Simboli	Naziv veličine
	VELIČINE MEHANIKE
F	Sila
G	Težina, teža, gravitacijska sila
p	Tlak | pritisak |
M, (T)	Moment sile, zakretni moment
m	Masa
ϱ, (δ), d	Gustoća | gustina |, specifična masa
γ	Specifična težina
J, (I)	Moment tromosti | inercije |
W	Moment otpora
M_T	Moment torzije
E	Modul elastičnosti pri savijanju (Youngov modul)
G	Modul elastičnosti pri smicanju (Coulombov modul)
σ	Naprezanje pri savijanju
τ	Naprezanje pri smicanju
μ	Koeficijent trenja

Simboli	Naziv veličine
	VELIČINE ENERGIJE
h	Planckova konstanta
$\hbar$	$\frac{h}{2\pi}$
E, W	Energija
W, (A)	Rad
P, N, S	Snaga
η	Korisnost, stupanj iskoristivosti (iskorišćenja), | stepen korisnog dejstva |
	VELIČINE TOPLINE | TOPLOTE |
t, (ϑ, Θ)	Relativna temperatura (K), Celzijeva temperatura (°C)
T, (Θ)	Apsolutna temperatura (K)
α	Temperaturni koeficijent | koeficijenta |, koeficijenat prelaza topline
c	Specifična toplina | toplota |

Simboli	Naziv veličine
	VELIČINE MAGNETIZMA
F, (F_m, $\mathscr{F}$)	Magnetomotorna sila
H	Jakost | jačina | magnetskog polja
A	Magnetski vektorski potencijal
J	Magnetizacija, magnetska polarizacija
Φ	Magnetski tok | fluks |
B	Magnetska indukcija, gustoća magnetskog toka | gustina magnetskog fluksa |
Λ, (P)	Magnetska vodljivost | provodnost, provodljivost, permeansa |
μ	Permeabilnost
μ_0	Magnetska konstanta (vakuuma)
$\varkappa$	Magnetska susceptibilnost
R, (R_m, $\mathscr{R}$)	Magnetski otpor, reluktancija | reluktansa |
p	Broj pari polova

ELEKTROTEHNIKA, grana nauke i tehnike koja se bavi primjenom elektriciteta u rješavanju tehničkih zadataka. U tu svrhu ona proučava pojave u vezi s elektricitetom i rezultate tih proučavanja, zajedno sa spoznajama drugih tehničkih nauka, upotrebljava za ostvarenje i usavršavanje tehničke primjene elektriciteta.

Elektrotehnika kao grana tehnike običavala se nekad općenito dijeliti na tehniku jake struje i tehniku slabe struje. Pri tom su se ispočetka jakostrujnim uređajima smatrali oni u kojima pri normalnoj upotrebi mogu nastati struje opasne za ljude i okolinu, a slabostrujnim uređajima oni pri kojima takve opasnosti nema. Podjela na tehniku jake i slabe struje mogla je zadovoljiti i dok se ona uglavnom poklapala s granama tehnike u kojima se elektricitet isključivo upotrebljavao: tehnika jake struje se poklapala s energetskom elektrotehnikom a tehnika slabe struje s tehnikom telekomunikacijâ (telegrafijom i telefonijom). Danas se elektricitet primjenjuje u više od deset grana tehnike, pa nikakva podjela elektrotehnike na samo dvije grane ne može zadovoljiti.

Kao pogodna pokazala se podjela elektrotehnike na četiri grupe primjenâ elektriciteta: energetsku elektrotehniku, informacijsku elektrotehniku, elektroniku i električnu upravljačku i regulacijsku tehniku.

Energetska elektrotehnika, za koju se još uvijek ponekad upotrebljava naziv »elektrotehnika jake struje«, obuhvaća sve grane koje se bave proizvodnjom, prijenosom, pretvaranjem i iskorišćenjem električne energije.

Informacijska elektrotehnika sadrži sve grane koje se bave primjenom, obradom, pohranjivanjem, pretvaranjem i prijenosom informacija. U ovu grupu idu također signalna tehnika, elektroakustika i električna mjerna tehnika.

Elektronika se bavi građenjem električnih sastavnih dijelova i njihovom primjenom u sklopovima i uređajima. Ona služi danas skoro u istoj mjeri energetskoj elektrotehnici (*energetska elektronika*) koliko i informacijskoj elektrotehnici (*informacijska elektronika*), a osim toga i drugim granama tehnike.

Električna upravljačka i regulacijska tehnika povezuje informacijsku i energetsku elektrotehniku, a služi i mnogim drugim granama tehnike.

U ovoj enciklopediji praktična elektrotehnika — tehnička primjena elektriciteta — obrađena je u nizu posebnih članaka; od teorijskih osnova u posebnim člancima obrađena je teorija električnih krugova, teorija električnih vodova i prelazne pojave. Ovaj članak o elektrotehnici sastoji se od tri dijela: u prvom dijelu obrađeni su najprije osnovni pojmovi elektrotehnike, opisane su veličine, jedinice i osnovni zakoni mirujućeg električnog i magnetskog polja, a zatim teorija (polagano) promjenljivog elektromagnetskog polja, te klasična elektrodinamika. U drugom dijelu dat je historijat elektrotehnike. Na kraju razmatrana je teorija elektromagnetskih polja.

FIZIKALNE OSNOVE

Elektricitet je skup električnih naboja koji ili miruju ili su u pokretu. Kad naboji miruju, postoji *statički elektricitet*, čiji se učinci ispoljavaju kao djelovanje električnog polja oko električnih naboja. Kad se naboji kreću, tj. kad postoji strujanje elektriciteta koje se zove *električna struja*, oko tih naboja u pokretu postoji, osim električnog, i magnetsko polje. Električne naboje treba smatrati svojevrsnim elementarnim česticama koje, uz ostale, predstavljaju sastojke materije.

Atomi, najmanje čestice na koje se materija može rastaviti kemijskim sredstvima, sastavljeni su prema pojednostavnjenom (tzv. naivnom) modelu E. Rutherforda i N. Bohra od električki pozitivno nabijene *jezgre* oko koje se kreću u točno određenim putanjama *elektroni*, nosioci elementarnog negativnog električnog naboja (najmanje moguće količine negativnog elektriciteta). Jezgra (nukleus) atoma sastavljena je od *protonâ*, materijalnih čestica s pozitivnim elementarnim električnim nabojem, i *neutronâ*, elementarnih čestica bez električnog naboja. Elementarni naboji protona i elektrona po apsolutnom su iznosu jednaki (iznose $Q_e = \pm 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ ampersekunda ili kulona, v. str. 114); kako je atom u normalnom stanju prema vani neutralan, oko jezgre mora da kruži toliko elektrona koliko u njoj ima protona. Masa elektrona (kad miruje) iznosi $m_{e0} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, masa protona je 1937 puta veća od toga. Masa elektrona u kretanju (prema teoriji relativnosti) raste s njegovom brzinom.

Atomi kao cjeline mogu se nalaziti samo u određenim, diskretnim energetskim stanjima (v. *Atom*, TE 1, str. 456). Prema tome se i elektroni što kruže oko jezgre mogu nalaziti samo u određenim energetskim stanjima (kvantnim stanjima), tj. kretati se samo u određenim (kvantiziranim) *putanjama*. Kako putanje mogu biti (kvantizirano) različito orijentirane u prostoru, a elektroni mogu imati i različit smjer okretanja oko vlastite osi (različit *spin*) elektroni se mogu nalaziti u različitim kvantnim stanjima a imati istu energiju. Kaže se da elektroni iste energije pripadaju istoj *ljuski* elektronskog plašta koji obavija atomsku jezgru. Prema *Paulijevu principu* u atomu se ne mogu nalaziti dva elektrona istog kvantnog stanja; iz toga slijedi da se u jednoj ljuski može nalaziti samo određeni broj elektrona. Stoga se plašt s većim brojem elektrona sastoji od više ljusaka, od kojih ljuske manje energije (bliže jezgri) mogu biti »popunjene«, tj. sadržati maksimalno mogući broj elektrona, a jedna ili dvije ljuske najveće energije (na periferiji atoma) biti nepopunjene.

Između protonâ i neutronâ postoje vrlo jake sile posebne vrste, nuklearne sile, koje nisu ni električne, ni magnetske ni gravitacijske; između protonâ i elektronâ, naprotiv, vladaju *električne* tzv. Coulombove *privlačne sile* (v. str. 124). Pozitivni naboj protona privlači, naime, elektrone i oni su stoga u popunjenim ljuskama razmjerno čvrsto vezani uz jezgru. U atomima koji imaju vanjsku ljusku još nepopunjenu mogu se elektroni iz te ljuske relativno lakše premještati u više energetske nivoe ili prebaciti u sklop drugog atoma. U takve nepopunjene ljuske mogu atomi također primiti elektrone, npr. iz drugog atoma. Elektronima u vanjskoj, nepopunjenoj ljuski ostvaruje se na taj način povezivanje atoma u veće čestice, *molekule*; broj tih elektrona određuje valenciju elemenata, i time omjer u kojemu se atomi različitih elemenata združuju u molekule. Ti se elektroni stoga nazivaju *valencijskim elektronima*. Za elektrone koji se nalaze na putanji najbližoj jezgri (putanji najmanje energije) na kojoj se prema Paulijevom principu mogu nalaziti kaže se da su u *osnovnom stanju*, i za atom i molekulu kojima su svi elektroni u tom stanju kaže se da su u osnovnom stanju. Dovede li se atomu energija izvana (npr. zagrijavanjem, udarom, zračenjem), njegovi se elektroni mogu prebaciti iz ljuske manje energije u ljusku veće energije. Za atom u kome se to dogodilo kaže se da je *uzbuđen*. Kad se elektron vraća s više energetske razine na nižu, atom primljenu energiju predaje okolini u obliku elektromagnetskog zračenja. (Studij spektara tog zračenja najvažniji je način kako se dobivaju informacije o strukturi atoma.)

Ako se perifernim elektronima privede tolika energija da se prekorači energetska barijera koja sprečava njihov izlazak, oni se potpuno odvoje od atoma, atom postane pozitivno električan i zove se *pozitivni ion* ili *kation*. Atom koji je odvojeni elektron primio u svoju nepopunjenu vanjsku ljusku postaje time negativno električan i zove se *negativni ion* ili *anion*. Minimalni rad potreban da se elektron izbaci iz vanjske ljuske naziva se ionizacijskim radom, a cijela pojava *ionizacijom*.

Slično se grupe atoma, molekule, nazivaju ionima ako molekula u cjelini ima manjak ili suvišak elektronâ prema normalnom neutralnom stanju. Općenito se i za električki nabijena (elektrizirana) tijela može reći da je negativno ono tijelo koje ima višak elektrona, a pozitivno ono koje ima manjak elektrona.

Pozitivni elementarni električni naboj protona $+Q_e$ pojavljuje se slobodan samo u reakcijama među jezgrama (nuklearnim reakcijama); u električnim pojavama pozitivni je elektricitet stoga prisutan samo kao naboj pozitivnih iona ioniziranih tvari.

Elementarno negativno nabijena čestica, elektron, postoji, naprotiv, pod običnim uvjetima i slobodan; kao takav on ima u električnim pojavama takvu ulogu da je mogao biti smatran naprosto elementarnim djelićem elektriciteta.

Električna struja zove se svako gibanje (strujanje ili pomicanje) električnih naboja. Ona, dakle, nastaje bilo gibanjem elektronâ, gibanjem pozitivnih i negativnih iona, te gibanjem većih materijalnih električno nabijenih čestica (npr. prašine). Pri strujanju elektrona ne nastupa nikakvo premještanje materije, dok pri strujanju ionâ i većih nabijenih čestica dolazi i do transporta materije.

Bit električne struje ponešto je različita ovisno o tome da li je posrijedi gibanje naboja kroz materiju ili kroz vakuum, kroz materiju u kondenziranom (čvrstom ili tekućem) stanju, ili u plinovitom stanju, ili u stanju plazme. Pri gibanju nabojâ kroz materiju u kondenziranom stanju bit je struje različita prema tome da li su nabijene čestice u gibanju elektroni ili su ioni, i prema tome kako su u molekulama ili kristalima materijala pojedini atomi među sobom povezani.

Postoje tri granična načina na koji atomi mogu u molekulama ili kristalima biti među sobom povezani: kovalentna veza, ionska veza i metalna veza (v. *Atom*, TE 1, str. 469).

Kovalentna veza nastaje među nekim atomima (npr. jednakim atomima) kad se oni toliko približe jedni drugima da im elektroni njihovih vanjskih nepopunjenih ljuska postaju zajednički. *Ionska veza* među nekim različitim atomima ostvaruje se tako da iz vanjske ljuske jednog atoma pređu valencijski elektroni u vanjsku ljusku drugog atoma, a na taj način nastali suprotno električno nabijeni ioni među sobom se privlače električnom (Coulombovom) silom (v. npr. sl. 20 u članku *Atom*). Jezgre ionski vezanih atoma pravilno su razmještene u čvorovima prostornih (kristalnih) rešetaka, i svaka od njih veže uz sebe elektrone tako da nema (kao u kovalentnoj vezi) elektronâ koji su dvama atomima zajednički. U *metalnoj vezi* također su jezgre s plaštom popunjenih ljusaka (dakle pozitivni ioni) smještene u čvorovima kristalne rešetke, a elektroni nepopunjenih ljusaka, tako su slabo vezani uz jezgre da se poput čestica nekog plina (*»elektronski plin«*) slobodno gibaju među njima — drugim riječima, da su zajednički svim atomima.

Struja u vodičima. U materijalima sastavljenim od atomâ povezanih metalnom vezom slobodni elektroni elektronskog plina lako se pod utjecajem električnog polja stavljaju u gibanje i nailaze u svom gibanju na razmjerno mali otpor ionâ u kristalnoj rešetki. Kaže se da su ti materijali električki (dobro) vodljivi i nazivaju se *vodičima.*

Struja u dielektriku (*izolatorima*). U materijalima s kovalentno vezanim atomima elektroni su čvrsto vezani uz jezgre fiksirane u kristalnoj rešetki (neki od njih, kako je rečeno, i uz dvije jezgre istovremeno); ti su materijali stoga električki vrlo slabo vodljivi ili nevodljivi; nazivaju se *izolatorima* ili *dielektricima.* Priključi li se na dva metalna vodiča između koja je uložen izolator (npr. na kondenzator, v. str. 120) izvor stalnog električnog napona, poteći će na te vodiče kratkotrajna struja i električki ih nabiti. Pod utjecajem električnog polja, koje se zbog toga uspostavlja, dolazi pri tome i do pomaka elementarnih električnih nabojâ u izolatoru (dielektriku). Ako je narinuti napon promjenljiv (npr. izmjeničan), teći će u kondenzator i iz njega stalno struje promjenljive jakosti i smjera, a u dielektriku mijenjat će se pri tome na odgovarajući način i pomak elementarnih naboja. Izmjenična se struja, dakle, u dielektriku nastavlja kao *pomačna struja* ili *struja dielektričnog pomaka.* Ona se sastoji od dvije komponente: jedne koja bi postojala i da su elektrode u vakuumu, i druge koja ovisi o materijalu dielektrika (v. poglavlje Polarizacija, str. 122).

Struja u talinama i otopinama elektrolita. U materijalu sastavljenom od ionski vezanih atoma, tzv. (pravim) elektrolitima, može se ostvariti električna struja usmjerenim gibanjem iona (pozitivno nabijenih u jednom smjeru, a negativno nabijenih u suprotnom) ako se oslabi ili prekine veza koja drži suprotno nabijene čestice fiksirane u rešetki. To se zbiva kad se takva tvar rastali ili otopi u pogodnom otapalu. Tako dobivene taline i otopine jesu (ionski) vodljive, te se ponekad nazivaju i *vodičima druge vrste.* Gibanje iona u tekućini (talini ili otopini) sporo je u usporedbi s gibanjem elektrona u metalnim vodičima (*vodičima prve vrste*). (V. članak *Elektrokemija*, TE 4, str. 363.)

Granice između pojedinih vrsta veze među atomima nisu oštre; ima materijalâ s atomima među sobom vezanim na način koji je posredan između dva granična načina. Ako su npr. elektroni koji su zajednički dvama atomima u kovalentnoj vezi, u prosjeku, bliži jednom nego drugom atomu, posrijedi je *polarna veza*, zvana tako jer u tako stvorenoj molekuli nekoji jezgara nisu potpuno kompenzirani, te ona predstavlja električni *dipol.* Ta veza, iako je u biti kovalentna, donekle se približava ionskoj. Ako se iz sklopa kovalentno vezanih atoma razmjerno malobrojni elektroni mogu toplinskim gibanjem istrgnuti i postati slobodno pokretljivi, materijal sastavljen od takvih atoma bit će po vodljivosti između vodiča i izolatora; naziva se *poluvodičem.* (O tome vidi više u članku *Elektronika, sastavni dijelovi*, TE 4, str. 472.)

Električna struja u vakuumu sastoji se samo od toka elektrona koji prelijeću od jednog metalnog vodiča do drugog. (Vodič prve vrste iz kojeg elektroni prelaze u drugi medij ili na koji prelaze s drugog medija — vakuuma, plina, poluvodiča ili vodiča druge vrste — nazivaju se *elektrodama*, i to: elektroda iz koje elektroni izlaze naziva se *katodom*, a elektroda u koju ulaze, *anodom.*) Da bi moglo doći do strujanja elektrona kroz vakuum, treba osigurati izlazak (emisiju) elektronâ iz katode (termionsku emisiju, emisiju djelovanjem električnog polja, fotoelektričnu emisiju, sekundarnu emisiju; o tome vidi više u poglavlju Emisija elektronâ iz metalâ u članku *Električna pražnjenja u plinovima*, TE 3, str. 674). Iz katode oslobođene elektrone privlači pozitivno nabijena anoda i oni se kreću u obliku mlaza prema njoj. Primjer za primjenu električne struje u vakuumu predstavljaju vakuumske elektronke (*Elektronika, sastavni dijelovi*, TE 4, str. 460. Tamo v. više i o termionskoj emisiji i jakosti struje kroz vakuum).

Električna struja u plinovima. Plinovi, ako su zaštićeni od ionizirajućeg zračenja, na temperaturama nižim od ~1000 K odlični su izolatori. Da bi neki plin postao električki vodljiv, u njemu moraju nastati slobodni nosioci električnog naboja (elektroni i ioni). Električna struja u plinovima sastoji se od nosilaca električnog naboja koji izlaze iz jedne elektrode ili nastaju u samom plinu, te se kreću kroz plin prema suprotno nabijenoj elektrodi. Emisija elektronâ iz elektrode nastaje u ovom slučaju na isti način kao pri električnoj struji kroz vakuum, a nosioci električnih naboja u plinu nastaju različitim ionizacijskim procesima, u prvom redu putem sudara elektronâ s atomima i molekulama, putem interakcije uzbuđenih atomâ i molekula među sobom ili s molekulama u osnovnom stanju i putem ionizacije zračenjem. Primjer za primjenu električne struje u plinovima jesu plinom punjene elektronke, a napose, za struju uz katodnu emisiju elektronâ fotoemisijama ili ionskom sekundarnom emisijom, tinjalica (v. u spomenutom članku, TE 4, str. 469, 470).

