnih metoda na istom primjeru.

Ako se jednadžbe (78) napišu u obliku

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{Cr} e + \frac{1}{C} i, \quad (80)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} e - \frac{R}{L} i,$$

supstituiraj

$$e = x_1, \quad a = -\frac{1}{Cr}, \quad b = \frac{1}{C},$$

$$i = x_2, \quad c = -\frac{1}{L}, \quad d = -\frac{R}{L},$$

može se u vektorsko-matričnoj formi umjesto jedn. (80) pisati

$$[\dot{x}] = [A] [x], \quad (81)$$

gdje je

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Rješenje sistema linearnih jednadžbi (80) sadrži eksponencijalne funkcije, pa se može pisati u obliku

$$[x] = [K_x] \exp(\lambda t), \quad (82)$$

gdje su λ konstante što ih određuju koeficijenti u diferencijalnim jednadžbama, a ima ih onoliko koliko je linearnih jednadžbi. Suma eksponencijalnih funkcija sa svim mogućim iznosima λ čini opće rješenje. Konstante $[K_x]$ nalaze se iz početnih uvjeta. Ako se rješenje (82) uvrsti u jedn. (81), dobiva se nakon kraćenja

$$\lambda [x] = [A] [x],$$

što se pomoću jedinične matrice $[I]$ može pisati ovako:

$$[A] - \lambda [I] [x] = [0].$$

Karakteristična jednadžba sistema linearnih jednadžbi glasi:

$$|[A] - \lambda [I]| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

pa su u konkretnom slučaju dva karakteristična korijena

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \{ (a + d) \pm [(a + d)^2 + 4(bc - ad)]^{1/2} \} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{1}{Cr} + \frac{R}{L}\right) \pm \left[\left(\frac{1}{Cr} + \frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \left(1 + \frac{R}{r}\right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (83)$$

Sistem nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (76) svodi se primjenom Taylorovog razvoja (79), uz zanemarenje viših članova, na linearni sistem (78). Stoga zaključci o vladanju sklopa izvedeni na temelju poznavanja korijena ekvivalentnog linearnog sklopa predstavljenog sistemom jednadžbi (78) vrijedi za tačke ravnoteže sklopa, tj. za presjecišta 1, 2, 3 na sl. 67. Koordinate tačaka ravnoteže e_{03} koje su potrebne da se izračuna $1/r_1, 1/r_2$ i $1/r_3$, inkrementalni otpor nelinearnog elementa za svaku od ravnotežnih tačaka dobivamo rješenjem jednadžbi (77). Kao što se vidi iz sl. 67, nagib krivulje $i_0 = f(e_0)$ proporcionalan je vodljivosti $1/r$ i različit je u tačkama 1, 2, 3, tako da se iznosi r_1, r_2 i r_3 među sobom znatno razlikuju. Posebno je $r_2 < 0$ a $r_1, r_3 > 0$.

Polje gradijenata u ravlini e_0, i_0 oko tačke 1, 2, 3 uz konstantne L, R, C , a u ovisnosti o iznosima $1/r$ može imati svojstvo: a) čvora, ako su oba korijena realna i istog predznaka, b) sedla, ako su oba korijena (83) realna i suprotnog predznaka, c) centra, ako su oba korijena imaginarna i d) fokusa, ako su korijeni kompleksno konjugirani.

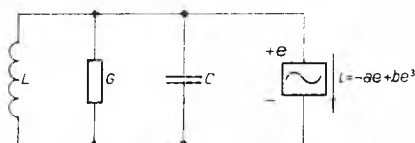
Nakon što se odrede osobine tačaka 1, 2, 3 i njihovog okoliša, dobiva se bitan oslonac u određivanju kvalitativnih osobina mogućih tokova promjena stanja sklopa u ravlini (i_0, e_0).

Za nelinearitet i otpor po sl. 67 tačka 1 i 3 imaju obično svojstvo stabilnih čvorova, a tačka 2 svojstvo sedla.

Amplituda oscilacija. U nastavku će se analizirati porast i stabilizacija amplitude oscilacija u nelinearnom sklopu kad je utjecaj nelinearnog elementa na tok jednog ciklusa promjene stanja sklopa mali. Ako se pode od sklopa na sl. 68 s nelinearitetom prikazanim na sl. 69, koji se analitički izražava zavisnošću

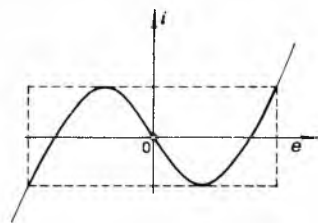
$$i = -ae + be^3, \quad (84)$$

i ako se u nadomjesnoj shemi sklopa otpor R nadomjesti vodljivošću G postavljenom paralelno induktivitetu L , dobije se sklop



Sl. 70. Sklop oscilatora s elementom nelinearne vodljivosti (desno)

prikazan na sl. 70. Primjenom drugog Kirchhoffovog zakona na gornji čvor tog sklopa dobiva se integro-diferencijalna jednadžba



Sl. 69. Karakteristika nelinearne vodljivosti kubnog karaktera

promjene napona

$$-ae + be^3 + C \frac{de}{dt} + Ge + \frac{1}{L} \int e dt = 0. \quad (85)$$

Nakon diferencijacije i množenja sa L izraz (85) postaje nelinearna diferencijalna jednačba drugoga reda:

$$LC \frac{d^2e}{dt^2} + [L(G-a) + 3bLe^2] \frac{de}{dt} + e = 0. \quad (86)$$

Da se ova jednačba pojednostavi, uvode se veličine

$$\tau = \omega_0 t \text{ sa } \omega_0 = (LC)^{-1/2} \quad (87)$$

(bezdimenziono vrijeme),

$$\varepsilon = (a - G) \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2} \quad (88)$$

(bezdimenziona vodljivost)

$$u = \frac{e}{h}, \text{ gdje je } h = \frac{(a - G)^{1/2}}{3b} \quad (89)$$

(bezdimenzioni napon). Nakon supstitucije jednačbi (87) (88) i (89) u jednačbu (86) dobiva se nelinearna diferencijalna jednačba:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{d\tau} + u = 0. \quad (90)$$

Ta se jednačba obično naziva van der Polovom jednačbom; približno opisuje velik broj nelinearnih sklopova. Osobito je prikladna za prikaz razlike u tipu oscilacije između nelinearnih oscilatornih sklopova koji imaju mali recipročni faktor dobrote, pa približno sinusoidno osciliraju, i sklopova koji imaju velik recipročni faktor dobrote, te dolaze u stanje relaksacija.

Da bi se odredio tok napona u iz jednačbe (90), pretpostavlja se rješenje u obliku

$$u = A(\tau) \cos \tau, \quad (91)$$

gdje je $A(\tau)$ amplituda koja se mijenja relativno sporo s bezdimenzionim vremenom τ , tj. vrijedi

$$\frac{dA}{d\tau} \ll A. \quad (92)$$

Da se ispuni ta pretpostavka, treba ograničiti bezdimenzioni parametar vodljivosti ε na iznose

$$\varepsilon \ll 1. \quad (93)$$

To ograničenje veoma je važno jer ograničava razmatranje na nelinearne sklopove koji približno harmonički osciliraju. Takvi se sklopovi zovu kvazilinearni, budući da je nelinearna vodljivost ili otpor mali u poređenju sa susceptancijom ili reaktancijom, čak i ako je karakteristika nelinearnog elementa nešto više zakrivljena u području od interesa. Alternativno se može reći da je kvazilinearan sklop također sklop sa visokim faktorom dobrote.

Uvrštenjem jednačbe (91) u (90), uz uvjete (92) i (93), dobiva se, nakon integracije, za tok bezdimenzionog napona u bezdimenzionom vremenu jednačba

$$u = \frac{2 \cos \tau}{1 + e^{-\varepsilon(\tau - \tau_0)}}.$$

Prelaskom na originalne varijable dobiva se jednačba

$$e = \left[\frac{4}{3} \left(\frac{a - G}{b} \right) \right]^{1/2} \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{\left[1 + e^{-(t - t_0) \frac{(a - G)^{1/2}}{C}} \right]}.$$

Konačna amplituda napona (v. jedn. 89) iznosi:

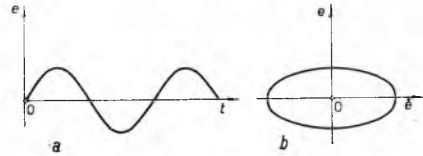
$$e_0 = 2h = \left[\frac{4(a - G)}{3b} \right]^{1/2}. \quad (94)$$

Dok amplituda napona u ne dosegne iznos $\left(\frac{a - G}{b} \right)^{1/2}$, ekvivalentni

paralelni otpor sklopa tokom jednog ciklusa oscilacije negativan je i utječe na povećanje amplitude. Za veće amplitude ekvivalentni paralelni otpor sklopa postaje pozitivan i dovodi do prigušenja oscilacija. Do stabiliziranja amplitude dolazi, upravo

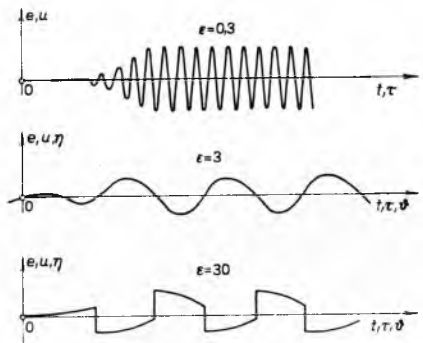
zbog stalne kompenzacije ovih dvaju utjecaja, na stacionarnoj amplitudi.

Tok napona stacionarne oscilacije praktički je sinusoidan (sl. 71 a), a međuovisnost promjene napona e i brzine promjene



Sl. 71. Dva načina prikazivanja stacionarnih oscilacija. a Stacionarna sinusoidna oscilacija napona sklopa na sl. 69, b stacionarna sinusoidna oscilacija napona prikazana u faznoj ravni e Oe

napona e za vrijeme jednog ciklusa prikazuje se elipsom u faznoj ravni ($e, \dot{e}$) (sl. 71 b). Utitravanje nelinearnog sklopa prikazanog na sl. 70, za mali $\varepsilon = 0,3$, vidi se na sl. 72. Nakon dužeg perioda



Sl. 72. Utitravanje nelinearnog sklopa sa sl. 70 za različite recipročne faktore dobrote ε linearnih komponenta titrajnog kruga.

polaganog porasta, amplituda poraste brže do iznosa na kojemu dolazi do njezina ograničenja.

Frekvencija oscilacija. Ako se van der Polova nelinearna diferencijalna jednačba (90) za napon na sklopu prema sl. 70 pomnoži sa $u d\tau$ i integrira u granicama od 0 do ξ , dobiva se:

$$\int_0^\xi u \frac{d^2u}{d\tau^2} d\tau - \int_0^\xi \varepsilon u \frac{du}{d\tau} d\tau + \int_0^\xi \varepsilon u^3 \frac{du}{d\tau} d\tau + \int_0^\xi u^2 d\tau = 0.$$

Drugi i treći član ovog izraza pri integraciji preko punog perioda iščezavaju budući da je amplituda napona na početku i na kraju svake oscilacije jednaka, tako da ostaje samo:

$$\int_0^{2\pi} u \frac{d^2u}{d\tau^2} d\tau + \int_0^{2\pi} u^2 d\tau = 0. \quad (95)$$

Izraz (95) može se parcijalnom integracijom prvog člana i zamjenom diferencijala $d\tau = \omega_0 dt$, svesti na oblik

$$\frac{1}{\omega_0^2} \int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \omega_0 dt = \int_{\omega t=0}^{\omega t=2\pi} u^2 \omega_0 dt. \quad (96)$$

Pretpostavimo naponski val predstavljen Fourierovim redom

$$u = \sum_{a=1}^{\infty} A_a \cos(a\omega t + \varphi_a), \quad (97)$$

čija je derivacija:

$$\frac{du}{dt} = - \sum_{a=1}^{\infty} a\omega A_a \sin(a\omega t + \varphi_a). \quad (98)$$