Elektronke punjene plinom imaju najčešće katodu s termionskom emisijom elektronâ slično kao vakuumske elektronke. U tom slučaju elektroni oslobođeni iz katode prelijeću velikom brzinom prema anodi. Takvi brzi elektroni sudaraju se s česticama plina i plinske se molekule ioniziraju. Iz ioniziranih molekula izbačeni elektroni lavinski povećavaju tok elektronâ koji se kreće prema anodi, a pozitivni se ioni kreću prema katodi, pri čemu se većina njih rekombinira (opet spaja) u neutralne atome. Primjer za primjenu takve struje u plinu predstavlja ignitron (ispravljačica; v. u spomenutom članku, TE 4, str. 471).

Električna struja u plazmi. Plazmom se naziva materija čije su čestice u velikoj mjeri, ili čak potpuno, ionizirane. Koncentracija elektronâ i negativnih iona u plazmi jednaka je koncentraciji pozitivnih iona, pa je rezultirajući volumenski električni naboj plazme jednak nuli. Zbog toga je plazma električki vrlo dobro vodljiva, približno jednako kao vodiči; ona poprima svojstva slična vodičima.

Plazma se dobije npr. jakim zagrijavanjem medija kojim prolazi struja. Ona postoji npr. i u električnom luku ali i u nekim plinskim sijalicama. Iskorištava se i u tzv. magnetohidrodinamičkim generatorima. Kroz plazmu teče elektronska i ionska struja. (V. članak *Plazma.*)

Učinci električne struje. Osnovni učinci električne struje jesu: toplinski, kemijski i magnetski.

Toplinski učinak električne struje je fizikalna pojava da se vodiči kroz koje prolazi struja griju. To se objašnjava time što se pri prolazu kroz materiju vodiča električni naboji sudaraju s česticama materije, pri čemu se njihova energija gibanja pretvara u toplinu (v. *Elektrotermija*, str. 182). Struja, dakle, zbog sudarâ nailazi na otpor, a taj *električni* (*omski, djelatni*) *otpor* ovisi o sastavu vodiča.

Kemijski učinci električne struje iskorištavaju se u elektrokemijskim (elektrodnim) procesima do kojih dolazi zbog gibanja iona prilikom prolaska istosmjerne struje kroz električki vodljive otopine i taline elektrolitâ (solî, kiselinâ, bazâ). Primjena kemijskih učinaka električne struje u tehnici je golema. U vezi s time v. članke *Elektrokemija*, TE 4, str. 363; *Akumulatori*, TE 1, str. 48; *Aluminijum*, TE 1, str. 223; *Bakar*, TE 1, str. 561; *Cink*, TE 2, str. 652; *Elektrokemijska obrada*, TE 4, str. 392; *Elektroliza alkalijskih klorida*, TE 4, str. 405; *Galvanotehnika.*

Magnetske učinke električne struje uzrokuju magnetske sile koje djeluju u magnetskom polju što se stvara u vodiču kojim protječe električna struja, i oko njega. U elektrotehnici se namjerno električnom strujom stvaraju magnetska polja kako bi se iskoristili učinci tog polja. Najvažniji učinci magnetskog polja jesu: stvaranje mehaničkih sila i stvaranje napona na principu elektromagnetske indukcije (v. *Električni strojevi*, TE 4, str. 153).

Drugi učinci električne struje. U mnogim se električnim aparatima iskorištava električna energija posredstvom električne struje još i za najrazličitije druge učinke, npr. za stvaranje svjetlosti; to se postiže kombiniranjem osnovnih učinaka i drugih fizikalnih pojava.

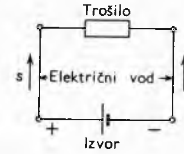
Kako se u napravama kojima se iskorištavaju učinci električne struje troši električna energija, oni se zovu *električna trošila.*

Strujni krug sastoji se od izvora, trošilâ i vodova.

Za dobivanje električnog napona i struje (ako je strujni krug zatvoren) služe *električni izvori.* To su naprave u kojima se utroškom neke druge vrste energije (mehaničke, kemijske, valne) stvara električna energija. Izvori električne struje (galvanski članci, akumulatori i generatori različitih vrsta) imaju *priključnice* (*stezaljke*) na koje su priključena trošila (sl. 1). Kako je izvor od trošila redovno ponešto udaljen, povezuju se oba ta dijela strujnog kruga *električnim vodom* (sa dva ili više *vodiča*), koji struju od izvora dovode trošilu. Tako je na sl. 1 shematski prikazan najjednostavniji primjer strujnog kruga s baterijom galvanskih ili akumulatorskih elemenata kao izvorom nepromjenljive (istosmjerne) struje. (Za značenje grafičkih simbola u takvim shemama v. članak *Elektrotehnički simboli*, str. 100.)

Vidi se da se unutar tog uređaja zbiva strujanje elektrona u zatvorenom električki vodljivom krugu pa se zato taj najjednostavniji električki uređaj zove zatvoreni *električni strujni krug* ili strujno kolo.

Električna struja nastaje gibanjem elektronâ u smjeru označenom na sl. 1 strelicom *e*. Kao smjer električne struje u strujnom krugu uzima se, međutim, suprotni smjer, tj. na slici smjer *s*, jer je (dok se još nije ništa znalo o elektronima) dogovoreno da će se smjerom struje smatrati onaj smjer u kome se gibaju, ili bi se gibali, pozitivni električni naboji. Znači, pretpostavlja se (proizvoljno) da se struja ostvaruje gibanjem pozitivnih električnih naboja od pozitivne priključnice izvora kroz vod i trošilo, i zatim natrag do negativne priključnice izvora, a u samom izvoru da ona teče od negativne priključnice do pozitivne priključnice.



Sl. 1. Shematski prikaz jednostavnog električnog strujnog kruga. *e* Smjer kretanja elektrona, *s* smjer struje

Ako priključnice izvora (koje se zovu i njegovim *polovima*) imaju stalno isti *polaritet*, tj. ako struja stalno kroz isti pol izlazi iz izvora i ulazi u nj, struja stalno teče istim smjerom, te se stoga zove *istosmjerna struja*. Nekim se izvorima polaritet priključnica periodički mijenja, zbog čega daju struju koja periodički mijenja smjer, tj. teče izmjenično u jednom i u suprotnom smjeru; takva se struja zove *izmjenična struja*.

Osnovne veličine i zakoni istosmjerne struje

Osnovne fizikalne veličine električne struje. Za elektrotehničku praksu važno je znati koliki će rad izvršiti električna struja u priključenom trošilu. Učinak električne struje ovisi o jakosti struje (oznaka I), definiranoj kao kvocijent količine elektriciteta što prostruji na promatranom mjestu i vremena kroz koje je ta količina elektriciteta strujala (»količina elektriciteta koja prostruji u jedinici vremena«).

Ako je, dakle, električna struja nastala jednoličnim gibanjem elektrona, pa je u t sekunda kroz presjek vodiča prošla količina elektriciteta Q, jakost je struje

$$I = \frac{Q}{t}. \qquad (1\,a)$$

Mjerenja pokazuju da je struja u jednostruko zatvorenom strujnom krugu na svakom mjestu iste jakosti. To predstavlja *zakon kontinuiteta* struje, koji slijedi i iz zakona o održanju električnog naboja: količina elektriciteta koja u neku točku vodiča dođe, mora iz te točke i izaći.

Kvocijent jakosti struje I i površine S presjeka vodiča na promatranom mjestu (okomito na smjer protjecanja struje) zove se *gustoća struje* J:

$$J = I/S. \qquad (1\,b)$$

Ako strujanje elektriciteta tijekom vremena nije jednolično, struja nije za cijelo vrijeme konstantne jakosti, nego je jakost struje promjenljiva. Jakost što je ima promjenljiva struja u određenom trenutku naziva se *trenutna ili momentana jakost struje* i označuje se malim slovom i. Njezina se vrijednost izračunava kao diferencijalni kvocijent promjenljive količine elektriciteta $q(t)$ po vremenu: $i = \dfrac{dq}{dt}$.

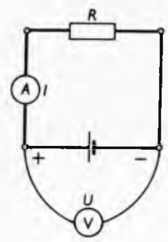
Jakost električne struje (u praksi se obično kaže samo »struja«) izražava se jedinicom *amper* (oznaka A). Amper je jedna od šest osnovnih jedinica Međunarodnog sistema jedinica (Système International d'Unités — SI) pored metra, kilograma, sekunde, kelvina i kandele. Jakost struje može se mjeriti samo na osnovi njezinih učinaka. Prije se amper definirao na osnovi kemijskog djelovanja struje, danas je propisana definicija na osnovi njezinog magnetskog djelovanja (v. str. 130):

Amper (1 A) je ona jakost stalne električne struje koja prolazeći dvama ravnim, paralelnim, neizmjerno dugačkim vodičima, zanemarljivo malena kružna presjeka, razmaknutim 1 m i smještenim u vakuumu, uzrokuje između njih silu od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna (N) po metru duljine. Uz odabranu jedinicu amper (A) za jakost električne struje I i sekundu (s) za vrijeme t, slijedi na osnovi relacije (1), tj. $Q = It$, da je *jedinica za količinu elektriciteta* ili električni naboj Q jednaka umnošku ampera i sekunde. Ta se jedinica zove *ampersekunda* (ozn. As) ili *kulon* (coulomb, oznaka C).

Budući da je naboj elektrona $Q_e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C (tzv. elementarni naboj), to pri jakosti struje od 1 A prođe kroz poprečni presjek vodiča u jednoj sekundi $Q = 6{,}25 \cdot 10^{18}$ elektrona, što je ujedno i broj elektrona koji zajedno nose količinu elektriciteta 1 kulon (C).

Električni napon je druga osnovna električna veličina promatranog strujnog kruga. Njome se karakterizira sposobnost izvora da uzrokuje struju kroz strujni krug. Strujanje elektriciteta kroz strujni krug nastaje uslijed toga što priključnice izvora imaju različitu električnu potencijalnu energiju ili, kako se kaže, različit potencijal φ (v. str. 121). Razlika tih potencijalâ naziva se naponom izvora U: $U = \varphi_a - \varphi_b$.

Potencijali, i naponi kao razlike potencijalâ, mjere se jedinicom *volt* (oznaka V.) Prema definiciji volta, 1 V je potencijalna razlika dviju točaka homogenog žičanog vodiča kojim teče konstantna struja 1 A, ako se u žici između tih točaka troši snaga 1 W (vata). Kao naponska normala primjenjuje se Westonov element čiji napon pri temperaturi 20 °C iznosi $E_{20} = 1{,}01862\ \text{V} \pm 30\,\mu\text{V}$. (v. *Električna mjerenja*, TE 3, str. 611.)



Sl. 2. Mjerenje napona i struje

Mjerenje jakosti struje i napona. Za mjerenje jakosti struje upotrebljava se mjerni instrument koji se zove *ampermetar* (sl. 2). On se u vod uvrštava u jedno odabrano mjesto strujnog kruga gdje se želi saznati kolika je jakost struje. Mjerenje napona (razlike potencijala) vrši se pomoću *voltmetra*, čije se priključnice spajaju vodičima direktno na ona dva mjesta električnog postrojenja između kojih se napon želi izmjeriti. (Pobliže o tom v. spomenuti članak, TE 3, str. 590.)

Električni otpor i vodljivost. Budući da je napon uzrok pojave električne struje, očito je da će jakost struje (ili samo skraćeno: struja) ovisiti o naponu izvora. No budući da, uz isti napon izvora, u različitim strujnim krugovima protječu struje različite jakosti, isto je tako očito da još jedna karakteristika strujnog kruga utječe na jakost struje. Ta je treća karakteristika strujnog kruga električni otpor, odn. vodljivost.

Za vodič kroz koji pri istom naponu teče jača struja nego kroz neki drugi kaže se da ima veću vodljivost za struju ili, što je isto, da pruža struji manji otpor, a za vodič kroz koji uz isti napon teče slabija struja, kaže se da ima veći otpor, odnosno manju električnu vodljivost.

Jedinica za električni otpor (oznaka R) jest *om* (ohm, oznaka Ω). Prema definiciji, 1 Ω je električni otpor između dvije točke žičanog vodiča koji ne sadrži nikakav izvor napona, kad pri protjecanju struje jakosti 1 A kroz taj vod između tih točaka postoji napon 1 V.

Električna vodljivost (oznaka G) recipročna je vrijednost električnog otpora $R = 1/G$ i $G = 1/R$. Jedinica za vodljivost je *simens* (siemens, oznaka S). Prema definiciji 1 S je vodljivost vodiča koji ima otpor 1 Ω.

Ohmov zakon. Mjerenja koja je vršio fizičar G. S. Ohm pokazala su da je pri konstantnoj temperaturi vodiča jakost struje I upravno proporcionalna naponu U, a obrnuto proporcionalna otporu R, što se matematički izražava relacijom:

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (2)$$

koja nosi naziv Ohmov zakon. Taj se zakon često upotrebljava i u oblicima

$$U = IR \quad \text{i} \quad R = U/I. \qquad (2a)$$

Umjesto da se računa s otporom vodiča, može se računati i s vodljivošću G, te u tom slučaju Ohmov zakon glasi

$$I = UG. \qquad (2b)$$

Ohmov zakon u obliku $I = U/R$ primjenjuje se za linijske vodiče, koji su razmjerno malog poprečnog presjeka S prema njihovoj duljini l, pri čemu se može pretpostaviti da je gustoća struje $J = I/S$ jednolično raspodijeljena po površini presjeka vodiča.

Ako se električni naboji gibaju u posve općenito oblikovanom vodljivom prostoru, gustoće struje bit će na pojedinim mjestima promatranog vodiča različite; u tom se slučaju primjenjuje *Ohmov zakon u elementarnom obliku* (v. str. 146).

Električni (omski) otpor kao osnovna karakteristična veličina električnih vodiča može se odrediti primjenom Ohmova zakona jer je prema jednadžbi $R = U/I$ otpor jednak omjeru napona privedenog vodiču i struje koja prolazi kroz vodič.

Mjerenja pokazuju da otpor vodiča ovisi o tvari od koje je izrađen vodič i da je upravno razmjeran duljini l a neupravno razmjeran poprečnom presjeku S vodiča:

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \qquad (3)$$

gdje je koeficijent proporcionalnosti ϱ, zvan *specifični (električni) otpor* ili *električna otpornost*, ovisan o materijalu vodiča: $\left(\varrho = R\frac{S}{l}\right)$.

Prema jedn. (3) koherentna jedinica SI specifičnog otpora je *ommetar* (Ωm). U praksi se često upotrebljava manja jedinica $\mu\Omega\text{m} = 10^{-6}\,\Omega\text{m}$, koja se obično piše $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$, jer je vodičima koji se u elektrotehnici najviše upotrebljavaju presjek razmjerno mali (mjeri se u kvadratnim milimetrima) a duljina razmjerno velika (mjeri se u metrima).

Specifični otpor u koherentnim jedinicama brojčano je jednak otporu kocke određenog materijala kad kroz nju protječe struja okomito na dvije suprotne plohe. U jedinicama $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ specifični je otpor brojčano jednak otporu žice duge 1 m i presjeka 1 mm².

Otpor, a prema tome i specifični otpor, ovisi o temperaturi. Kao referentna temperatura uzima se obično 20°C. Vodičima prve vrste (metalnim vodičima) otpor se povišenjem temperature povećava, a sniženjem temperature smanjuje; vodiči druge vrste (taline i otopine elektrolitâ) vladaju se obrnuto: njima se otpor povišenjem temperature smanjuje, a sniženjem temperature povećava. Otpor (i specifični otpor) na temperaturi različitoj od referentne izračunava se s pomoću jednadžbe

$$R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta\vartheta),$$

gdje je R_ϑ otpor na temperaturi ϑ°C, R_{20} otpor na referentnoj temperaturi 20°C, $\Delta\vartheta$ razlika temperature u odnosu prema referentnoj, $\vartheta - 20$°C, α_{20} temperaturni koeficijent otpora u odnosu prema referentnoj temperaturi (broj koji kaže za koji se dio otpora na 20°C otpor mijenja kad se temperatura mijenja za 1°C; mjeri se u °C^{-1}). Za temperature iznad 20°C, $\Delta\vartheta > 0$, a za temperature ispod 20°C, $\Delta\vartheta < 0$. Za metale je $\alpha_{20} > 0$, za taline i otopine elektrolita, $\alpha_{20} < 0$.

Otpor na temperaturi ϑ računa se, dakle, prema jednadžbi:

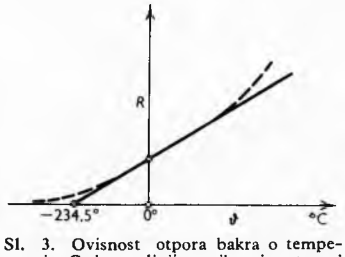
$$R_\vartheta = \frac{\varrho l}{S}\left[1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20)\right]. \qquad (4)$$

Ova jednadžba izražava linearni odnos otpora i temperature, koji doista postoji samo u manjem rasponu temperature. Pri znatno većim promjenama temperatura uvodi se korekcija dodatnim temperaturnim koeficijentom β_{20} prema jednadžbi:

$$R_\vartheta = \frac{\varrho l}{S}[1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20) + \beta_{20}(\vartheta - 20)^2]. \qquad (5)$$

Temperaturni koeficijenti α_{20} i β_{20} određuju se mjerenjem.

Na sl. 3 puna linija predočuje linearnu ovisnost otpora bakra o temperaturi, za koju bi vrijedila jednadžba (4), a crtkano je naznačeno kako se doista mijenja otpor u ovisnosti o temperaturi prema jednadžbi (5).



Sl. 3. Ovisnost otpora bakra o temperaturi. Crtkana linija prikazuje stvarni otpor

Ako se računa (umjesto s otporom) s električnom vodljivošću, jednadžba (3) prelazi u

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{S}{l} = \varkappa\frac{S}{l},$$

gdje je kao recipročna veličina specifičnog otpora uvedena *specifična električna vodljivost* (ili provodnost, $\varkappa = 1/\varrho$) koja se u SI izražava *simensima po metru* (S/m). U praksi se često primjenjuje i nekoherentna jedinica Sm/mm² (= 10^6 Sm).

U tabl. 1 navedene su za neke materijale vrijednosti specifičnog otpora ϱ, specifične vodljivosti $\varkappa$ i temperaturnog koeficijenta α_{20}.

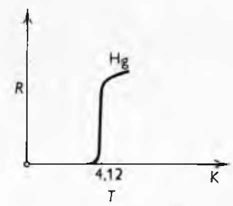
Tablica 1

VRIJEDNOSTI SPECIFIČNIH OTPORA, SPECIFIČNIH VODLJIVOSTI I TEMPERATURNIH KOEFICIJENATA PRI 20°C ZA NAJVAŽNIJE ELEKTROTEHNIČKE VODLJIVE MATERIJALE

	ϱ Ωm	$\varkappa$ Sm^{-1}	α_{20} 1/°C
Aluminijum	$0{,}028\cdot10^{-6}$	$37\cdot10^6$	0,0042
Bakar	$0{,}0172\cdot10^{-6}$	$58\cdot10^6$	0,0039
Bronca	$0{,}0278\cdot10^{-6}$	$35{,}8\cdot10^6$	0,004
Kositar	$0{,}115\cdot10^{-6}$	$8{,}6\cdot10^6$	0,0042
Mjed	$0{,}075\cdot10^{-6}$	$13{,}3\cdot10^6$	0,0016
Nikal	$0{,}078\cdot10^{-6}$	$11\cdot10^6$	0,006
Olovo	$0{,}21\cdot10^{-6}$	$4{,}8\cdot10^6$	0,0043
Platina	$0{,}099\cdot10^{-6}$	$10{,}1\cdot10^6$	0,003
Srebro	$0{,}0163\cdot10^{-6}$	$61{,}4\cdot10^6$	0,0041
Željezo	$0{,}098\cdot10^{-6}$	$10{,}1\cdot10^6$	0,0065
Živa	$0{,}958\cdot10^{-6}$	$1{,}04\cdot10^6$	0,00089
Cekas	$1{,}11\cdot10^{-6}$	$0{,}93\cdot10^6$	0,00019
Kanthal	$1{,}45\cdot10^{-6}$	$0{,}7\cdot10^6$	0,000032
Manganin	$0{,}48\cdot10^{-6}$	$2{,}14\cdot10^6$	0,000015
Konstantan	$0{,}49\cdot10^{-6}$	$2{,}1\cdot10^6$	0,00005

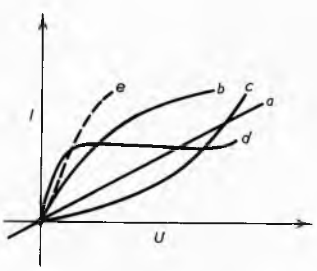
Ako se u rubrici za ϱ i $\varkappa$ ispusti faktor 10^{-6}, odnosno 10^6, dobije se specifični otpor u prikladnijoj jedinici $\frac{\Omega\text{m}}{\text{mm}^2}$, a specifična vodljivost u jedinici $\frac{\text{S mm}^2}{\text{m}}$.

Supravodljivost. Pri sve nižim temperaturama otpor metalnih vodiča biva sve manji, a u blizini apsolutne nule (0 K) otpor nekih materijala manje ili više skokovito iščezava. Taj temperaturni prag leži, npr. za aluminijum na 1,2 K, za živu na 4,12 K (sl. 4), za tantal na 4,4 K, za niobijum na 8 K itd. Ova se pojava zove supravodljivost. Pojačanjem struje koja protječe kroz ohlađeni vodič može se temperaturni prag ponešto pomaknuti prema apsolutnoj nuli, a primjenom već relativno slabog magnetskog polja može se materijal iz stanja supravodljivosti vratiti u stanje normalne vodljivosti. O tome vidi više u poglavlju Supravodljivost članka *Elektrotehnički materijali*, str. 62. Supravodljivost je našla u posljednje vrijeme i praktičnu primjenu (v. *Digitalna računala*, TE 3, str. 321).



Sl. 4. Temperaturni prag pri supravodljivosti žive

Strujno-naponska karakteristika $I = f(U)$ nekog vodiča ili općenito nekog dijela (elementa) električnog strujnog kruga prikazuje kako se mijenja jakost struje u ovisnosti o naponu koji je priveden tom elementu. Na konstantnoj temperaturi otpor R vodiča, odn. njegova vodljivost G, jest konstantna, pa jednadžba Ohmovog zakona (2b): $I = GU$ predočuje linearnu strujno-naponsku karakteristiku (sl. 5, linija *a*). Vodiči se pri prolasku struje griju, uslijed čega im se mijenja i otpor, pa strujno-naponska karakteristika nije više pravac, već ima zakrivljeni oblik kao krivulje *b* do *d* na slici 5. Elementi kojima strujno-naponska karakteristika nije pravac zovu se *nelinearni elementi*.



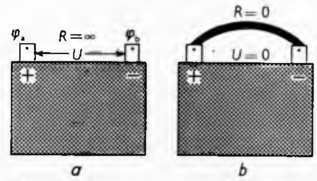
Sl. 5. Strujno-naponske karakteristike: *a* linearna, *b* žarulje s metalnom niti, *c* žarulje s ugljenom niti, *d* željezne žice u atmosferi vodika, *e* vakuumske diode

I mnogi sastavni dijelovi koji se primjenjuju u elektrotehnici, kao npr. elektronke, ispravljačice, plinske cijevi, poluvodičke diode i tranzistori, imaju nelinearnu strujno-naponsku karakteristiku, ali tome u većini slučajeva nije razlog zagrijavanje, već druge pojave, npr. prostorni naboj, karakteristike PN-spoja i druge.

Prazni hod i kratki spoj izvora. Uz pretpostavku da je napon izvora konstantan, jakost struje ovisi o otporu trošila koje je priključeno na stezaljke izvora. Prazni hod i kratki spoj dva su granična stanja opterećenja izvora.

Praznom hodu (sl. 6 a) odgovara otpor $R = \infty$ (što znači da je strujni krug otvoren), pa je $I = U/R = 0$ i zato se to stanje naziva također neopterećenim stanjem izvora.

Kratki spoj nastaje ako se strujni krug zatvori tako da se stezaljke izvora bez ikakvog uključenog otpora ($R = 0$) direktno spoje (sl. 6b). U tom je slučaju napon stezaljki jednak nuli jer su obje priključnice na istom potencijalu. Tada bi teoretski trebalo da teče struja beskonačne jakosti, $I = U/R = \infty$. No, kako svaki izvor ima i svoj određeni vlastiti (unutarnji) otpor R_u (sl. 7), to struja neće biti beskonačna, ali će biti maksimalna što je napon izvora može proizvesti. Ta je struja redovno prejaka da bi je konstrukcija izvora mogla trajno podnositi.

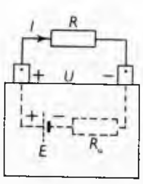


Sl. 6. Prazni hod izvora, $I = 0$ (*a*) i kratki spoj izvora (*b*)

Slično se i u električnim instalacijama kratkim spojem naziva ono stanje kad, npr. zbog oštećenja izolacije, dođe do direktnog dodira metalnih dijelova (vodiča) koji su pod naponom. Iako ni u tom slučaju struja nije beskonačno velika, redovito je znatno jača od maksimalno dozvoljene za tu instalaciju, pa dolazi do prekomjernog zagrijavanja vodiča, što može uzrokovati kvarove i požare.

Općenito se svi električni aparati, uređaji i instalacije projektiraju i prema projektu izrađuju tako da mogu trajno u pogonu raditi s izvjesnom jakošću struje koja još nije opasna za samu konstrukciju zbog prejakih toplinskih ili mehaničkih učinaka struje. Te se vrijednosti zovu ***nazivne*** ili ***nominalne vrijednosti***. Nazivne se vrijednosti određuju u tehnici ne samo za jakost struje već i za druge važnije veličine i one su vidljivo označene na aparatima i uređajima.

Pad napona i napon stezaljki. Elektromotorna sila. Jednadžba Ohmova zakona (2a) pisana u obliku $U = IR$ vrijedi ne samo za cijeli prikazani strujni krug već i za pojedine njegove dijelove. Ona pokazuje, posve općenito, koliki je napon U potreban da bi struja I prolazila kroz sastavni dio otpora R. Stoga se umnožak IR zove *pad* ili potrošak *napona* u otporu.



Sl. 7. Djelovanje unutarnjeg otpora R_u u strujnom krugu. E Elektromotorna sila, U napon stezaljki

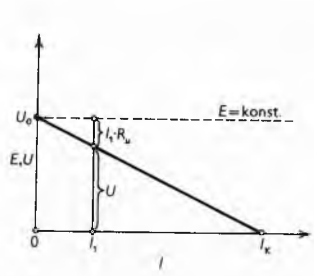
Priključna stezaljka preko koje struja ulazi u krug (sl. 7) jest pozitivna, a stezaljka preko koje struja izlazi iz kruga, negativna. Razlika potencijala na krajevima otpora R djeluje unutar zatvorenog strujnog kruga protivno od smjera djelovanja razlike potencijala izvora, pa se zato $IR = U$ može shvatiti i kao omski protunapon za razliku od aktivnog napona E stvorenog u izvoru transformacijom energije druge vrste u električnu.

Taj u unutrašnjosti izvora stvoreni aktivni napon E doista je uzrok gibanju elektriciteta u strujnom krugu; zove se stoga i *elektromotorna sila* (skraćenica EMS). On bi u idealnom izvoru (bez unutarnjeg otpora) bio jednak naponu stezaljki U. U realnim izvorima (sl. 7), koji imaju neki unutarnji otpor R_u, bit će pri opterećenju izvora strujom I, zbog pada napona IR_u u samom izvoru, napon stezaljki U manji od elektromotorne sile:

$$U = E - IR_u, \qquad (6)$$

a tek će u praznom hodu ($I = 0$) napon i na stezaljkama biti jednak elektromotornoj sili: $U_0 = E$.

Jednadžba (6) može se u tom slučaju prikazati pravcem (sl. 8) kojemu su apscise vrijednosti jakosti struje I, a ordinate pripadni napon U. Ova grafička predodžba vanjskog napona na stezaljkama U u ovisnosti o opterećenju zove se *vanjska karakteristika izvora.* Ako E i R_u nisu konstantne veličine, nego ovise o jakosti struje, ta karakteristika nije pravac, nego neka krivulja.



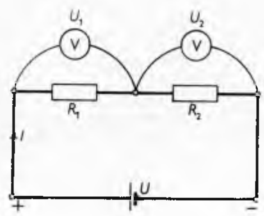
Sl. 8. Vanjska karakteristika izvora napajanja. U_0 Napon stezaljki pri praznom hodu, I_K struja pri kratkom spoju

Serijski i paralelni spoj otpornikâ. Spoje li se npr. dva otpornika otpora R_1 i R_2 serijski (jedan iza drugog) na izvor konstantnog napona U, taj spoj predstavlja opet jednostruko zatvoreni strujni krug (sl. 9), gdje je struja na svakom mjestu iste jakosti, pa za struje vrijedi jednadžba: $I = I_1 = I_2$. Budući da otpornicima privedene napone U_1 i U_2 dobavlja izvor, naponska jednadžba glasi: $U = U_1 + U_2$. Supstitucijom izraza (2a) dobije se:

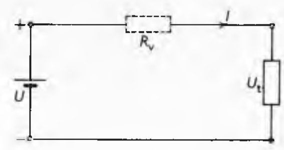
$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = IR.$$

Rezultantni otpor jednak je, dakle, sumi otpora pojedinih otpornika: $R = R_1 + R_2$. Općenito vrijedi da je rezultantni otpor serijsko spojenih otpornika jednak sumi otpora pojedinih otpornika:

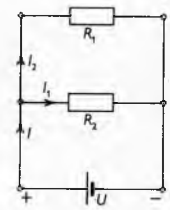
$$R = \sum_{j=1}^{n} R_j.$$



Sl. 9. Otpori u serijskom spoju



Sl. 10. Pad napona u vodu otpora R_V



Sl. 11. Otpori u paralelnom spoju

Pojedini naponi potrošeni u otporima, tj. padovi napona $U_1 = IR_1$ i $U_2 = IR_2$, odnose se upravno proporcionalno pripadnim otporima: $U_1 : U_2 = R_1 : R_2$.

Budući da vod realno izvedene instalacije (sl. 10) ima također izvjesni otpor R_V, to će se i u vodu pri prolazu struje I trošiti napon IR_V. Da bi trošilo dobilo svoj nazivni napon U_t, mora napon izvora iznositi $U = U_t + IR_V$.

Pri paralelnom spoju otpornikâ na isti izvor napona U, npr. dvaju otpornika otpora R_1 i R_2 (sl. 11), oba otpora dobiju isti napon $U = U_1 = U_2$, pa kroz prvi otpornik s otporom R_1 prema (2) protječe struja $I_1 = U/R_1$, a kroz drugi otpornik, otpora R_2, struja $I_2 = U/R_2$. Iz spojne se sheme vidi da se u tom slučaju dobiju dva strujna kruga kojima su zajednički izvor i dio voda u kome teče ukupna struja

$$I = I_1 + I_2 \qquad \left(\text{općenito } I = \sum_{j=1}^{n} I_j\right).$$

Primjenom Ohmova zakona (2) dobiva se strujna jednadžba:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

i dalje:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ili općenito: recipročna vrijednost rezultantnog otpora jednaka je sumi recipročnih vrijednosti otpora pojedinih paralelno spojenih otpornika

$$\frac{1}{R} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}.$$

Odatle se može npr. za paralelni spoj dvaju otpornika (R_1 i R_2) izračunati rezultantni otpor $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Umjesto s otporima povoljnije je pri paralelnom spoju računati s vodljivostima, jer je tada rezultantna vodljivost jednaka zbroju vodljivostî pojedinih otpornika:

$$G = \sum_{j=1}^{n} G_j.$$

Ako se promatra samo paralelni spoj dvaju otpornika kao izdvojeni dio sheme sl. 11, vidi se da se ukupna privedena struja I

grana na dva dijela I_1 i I_2 koji se odnose obrnuto proporcionalno otporima pojedinih grana, odnosno upravno proporcionalno njihovim vodljivostima

$$I_1 : I_2 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} = R_2 : R_1$$

ili

$$I_1 : I_2 = G_1 : G_2.$$

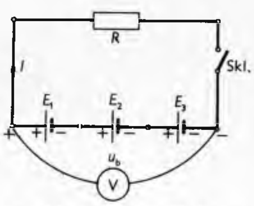
Usporedba serijskog i paralelnog spoja otpornikâ ili trošilâ. Više (n) otpornika jednakih otpora u serijskom spoju daju rezultantni otpor $R = nR_1$, a u paralelnom spoju $R = R_1/n$. Serijskim se spojem rezultantni otpor povećava, a paralelnim spojem smanjuje.

Trošila široke potrošnje koja su izrađena za određeni nazivni napon ne spajaju se na zajednički izvor (gradsku mrežu ili npr. akumulator u automobilu) u serijskom spoju jer bi svako uklapanje ili isklapanje nekog trošila smetalo radu ostalih uključenih trošila. Paralelnim spajanjem trošilâ u tim instalacijama korisniku je aparatâ osigurano da može svoje aparate upotrebljavati neovisno jedan od drugog. Serijski se spoj više trošila može primijeniti ako se sva trošila istovremeno uklapaju i isklapaju i ako su izrađena za istu jakost struje.

Serijski se spoj otpornikâ primjenjuje i kad je npr. napon izvora veći od nominalnog napona trošila, pa se otporom serijski uključenog dodatnog otpornika poništava suvišni dio napona, ili ako se želi otpornikom s promjenljivim otporom regulirati jakost struje u strujnom krugu, kako bi se promijenila snaga (i rad) priključenog trošila. Dakako da je time u serijskom dodatnom otporu beskorisno potrošena energija, jer se taj otpornik grije.

Serijski i paralelno spojeni izvori. Više među sobom spojenih izvora upotrebljava se ako jedan izvor sam ima napon manji od nominalnog napona trošilâ, odnosno, ako trošila zahtijevaju struju jaču od nazivne struje jednog samog izvora. Tako spojeni galvanski i akumulatorski članci nazivaju se često *baterijom.*

Serijski spoj izvorâ primjenjuje se za povišenje napona. Npr. serijski spoj od tri izvora prikazuje sl. 12. Tu se pozitivni (+) pol jednog izvora spaja s negativnim (−) polom slijedećeg, a slobodni pozitivni pol prvog i slobodni negativni pol posljednjeg izvora predstavljaju stezaljke za priključak trošila. Iz slike se vidi da u prikazanom serijskom spoju elektromotorne sile sviju izvora djeluju u strujnom krugu priključnog trošila u istom smjeru, pa je ukupna elektromotorna sila serijski spojenih izvorâ jednaka zbroju sviju elektromotornih sila pojedinih izvora: $E_b = E_1 + E_2 + E_3$ ili, općenito, za više izvora:



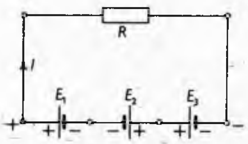
Sl. 12. Serijski spoj izvora

$$E_b = \sum_{j=1}^{n} E_j.$$

Budući da kroz pojedine serijski spojene izvore prolazi struja trošila $I = I_1 = I_2 = I_3$, ne smije se ukupni izvor (iako je napon povišen) opteretiti trošilom koje uzima jaču struju od nominalne struje pojedinog izvora.

Ukupni otpor serijski spojenih izvora (npr. baterije) jednak je sumi unutarnjih otpora pojedinih izvora

$$R_b = \sum_{j=1}^{n} R_{uj}.$$



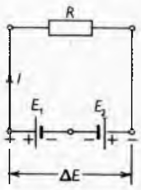
Sl. 13. Serijski protuspoj izvora

Napon stezaljki baterije pri opterećenju je jednak

$$U_b = E_b - IR_b.$$

Ako se jedan od izvorâ u serijskom spoju (sl. 13) priključi obratno nego ostali, kaže se da je on spojen *u serijskom protuspoju* jer njegova elektromotorna sila djeluje protivno od ostalih. Rezultantna elektromotorna sila dobije se kao algebarska suma sviju elektromagnetskih sila, tj. elektromotorna se sila suprotno vezanog izvora mora oduzeti od sume elektromotornih sila ostalih izvora. Općenita jednadžba glasi:

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j,$$



Sl. 14. Protuspoj dvaju izvora radi kompenzacije napona

pri čemu se elektromotorne sile E_j moraju zbrajati algebarski. Ako su dva izvora spojena u serijskom protuspoju (sl. 14), do djelovanja dolazi samo diferencija njihovih napona

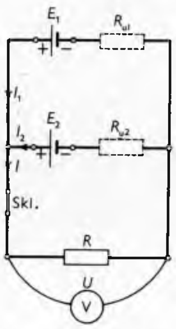
$$E = E_1 - E_2 = \Delta E,$$

što se zove *kompenzacija napona.* Potpuna kompenzacija dobije se ako su oba izvora jednakih elektromotornih sila, pa je uz $E_1 = E_2$ i $E = \Delta E = 0$. Kompenzacija napona primjenjuje se npr. pri nekim mjernim metodama i u regulacijskim uređajima.

Paralelni spoj izvorâ primjenjuje se kad trošilo traži jaču struju nego što je jedan izvor može dati. Pri tom se među sobom spoje pozitivne stezaljke sviju izvora i daju pozitivni pol, a isto tako spojene negativne stezaljke izvorâ daju negativni pol (sl. 15). Kad se priključi trošilo otpora R, iz paralelno spojenih izvora pritječe trošilu struja I koju dobavljaju i jedan i drugi izvor: $I = I_1 + I_2$. Zbog izravnog spajanja stezaljki obaju izvora s trošilom, naponi na trošilu jednaki su naponima stezaljki izvora: $U = U_1 = U_2$. Razdioba struje trošilâ na pojedine izvore određuje se iz navedene strujne i naponske jednadžbe, pri čemu se naponi mogu prikazati relacijama

$$U_1 = E_1 - I_1 R_{u1}, \qquad U_2 = E_2 - I_2 R_{u2}, \qquad U = IR.$$

U praznom hodu (pri otvorenoj sklopki Skl.), ako elektromotorne sile obaju izvora nisu jednake, $E_1 \neq E_2$, može unutar zatvorenog strujnog kruga spojenih izvora, npr. unutar same baterije (sl. 15), prolaziti struja $I_0 = \Delta E/R_u$, što je nepoželjno. Da bi bio $I_0 = 0$, paralelno se spajaju samo izvori jednakih elektromotornih sila, $E_1 = E_2$. U tom se slučaju komponente struje I_1 i I_2 pojedinih izvora odnose obrnuto nego njihovi unutarnji otpori:



Sl. 15. Paralelni spoj izvora

$$I_1 : I_2 = R_{u2} : R_{u1}.$$

Paralelni spoj izvorâ rjeđe se primjenjuje za kemijske izvore struje, no on ima veliku važnost pri zajedničkom radu sviju generatora termo- i hidroelektrana na zajedničku zemaljsku mrežu kojom se napajaju sva trošila široke potrošnje.

Ako se promatra paralelni spoj samo dvaju generatora, vidi se iz gornjih općenitih jednadžba da komponente I_1 i I_2 ukupne struje trošila ovise ne samo o unutarnjim otporima nego i o elektromotornim silama generatorâ. Dispečeri mogu po potrebi izvršiti razdiobu struja na pojedine generatore promjenom elektromotornih sila generatora.