Ako se jednačbe (97) i (98) uvrste u (96) i izvrši integracija, dobiva se jednačba:

$$\frac{\pi}{\omega_0} \sum_{a=1}^{\infty} a^2 \omega^2 A_a^2 = \pi \omega_0 \sum_{a=1}^{\infty} A_a^2.$$

Nakon zamjene $m_a = A_a/A_1$ i preuređenja dobiva se:

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = - \frac{\sum_{a=2}^{\infty} m_a^2 (a^2 - 1)}{1 + \sum_{a=2}^{\infty} a^2 m_a^2} \quad (99)$$

Kako je pretpostavljeno da nelinearni sklop oscilira kvazi-linearno, harmonici naponskog vala su mali. Zbog toga je drugi član u nazivniku zanemarljiv prema jedinici, a brojnik je mali i $\omega \approx \omega_0$, pa se jednadžba (99) (zbog $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$) može aproksimirati jednadžbom

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{1}{2} \sum_{a=2}^{\infty} m_a^2 (a^2 - 1).$$

Za nelinearni sklop prikazan na sl. 70, u kojem je amplituda stacionarne oscilacije određena s pomoću jednadžbe (94), jednostavno je izračunati sadržaj (trećeg) harmonika struje nelinearnog elementa, čija je karakteristika određena jednadžbom (84). Devijacija stacionarne vlastite kružne frekvencije sklopa ω od frekvencije $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ dobije se iz jedn. (99) i nakon pojednostavnjenja glasi:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{\varepsilon^2}{16},$$

gdje je $\varepsilon = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} (a - G)$. Tome odgovara i produljenje relativnog trajanja perioda oscilacije nelinearnog sklopa

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{\varepsilon^2}{16}}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Relaksacione oscilacije pojavljuju se u nelinearnom sklopu pri jakom utjecaju nelinearnog elementa na ciklus promjene stanja sklopa. Poznato je da linearni paralelni titrajni krugovi pri kritičnom prigušenju prelaze od oscilatornog na aperiodsko titranje.

Vremenski tok napona u na nelinearnom sklopu prikazanom na sl. 70 dobiva se rješenjem van der Polove jednadžbe (90); on ima karakter relaksacione oscilacije za $\varepsilon > 2$. Ako je taj uvjet zadovoljen, mali poremećaj udaljavat će sklop od ravnotežnog stanja dok se u proces ne uključi znatan dio karakteristike nelinearnog elementa. Za $\varepsilon \gg 2$ prvi ciklus relaksacije bit će gotovo identičan s narednima. Promjena vladanja sklopa za različite iznose koeficijentata ε , prema eksperimentalnim i računskim podacima, vidi se na sl. 72.

Tipičan valni oblik relaksacione oscilacije nelinearnog sklopa prikazan je na sl. 72 za $\varepsilon = 30$. Karakteristično je za taj valni oblik da se područja male zakrivljenosti izmjenjuju s područjima velike zakrivljenosti. To ide u ekstrem ako se traži asimptotski oblik rješenja van der Polove jednadžbe za $\varepsilon \rightarrow \infty$; tada se područja male zakrivljenosti smjenjuju s tačkama diskontinuiteta.

Za analizu je podesno diferencijalnu jednadžbu pisati u obliku

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon \left[\frac{du}{d\tau} - \frac{1}{3} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^3 \right] + u = 0,$$

na koji se lako svodi izraz (90). Ako se sada izvrše supstitucije

$$u = \varepsilon \eta, \quad \tau = \varepsilon \vartheta,$$

dobiva se:

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \frac{d^2 \eta}{d\vartheta^2} - \left[\frac{d\eta}{d\vartheta} - \frac{1}{3} \left(\frac{d\eta}{d\vartheta} \right)^3 \right] + \eta = 0,$$

što se može pisati i u obliku

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \frac{d\eta}{d\vartheta} = \frac{\eta - \frac{1}{3} \eta^3 - \eta}{\eta}. \quad (100)$$

Za $\varepsilon \gg 1$ može se u jednadžbi (100) zanemariti $\frac{1}{\varepsilon^3} \frac{d\eta}{d\vartheta}$, iza čega se dobiva ovisnost između η i $\dot{\eta}$:

$$\dot{\eta} - \frac{1}{3} \eta^3 = \eta,$$

na temelju koje se može lako istražiti karakter odnosa između η i $\dot{\eta}$. Vidi se da rezultira periodičko gibanje duž zatvorene petlje

$P_2 P_3 P_4 P_5$ (sl. 73) i kad započne iz stanja sklopa s proizvoljnim početnim uvjetima η i $\dot{\eta}$, npr. iz tačke P_0 ili P_1 , što posebno tačno vrijedi za $\varepsilon \rightarrow \infty$. Asimptotski se iznos perioda titranja u ovoj aproksimaciji dobiva zbroji li se trajanje promjene stanja sklopa duž pojedinih dijelova zatvorene petlje na sl. 73. Budući da vrijedi

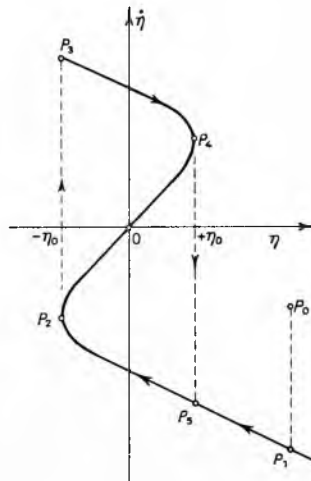
$$d\vartheta = \frac{d\eta}{\dot{\eta}},$$

trajanje je ciklusa

$$T_1 = \oint \frac{d\eta}{\dot{\eta}}.$$

Za vertikalne dijelove petlje je $d\eta = 0$, pa vrijedi

$$T_1 = 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d(\eta - \frac{1}{3} \eta^3)}{\eta} = 2 \left(\ln \eta - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \Big|_{\eta_1}^{\eta_2}.$$



Sl. 73. Zatvoreni ciklus periodičke promjene stanja sklopa sa sl. 70 za velike recipročne faktore dobrote