Električne mreže. Kirchhoffovi zakoni. Prijašnja razmatranja o spojevima otporâ i izvorâ mogu se proširiti na najrazličitije spojeve više izvora i više otpora; time se dobiva *električna mreža.* Pri tom se *granom* električne mreže naziva dio u kome su samo u serijskom spoju vezani izvori i otpori pa kroz sve protječe ista struja, koja se zove *struja grane. Čvor* je mjesto u mreži gdje se sastaju tri ili više od tri grane, a *petljom* ili *konturom* naziva se bilo koji zatvoreni strujni krug sastavljen od više grana (v. *Električni krugovi,* TE 4, str. 50).

Osnovni zakoni za proračun strujnih i naponskih prilika u složenijim električnim mrežama jesu, uz Ohmov zakon, još oba Kirchhoffova zakona.

Prvi Kirchhoffov zakon odnosi se na struje koje se sastaju u jednom čvoru. Njime je u biti izražen fizikalni zakon održanja električnih naboja, a glasi: Zbroj svih struja koje dolaze u jedan čvor jednak je zbroju sviju struja koje iz njega odlaze:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0, \tag{7a}$$

pri čemu se struje koje dolaze u algebarskoj sumi uzimaju s jednim predznakom (po volji + ili −), a struje koje odlaze, sa protivnim predznakom.

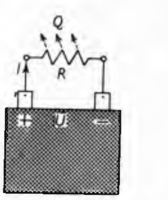
Drugi Kirchhoffov zakon odnosi se na napone jedne konture (strujnog kruga) mreže. Fizikalno značenje tog zakona sadržano je u činjenici da unutar zatvorenog strujnog kruga mora biti suma svih aktivnih napona izvorâ jednaka sumi u otporima potrošenih napona, što je matematički formulirano jednadžbom:

$$\sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n} I_j \cdot R_j \quad \text{ili} \quad \sum_{j=1}^{n} U_j = 0. \tag{7b}$$

Analiza električne mreže zove se postupak kojim se za mrežu u kojoj su zadani naponi sviju izvora i svi otpori određuju nepoznate struje u pojedinim granama. Direktnom primjenom Kirchhoffovih zakona vrši se analiza mreže tako da se za nepoznate struje u g grana postavi g nezavisnih jednadžbi. Pri tom se strujne jednadžbe prvog Kirchhoffovog zakona primijene na ($\check{c} - 1$) čvor (gdje je $\check{c}$ ukupni broj čvorova), a ostale još potrebne jednadžbe: $n = g - (\check{c} - 1)$ dobiju se postavljanjem naponskih jednadžbi drugog Kirchhoffovog zakona za n nezavisnih petlja. (Nezavisnim petljama smatraju se one petlje kod kojih se, počevši od jedne po volji odabrane, svaka slijedeća razlikuje od prijašnjih bar za jednu granu.)

Budući da se struje i naponi u jednadžbama Kirchhoffovih zakona moraju sumirati algebarski, mora se u spojnoj shemi zadanim naponima označiti smjer djelovanja, a isto tako traženim strujama strelicama po volji pretpostaviti smjer strujanja. Pri sumiranju naponâ obilazi se kontura u po volji odabranom smjeru pa se oni sumandi čiji se smjer poklapa sa smjerom obilaženja uzimaju s pozitivnim predznakom, a ostali s negativnim predznakom. Ako se u rezultatu uz brojčani iznos izračunate struje dobije predznak plus, to znači da se smjer struje poklapa s proizvoljno pretpostavljenim, ako se dobije predznak minus, da je smjer struje protivan pretpostavljenom.

Energija električne struje. Energija i izvršeni rad električne struje mogu se najjednostavnije eksperimentalno i računski obuhvatiti pri transformaciji električne energije u toplinu.



Sl. 16. Uz Jouleov zakon

Mjerenja koja je 1841 izvršio fizičar J. P. Joule pokazuju da se pri prolazu električne struje I kroz otpornik otpora R u kome se troši napon U (sl. 16) dobije tijekom vremena t toplinska energija Q jednaka

$$Q = UIt. \tag{8}$$

Uvrsti li se u tu jednadžbu Ohmov zakon u oblicima $U = IR$ i $I = U/R$, dobiju se za razvitu toplinu (tzv. *Jouleovu toplinu*) izrazi

$$Q = I^2 R t \quad \text{i} \quad Q = \frac{U^2}{R}\,t.$$

Osim u najrazličitije konstruiranim električnim pećima za industriju i kućanstvo, Jouleova toplina iskorišćuje se u žaruljama, gdje na visoku temperaturu zagrijana žarna nit služi kao izvor svjetlosti (v. *Električno osvjetljenje*, TE 4, str. 269).

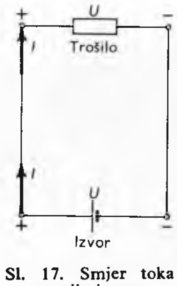
Budući da u normalnim okolnostima svi električni vodiči imaju neki omski otpor, stvarat će se u njima pri prolazu struje uvijek toplina, pa može doći i do prevelikog zagrijavanja vodiča. Zbog toga se pri projektiranju električnih instalacija i ostalih električnih uređaja mora osim električnog proračuna provesti kontrola zagrijavanja i hlađenja tih uređaja.

Budući da se u otporniku otpora R pri prolazu električne struje električna energija pretvara samo u toplinu, jednadžba Jouleova zakona (8) u biti prikazuje ekvivalentnost toplinske energije Q i energije električne struje W. Prema tome se i energija električne struje izračunava prema toj jednadžbi, pa je

$$W = UIt. \tag{9}$$

Ta se jednadžba jednako primjenjuje za proračun u trošilu potrošene električne energije kao i u izvoru proizvedene električne energije.

U primjeru prikazanom na sl. 17 na izvor je priključeno samo jedno trošilo, pa su električne veličine U i I jednake za izvor i za trošilo. Zbog toga je i energija izvora W_i jednaka energiji trošila W_t. Razlika je samo u smjeru toka energije, jer električna energija iz izvora izlazi, a u trošilo ulazi. Ta se razlika u računima izražava time što se energiji potrošenoj u otporu pridaje predznak plus (+), a proizvedenoj energiji izvora predznak minus (−).



Sl. 17. Smjer toka energije i snage

Jednadžba

$$W_t - W_i = 0$$

predstavlja osnovno pravilo koje kazuje da je u zatvorenom sistemu ukupno potrošeno toliko energije koliko je energije proizvedeno.

Općenito se i u složenijim strujnim krugovima trošilom smatra onaj element strujnog kruga na čiju pozitivnu priključnicu struja ulazi, a izvorom onaj element kome iz njegove pozitivne priključnice struja izlazi.

Snaga električne struje. Pri iskorišćivanju energije za obavljanje rada nije samo važno koliki je rad izvršen, nego i u kojem je vremenu ostvaren. Za uređaj koji brže vrši rad kaže se da ima veću snagu, pa je snaga P općenito definirana kao brzina vršenja rada (»rad u jedinici vremena«), odn. kvocijent rada i vremena:

$$P = \frac{W}{t}. \tag{10}$$

Ako je vršenje rada ili trošenje energije vremenski nejednolično, moraju se promatrati diferencijalni iznosi rada u diferencijalu vremena, pa je trenutna vrijednost snage diferencijalni kvocijent energije po vremenu:

$$p = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Radi proračuna električne snage pri konstantnoj istosmjernoj struji supstituira se izraz (9) $W = UIt$ u jednadžbu (10) i dobije

$$P = UI, \tag{11}$$

što znači da je *električna snaga trošila* jednaka umnošku jakosti struje s naponom koji je u trošilu potrošen pri protoku te struje. Analogno je *električna snaga izvora* jednaka umnošku proizvedenog napona i jakosti struje što je izvor daje u strujni krug. Uvrštenjem jednadžbi (2), odnosno (2a) u izraz (11) dobiju se još dva oblika jednadžbe za snagu:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{i} \quad P = I^2 R. \tag{12}$$

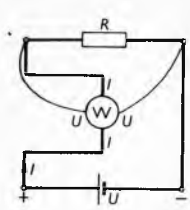
Pri tome se, prema već usvojenim predznacima za energiju, uzima kao pozitivna snaga snaga potrošena u trošilu, a električna snaga izvora ima onda negativan predznak.

Jedinice energije i snage. Iz jedn. (9) slijedi da je koherentna jedinica u sistemu SI za energiju *voltampersekunda*, koja se zove i *džul* (joule, J). Prema jedn. (11) koherentna jedinica za snagu je *voltamper* (VA), koji se zove i *vat* (watt, W). Stoga se voltampersekunda, ili džul, naziva i *vatsekunda*.

Budući da je koherentna jedinica SI za silu njutn (N), a energija (rad) je umnožak sile i puta, dobiva se četvrto ime za džul: *njutnmetar* (Nm). Naziv njutnmetar se u elektrotehnici ne upotrebljava nikad, a naziv džul [bolje reći, njegov višekratnik kilodžul (kJ = 1000 J)], uglavnom samo kad je riječ o Jouleovoj toplini. [U tom slučaju upotrebljava se još uvijek i nekoherentna jedinica kilokalorija (kcal). 1 kcal = 4,1868 kJ.]

Joule (vatsekunda) veoma je mala jedinica u odnosu prema količinama energije koje dolaze u elektrotehnici. U praksi se stoga upotrebljava nekoherentna jedinica vatsat (Wh = 3600 Ws) i njezini višekratnici. Najčešće je u upotrebi *kilovatsat* (kWh = 10^3 Wh) i *megavatsat* (MWh = 10^6 Wh).

Za snagu se pored vata (voltampera) upotrebljavaju također veće i manje jedinice, npr. *kilovat* (kW = 10^3 W), megavat (MW = = 10^6 W) i milivat (mW = 10^{-3} W).



Sl. 18. Način priključka vatmetra, tj. instrumenta za mjerenje snage, u strujni krug

Snaga se u krugovima s istosmjernom strujom može mjeriti bilo posredno, istovremenim mjerenjem struje i napona ampermetrom i voltmetrom, odn. za vrlo točna mjerenja, kompenzatorom, ili neposredno, elektrodinamičkim instrumentom, vatmetrom (sl. 18; v. i *Električna mjerenja*, TE 3, str. 613, također str. 596). Električna energija mjeri se kilovatsatnim brojilima (v. *Brojila, električna*, TE 2, str. 526).

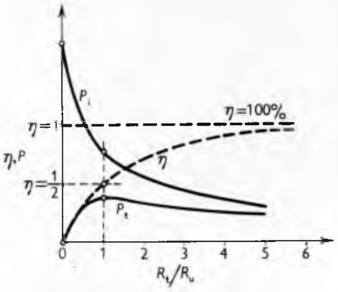
Iskorišćenje proizvedene električne energije. Trošilo priključeno na izvor dobiva za svoj koristan rad energiju iz izvora. Međutim, sva energija što se pretvorbom stvara u izvoru ne prenosi se trošilu, jer se (budući da i izvor i vod imaju određen omski otpor) dio te energije utroši u samom izvoru, a dio u priključnom vodu, gdje se ona pretvara u Jouleovu toplinu. Taj je dio energije izvora za koristan rad izgubljen, pa je zbog toga energija izvora nepotpuno iskorištena. To se izražava faktorom η koji se zove *korisnost*, a definiran je omjerom korisne i ukupno potrošene energije, odnosno omjerom snaga:

$$\eta = \frac{W_{\text{kor}}}{W_{\text{uk}}} = \frac{P_{\text{kor}}}{P_{\text{uk}}} \quad \text{ili} \quad \eta = \frac{100\, W_{\text{kor}}\,\%}{W_{\text{uk}}} = \frac{100\, P_{\text{kor}}\,\%}{P_{\text{uk}}}.$$

Prilagođenje trošila izvoru. Iz jednadžbe (12) dobije se izraz za snagu trošila P_t

$$P_t = I^2 R_t = \left(\frac{E}{R_u + R_t}\right)^2 R_t. \qquad (13)$$

Iz tog izraza (v. i sl. 19) proizlazi da se maksimalna snaga koju izvor konstantne elektromotorne sile može predati trošilu dobije kad je otpor priključnog trošila R_t jednak unutarnjem otporu R_u, pa se kaže da je tada trošilo *prilagođeno* otporu izvora. U tom slučaju, međutim, korisnost cijelog uređaja iznosi samo 50% jer se ukupna proizvedena energija raspodjeljuje u jednakim iznosima na jednake otpore. Na osnovi izraza (13) načinjen je grafički prikaz sl. 19, iz kojeg se vidi kako, uz E = konst., P_t i η ovise o otporu priključenog trošila R_t i unutarnjem otporu izvora R_u.



Sl. 19. Ovisnost snage trošila i korisnosti o prilagođenju otpora trošila na unutarnji otpor izvora

Prilagođenje unutarnjem otporu R_u primjenjuje se u telekomunikacijskim uređajima gdje se želi, ne obazirući se na gubitke energije koji su apsolutno mali, prijemnim aparatima predati što veća snaga, kako bi prijenos informacija bio što bolji i vjerniji. U energetskim postrojenjima, naprotiv, želi se postići što bolje iskorištenje energije (što veći η), pa su zato u njima unutarnji otpori izvorâ znatno manji od otporâ priključenih trošila.

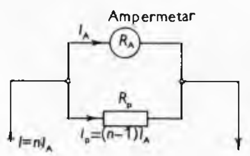
Neke primjene osnovnih zakona električne struje. *Proširenje mjernog opsega ampermetra.* Da bi se ampermetrom, koji pri punom otklonu kazaljke mjeri struju jakosti I_A, izmjerila n puta jača struja $I = nI_A$, mora se instrumentu paralelno priključiti otpornik (tzv. *šant*, engl. shunt) otpora R_p (sl. 20). Kroz njega će teći struja kojoj je jakost I_p jednaka razlici

$$I - I_A = nI_A - I_A = I_A \cdot (n-1) = I_p.$$

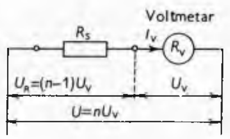
Prema prvom Kirchhoffovom zakonu, struje u paralelno vezanim granama odnose se obrnuto nego njihovi otpori, pa je $I_p : I_A = R_A : R_p$. Iz toga se može odrediti tražena vrijednost otpora paralelno priključenog otpornika R_p:

$$R_p = R_A \frac{I_A}{I_A(n-1)} = \frac{R_A}{n-1},$$

pri čemu je R_A unutarnji otpor samog instrumenta, ampermetra.



Sl. 20. Proširenje mjernog područja ampermetra paralelnim otpornikom otpora R_p



Sl. 21. Proširenje mjernog područja voltmetra serijskim otpornikom otpora R_S

Proširenje mjernog opsega voltmetra. Voltmetar građen za mjerenje napona U_V pri punom otklonu kazaljke, može se iskoristiti za mjerenje n puta većeg napona $U = nU_V$ ako se serijski uz voltmetar uključi dodatni predotpornik otpora R_S (sl. 21). U tom otporniku mora se pri mjerenju potrošiti suvišak napona $U_S = U - U_V = (n-1)\, U_V$. Budući da se u serijskom spoju padovi napona odnose direktno proporcionalno otporima, dobije se prema sl. 25 jednadžba $U_V : U_S = R_V : R_S$, pa je

$$R_S = R_V \frac{U_S}{U_V} = R_V \frac{(n-1)\, U_V}{U_V} = (n-1) R_V,$$

gdje je R_V vlastiti otpor voltmetra.

Wheatstoneov most. Za mjerenje otpora primjenjuje se u tehnici tzv. Wheatstoneov most, čija je principijelna shema predočena na sl. 22. U tom instrumentu priključena su na izvor napona četiri otpornika u dvjema paralelnim granama 1 i 2, a u svakoj su grani po dva otpornika vezana u seriji. Kad priključeni voltmetar pokazuje da između spojnih točaka c i d nema napona, kaže se da je most uravnotežen. Uvjet za ravnotežu jest da padovi napona u objema granama lijevo od c i d budu jednaki, jer će tada potencijali točaka c i d biti jednaki i time napon na voltmetru $U_{cd} = 0$. Ujedno su onda i padovi napona na otporima desno od c i d jednaki. Vrijede, dakle, odnosi

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \text{i} \quad I_1 R_3 = I_2 R_4.$$

odakle slijedi $R_1 : R_3 = R_2 : R_4$.

Ako je jedan od četiriju otpora nepoznat, npr. $R_x = R_1$, može se podešavanjem ostalih triju otpora postići ravnoteža mosta, pa će biti $R_x : R_3 = R_2 : R_4$, odakle slijedi

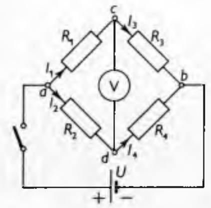
$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_4}.$$

Za fino podešavanje omjera R_2/R_4 uzima se (sl. 23) otporna žica od homogenog materijala i konstantnog presjeka s, po kojoj se može pomicati klizni kontakt d, a kao poznati otpor R_3 uzima se redovno otpornik-normala u dekadskim iznosima otpora R_n (0,1, 1, 10, 100 .... Ω). Tada je

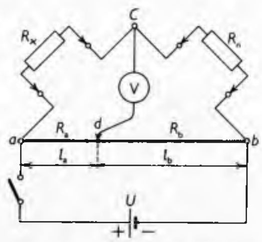
$$R_x = R_n \cdot \frac{l_a}{l_b}.$$

jer je pri ravnom vodiču ab odnos otpora R_2/R_4, prema jedn. (3) jednak odnosu duljinâ žice l_a i l_b između kliznog kontakta d i krajeva a i b:

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{\varrho \cdot l_a/s}{\varrho \cdot l_b/s} = \frac{l_a}{l_b}.$$

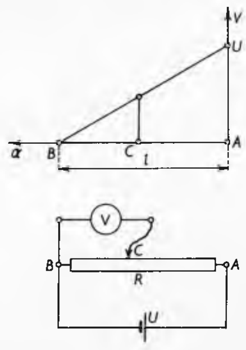


Sl. 22. Principijelna shema Wheatstoneova mosta



Sl. 23. Mjerenje nepoznatog otpora R_x Wheatstoneovim mostom opremljenim otpornom žicom s kliznim kontaktom

Potenciometar je otpornik koji osim priključnih stezaljka A i B na svojim krajevima ima još i klizni kontakt C, koji se može pomicati od jednog do drugog kraja otpornika. On služi kao promjenljivo *djelilo napona*. Spoji li se potenciometar otpora R na napon izvora U (sl. 24), teći će kroz njega struja $I = U/R$, a umnožak IR jednak je privedenom naponu U i on predstavlja pad napona u njegovom cijelom otporu R. Spoji li se voltmetar V jednim vodičem na negativnu priključnicu B, a drugim vodičem na kontakt C, mijenjat će se pri pomicanju kontakta C od B prema A napon koji je, kao pad napona na odgovarajućem dijelu otpora R_{BC} kroz koji prolazi struja I, općenito jednak: $U_{BC} = I\, R_{BC}$. Ako je omski otpor jednolično raspodijeljen po cijeloj duljini otpornika l, mijenjat će se pri pomicanju kontakta C napon U_{BC} jednolično.