Odatle se može odrediti relativno trajanje perioda

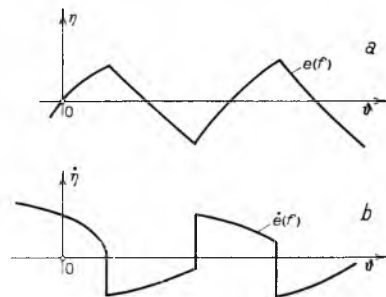
$$T_1 = 1,614$$

ili, ako se izvrši prelaz na originalnu varijablu $t = (\varepsilon/\omega_0) \vartheta$:

$$T = 1,614 \varepsilon / \omega_0 = 0,257 \varepsilon T_0.$$

Za $\varepsilon \gg 1$ proces promjene napona η teći će kako je navedeno u nastavku. Pri porastu napona η počevši od $-\eta_0$, brzina promjene napona u $\dot{\eta}$ bit će pozitivna, i reprezentativna tačka stanja kretat će se u ravlini $P(\eta, \dot{\eta})$ od P_2 do P_4 . Kad η dostigne iznos $+\eta_0$ u P_4 , doći će do skoka u tačku P_5 , što odgovara trenutnoj promjeni predznaka brzine $\dot{\eta}$. Pri smanjenju napona η , brzina $\dot{\eta}$ ostat će negativna i kretat će se po krivulji $P_5 P_2$. U P_2 opet će se trenutno promijeniti predznak brzine, pa će skokom preći u stanje P_3 . Tako će tokom jednog perioda dvaput doći do diskontinuiteta brzine $\dot{\eta}$ u trenucima dostizanja najvećeg i najmanjeg iznosa η .

Brzina je promjene bezdimenzionog napona $\dot{\eta}$ u stvari dakako neprekidna funkcija vremena, čak i ako se mijenja veoma brzo, kao što je u slučajevima kad je ε velik ali ipak konačan; govoreći o diskontinuitetu mi dozvoljavamo pojednostavnjenu predodžbu, koja odgovara asimptotskoj aproksimaciji. Iz toka veličina η , $\dot{\eta}$ na sl. 74 a i b, u ovisnosti o vremenu ϑ , odnosno τ i konačno t ,



Sl. 74. Napon (a) i brzina promjene napona (b) na sklopu oscilatora s nelinearnom vodljivošću s velikim recipročnim faktorom dobrote

može se izvesti ovisnost $e(t)$ i $\dot{e}(t)$. Takva se titranja nazivaju relaksacionim; ona imaju raznoliku primjenu, a raširena su i u prirodi. Opisana idealizirana analiza diskontinuiranih titraja nelinearnog sklopa provedena je, polazeći od van der Polove diferencijalne jednadžbe promjene napona, za posebni slučaj $\varepsilon \gg 1$. U toj razradi zanemaren je inercioni član, tako da je rezultirala veza

$$F \left(\frac{de}{dt} \right) + e = 0.$$

Vidi se da su ova relaksaciona titranja karakterizirana diferencijalnom jednačbom prvoga reda, što se može pisati i u obliku

$$\frac{de}{dt} = \Phi(e),$$

gdje je $\Phi(e)$ određena višeznačna funkcija od e .

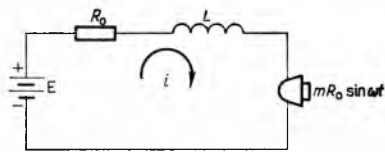
Linearni sklopovi s vremenski promjenljivim elementima

Svojstva linearnih sklopova u kojima su veličine pojedinih sastavnih dijelova ovisne o nezavisnoj varijabli, tj. o vremenu, mnogo su složenija od svojstava sklopova s konstantnim kapacitetom, induktivitetom ili otporom. Analitički izrazi za dinamičku ravnotežu naponâ i struja u takvim su sklopovima linearne diferencijalne jednačbe s promjenljivim koeficijentima. Premda za ovu vrstu sklopova i pripadne jednačbe vrijedi princip superpozicije, egzaktna rješenja za napone i struje često su veoma složena. To je razlog da se rješenja traže metodama koje su slične metodama primijenjenim za nelinearne sklopove. S druge strane, isti se tip diferencijalnih jednačbi dobiva i pri ispitivanju stabilnosti oscilacija nelinearnog sklopa koje su bliske harmoničkim. Poznate diferencijalne jednačbe s periodički promjenljivim koeficijentima, tzv. Hillova i Mathieuova jednačba, pojavljuju se u vezi s tim problemima. Zato je potrebno, pa i uobičajeno, da se obje vrste sklopova opisuju zajedno.

Utjecaj elemenata s vremenski promjenljivim otporom. Sklop koji sadrži ugljeni mikrofon i ekvivalentni induktivitet transformatora u seriji s istosmjernim izvorom napajanja (sl. 75) primjer je linearnog sklopa s promjenljivim parametrima. Pri uzbudi čistim tonom kutne frekvencije ω , otpor se mikrofona mijenja prema jednačbi

$$R = R_0 (1 + m \sin \omega t),$$

u kojoj je R_0 srednja vrijednost otpora, a m njegova relativna promjena, uz $0 < m \ll 1$.



Sl. 75. Linearni sklop s vremenski promjenljivim otporom (desno)

Jednačba dinamičke ravnoteže struje i napona za takav sklop glasi:

$$L \frac{di}{dt} + R_0 (1 + m \sin \omega t) i = E,$$

što se uz uvrštenje kratice $a = R_0/L$ može pisati u obliku

$$\frac{di}{dt} + a (1 + m \sin \omega t) i = \frac{E}{L}.$$

Postojeće standardno rješenje ove jednačbe vodi do modificiranih Besselovih funkcija prve vrste p -tog reda $I_0 \dots I_p$, pa se uz kratice $A_n = (n^2 \omega^2 + a^2)^{-1/2}$ i $\tan \varphi_n = \frac{n \omega}{a}$ dobiva izraz za struju.

Struja u krugu mikrofona određena je jednačbom:

$$i = \left[I_0 \left(\frac{am}{\omega} \right) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p \left(\frac{am}{\omega} \right) \cos p \omega t \right] \left[C \exp(-at) + \frac{E}{L} \left[\frac{1}{a} I_0 \left(\frac{am}{\omega} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left(\frac{am}{\omega} \right) A_n \cos(n \omega t - \varphi_n) \right] \right],$$

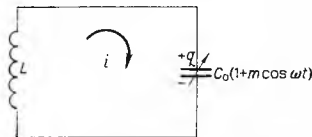
gdje koeficijent C ovisi o početnim uvjetima. Struja očito ima prelaznu komponentu s neizmjerljivo mnogo članova kojima amplituda opada eksponencijalno s vremenom. Frekvencija komponenta struje pri utitranoj je stanju jednaka osnovnoj frekvenciji ili cjelobrojnom mnogokratniku te frekvencije, a amplitude komponenta ovise o parametru m , koji je mjera relativne promjene

otpora mikrofona. Tako, unatoč tome što otpor mikrofona varira sinusoidno s vremenom, promjena struje ponekad je vrlo različita od sinusoidne. S porastom iznosa m raste distorzija struje.

Utjecaj elemenata s vremenski promjenljivim kapacitetom. Ako kondenzator u sklopu prikazanom na sl. 76 ima kapacitet koji je funkcija vremena

$$C = C_0 (1 + m \cos \omega_1 t),$$

gdje je C_0 srednja vrijednost kapaciteta, m njezina relativna promjena, uz $0 < m \ll 1$, a zavojnica je konstantnog induktiviteta L , frekvencija oscilacije struje, napona i naboja sklopa bit će modulirana.



Sl. 76. Linearni rezonantni sklop s vremenski promjenljivim kapacitetom

S pomoću drugog Kirchhoffovog zakona dobiva se diferencijalna jednačba oscilacije naboja na kondenzatoru C :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C_0 (1 + m \cos \omega_1 t)} = 0.$$

Zbog $\omega_0^2 = 1/LC_0$ i $m \ll 1$ može se ova jednačba smatrati približno ekvivalentnom jednačbi

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 (1 - m \cos \omega_1 t) q = 0,$$

pa se ona, dakle, svodi na Mathieuovu diferencijalnu jednačbu. Aproksimativnim metodama dobiva se rješenje ove jednačbe.

Za promjenu naboja u tom slučaju vrijedi jednačba

$$q = \omega_0^{-1/2} \left(1 + \frac{m}{4} \cos \omega_1 t \right) \left[A \cos \omega_0 \left(t - \frac{m}{2 \omega_1} \sin \omega_1 t \right) + B \sin \omega_0 \left(t - \frac{m}{2 \omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right], \quad (101)$$

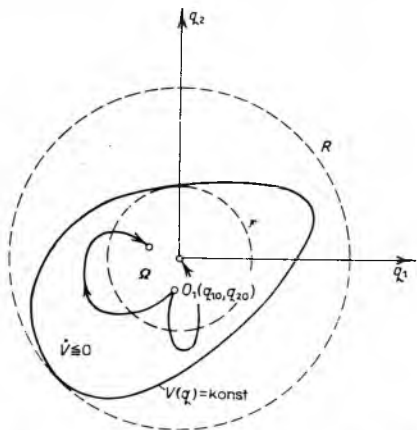
gdje su A i B konstante ovisne o početnim uvjetima. Pokazuje se da je frekvencija oscilacije naboja kondenzatora modulirana u ovisnosti o frekvenciji modulacije kapaciteta. Amplituda oscilacije naboja također varira u ritmu modulacije kapaciteta.

Ako se rezultat (101) razvije u redove Besselovih funkcija, može se o sklopu zaključiti još ovo što slijedi. Promjene naboja na kondenzatoru sadrže u nemoduliranom stanju samo komponente osnovne frekvencije ω_0 , a u toku stacionarne modulacije i sume i diferencije frekvencije ω_0 i cjelobrojnih mnogokratnika modulacione frekvencije ω_1 . Amplitude su tih bočnih frekvencija Besselove funkcije od $k = m \omega_0 / 2 \omega_1$. Veća relativna promjena kapaciteta m općenito vodi većemu k i većim amplitudama bočnih komponenta, lagano moduliranim u ritmu frekvencije ω_1 .

Princip parametričke veze. Nelinearni elementi u električnim sklopovima uzrokuju miješanje oscilacija različitih frekvencija (npr. miješanje radiofrekventnog signala i signala oscilatora u superheterodinskim radio-prijemnicima). Vremenski promjenljivi element (parametar) u sklopu također dovodi do miješanja frekvencija, kao što je prikazano na str. 82, gdje je bila riječ o slučaju kad je nastalo miješanje komponenta vlastite frekvencije sklopa i multipla frekvencije promjene kapaciteta u sklopu. To miješanje frekvencija omogućuje također da se energija potrebna za održavanje oscilacija na jednoj frekvenciji osigura dovođenjem energije, »pumpanjem«, na drugoj frekvenciji. Vezanje različitih tipova oscilacije s pomoću vremenski promjenljivih parametara naziva se parametričko vezanje. Analiza parametričkog vezanja pokazuje kako se taj princip može upotrijebiti za pojačavanje. Mehanizam prenosa energije u krugu prikazanom na sl. 76 može se jednostavno objasniti kako slijedi. Pretpostavimo da je moguće obloge kondenzatora kapaciteta $C(t)$ trenutno malo razmaknuti, pa opet u podesnom momentu stisnuti za isti mali relativni iznos. Budući da kapacitet ovisi o razmaku obloga, kapacitet je kondenzatora u ovom slučaju vremenski promjenljiv parametar. Pretpostavimo da u titrajnom krugu stacionarno oscilira određena količina naboja. Upravo u trenutku kad naboj na oblogama kondenzatora postigne maksimum, trenutno obloge malo razmaknemo. Budući da je na oblogama naboj različitog polariteta, treba za razmicanje utrošiti određen rad.

nadžbi uz poznata tačna i aproksimativna rješenja za jednadžbe na koje su se svodili praktički problemi. Tome smjeru u istraživanju problema stabilnosti nelinearnih sklopova mogu se pripisati sva istraživanja koja su išla za tim da se nađu potpuna rješenja za struje i napone u zatvorenom obliku.