Sl. 24. Spojna shema potenciometra (dolje) i njegov potencijalni dijagram u praznom hodu (gore)

Potenciometar bi se, dakle, mogao iskoristiti za to da se nekom trošilu, koje je priključeno umjesto voltmetra, privede po volji promjenljiv, regulirani napon. No, čim kroz trošilo pod utjecajem privedenog napona prolazi struja, mijenjaju se naponske prilike, i promjena napona u ovisnosti o položaju kontakta C nije više predočena pravcem, nego nekom krivuljom koja ovisi o tome koliki je omjer p između otpora potenciometra i otpora priključenog trošila: $p = R/R_t$.

Iako se potenciometrom može napon jednostavno i kontinuirano mijenjati, njegova je primjena ograničena zbog toga što se u otporniku potenciometra zbog prolaska struje trajno stvara Jouleova toplina i energija beskorisno troši.

Zato se regulacija napona potenciometrom primjenjuje samo u mjernoj tehnici i u telekomunikacijskim aparatima, gdje je zbog malih jakosti struje gubitak energije zanemarljiv (v. *Elektronika, Sastavni dijelovi*, TE 4, str. 453).

Elektrostatika

Elektrostatika opisuje i objašnjava pojave koje nastaju u prostoru oko mirujućih električnih naboja. Prostor u kome se ispoljava djelovanje takvih naboja zove se *električno* (*elektrostatsko*) *polje*. U biti sve su te pojave uzrokovane silom koja djeluje na bilo kakve električne naboje uvedene u električno polje.

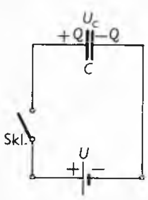
Kondenzator i njegov kapacitet. Najjednostavniji odnosi među pojedinim fizikalnim veličinama koje karakteriziraju električno polje dobiju se za jednolično (homogeno) električno polje, kakvo nastaje npr. u odvojenom prostoru između dvije paralelno postavljene pločaste elektrode, jer su u takvoj napravi, koja se zove *pločasti kondenzator*, naboji najjednoličnije raspoređeni. Na osnovi poznavanja temeljnih zakona proporcionalnosti kojima su povezane veličine električnog polja mogu se ti zakoni u diferencijalnom obliku primijeniti i na nejednolična (nehomogena) polja.

Kad se na izvor istosmjernog napona U zatvaranjem sklopke Skl. priključi pločasti kondenzator s prvotno električki neutralnim pločama (sl. 25), primit će jedna ploča od izvora količinu elektriciteta $+Q$, a druga količinu $-Q$, pa se time među pločama uspostavlja napon $U_C = U$. Nabijanje kondenzatora izvršeno je samo kratkotrajnim strujanjem električne struje; trajnu struju iz izvora sprečava izolacija među pločama.

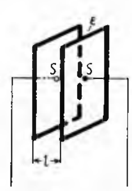
Količina elektriciteta Q koja se skupi na pločama kondenzatora direktno je proporcionalna narinutom naponu U, a ovisi i o prijemljivosti kondenzatora te iznosi:

$$Q = CU. \tag{14}$$

Koeficijent razmjernosti C $(= Q/U)$ zove se *kapacitivnost* ili *kapacitet*. On ovisi o dimenzijama i obliku elektrodâ (vodiča) na kojima se nalaze naboji, te o vrsti izolacije među njima. Taj



Sl. 25. Priključak kondenzatora na izvor konstantnog napona



Sl. 26. Pločasti kondenzator i njegov kapacitet

koeficijent ima prema jedn. (14) koherentnu jedinicu SI As/V, odn. C/V, koja se zove i *farad* (F).

Kondenzator ima kapacitet od 1 F ako se na njemu skupi naboj 1 C (= 1 As) pri naponu izvora od 1 V. Budući da je ova jedinica za praksu prevelika, kapacitet se praktično izvedenih kondenzatora mjeri u mikrofaradima ($1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$), nanofaradima ($1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F}$) i pikofaradima ($1\,\text{pF} = 10^{-12}\,\text{F}$).

Kapacitivnost pločastog kondenzatora (sl. 26) upravno je proporcionalna površini pločâ S, a obrnuto proporcionalna razmaku l među pločama, te iznosi

$$C = \varepsilon \frac{S}{l}. \tag{15}$$

Koeficijent razmjernosti ε, koji ovisi o vrsti izolacije, tj. o prirodi dielektrika između ploča, zove se *dielektričnost* (ranije dielektrična konstanta). Mjerenjima je utvrđeno da dielektričnost za vakuum iznosi $\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ F/m. Ta se univerzalna konstanta prema međunarodnom sporazumu (1966) zove *električna konstanta* (prije se zvala influencijska konstanta, dielektrična konstanta vakuuma, apsolutna dielektrična konstanta ili dielektričnost vakuuma).

Za svaki drugi dielektrik osim vakuuma dielektričnost je za faktor ε_r veća od električne konstante ε_0. Taj se faktor zove *relativna dielektričnost*. Sve te veličine povezane su relacijom:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0. \tag{16}$$

Relativna dielektričnost iznosi npr. za zrak $\sim$1, papir 1,8···2,6, transformatorsko ulje 2,2···2,5, tinjac 4···8, destiliranu vodu 81, itd. (v. *Elektrotehnički materijali*, str. 72).

Osim pločastog kondenzatora postoje dakako i različite druge izvedbe kondenzatora (v. TE 4, *Elektronika, Sastavni dijelovi*, str. 454).

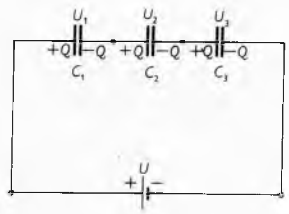
Serijski i paralelni spoj kondenzatora. Kondenzatori se kao dijelovi električnih uređaja primjenjuju u mnogim sklopovima, pa je potrebno znati koliki rezultantni kapacitet imaju više na različite načine među sobom spojenih kondenzatora.

Pri *serijskom spoju* (sl. 27) na svakom se pojedinom kondenzatoru (bez obzira na njegov kapacitet) nalazi ista količina elektriciteta, jednaka količini Q koja je od izvora predana kombinaciji, a suma naponâ pojedinih spojenih kondenzatora jednaka je naponu izvora. Budući da je dakle: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ itd. i da je $U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$, to je prema (14)

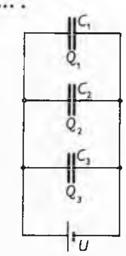
$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \ldots,$$

i dalje:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots.$$



Sl. 27. Serijski spoj triju kondenzatora



Sl. 28. Paralelni spoj triju kondenzatora

Pri *paralelnom spoju* (sl. 28) na svakom kondenzatoru vlada napon izvora U, a suma količinâ elektriciteta skupljenih na pojedinim kondenzatorima jednaka je ukupnoj količini elektriciteta koju je dao izvor $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$. Prema (14) je

$$UC = UC_1 + UC_2 + UC_3 + \ldots,$$

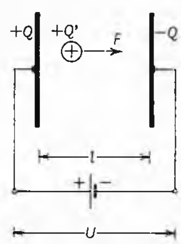
pa je

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots. \tag{17}$$

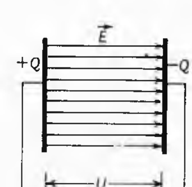
Električno polje u vakuumu. Na električni naboj $+Q'$, koji je radi pokusa doveden u električno polje pločastog kondenzatora, djeluje sila F jer ga pozitivni naboj koji se nalazi na jednoj ploči (lijevoj na sl. 29) odbija, a negativni naboj na drugoj (desnoj) ploči privlači. Ta sila F ovisi o količini naboja $+Q'$ i o *jakosti električnog polja* E, pa je

$$F = Q'E. \tag{18}$$

Brojčano je jakost električnog polja E jednaka sili koja djeluje na jedinični električni naboj: prema jedn. (18), uzetoj kao brojčana jednadžba s koherentnim jedinicama, $E = F$ za $Q' = 1$.



Sl. 29. Sila koja djeluje na naboj Q' u električnom polju



Sl. 30. Silnice u homogenom električnom polju

Sila F kojom električno polje djeluje na uneseni naboj $+Q'$ jednaka je u svakoj točki polja između ploča pločastog kondenzatora i po iznosu i po smjeru, a usmjerena je od pozitivne prema negativnoj ploči kondenzatora. Takvo se polje stoga zove jednolično ili homogeno.

Ako se u polju nalazi negativni naboj $-Q'$, sila kojom polje na nj djeluje ima protivan smjer: $F = -Q'E$.

Električno polje, kao svako drugo, može se prema M. Faradayu zorno prikazati *silnicama*. To su zamišljene linije koje su tako u polju raspoređene da daju oba karakteristična podatka o vektoru sile kojom polje djeluje na električni naboj. Gustoća silnicâ proporcionalna je iznosu te sile, a tangenta na silnicu daje smjer sile u promatranoj točki polja. Silnice homogenog električnog polja su prema tome paralelne ekvidistantne linije usmjerene od pozitivne ploče prema negativnoj ploči kondenzatora, jer se dogovorno kao smjer silnicâ uzima smjer sile koja djeluje na pozitivni pokusni naboj (sl. 30).

Budući da je električno polje nastalo zbog prisustva električnih naboja $+Q$ i $-Q$ na pločama kondenzatora, odnosno zbog napona U koji vlada među pločama, može se njegova osnovna karakteristična veličina, jakost električnog polja E, prikazati kao funkcija bilo napona U, bilo naboja Q.

Ako se djelovanjem neke vanjske sile F naboj Q' pomakne na putu l od pozitivne do negativne ploče kondenzatora (v. sl. 29), obavlja se rad čiji je ekvivalent energija $W = UQ'$. Budući da se sila F može prikazati kao kvocijent rada i puta: $F = \frac{W}{l} = \frac{UQ'}{l}$ slijedi da je

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{U}{l}. \tag{19}$$

Jakost homogenog električnog polja pločastog kondenzatora direktno je proporcionalna naponu, a obrnuto proporcionalna razmaku ploča l, pa se u SI mjeri jedinicom *volt po metru* (V/m). To znači da se uz isti napon na elektrodama dobije to jače električno polje, i time to veća sila koja djeluje na naboje u prostoru između elektrodâ što je razmak među njima manji.

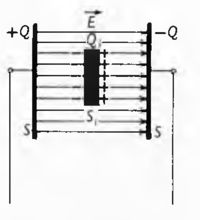
Da se dobije ovisnost $E = f(Q)$, treba izraze za U i C iz jedn. (14) i (15) supstituirati u jedn. (19), čime se dobiva:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{1}{l}\frac{Q}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{20}$$

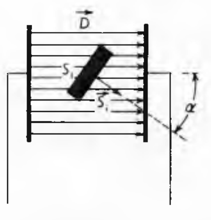
$\sigma = Q/S$ je gustoća naboja sakupljenog na pločama kondenzatora. Za proračun gustoće naboja σ uzima se površina S, a ne volumen, jer se statički naboji zadržavaju samo na površini elektroda. Gustoća naboja može se pri kondenzatoru s vakuumom kao izolacijom prema (20) prikazati izrazom:

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Influencija. Ako se metalni predmet, npr. bakrena ploča, nalazi u homogenom električnom polju (sl. 31), djelovat će to polje silom F_e na elementarne naboje atomâ te materije. Budući da su u metalima unutar fiksne strukture kristalne rešetke pomični samo slobodni elektroni, djelovanjem te sile oni se pomiču u smjeru protivnom od onoga koji je odabran kao smjer polja E.



Sl. 31. Odvajanje naboja na metalnoj ploči influencionim djelovanjem električnog polja



Sl. 32. Influenciono djelovanje električnog polja na koso postavljenu metalnu ploču

Prvotno električki neutralna bakrena ploča postaje na jednoj strani zbog suviška elektrona negativno električna, a na suprotnoj strani pozitivno električna. Razdvajanje elektronâ pod utjecajem električnih sila zove se *električna influencija*. Količine influencijom stvorenih naboja jednake su po iznosu, a suprotnih su polariteta:

$$|+Q_i| = |-Q_i|.$$

Kao mjera za influencijsko djelovanje električnog polja služi gustoća D naboja stvorenog influencijom na ploči kad je ona položena tako da njezina površina S_i stoji (kao na slici) okomito na smjer silnica električnog polja. Prema toj definiciji, gustoća influencijom stvorenog naboja D, zvana *električna indukcija*, ima vektorski karakter, jer je ovisna o položaju površine S_i. Ona se zove također *gustoća električnog pomaka*. Taj je naziv u vezi s pomicanjem elektronâ pri influenciji.

Iznos vektora $\vec{D}$ jednak je

$$|\vec{D}| = \frac{Q_i}{S_i}, \tag{21}$$

a mjerenja pokazuju da je u vakuumu $\vec{D}$ ovisan o jakosti polja E prema jednadžbi:

$$D = \varepsilon_0 E. \tag{22}$$

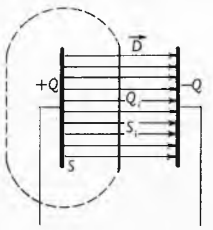
U slučaju influencije može se električno polje prikazati i linijama vektora $\vec{D}$ koje su paralelne sa silnicama električnog polja.

Količina naboja influencijom stvorenog na ploči površine S_i koja je postavljena okomito na linije vektora $\vec{D}$ računa se prema (21) po jednadžbi $Q_i = D S_i$, a ako bi površina S_i bila položena koso pod kutom α, kao na sl. 32, njezina je efektivna površina $S_i \cos\alpha$, pa je

$$Q_i = D S_i \cos\alpha.$$

Taj se izraz može pisati i kao skalarni produkt vektorâ $\vec{D}$ i $\vec{S_i}$, ako se i površina S_i izrazi vektorom $\vec{S_i}$ koji stoji normalno na površinu S_i:

$$Q_i = \vec{D} \cdot \vec{S_i}.$$



Sl. 33. Na tankoj ploči koja je postavljena između ploča kondenzatora stvara se influencijom jednak naboj kao kad bi ona bila proširena i kad bi zatvorenom plohom obavijala ploču kondenzatora

Općenito se u matematici kao tok Ψ nekog vektora kroz zadanu površinu naziva skalarni produkt tog vektora i promatrane površine. Ovdje je to *električni tok*,

$$\Psi_D = \vec{D} \cdot \vec{S_i}, \tag{23}$$

jednak količini naboja influencijom stvorenog na toj površini.

Ako je tanka metalna ploča položena između pločâ kondenzatora okomito na silnice polja (sl. 33), odnosno okomito na vektor $\vec{D}$, i ako je njezina površina S_i jednaka površini ploče kondenzatora S na kojoj se nalazi naboj Q koji stvara to električno polje, električni je tok prema (23) i (22)

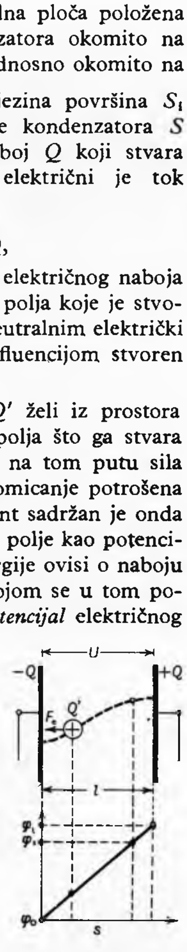
$$\Psi_D = \vec{D} \cdot \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{S} = Q,$$

što znači da je količina influencijom stvorenog električnog naboja $Q_i = Q$. To vrijedi i općenito. Od električnog polja koje je stvorio električni naboj Q bit će na svim prvotno neutralnim električki vodljivim tijelima što okružuju taj naboj Q influencijom stvoren ukupni naboj Q_i jednak naboju Q.

Električni potencijal. Ako se naboj $+Q'$ želi iz prostora izvan električkog polja dovesti u neku točku polja što ga stvara naboj $+Q$, mora se vanjskom silom savladati na tom putu sila F kojom polje djeluje na naboj $+Q'$. Za to pomicanje potrošena je izvjesna količina energije W, a njen ekvivalent sadržan je onda u novom položaju u naboju $+Q'$ dovedenom u polje kao potencijalna energija W_p. Količina te potencijalne energije ovisi o naboju Q' i o jakosti električnog polja E, a veličina kojom se u tom pogledu karakterizira električno polje zove se *potencijal* električnog polja na promatranom mjestu. Ona se označuje slovom φ i definira kao količina energije koja je potrebna za dovođenje jediničnog naboja q_0 na to mjesto. Dakle je

$$\varphi = \frac{W_p}{Q'}. \tag{24}$$

Ako se to primijeni na homogeno električno polje pločastog kondenzatora, može se odrediti potencijal za svaku točku polja. Pri pomicanju naboja $+Q'$ od negativne ploče prema pozitivnoj (sl. 34) troši se na putu s energija $W'_s = Fs = Q'Es$ (prema 18), pa ako je u početnom položaju (uz negativnu ploču) naboj Q' već imao energiju W_0, na udaljenosti s od negativne ploče



Sl. 34. Određivanje potencijala u homogenom električnom polju pločastog kondenzatora

ukupna je energija $W_p = W_0 + W_s'$, a potencijal, prema (24),

$$\varphi_s = \frac{W_p}{Q'} = \frac{W_0}{Q'} + \frac{W_s'}{Q'},$$

ili

$$\varphi_s = \varphi_0 + E s = \varphi_0 + \frac{U}{l} s,$$

gdje je φ_0 potencijal početnog položaja.

Potencijal homogenog polja kondenzatora mijenja se, dakle, linearno s razmakom s, pa sve točke na istoj udaljenosti od negativne ploče imaju isti potencijal i leže na tzv. *ekvipotencijalnoj ravnini* koja je okomita na smjer silnica poljâ.

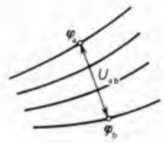
Razlika potencijalâ jest

$$\varphi_s - \varphi_0 = \frac{U}{l} s,$$

a ako je izvršen pomak do pozitivne ploče kondenzatora, ta je razlika jednaka naponu U koji vlada među pločama:

$$\varphi_l - \varphi_0 = \frac{U}{l} \cdot l = U.$$

Općenito je u svakom elektrostatičkom polju (sl. 35) razlika potencijalâ između dviju točaka jednaka naponu koji vlada među tim točkama:



Sl. 35. Određivanje razlike potencijala između dviju točaka električnog polja

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

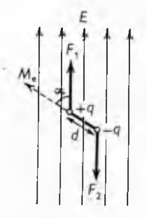
Ako se referentna točka (npr. na sl. 34 negativna ploča kondenzatora) spoji sa zemljom, pripisuje joj se potencijal nula: $\varphi_0 = 0$, pa je potencijal pozitivne ploče jednak naponu kondenzatora: $\varphi_l = U$.

Polarizacija izolatorâ u električnom polju. Unese li se izolator u električno polje, u njemu ne dolazi do influencije (kao u vodičima), već do pojave *polarizacije*. U izolatorima su, naime, elementarni električni naboji čvrsto povezani u atomima i molekulama i mogu se djelovanjem vanjskog polja tek malo elastično pomaknuti. Pozitivni i negativni elementarni naboji na razmaku d jedan od drugoga čine *električni dipol*. Budući da električno polje elementarne naboje q jednog predznaka odbija, a drugog privlači, dolazi do sprega sila i pojave zakretnog momenta M_z koji iznosi

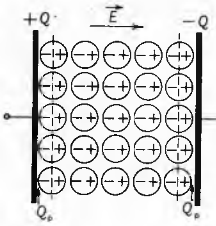
$$M_z = E q d \sin \alpha,$$

gdje je α kut pod kojim stoji dipol prema smjeru polja. Produkt $q d = M_e$ zove se *električni* (*dipolni*) *moment*. To je vektorska veličina upravljena u smjeru spojnice obaju nabojâ (sl. 36); ona karakterizira dipol i molekularnu strukturu materijala u kome se nalaze elementarni dipoli.