Metoda Ljapunova služi za istraživanje nelinearnih sklopova na posve drukčiji način. Njome se nastoje dobiti informacije o osnovnim svojstvima rješenja za naboj, struju i napon. Pri tome se ne traži da tačna ili približna rješenja budu poznata, tj. da su pripadne nelinearne diferencijalne jednadžbe riješene. To je, u stvari, primjena kvalitativne teorije diferencijalnih jednadžbi na probleme nelinearnih sklopova. Zadatak ovakve kvalitativne teorije nelinearnih sklopova sastoji se u tome da ispituje vladanje rješenja koja su bliska nekom zadatom rješenju. To se rješenje predočuje krivuljom ili trajektorijom A u nekom prostoru varijabli za nelinearne sklopove: naboja, struja i napona. Postavlja se pitanje da li će trajektorija (putanja) B koja počinje u blizini trajektorije A za sve vrijeme ostati u blizini trajektorije A , u kojem je slučaju A stabilna trajektorija, ili će se trajektorija B udaljavati od trajektorije A , u kojem je slučaju A nestabilna trajektorija.



Sl. 77. Stabilnost nelinearnog sklopa po Ljapunovu

Pri ispitivanju stabilnosti uvode se već spomenute pozitivno definitne skalarne pomoćne funkcije ovisnih varijabli naboja, struja i napona čiji se stabilitet ispituje, a koje se nazivaju funkcijama Ljapunova $V(q)$ ako imaju ova svojstva: a) da su zajedno sa svim svojim prvim parcijalnim derivacijama neprekinute u otvorenom području Ω koje sadrži ishodište O koordinatnog sistema; b) da je $V(O) = 0$; c) da su svagdje pozitivne unutar područja Ω , izuzev ishodište; ishodište je izolirani minimum funkcije $V(q)$; d) da je za autonomni nelinearni sklop zadan vektorskomatričnom diferencijalnom jednadžbom $\dot{q} = [Q]$, gdje su q naboji (naponi ili struje), duž trajektorije reprezentativne tačke ispunjen uvjet $\dot{V}(q) = [Q] \cdot \text{grad } V \leq 0$, svagdje unutar područja Ω .

Time su funkcije Ljapunova definirane. Devetnaest teorema Ljapunova za određivanje stabilnosti temelji se na svojstvima tih funkcija. Na sličan način definirane su funkcije Ljapunova i za neautonomne sisteme, a dalje i stabilnost tih sistema. Bez dokaza navest ćemo samo prva dva teorema Ljapunova:

Teorem I (Teorem Ljapunova o stabilnosti). Ako u okolišu Ω ishodišta O koordinatnih q postoji funkcija Ljapunova $V(q)$, ishodište O koordinatnog sistema je stabilno.

Teorem II (Teorem Ljapunova o asimptotskoj stabilnosti). Ako je osim uvjeta iz teorema I zadovoljen uvjet da je $-\dot{V}(q)$ pozitivno definirana funkcija u Ω , ishodište O koordinatnog sistema asimptotski je stabilno.

Navedeni slučajevi stabilnosti u okolišu Ω ishodišta O ilustrirani su na sl. 77. Za grafički prikaz najpodesnije je ako postoje dvije ovisne varijable, q_1 i q_2 . Vidi se da nelinearni sklop, ako se nalazi u stanju koje je definirano tačkom $O_1(q_{10}, q_{20})$ unutar kruga r , ostaje tokom vremena u stanju koja se opisuju tačkama iz unutrašnjosti krivulje $V(q) = \text{konst.}$, odnosno kruga R . To je po-

sljedica uvjeta $\dot{V} \leq 0$, koji zadovoljava funkcija $V(q)$ unutar područja Ω .

PRIMJERI ODREĐIVANJA STABILNOSTI NELINEARNIH SKLOPOVA

Primjer 1. Dinamička stabilnost sklopa nelinearnog oscilatora. Sklop kondenzatora $C(q)$, čiji napon nelinearno ovisi o naboju, i svitka linearnog induktiviteta L , prikazan je na sl. 66 i analiziran na strani 78. Određena je tačna ovisnost frekvencije stacionarne oscilacije o amplitudi naboja Q_0 u titrajnom krugu. Nelinearna diferencijalna jednadžba titranja naboja glasi:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + a^2 q^2) q = 0. \quad (103)$$

Ona se može analizirati i aproksimativno perturbacionom metodom koja je primijenjena na str. 77. Dobiju se bliska rješenja za q i ω . Kvazi-sinusoidni stacionarni trenutni naboj iznosi

$$q_s = Q_0 \cos \omega t, \quad (104)$$

a za frekvenciju naboja vrijedi jednadžba

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3 \omega_0^2 a^2 Q_0^2}{4} = \omega_0^2 (1 + \frac{3}{4} a^2 Q_0^2), \quad (105)$$

uz nuždan uvjet:

$$\frac{3}{4} a^2 Q_0^2 \ll 1. \quad (106)$$

Ako se stacionarna oscilacija naboja q_s poremeti malim dodatkom naboja q_1 dobiva se za

$$q = q_s + q_1$$

nakon zamjene iz (103)

$$\left(\frac{d^2 q_s}{dt^2} + \omega_0^2 q_s + \omega_0^2 a^2 q_s^3 \right) + \left(\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 + 3 \omega_0^2 a^2 q_s^2 q_1 \right) = 0, \quad (107)$$

gdje su zanemareni članovi sa višom potencijom od q_1^1 . Budući da je q_s aproksimativno rješenje za jedn. (103), izraz u prvoj zagradi u jedn. (107) može se zanemariti. Nakon uvrštenja izraza za q_s iz jedn. (104) u treći član druge zagrade u izrazu (107), dobije se

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 + 3 \omega_0^2 a^2 Q_0^2 (\cos^2 \omega t) q_1 = 0. \quad (108)$$