S obzirom na raspored elementarnih naboja u molekulama, mogu se izolacioni materijali podijeliti na polarne i nepolarne. U polarnim su materijalima elementarni dipoli stalno prisutni i električno ih polje odmah orijentira u svoj smjer i time nastaje polarizacija. U nepolarnim se materijalima utjecajem polja najprije naboj prisilno pomiče i time stvara dipol, a tek zatim se naboji orijentiraju u smjer polja, tj. nastaje polarizacija. Stvarni mehanizam polarizacije vrlo je složen; postoji više vrsta polarizacije koje su opširno opisane u članku *Elektrotehnički materijali*, str. 72 (v. i članak *Elektricitet, statički*, TE 3, str. 581).



Sl. 36. Uz tumačenje električnog momenta elementarnih dipola



Sl. 37. Polarizacija materije izolatora u homogenom električnom polju kondenzatora

Kao posljedica polarizacije pojavljuju se na vanjskim graničnim plohama izolatora uz pozitivnu elektrodu negativni naboji $-Q_p$, a uz negativnu elektrodu pozitivni naboji $+Q_p$. Ti naboji vezuju (neutraliziraju) dio naboja koji se nalazi na elektrodama (sl. 37). Polariziranost izolatora mjeri se gustoćom naboja stvorenog (vezanog) na površini izolatora $\sigma_p = Q_p/S = P$. Ta se gustoća također zove *električna polarizacija* i označava se slovom P. Električna polarizacija ima vektorski karakter, ona je ovisna o jakosti električnog polja i o karakteristikama materijala izolatora. Po vrijednosti ona je za faktor χ veća od gustoće električnog pomaka u vakuumu D_0 i iznosi:

$$P = \chi \varepsilon_0 E = \chi D_0. \qquad (25)$$

Faktor χ zove se *električna susceptibilnost* ili *susceptibilnost izolatora*, što znači polarizabilnost ili sposobnost izolatora da bude polariziran. Električna polarizacija je, dakle, za izolatore pojam analogan pojmu gustoće električnog pomaka (električne indukcije) za vakuum.

Naboji stvoreni polarizacijom na materijalnom izolatoru mijenjaju prilike u električnom polju u odnosu prema onima u vakuumu. Ako se, naime, između ploča kondenzatora koji je stalno priključen na izvor umetne izolator, dolazi zbog polarizacije do vezivanja dijela njegova naboja. Budući da napon U i jakost polja E ostaju u tom slučaju konstantni, dodatnim će se nabojem iz izvora paralizirati naboj polarizacije Q_p, pa će se rezultantni naboj Q_{rez} povećati na $Q_{rez} = Q + Q_p$. Budući da je pri istom naponu naboj veći, to znači da se povećao i kapacitet $C = Q_{rez}/U$ i on prema (15) i (16) sada iznosi:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{l} = \varepsilon \frac{S}{l},$$

gdje je ε dielektričnost, a ε_r relativna dielektričnost. Ukupna gustoća električnog pomaka D koja nastupa u dielektrikumu sastoji se u tom slučaju od dijela (D_0) koji prema (22) već postoji u vakuumu, tj. $D_0 = \varepsilon_0 E$, i dijela (P) koji nastaje prema (25) u izolatoru zbog polarizacije

$$D = \varepsilon E = D_0 + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E (1 + \chi) = D_0 \varepsilon_r. \qquad (26)$$

Iz ove jednadžbe nadalje izlazi da je

$$P = D - D_0, \qquad \chi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - 1 = \frac{P}{D_0},$$

i konačno

$$\frac{D}{D_0} = \varepsilon_r.$$

Ova jednadžba u skladu je s Maxwellovim postulatom, koji kaže da influencijom stvoreni naboji ovise samo o slobodnom naboju, a da vezani naboji ne utječu na dielektrični pomak D.

Kondenzatori s promjenljivim poljem. Ako je napon narinut elektrodama kondenzatora promjenljiv, izmjenični, mijenjat će se proporcionalno njemu i električno polje i njegova jakost, a time također gustoća naboja σ privedenog na ploče kondenzatora i gustoća električnog pomaka D:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt}.$$

Supstitucijom izraza (26) $D = \varepsilon_0 E + P$ dobije se jednadžba

$$\frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt},$$

koja pomnožena s površinom S prelazi u jednadžbu strujâ:

$$\frac{d\sigma}{dt} S = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} S + \frac{dP}{dt} S,$$

pa je:

$$i = i_0 + i_p.$$

Vidi se da se zbog promjenljivog napona na kondenzatoru privedena izmjenična struja nastavlja u dielektriku kao *pomačna struja* $i = \frac{dD}{dt} S$, koja je sastavljena od dvije komponente: jedne, $i_p = \frac{dP}{dt} S$, uzrokovane izmjeničnim premještanjem elementarnih naboja u izolatoru, i druge, $i_0 = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} S$ koja se ne odnosi ni na kakve električne naboje, već se mora smatrati da nastaje zbog promjene električnog polja u vakuumu.

Kondenzatori s nehomogenim poljem. U nehomogenom, nejednoličnom, električnom polju jakost se polja E mijenja od točke do točke u polju. Osnovne relacije koje su izvedene za međusobne odnose fizikalnih veličina u homogenom polju i ovdje u cjelini vrijede ako se primijene na infinitezimalno male prostore u polju, za koje se smije pretpostaviti da je polje homogeno. Ipak se i uz ovu pretpostavku samo za neke konfiguracije polja mogu izvesti jednostavni analitički izrazi za proračun polja.

Kuglasti kondenzator. Za nehomogeno električno polje kuglastog kondenzatora (sl. 38) koji je priključen na napon U može se pretpostaviti da dvije koncentrične kugle radijusa r i ($r + dr$) čine kondenzator, a među njihovim površinama da postoji razlika potencijala, odnosno napon, $d\varphi = dU$, koji se izračuna iz odnosa: napon = naboj : kapacitet. Ovdje je influencijom stvoreni naboj

$-Q$ prema Maxwellovom postulatu jednak naboju kugle kondenzatora Q, a za kapacitet među tim dvjema zamišljenim kuglastim površinama primjenjuje se jednadžba (15) pločastog kondenzatora

$$C = \varepsilon \frac{S}{l} = \varepsilon \frac{4r^2\pi}{\mathrm{d}r},$$

pa je

$$\mathrm{d}U = \frac{Q}{\varepsilon \frac{4r^2\pi}{\mathrm{d}r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2}, \tag{27}$$

a ukupni napon

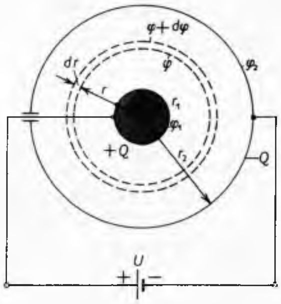
$$U = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

te je kapacitet kuglastog kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Kapacitivnost osamljene kugle prema okolišnom prostoru (u kom je slučaju $r_1 = R$, a $r_2 = \infty$) jednaka je $C_k = 4\pi\,\varepsilon_0 R$.

Jakost električnog polja na pojedinim točkama u polju kuglastog kondenzatora dobije se iz jednadžbe: $E = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$, pa je (jedn. 27): $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$, a budući da djeluje u smjeru radijusa, prikazuje se kao vektor:

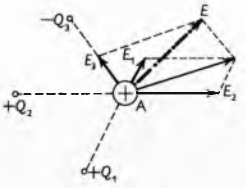


Sl. 38. Kuglasti kondenzator

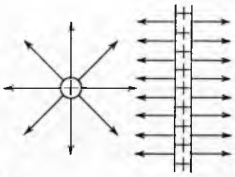
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{28}$$

gdje je $\vec{r}/r$ jedinični vektor u smjeru radijusa r.

Točkasti naboji. Budući da je jakost polja E na radijusu r neovisna o veličini unutarnje kugle kondenzatora, jednadžba (28) vrijedi i za jakost polja naboja Q koncentriranog u središtu O, dakle za tzv. točkasti naboj.



Sl. 39. Rezultantno polje od više točkastih naboja



Sl. 40. Silnice električnog polja nabijenog pravca

Ako su u prostoru naboji $Q_1, Q_2, \ldots$ smješteni u točkama udaljenim od točke A na radijusu $r_1, r_2, \ldots$ (sl. 39), vektor rezultantne jakosti električnog polja u točki A jednak je vektorskoj sumi pojedinih jakosti polja:

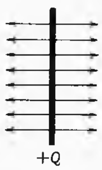
$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r_i}}{r_i}. \tag{29}$$

Nabijeni pravac. Primjenom jednadžbe (29) može se izračunati električno polje pravca jednolično nabijenog linijskom gustoćom električnog naboja $\lambda = Q/l$ (koja se u SI izražava u jedinicama As/m). Zbog aksijalne simetrije na svakoj točki prostora u udaljenosti r jakost je polja ista i jednaka

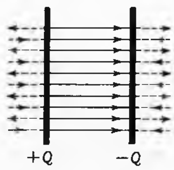
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{30}$$

gdje je $\vec{r}/r$ jedinični vektor okomite udaljenosti promatrane točke od pravca. Raspored silnica nabijenog pravca prikazuje sl. 40.

Nabijena ravnina. Za neograničenu ravninu (sl. 41) nabijenu jednolično elektricitetom plošne gustoće $\sigma = Q/S$ (koja se u SI



Sl. 41. Silnice električnog polja nabijene ravnine



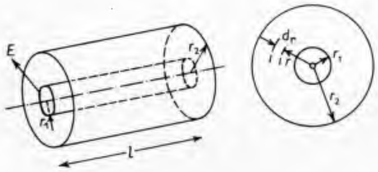
Sl. 42. Silnice električnog polja između dviju ravnina nabijene suprotnim električnim nabojima

izražava u jedinicama As/m^2) dobije se primjenom zakona superpozicije podatak da je električno polje u cijelom prostoru homogeno i okomito na ravninu, a rasprostire se jednako na obje strane nabijene ravnine, pa je

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}.$$

Metodom superpozicije dobije se da je polje *dviju ravnina* (sl. 42) nabijenih suprotnim električnim nabojima sadržano samo u prostoru između tih ravnina i jednako $E = \sigma/\varepsilon$, a usmjereno je od pozitivno nabijene ravnine prema negativnoj, što je već otprije poznato za homogeno električno polje pločastog kondenzatora.

Cilindrični kondenzator. U elektrostatičkim poljima jednolično ispunjenim izotropnim dielektrikom i u kojima su električni naboji obuhvaćeni zatvorenom plohom [takvo je polje i u cilin-



Sl. 43. Cilindrični kondenzator

dričnom kondenzatoru (sl. 43)] primjenjuje se *Gaussov teorem*, formuliran jednadžbom

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}. \tag{31}$$

(Q je algebarska suma svih pojedinih električnih naboja što ih obuhvaća zatvorena ploha S.) Ako unutar plohe S nema električnih naboja, $Q = 0$, pa je $\oint_S E\,\mathrm{d}S = 0$.

U cilindričnom kondenzatoru će zbog aksijalne simetrije u svakoj točki na cilindru radijusa r biti ista jakost polja okomita na element površine $\mathrm{d}S$, pa se u jedn. (31) može E kao konstanta izlučiti izvan znaka integrala. Prema sl. 43 je onda

$$E \oint \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon},$$

a jer je $\oint \mathrm{d}S = 2r\pi \cdot l$,

$$E = \frac{Q}{2r\pi l\varepsilon}.$$

Označi li se Q/l slovom λ, dobije se već prije izvedeni izraz (30) za nabijeni pravac

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}.$$

Vidi se da jakost polja na cilindru ovisi samo o njegovu radijusu r.

Između dva bliza cilindra radijusa r i $(r + \mathrm{d}r)$ postoji napon $\mathrm{d}U$ koji se dobije kao kvocijent naboja i kapaciteta:

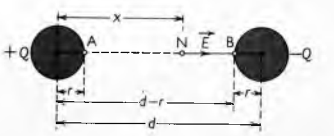
$$\mathrm{d}U = \frac{Q}{\frac{2r\pi\varepsilon l}{\mathrm{d}r}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Napon između dva koaksijalna cilindra radijusa r_1 i r_2 jest, prema tome, $U = \int\limits_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$, pa je kapacitet cilindričnog kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Cilindrični kondenzator je npr. koaksijalni kabel.

Dvožični zračni vod sastavljen od dva paralelna okrugla vodiča predstavlja u biti također kondenzator. Njegov kapacitet može se izračunati s dovoljnom točnošću za praksu ako se pretpostavi da su oba vodiča smještena visoko iznad zemlje i da su njihovi radijusi r mali prema razmaku d među njima. Uz te pretpostavke može se, naime, zanemariti utjecaj zemlje, a može se također uzeti da su naboji Q obaju vodiča jednolično razdijeljeni na površinama vodičâ, koje predstavljaju ekvipotencijalne plohe.



Sl. 44. Presjek dvožičnog zračnog voda

Prema sl. 44 u točki N električnog polja, na spojnici osî obaju vodiča, djeluju oba suprotna naboja $+Q$ i $-Q$ u istom smjeru, pa je prema (30) rezultantna jakost polja jednaka sumi:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l x} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l(d-x)}.$$

Odatle se dobije napon između točaka A i B:

$$U_{AB} = \int\limits_{r}^{d-r} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d-r}{r}.$$

Kapacitet dvožičnog voda, kao kvocijent Q/U, jednak je:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{d-r}{r}}.$$

Za praksu je često dovoljno točna jednadžba

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{d}{r}},$$

jer se uzima da je $(d - r) \approx d$.

Priestleyjev ili Coulombov zakon služi za izračunavanje sile koja djeluje između dva točkasta naboja Q_1 i Q_2 koji se nalaze na udaljenosti r jedan od drugoga. Ta se sila može izračunati primjenom izrazâ (17) i (28), te iznosi:

$$F = Q_2 \cdot E = Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Sila je privlačna ako su Q_1 i Q_2 različitih predznaka, a odbojna ako su istih predznaka.

Mehaničke sile koje se pojavljuju pri djelovanju električnog polja na slobodne i (pri polarizaciji) vezane naboje prenose se i na tijelo koje nosi taj naboj i nastoje ga pokrenuti ili deformirati. Takve se električne sile zovu i *ponderomotorne sile.* Priestley-Coulombov zakon može se primijeniti i na elektrizirana tijela ako su njihove dimenzije male u odnosu prema udaljenosti među njima. Ponderomotorne sile razmjerno su slabe; one se primjenjuju npr. u elektrostatičkim mjernim instrumentima (v. *Električna mjerenja*, TE 3, str. 597), u elektronskoj optici (v. str. 1) i elektrostatičkim operacijama (v. str. 43).

Rad električnog polja. Rad što ga obavlja homogeno polje kad se naboj Q' giba na putu s u smjeru sile polja jednak je

$$A = F \cdot s.$$

Ako smjer puta sa smjerom sile zatvara kut α, u račun ulazi samo projekcija puta na smjer sile pa je:

$$A = F s \cos \alpha.$$

Ta jednadžba može se izraziti i skalarnim produktom vektora sile i puta, koji se kao usmjerena veličina također smatra vektorom:

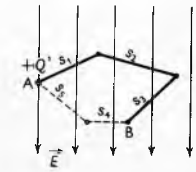
$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Sastoji li se put od više dijelova (kao na sl. 45): $s_1, s_2 \ldots$ koji nemaju isti smjer, ukupni rad jednak je

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}_1 + \vec{F} \cdot \vec{s}_2 + \ldots,$$

a jer je $F = Q' \cdot \vec{E}$, izlazi:

$$A = Q' \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \vec{s}_i. \tag{32}$$

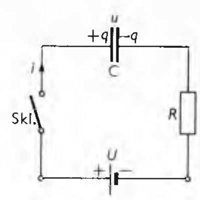


Sl. 45. Rad pri gibanju naboja $+Q'$ u homogenom električnom polju

Na putu gdje električno polje obavlja rad savladavajući vanjsku silu pridaje se izvršenom radu pozitivni predznak, a na putu gdje vanjska sila obavlja rad protiv djelovanja sile polja, rad ima negativni predznak. Ako se u električnom polju naboj Q' giba zatvorenim putem (na sl. 45 iz točke A do točke B i onda natrag u početni položaj A), ukupni izvršeni rad jednak je nuli.

Energija električnog polja. Za uspostavljanje električnog polja potrebna je određena energija, koju daje izvor napajanja. Ta od izvora primljena energija sadržana je (po odbitku gubitaka) kao potencijalna energija u dielektriku. Električno polje koje djeluje na električne naboje određenom silom obavlja pri njihovom pomicanju određen rad, trošeći pri tome svoju energiju.

Da bi se na kondenzatoru kapaciteta C sakupio naboj Q uz napon U, mora izvor napajanja predati kondenzatoru energiju W_1. Ta se energija može izračunati iz slijedećih razmatranja.



Sl. 46. Uz tumačenje prijelaznih pojava prilikom priključaka kondenzatora na izvor istosmjernog napona

Budući da se kondenzatoru kapaciteta C priključenom na izvor (sl. 46) privodi naboj postepeno, i napon u na kondenzatoru raste postepeno do konačne vrijednosti U. U svakom je trenutku trenutna vrijednost napona u povezana s količinom skupljenog naboja q, prema (14), jednadžbom $q = C u$ ili $u = q/C$.

Za prirast napona $\mathrm{d}u$ potreban je prirast naboja $\mathrm{d}q = C\,\mathrm{d}u$, a taj kondenzatoru dobavlja struja i iz izvora:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Iz tog se izraza dobiva osnovna jednadžba

$$u = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \tag{33}$$

U strujnom krugu priključenog kondenzatora mora i za vrijeme punjenja (nabijanja) kondenzatora u svakom trenutku postojati ravnoteža naponâ, pa naponska jednadžba drugog Kirchhoffovog zakona glasi:

$$U - u = i R.$$

(Nabojima $+q$ i $-q$ stvoreni napon u na kondenzatoru ima u strujnom krugu smjer protivan naponu izvora U.) Supstitucijom $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ dobije se diferencijalna jednadžba:

$$U - u = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

čije rješenje daje napon

$$u = U(1 - \mathrm{e}^{\frac{t}{RC}}) = U(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}). \tag{34}$$

Veličina $R C = \tau$ zove se *vremenska konstanta* jer ima dimenziju vremena:

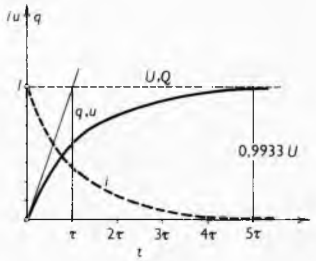
$$[R] \cdot [C] = [R] \cdot \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [R]\frac{[T]}{[R]} = [T].$$

Uvrštenjem izraza (34) za u u jednadžbe $q = Cu$ te $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ i primjenom izraza (14), dobiju se jednadžbe za naboj q i struju i:

$$q = Q(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}), \qquad i = I\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{35}$$

gdje je $I = U/R$ početna vrijednost struje.

Vidi se da se napon, struja i naboj tijekom vremena punjenja kondenzatora mijenjaju eksponencijalno, pa će napon na kondenzatoru i naboj na pločama postepeno rasti, a struja od početne vrijednosti I postepeno se smanjivati na vrijednost nula. Brzina kojom se u vremenu mijenjaju ove veličine ovisi o vremenskoj konstanti τ. Teoretski je punjenje kondenzatora do punog napona U završeno tek nakon beskonačno dugog vremena, jer je tek za $t = \infty \Rightarrow u = U$. Međutim, iz dijagrama porasta napona i smanjivanja jakosti struje (sl. 47) vidi se da se može smatrati punjenje završenim već po isteku vremena $t = 5\tau$. Tada je naime $u = 0{,}9933\,U$.