Upotrebom identiteta za kvadrat kosinusa iz jedn. (108) dobiva se izraz

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left(\omega_0^2 + \frac{3}{2} \omega_0^2 a^2 Q_0^2 \right) q_1 + \frac{3}{2} \omega_0^2 a^2 Q_0^2 \cos(2\omega t) q_1 = 0, \quad (109)$$

koji se nakon zamjena

$$y = q_1, \quad z = \omega t, \quad a = \frac{\omega_0^2 + \frac{3}{2} \omega_0^2 a^2 Q_0^2}{\omega^2}, \quad p = -\frac{3 \omega_0^2 a^2 Q_0^2}{4 \omega^2}, \quad (110)$$

može svesti na standardni oblik Mathieuove diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2p \cos 2z) y = 0. \quad (111)$$

Koeficijent p iz jedn. (110) malen je zbog uvjeta (106), a ω u istoj jednadžbi može se zamijeniti jednadžbom (105). Da bi se ustanovilo u kojoj je mjeri dodatkom naboja q_1 poremećen tok oscilacije naboja $q_s = Q_0 \cos \omega t$, treba znati da li su rješenja jednadžbe (109) za $q_1(t)$ stabilna ili nestabilna. To se pitanje, s pomoću supstitucije (110), svodi na istraživanje stabilnosti rješenja Mathieuove diferencijalne jednadžbe (111). Poznato je da su za $0 < a \ll 1$ i $0 < p \ll 1$ stabilna rješenja za $y(z)$, odnosno $q_1(t)$, ako je ispunjen uvjet

$$a < 1 - p,$$

gdje su a i p dani jednadžbom (110). Na taj način može se odrediti uz koje će uvjete poremećaj q_1 , stacionarne oscilacije naboja q_s , uzrokovati samo privremenu ili konačnu izmjenu njezinog vremenskog toka. To će biti kada rješenja diferencijalne jednadžbe (109) za vremenski tok smetnje $q_1(t)$ teže nuli ili su mala i konstantna.

Primjer 2. Ispitivanje stabilnosti metodom Ljapunova.

Idući primjer ilustrira osnovnu karakteristiku metode Ljapunova, prema kojoj se zaključak o stabilnosti naboja, struja i naponâ nelinearnog sklopa može donijeti direktno iz razmatranja odnosa veličine članova u diferencijalnoj jednadžbi, a da nisu poznata njezina tačna rješenja. Određeno je u kojim se granicama kreću naboj, struja i napon čija se stabilnost ispituje, i da su te granice konačne. Pretpostavimo da naboj sklopa zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\ddot{q} + g(q) = 0, \quad (112)$$

gdje $g(q)$ ima prvu derivaciju različitu od nule. Ovo je općenitiji slučaj jednadžbe (71), koja je opisivala dinamičku ravnotežu naboja u nelinearnom titrajnom krugu, sastavljenom od linearnog induktiviteta i nelinearnog kapaciteta.

Uvođenjem zamjene $r = \dot{q}$ gornja se jednadžba može svesti na sistem

$$\dot{q} = r, \quad \dot{r} = -g(q). \quad (113)$$

Neka $g(q)$ prolazi kroz ishodište tako da je $q \cdot g(q) > 0$ za $q \neq 0$, a $g(0) = 0$. Označimo sa $G(q)$ integral od $g(q)$:

$$G(q) = \int_0^q g(q) dq.$$

Energija u magnetskom polju proporcionalna je kvadratu struje $r^2/2$, a energija električnog polja funkciji naboja $G(q)$. Kao funkciju Ljapunova možemo uvesti

$$V(q, r) = \frac{r^2}{2} + G(q) = h^2, \quad h = \text{konst.}, \quad (114)$$

budući da zadovoljava sve uvjete navedene na str. 84. Posebno za nelinearni sklop koji se svodi na jednadžbe (112) ili (113) vrijedi

$\dot{V}(q, r) = 0$ svugdje unutar područja definicije funkcije $g(q)$. Dakle je prema prvom teoremu Ljapunova ishodište O stabilno.

Razmatrana funkcija Ljapunova istovjetna je s ukupnom energijom sklopa, što ne vrijedi općenito. U ravni qOr na slici 78 prikazan je tok rješenja sistema jednadžbi (113) za poznati $g(q)$. Iz jedn. (114) izlazi da je putanja reprezentativne tačke u ravni qOr određena

$$r = \pm [2[k^2 - G(q)]]^{1/2},$$

što znači da se radi o ovalnim krivuljama koje okružuju ishodište. Ishodište je singularna tačka koja ima svojstvo centra reprezentativnih krivulju u ravni qOr .

Izložen je jednostavni primjer primjene metode Ljapunova za određivanje stabilnosti naboja nelinearnog sklopa. Ista metoda može se upotrijebiti pri određivanju stabilnosti naboja, struja i napona složenih nelinearnih i perturbiranih sklopova.

R. Mutabžija

LIT.: K. Küpfmüller, Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung, Stuttgart 1949. — E. A. Guillemin, The mathematics of circuit analysis, New York 1951. — W. R. Le Page, S. Seely, General network analysis, New York 1952. — E. A. Guillemin, Introductory circuit theory, New York 1953. — W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin 1954. — M. E. Van Valkenburg, Network analysis, Englewood Cliffs 1955. — J. L. Stewart, Circuit theory and design, New York 1956. (Njemački prijevod: Theorie und Entwurf elektrischer Netzwerke, Stuttgart 1958). — A. Guillemin, Synthesis of passive networks, New York 1957. — D. F. Tuttle, Network synthesis, New York 1958. — N. Balabanian, Network synthesis, Englewood Cliffs, N. Y. 1958. — W. J. Cunningham, Introduction to nonlinear analysis, New York 1958. — R. L. Cosgriff, Nonlinear control systems, New York 1958. — S. Seshu, N. Balabanian, Linear network analysis, New York 1959. — D. Svarc, Električni titrajni krugovi, Zagreb 1959. — R. Horvat, Teorija električnih kola, Beograd 1959. — A. A. Андронов, A. A. Вит, И. Е. Хакин, Теория колебаний, Москва 1959. — W. H. Louisell, Coupled mode and parametric electronics, New York 1960. — M. E. Van Valkenburg, Introduction to modern network syntheses, New York 1960. — R. M. Kerchner, G. F. Corcoran, Alternating current circuits, New York 1960. — J. La Salle, F. Lefschetz, Stability by Liapunov's direct method, London 1961. — G. Wunsch, Theorie und Anwendung linearer Netzwerke, 2 Teile, Leipzig 1961/64. — W. Klein, Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen, Berlin 1961. — S. Seshu, M. Reed, Linear graphs and electrical networks, New York 1961. — H. J. Reich, Functional circuits and oscillators, Princeton 1961. — L. Weinberg, Network analysis and synthesis, New York 1962. — G. Wunsch, Moderne Systemtheorie, Leipzig