Sl. 47. Eksponencijalni porast naboja i napona uz eksponencijalno smanjenje jakosti struje prilikom priključka kondenzatora na izvor konstantnog istosmjernog napona

Iz jednadžbe (35) vidi se da se pod vremenskom konstantom pri punjenju kondenzatora razumijeva vrijeme ($t = \tau$) u kome struja padne na iznos $I/e = 0{,}368\,I$, a napon poraste na iznos $U\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}632\,U$.

Energija nabijenog kondenzatora. Energija izvora $U i\,dt$ predaje se strujnom krugu i ona se troši u priključenim elementima R i C prema jednadžbi

$$U i\,dt = i R \cdot i\,dt + u \cdot i\,dt.$$

Ako se zamijeni $i\,dt = q$ i $u = q/C$, dobije se:

$$U i\,dt = i^2 R\,dt + \frac{1}{C} q\,dq$$

pri čemu se nakon integriranja

$$\int_0^\infty U i\,dt = \int_0^\infty i^2 R\,dt + \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq$$

dobije:

$$W_i = W_{top} + \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2},$$

gdje je W_i energija izvora, a W_{top} Jouleova toplina u otporu R. Električna energija nabijenog kondenzatora je

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{UQ}{2}. \tag{36}$$

U jedinici volumena dielektrika kondenzatora sakupljena je količina energije $w = W_e/V$. Supstitucijom $V = S\,l$ i $C = \varepsilon S/l$ dobiju se za gustoću električne energije izrazi koji vrijede općenito i za nehomogeno električno polje:

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}.$$

Ukupna energija izvora koja je predana strujnom krugu može se prikazati i jednadžbom:

$$W_i = \int_0^Q U\,dq = UQ;$$

iz toga i (36) slijedi da je polovica te ukupne energije $UQ/2$ sadržana u kondenzatoru kao električna energija, a druga je polovica potrošena u otporu R.

Kako su E i D veličine električnog polja vezane općenito na pojedine točke električnog polja, dobivene jednadžbe za gustoću polja vrijede i za nehomogena električna polja.

Magnetska polja

Pojava da neke rude, npr. magnetit, privlače željezo bila je poznata već u starom vijeku. Za tijela koja imaju to svojstvo kaže se da su *magnetična* i ona se zovu *magneti*. Nastajanje i bit te pojave, koja se zove *magnetizam*, objasnio je tek 1820 danski fizičar H. C. Oersted.

Prostor oko prirodnih i umjetnih magneta (i unutar njih) u kome djeluju magnetske sile zove se *magnetsko polje*. Utvrđeno je da magnetsko polje postoji uvijek u prostoru oko toka električne struje, bilo da se radi o provodnoj struji, pomačnoj struji ili mlazu elektrona (v. str. 130). Magnetsko polje se jedino ne pojavljuje u ionski vodljivim talinama i otopinama kad kroz njih prolazi električna struja.

Tijelo koje je magnetično samo kad kroz njega prolazi električna struja naziva se *elektromagnetom*. Magnet napravljen od materijala koji po prirodi ima svojstvo da privlači željezo, ili od materijala (»feromagnetskog«) kojemu se to svojstvo može podijeliti (koje se može *magnetizirati*) zove se *permanentni magnet*. I magnetizam umjetnih permanentnih magneta izrađenih od feromagnetskih materijala posljedica je elementarnih struja unutar same materije magneta.

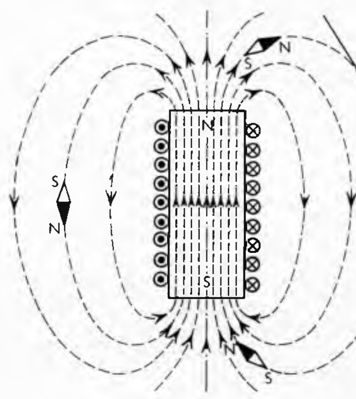
Magnetizam se očituje svojim učincima koji se fenomenološki ispoljavaju različito; međutim, osnovno je svima da magnetsko polje svojim silama djeluje na električne naboje u gibanju. No, kako električni naboji u gibanju predstavljaju također magnete, to je očito da i jedan magnet djeluje na drugi magnetskom silom.

I zemaljska kugla predstavlja golemi magnet, te se u njezinu magnetskom polju svaki slobodno pokretljivi magnet orijentira tako da mu je jedna strana okrenuta prema sjeveru, a druga prema jugu. Svaki magnet ima, dakle, kao i Zemlja, dva magnetski očevidna različita pola. Onaj koji se okreće prema sjeveru nazvan je sjevernim polom a suprotni južnim polom i označuju se slovom N (engl. *north* — sjever), odnosno S (*south* — jug).

Karakteristike i veličine magnetskog polja. Za zorno prikazivanje magnetskih sila u magnetskom polju oko magneta služi mala *magnetska igla* (lagana magnetična kazaljka okretljivo uležištena u težištu) ili željezna piljevina. Sitne iglice piljevine rasporede se u magnetskom polju same u smjeru magnetske sile u nizove i time slikovito predočuju *magnetske silnice*.

I za magnetske silnice vrijedi Faradayjevo pravilo da one u svakoj točki prikazuju intenzitet sile i njezin smjer: intenzitet sile prikazuje gustoća silnica, a kao smjer sile, i time kao smjer silnice, odabran je smjer u koji se otkloni sjeverni pol male magnetske igle u promatranoj točki polja.

U tako dobivenoj slici polja silnice polaze sa sjevernog pola N magneta, odnosno elektromagneta (sl. 48), prolaze kroz vanjski prostor u zatvorenim linijama, ulaze u magnet na njegovom južnom polu S i unutar magneta idu od južnog pola opet natrag do sjevernog pola.



Sl. 48. Magnetske silnice elektromagneta

Razlika je između silnica magnetskog i električnog polja u tome što su magnetske silnice zatvorene linije bez početka i svršetka, dok električne silnice na pozitivnom tijelu izlaze u polje, a na negativnom tijelu završavaju, a da unutar metalnih tijela nema ni silnica ni električnog polja.

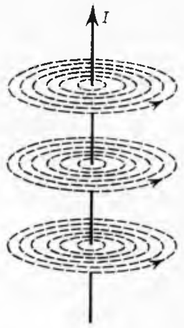
Skup svih silnica slikovito prikazuje magnetičnost magneta. Učinak magnetskog polja na određenom mjestu ovisi o veličini zvanoj *magnetska indukcija B*. Ona je prikazana gustoćom silnica na tom mjestu i predstavlja gustoću veličine zvane *magnetski tok Φ*. Ako jednoliko guste magnetske silnice prolaze kroz površinu S na nekom mjestu okomito, magnetska je indukcija, prema tome, $B = \Phi/S$, a magnetski tok $\Phi = B\,S$.

Apsolutna vrijednost magnetskog toka Φ i njegove gustoće B određuje se mjerenjem bilo kojeg učinka magnetskog polja, jer se svi ti učinci mogu mjeriti instrumentima i izraziti u jedinicama SI. Mogao bi se mjeriti, npr., učinak mehaničkih sila što ih izaziva magnetsko polje, ali je jednostavnije mjeriti električni napon što ga inducira u vodiču magnetski tok kad se određenom brzinom mijenja (v. Elektromagnetska indukcija, str. 128). Na taj je način definirana i jedinica magnetskog toka u sustavu SI i, preko nje, jedinica magnetske indukcije.

Jedinica SI za magnetski tok Φ zove se *veber* (Wb); to je tok koji pri linearnom smanjivanju na nulu u jednoj sekundi inducira u jednom zavoju vodiča napon 1 V. Ta je jedinica identična s jedinicom voltsekunda (Vs). Gustoća magnetskog toka ili magnetska indukcija B mjeri se jedinicom *tesla* (T). To je gustoća homogenog magnetskog toka kad 1 Wb prolazi okomito kroz površinu 1 m² (T = Wb/m²).

Budući da sila kao usmjerena veličina ovisi o gustoći B, pripada i veličini B vektorski karakter, pa je tok Φ u homogenom polju skalarni produkt

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}. \tag{37}$$



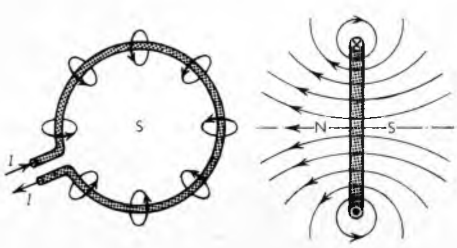
Sl. 49. Magnetsko polje ravnog vodiča kroz koji protječe električna struja

Za nehomogeno polje vrijedi općenito

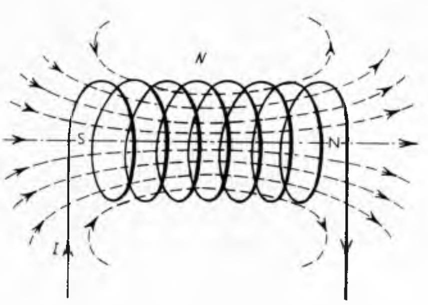
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

U prostoru oko vodiča kojim teče električna struja stvara se — kao što je već rečeno — također magnetsko polje kojemu oblik ovisi o obliku tog vodiča. Na sl. 49 prikazano je magnetsko polje ravnog vodiča, na sl. 50 vodiča savinutog u kružni zavoj, a na sl. 51 svitka sa više (N) zavoja. Osnovno je pri tome da je oko svakog elementa vodiča kroz koji prolazi struja smjer silnica magnetskog polja povezan sa smjerom struje.

Smjer magnetskog polja određuje se *pravilom desnog vijka* ili vadičepa: smjer je magnetskog polja jednak smjeru kojim se okreće vadičep kad se uvija u smjeru struje (sl. 52).



Sl. 50. Magnetsko polje zavoja kroz koji protječe električna struja



Sl. 51. Magnetsko polje svitka kroz koji protječe električna struja

Matematička relacija između magnetskog toka Φ i struje I koja ga je prouzrokovala može se dobiti jedino na osnovi mjerenja električnih i magnetskih veličina. Takvo je mjerenje najjednostavnije izvršiti na tzv. torusnom svitku (sl. 53), jer je tu — uz pretpostavku da je poprečni presjek torusa mali u odnosu prema njegovoj duljini — magnetski tok na cijelom putu jednoličan i lako pristupačan mjerenju.

Mjerenja pokazuju da magnetski tok Φ ovisi o tzv. *ukupnoj struji* (umnošku jakosti struje I i broja zavoja N, NI, koji se naziva također *brojem amperzavoja*) i o geometrijskim dimenzijama prostora u kome se zatvaraju silnice (o poprečnom presjeku S toka i o srednjoj duljini silnica l):

$$\Phi = \mu \frac{INS}{l}. \tag{38}$$

Koeficijent proporcionalnosti μ ovisi o mediju u kome se zatvara magnetski tok i zove se *permeabilnost* ili magnetska provodljivost tog medija.

Iz jedn. (38) slijedi da je koherentna jedinica SI permeabilnosti

$$[\mu] = \text{Vs} \cdot \text{m}/(\text{A} \cdot \text{m}^2) = \text{Vs/Am} = \Omega\,\text{s/m}.$$

Vs/A ili Ω s je jedinica induktivnosti (v. str. 129) i zove se *henri*. Najjednostavnije ime jedinice permeabilnosti jest, prema tome, H/m (*henri po metru*).

Budući da se magnetski tok zatvara i u vakuumu, permeabilnost se može izraziti i relativno, u odnosu prema konstantnoj permeabilnosti vakuuma. Ona se naziva *magnetskom ili indukcijskom konstantom*, označava se sa μ_0 i iznosi $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Faktor za koji se permeabilnost μ nekog materijala razlikuje od magnetske konstante μ_0 zove se relativna permeabilnost μ_r:

$$\mu = \mu_r \mu_0.$$

Jednadžba (38) transformirana u oblik

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{1}{\mu}\frac{l}{S}} = \frac{NI}{R_m} = \frac{\text{MMS}}{R_m} \tag{39}$$

zove se također Ohmov zakon za magnetski krug jer je formalno slična jednadžbi Ohmova zakona za električni strujni krug: $I = \frac{\text{EMS}}{R} = \frac{E}{\varrho \frac{l}{S}}$. Zbog te analogije u izrazu (39) produkt NI naziva se i *magnetomotornom silom* (skraćenica MMS), a $\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}$ magnetskim otporom (oznaka R_m).

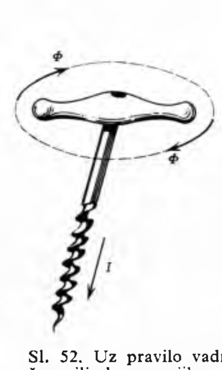
Analogija jedn. (39) s Ohmovim zakonom čisto je formalna: električna struja i magnetski tok jesu u biti različite pojave: električna struja je dinamična pojava, ona doista teče kao gibanje električnih naboja, a magnetski tok je energetsko stanje prostora prikazano skalarnim produktom vektora B i površine S; njegov naziv »tok« dolazi odatle što se takav skalarni produkt u matematici naziva tok vektora B.

Osnovna jednadžba (38) $\Phi/S = \mu \cdot IN/l$ može se prema (37) napisati i u obliku

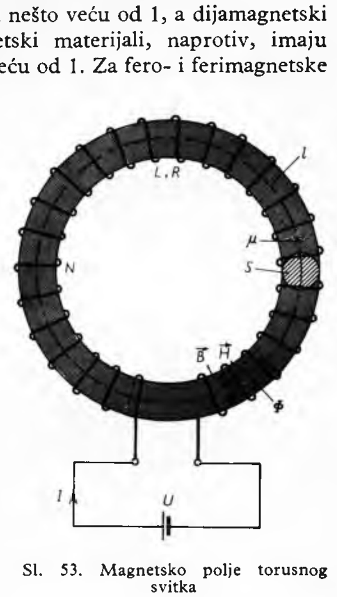
$$B = \mu \cdot \frac{IN}{l} = \mu H, \tag{40}$$

gdje je $H = IN/l$ specifični broj amperzavoja, koji se zove *magnetska uzbuda* ili *jakost magnetskog polja*, a mjeri se jedinicom amper po metru (A/m).

Materija u magnetskom polju. U pogledu magnetskih svojstava mogu se materijali svrstati u paramagnetske, dijamagnetske, feromagnetske i antiferomagnetske materijale, među koje se ubrajaju i tzv. ferimagnetski materijali. Paramagnetski i dijamagnetski materijali imaju relativnu permeabilnost tek neznatno različitu od 1 (tabl. 2), i to paramagnetski nešto veću od 1, a dijamagnetski nešto manju od 1. Feromagnetski materijali, naprotiv, imaju relativnu permeabilnost znatno veću od 1. Za fero- i ferimagnetske



Sl. 52. Uz pravilo vadičepa ili desnog vijka za određivanje smjera magnetskog polja vodiča kroz koji protječe struja

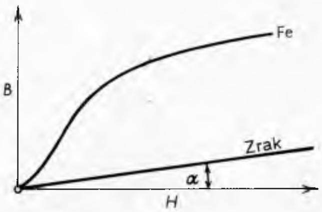


Sl. 53. Magnetsko polje torusnog svitka

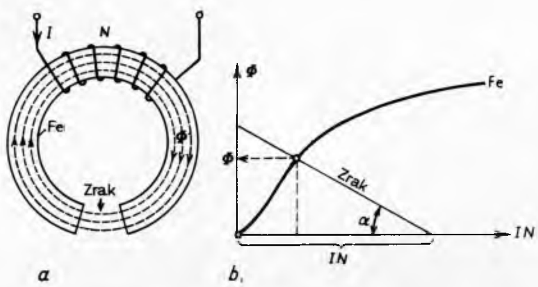
materijale kaže se da su *tvrdi* ako se teško magnetiziraju i razmagnetiziraju, a u suprotnom slučaju kaže se da su *meki*. Posebno su važni za elektrotehniku feromagnetski materijali jer zbog svoje velike magnetske permeabilnosti već malom uzbudom H postižu velike gustoće magnetskog toka B (jedn. 40).

Magnetski materijali i svi pojmovi iz nauke o magnetizmu u vezi s magnetiziranjem detaljno su obrađeni u glavi Magnetski materijali članka *Elektrotehnički materijali*, str. 52.

Pri postepenom povećanju uzbudne struje, odnosno magnetske uzbude H, povećava se postepeno i gustoća magnetskog toka B. Povećanje je linearno za neferomagnetske materijale (npr. zrak), a nelinearno za feromagnetske materijale. Odnos između H i B prikazuje se ***krivuljom magnetiziranja*** (sl. 54) koja se dobiva mjerenjem. Iz tog se dijagrama također vidi da i kvocijent $B/H = \mu$, tj. permeabilnost, za feromagnetski materijal nije konstantna veličina, a za neferomagnetski materijal jest. Stoga se proračun magnetskog kruga s feromagnetskim materijalom ne može provesti analitički primjenom osnovne jednadžbe (38) magnetskog kruga, nego se u tu svrhu primjenjuju grafičke metode uz pomoć krivulje magnetiziranja.



Sl. 54. Krivulja magnetiziranja željeza (Fe) i zraka



Sl. 55. Određivanje magnetskog toka u prstenu sa zračnim rasporom (*a*) uz zadanu uzbudu IN grafičkim putem (*b*). Iz točke zadane uzbude na apscisi povuče se u obratnom smislu pod poznatim kutem α linija magnetiziranja zraka. Sjecište je vrijednost dobivenog toka Φ

Tako npr. željezni prsten sa zračnim rasporom (sl. 55 a), predstavlja serijski spoj magnetskih otpora željezne jezgre i zračnog raspora. Magnetski tok Φ za zadanu uzbudu odredit će se na osnovi kasnije objašnjenog zakona o protjecanju (jedn. 42 i 43), bilo računski uz pomoć podataka iz krivulja magnetiziranja željeza i zraka, bilo grafički prema sl. 55 b.

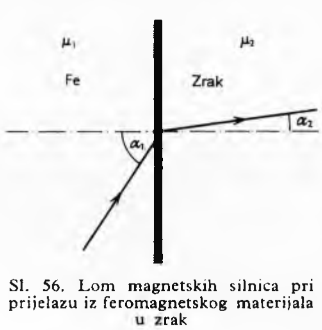
Tablica 2
RELATIVNA MAGNETSKA PERMEABILNOST NEKIH NEFEROMAGNETSKIH MATERIJALA

	μ_r		μ_r
Bakar	0,999 995	Aluminijum	1,000 002 3
Bizmut	0,999 825	Mangan	1,003 7
Grafit	0,999 895	Platina	1,000 364
Srebro	0,999 981	Zrak	1,000 000 36

Prijelaz magnetskog toka iz jednog medija u drugi. Ako magnetski tok naiđe pod kosim kutom na graničnu plohu između dva medija različitih permeabilnosti, dolazi na tom mjestu do promjene gustoće magnetskog toka i promjene njegova smjera (sl. 56). Promjena smjera određuje se zakonom loma magnetskih silnica koji glasi:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Taj zakon daje ovisnost izlaznog kuta α_2 o upadnom kutu α_1, o permeabilnostima medija



Sl. 56. Lom magnetskih silnica pri prijelazu iz feromagnetskog materijala u zrak

iz kojeg tok izlazi μ_1 i medija u koji tok ulazi μ_2. Kutovi α_1 i α_2 mjere se od okomice na graničnu plohu. Budući da feromagnetski materijali imaju znatno (više hiljada puta) veću permeabilnost od zraka, to će magnetske silnice koje prolaze iz željeza u zrak pod kosim kutom (velikim kutom α_1) na graničnu plohu iz nje izlaziti gotovo pod pravim kutom ($\alpha_2 \approx 0°$).