1962. — R. Feldtkeller, Vierpoltheorie, Stuttgart 1962. — J. Lagasse, Étude des circuits électriques, Paris 1962. — W. A. Taft, Fragen der Theorie der Netzwerke mit veränderlichen Parametern (prijevod s ruskog), Leipzig 1962. — G. Bosse, Synthese elektrischer Siebschaltungen, Stuttgart 1963. — W. H. Chen, The analysis of linear systems, New York 1963. — E. Philippow, Nichtlineare Elektrotechnik, Leipzig 1963. — E. A. Guillemin, Theory of linear physical systems, New York 1963. — W. H. Chen, Linear network design and synthesis, New York 1964. — C. Hayashi, Nonlinear oscillations in physical systems, New York 1964. — R. Horvat, Specijalna električna kola, Beograd 1964. — R. Feldtkeller, Siebschaltungstheorie, Stuttgart 1965. — S. I. Pearson, G. J. Maller, Introductory circuit analysis, New York 1965. — H. H. Skilling, Electrical engineering circuits, New York 1965. — M. Sh. Ghauri, Principles and design of linear active circuits, New York 1965. — R. J. Smith, Circuits, devices, and systems, New York 1966. — F. F. Kuo, Network analysis and synthesis, New York 1966. — R. E. Scott, Elements of linear circuits, Reading, Mass. 1966. — E. A. Faulkner, Principles of linear circuits, London 1966. — R. Lowe, J. W. Mansell, Basic electric circuit theory, London 1967. — F. A. Benson, Electric circuit problems and solutions, London 1967. — В. А. Борошников, В. К. Косарев, П. А. Ходом, Электрические сети и системы, Ленинград 1968. — S. K. Mitra, Analysis and synthesis of linear active networks, New York 1969. — D. Siljak, Nonlinear systems: the parameter analysis and design, New York 1969. — P. M. Chirlian, Basic network theory, New York 1969. — D. P. Leach, Basic electric circuits, N. Y. 1969. — Ch. A. Desoer, E. S. Kuh, Basic circuit theory, New York 1969. — C. W. Fox, W. L. Reuter, Circuits, signals and networks, New York 1969. — H. A. Мельников, Электрические сети и системы, Москва 1969. — Kalman, De Claris, Aspects of network and system theory, New York-London 1970. M. Plohl R. Mutabžija

ELEKTRIČNI KUĆANSKI STROJEVI, APARATI I

NAPRAVE služe za obavljanje kućanskih poslova u stanovima i drugdje. Danas se takvi aparati upotrebljavaju za hlađenje, konzerviranje i spremanje hrane i pića; za pripremanje i kuhanje jela; za zagrijavanje vode za razne namjene; za pranje rublja i suda; za grijanje, ventilaciju i hlađenje prostorija; za čišćenje prostorija; za održavanje lične higijene; za uređivanje vrta i za vršenje različitih popravaka i obrtničkih radova u kući.

Za pogon nekih kućanskih aparata mogu se upotrijebiti također čvrsta, tekuća i plinovita goriva kao pogonska sredstva, ali je u mnogim slučajevima pogon električnom energijom prikladniji i udobniji, mada nije uvijek i najekonomičniji. S obzirom na to da ekonomičnost kod kućanskih strojeva i naprava ima često tek sekundarnu ulogu, električni kućanski strojevi i naprave brzo osvajaju tržište i nalaze sve masovniju primjenu u svijetu.

Električna se energija počela primjenjivati za osvjjetljenje već 1880, a prvi su se kućanski aparati (kuhala i glačala) počeli upotrebljavati krajem prošlog stoljeća. Znatno kasnije pojavili su se štednjaci, usisaci prašine, hladnjaci, grijala vode i male sobne grijalice. Tek u najnovije vrijeme došlo je do šire primjene strojeva za pranje rublja i posuda, manjih naprava kao što su električni brijači aparati i miješalice, i električnog grijanja stanova kao osnovnog grijanja prostorija.

Ukoliko posjeduje sve uobičajene kućanske strojeve, aparate i naprave, prosječno kućanstvo troši danas priličnu količinu električne energije (tabl. 1). Prednosti primjene električne energije u usporedbi s drugim izvorima energije u kućanstvu dovele su do odnosa njihovog učešća u ukupnoj potrošnji za ove svrhe prikazanih u tabl. 2.

Tablica 1

POTROŠAK ELEKTRIČNE ENERGIJE U PROSJEČNOM KUĆANSTVU

Trošilo	Mjesečni potrošak kWh	Trošilo	Mjesečni potrošak kWh
Osvjetljenje, radio, televizor i različiti sitni aparati	75	Grijalo vode u kupaonici (za tuš)	120
Kuhanje	76	Stroj za pranje rublja	48
Hlađenje	28		
Grijalo vode u kuhinji	90	Ukupno	437

Tablica 2

UDIO VRSTA ENERGIJE U UKUPNOJ POTROŠNJI KUĆANSTVA

Izvor energije	Svjetlo	Kuhanje	Topla voda	Grijanje	Ukupno učešće
Čvrsta goriva		10%	10%	25%	11,5%
Tekuća goriva			20%	50%	17,5%
Plinovita goriva		40%	30%	15%	21%
Električna energija	100%	50%	40%	10%	50%

Kućanstva u Jugoslaviji troše gotovo 1/4 električne energije koja se proizvodi. To je svojevrsan evropski rekord, jer se u istočnim zemljama ta potrošnja kreće oko 8%, a na zapadu oko 20%; jedinu iznimku čini Velika Britanija sa 34%.

Veći kućanski strojevi danas se obično izrađuju s okućjima standardiziranih dimenzija (visina 85 cm, dubina 55 i 60 cm), kako bi se mogli uklopiti u standardizirani kuhinjski namještaj.