Zakon protjecanja. U torusnom svitku ispunjenom jednolično istim materijalom (v. sl. 53) bilo je polje u svakom presjeku jednake gustoće; stoga su odnosi među električnim i magnetskim veličinama jednostavni; torus predstavlja najjednostavniji magnetski krug. Za nj se može, prema (38), napisati jednadžba:

$$\frac{\Phi}{S} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot l = IN$$

ili

$$H\,l = I\,N, \tag{41}$$

gdje se umnožak $H\,l$ može shvatiti kao »magnetski napon« potrošen na putu l za stvaranje magnetskog toka, a taj je uravnotežen (odnosno pokriven) aktivnom magnetomotornom silom proizvedenom od struje I pri prolazu kroz zavoje N, dakle od $I\,N$. Budući da su silnice magnetskog toka zatvorene linije, magnetski tok Φ zatvorit će se i u kompliciranijim magnetskim krugovima, sastavljenim od različitih dijelova: S_1, l_1; S_2, l_2; S_3, l_3 .... itd., ali i za taj slučaj vrijedi prema (41) slično pravilo da je:

$$IN = \frac{\Phi}{S_1} \frac{1}{\mu_1} l_1 + \frac{\Phi}{S_2} \frac{1}{\mu_2} l_2 + \ldots.$$

i dalje:

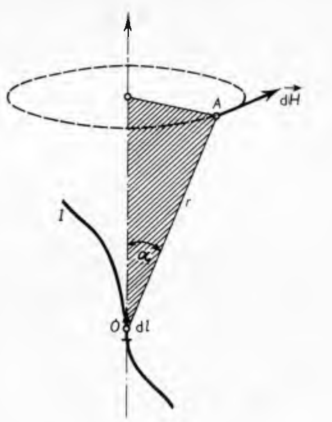
$$I\,N = H_1\,l_1 + H_2\,l_2 + \ldots., \tag{42}$$

ili posve općenito:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I = \Theta. \tag{43}$$

Jedn. (43) zove se zakon protjecanja; u njoj ΣI na desnoj strani predstavlja algebarsku sumu sviju struja što je obuhvaća tok Φ na cijelom putu l; ona se često naziva ukupna struja ili *protjecanje* Θ.

Biot-Savartov zakon. Mada magnetsko polje stvaraju struje koje teku u zatvorenim strujnim krugovima, pa prema tome u svakoj točki polja veličine H i B ovise o struji cijele zatvorene strujne petlje, ipak se za teoretska razmatranja može zamisliti da svaki element vodiča kroz koji protječe struja doprinosi svoj udio u stvaranju jakosti magnetskog polja H i time gustoće B na nekom mjestu polja. Doprinos dH ukupnoj jakosti H što ga stvara »element struje« $I\,dl$ u promatranoj točki A (sl. 57) određen je Biot-Savartovim zakonom, koji je formuliran jednadžbom:



Sl. 57. Element vodiča dl kroz koji protječe struja I stvara u točki A doprinos dH ukupnoj uzbudi

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

pa je

$$dB = \frac{\mu \cdot I\,dl \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2}. \tag{44}$$

Pri tome je smjer vektorâ $d\vec{H}$ i $d\vec{B}$ okomit na ravninu položenu kroz dl i udaljenost r, a usmjeren po pravilu desnog vijka u odnosu prema smjeru struje. Vektorska jednadžba glasi dakle

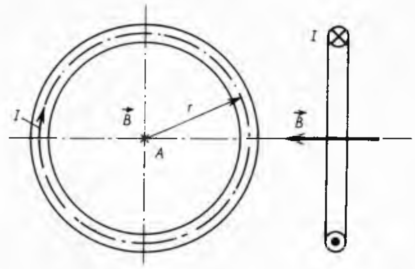
$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi r^2}\left(d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r}\right), \tag{45}$$

gdje je $\vec{r}/r$ jedinični vektor u smjeru r. Gustoća magnetskog toka cijelog strujnog kruga bit će

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Biot-Savartov zakon primjenjuje se za proračun magnetskih polja ma kako oblikovanih vodiča kad je moguće lako izvršiti operaciju integriranja, npr. za određivanje gustoće magnetskog toka u središtu A kružnog zavoja kroz koji protječe struja I (sl. 58). Ovdje je zbog centralne simetrije udaljenost r za sve elemente $\mathrm{d}l$ jednaka, pa se jednadžba (44) za proračun gustoće B pojednostavnjuje i daje konačno:

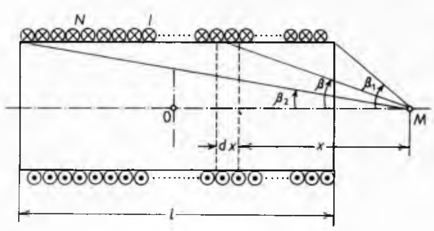
$$B = \frac{\mu I}{2r}.$$



Sl. 58. Gustoća magnetskog toka B u središtu kroz koji protječe struja

Biot-Savartov zakon može se primijeniti i za izračunavanje gustoće B u nekoj točki na geometrijskoj osi svitka, pa se prema oznakama na sl. 59 dobije da je

$$B = \frac{\mu I N}{2l}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1). \qquad (46)$$



Sl. 59. Jakost magnetskog polja u točki M na geometrijskoj osi svitka

Elektromagnetska indukcija. Magnetsko polje iskorišćuje se u elektrotehnici radi elektromagnetske indukcije i učinka sile.

Elektromagnetska indukcija je pojava da se u zatvorenom zavoju stvara (inducira) napon (elektromotorna sila) e ako se mijenja magnetski tok Φ koji obuhvaća zavoj. Iznos tog napona ovisi samo o brzini promjene magnetskog toka pa se može odrediti jednadžbom:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (47)$$

Pri definiciji jedinice za magnetski tok (str. 126) rečeno je, bez obrazloženja, da je jedinica veber identična s voltsekundom. Iz jedn. (47) vidi se da je zaista dimenzija magnetskog toka $[\Phi] = [e] \cdot [t]$.

Ako se umjesto jednog zavoja uzme svitak sa N zavoja i ako se u svim zavojima jednako mijenja magnetski tok, inducirani je napon u svitku

$$e = -N \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (48)$$

Magnetski tok koji obuhvaća zavoje svitka (koji je s njima *ulančan*) zove se *ulančani tok*. On je za koncentrirani svitak (tj. svitak u kojemu između zavoja nema većeg prostora) jednak $\Psi = N\Phi$. Ukoliko nisu svi zavoji jednako povezani sa silnicama promjenljivog magnetskog toka, mora se u jednadžbu napona (48) uvrstiti suma promjena toka pojedinih zavoja: $\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}\Psi_1 + \mathrm{d}\Psi_2 + \mathrm{d}\Psi_3 + \ldots + $ pa je

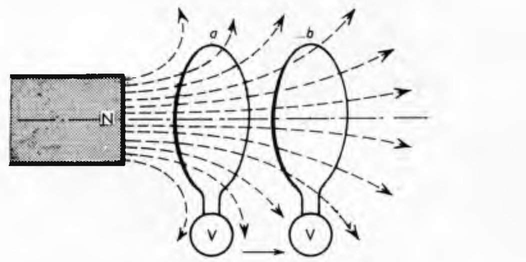
$$e = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}.$$

Ulančani se tok u tom slučaju dobije zbrajanjem ulančanih tokova pojedinih zavoja $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots$.

Smjer induciranog napona određuje prema *Lenzovom zakonu* predznak minus u izrazu (48). Taj zakon kazuje da je od induciranog napona proizvedena struja takva smjera da se od nje proizveden magnetski tok protivi promjeni toka $\mathrm{d}\Phi$ koji je inducirao napon.

Promjena magnetskog toka može se postići na različite načine, pa se prema tome i osnovna jednadžba induciranog napona na različite načine modificira.

Napon pomicanja. Ako se zavoj pomiče u magnetskom polju iz položaja a u položaj b (sl. 60) i pri tom se promijeni obuhvaćeni tok, može se ta promjena shvatiti kao rezultat toga što vodič zavoja presijeca silnice magnetskog toka. U tom se slučaju inducirani napon naziva naponom pomicanja, a jednadžba Faradayjevog zakona za izračunavanje napona zavoja svodi se na izračunavanje naponâ induciranih u pojedinim dijelovima zavoja.



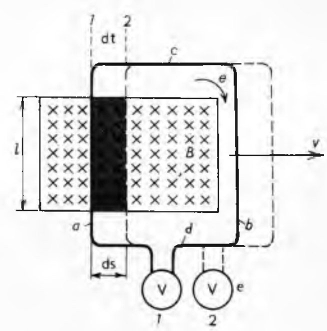
Sl. 60. Napon induciran pomicanjem zavoja u magnetskom polju

Naročito jednostavni oblik poprima jednadžba ako se ravni vodič duljine l postavljen okomito na magnetske silnice gustoće B pomiče brzinom $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ koja je također okomita na magnetske silnice (sl. 61). Tada se u tom vodiču kao dijelu zatvorenog zavoja a-c-b inducira napon

$$E = v B l. \qquad (49)$$

Ova jednostavna jednadžba ima važnu primjenu u praksi pri izračunavanju induciranih napona u namotima rotacionih električnih strojeva (motora i generatora), jer je u konstrukciji tih strojeva baš ispunjen taj zahtjev među sobom okomitih smjerova silnica, vodiča i brzine gibanja.

Smjer induciranog napona E određuje se *pravilom desne ruke* koje glasi: ako se ruka postavi tako da magnetske silnice udaraju u dlan i da ispruženi palac pokazuje smjer brzine, ispruženi prsti pokazuju smjer induciranog napona (v. *Električni strojevi*, TE 4, str. 154). Ako brzina v zatvara sa silnicama kut $\alpha < 90°$, treba izraz (49) pomnožiti faktorom $\sin\alpha$, a ako vodič nije okomit na magnetsko polje, nego s njima zatvara kut β, u račun ulazi samo njegova projekcija $l\cos\beta$.



Sl. 61. Napon induciran u jednom vodiču pravokutnog zavoja pri pomicanju

Općenito je dakle:

$$E = v\sin\alpha \cdot B \cdot l\cos\beta. \qquad (50)$$

Ako vodič ima bilo kakav oblik, primijenit će se jednadžba (50) na element njegove duljine $\mathrm{d}l$, pa je:

$$\mathrm{d}e = v\sin\alpha \cdot B\,\mathrm{d}l \cdot \cos\beta,$$

što s obzirom na usmjerene veličine $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{l}$ može biti izraženo vektorskom jednadžbom:

$$\mathrm{d}e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Za cijelu zatvorenu konturu bit će inducirani napon općenito:

$$e = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Samoindukcija. Ako je promjena toka u svitku sa N zavoja nastala zbog promjene jakosti struje koja prolazi kroz sam svitak, inducirat će se u njemu napon koji se zove *napon samoindukcije*, a cijela se pojava zove samoindukcija.

U osnovnu jednadžbu $e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ treba za dΦ (prema 39) uvrstiti izraz $\mathrm{d}\Phi = \frac{N}{R_m}\,\mathrm{d}i$, pa je napon samoindukcije jednak:

$$e_s = -\frac{N^2}{R_m}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad (51)$$

pri čemu se $L = \frac{N^2}{R_m}$ zove *koeficijent samoindukcije, induktivitet* ili *induktivnost* svitka.

Supstitucijom $\Phi = \frac{IN}{R_m}$ može se koeficijent L prikazati i u obliku

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}, \qquad (52)$$

što znači da je induktivitet svitka u koherentnim jedinicama SI brojčano jednak ukupnom toku ulančanom sa zavojima svitka pri struji od 1 ampera.

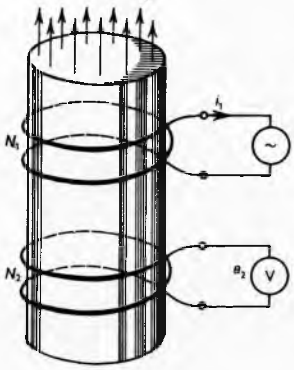
Međuindukcija nastupa između dva ili više svitaka (sl. 62) kad promjenljiva struja u jednom svitku (primaru) stvara promjenljivo magnetsko polje koje u drugim svicima (sekundarima) inducira napon

$$e_2 = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Kako je $\mathrm{d}\Phi = N_1\frac{\mathrm{d}i_1}{R_m}$, bit će

$$e_2 = -\frac{N_1 N_2}{R_m}\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

$\frac{N_1 N_2}{R_m} = M$ zove se *koeficijent međuindukcije* ili *međuinduktivnost* dvaju svitaka. Ako se pretpostavi da je pri samoindukciji kao i pri međuindukciji magnetski tok stvoren u zraku (μ = konst.), bit će R_m konstantan, pa će onda biti konstantni također koeficijenti L i M.



Sl. 62. Promjena jakosti struje u primarnom svitku inducira napon u sekundarnom svitku

Koeficijenti L i M mjere se istom jedinicom, u SI ona se zove *henri* (H). Svitak ima induktivnost 1 H ako se pri linearnoj promjeni jakosti struje za iznos 1 A u toku 1 s inducira u svitku napon 1 V. Dimenzije jedinice henri dobiju se iz jednadžbe:

$$[L] = [M] = [E]\cdot[t]/[I].$$

Prema tome je

$$[H] = \frac{Vs}{A} = \Omega s.$$

Iz relacije $L_1 L_2 = \frac{N_1^2}{R_m}\cdot\frac{N_2^2}{R_m} = \left(\frac{N_1 N_2}{R_m}\right)^2 = M^2$ slijedi da se koeficijent M može prikazati jednadžbom

$$M = \sqrt{L_1 L_2},$$

koja vrijedi ako je sav proizvedeni tok primara povezan sa svim zavojima sekundara. Taj uvjet nije uvijek potpuno ispunjen jer se magnetske silnice rasipavaju uslijed toga što je i sav prostor oko pojedinih svitaka vodljiv za magnetski tok. To smanjivanje koeficijenata M zbog slabije magnetske povezanosti primara i sekundara uzima se u obzir uvođenjem faktora magnetske veze k:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}.$$

$k = 1$ za idealno potpuno magnetsko vezanje. $k < 1$ za nepotpunu magnetsku povezanost.

Induktivnost L može se za različito oblikovane svitke i bilo za kakve strujne konture izračunati ako je za njih moguće odrediti pri struji I vrijednost ukupnog ulančanog toka Ψ, jer je onda

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Sigma N\Phi}{I}.$$

Pri tom je velika poteškoća baš u tome što silnice magnetskog toka Φ obuhvaćaju zavoje svitaka u svim mogućim zatvorenim linijama, pa je gotovo nemoguće odrediti točnu vrijednost Ψ. Za praktične svrhe moguće je ipak približno točno odrediti induktivnost L nekih svitaka ako se uvaže određene pretpostavke.

Za *jednoslojni svitak* u zraku kojemu je duljina l znatno veća od promjera d može se upotrijebiti jednadžba (39) torusnog svitka. Uvrštenjem tog izraza za Φ u jednadžbu (52) $L = \Phi N/I$ dobije se

$$L = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu}\frac{l}{S}} = \frac{N^2}{l}S\mu_0.$$

Uvede li se u tu jednadžbu tzv. Nagaokin faktor k (i ujedno oznaka $N_1 = N/l$ za broj zavoja po jedinici duljine svitka) dobiva se jednadžba $L = k N_1 2 l S \mu_0$, s pomoću koje se može izračunati induktivnost i kraćih svitaka, jer faktor ovisi o omjeru d/l. Npr., za $d/l = 0{,}1$, $k = 0{,}959$, za $d/l = 0{,}5$, $k = 0{,}818$, za $d/l = 1$, $k = 0{,}688$, a za $d/l = 10$, $k = 0{,}203$.

Za *dugi dvožični vod* koji sačinjava zatvoreni krug i koji služi za prijenos električne energije od izvora do trošila može se odrediti induktivnost L ako se prethodno odredi tok što ga obuhvaća kontura strujnog kruga, koji je ovdje u biti jedan zavoj, $\Psi = \Phi$. Uz pretpostavku da je razmak vodiča d znatno veći od njegova radijusa r, dobije se da je za zračni vod induktivnost po jedinici duljine dalekovoda

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{4\pi}\left(4\ln\frac{d}{r} + 1\right).$$

Za koaksijalne kabele izračunava se na analogan način induktivnost po jedinici duljine

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\left(4\ln\frac{r_1}{r_0} + 1\right).$$

Serijski i paralelni spoj svitaka. Ako je u strujnom krugu spojeno više svitaka u seriji, njihova je rezultantna induktivnost jednaka sumi svih pojedinih induktivnosti:

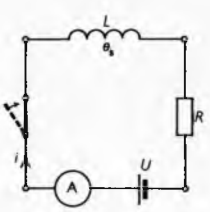
$$L = L_1 + L_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} L_i.$$

Pri paralelnom spajanju više svitaka jednadžba rezultantne induktivnosti glasi:

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}.$$

Ovdje su, dakako, uzete u račun samo vlastite induktivnosti uz pretpostavku da između pojedinih svitaka nema međuinduktivne veze. Ako među svicima postoji međuinduktivna veza, treba osim napona samoindukcije uračunati i napone međuindukcije.

Priključak svitka na izvor istosmjernog napona. Ako se svitak priključi na izvor konstantnog istosmjernog napona U (sl. 63), struja je u prvom trenutku još jednaka nuli i tek će postepenim porastom postići konačnu stacionarnu vrijednost I što je određuje Ohmov zakon prema naponu izvora i omskom otporu R svitka: $I = U/R$. U tom prijelaznom vremenu struja je promjenljiva (označuje se slovom i). Tome je uzrok da se u strujnom krugu osim napona izvora U pojavljuje prema (51) još i napon samoindukcije $e_s = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.



Sl. 63. Priključak svitka induktiviteta L na izvor konstantnog napona

Prema drugom Kirchhoffovom zakonu u svakom trenutku je suma napona strujnog kruga jednaka padu napona u otporu, pa je

$$U + e_s = iR \qquad \text{ili} \qquad U - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR.$$

Da bi se iz te jednadžbe odredila struja $i = f(t)$, jednadžba se piše u obliku

$$\frac{U}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i.$$

Uvede li se supstitucija $U/R = I$ i stavi za $L/R = \tau$, dobije se diferencijalna jednadžba

$$I - i = \tau \frac{di}{dt},$$

koja integrirana daje izraz za struju i

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}).$$

Pri tome je $\tau = L/R$ vremenska konstanta.

Jakost struje postepeno raste po eksponencijalnom zakonu i teoretski postiže konačnu vrijednost $I = U/R$ tek nakon vremena $t = \infty$, kad je $i = I(1 - 0) = I$. Praktički se konačna vrijednost postiže već nakon $t = 5\tau$, jer je onda $i = 99{,}3\%$ od I. Tok porasta jakosti struje prikazuje sl. 64. Nakon uklapanja struja postiže poslije vremena $t = \tau$ vrijednost

$$i = I\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}638\, I.$$

I pri prekidanju struje koja je prolazila kroz svitak javlja se utjecaj induciranog napona, jer se struja od konstantne vrijednosti $I = U/R$ tek postepeno smanjuje na vrijednost nula. Jednadžba napona za taj slučaj glasi:

$$0 = iR + L\frac{di}{dt},$$

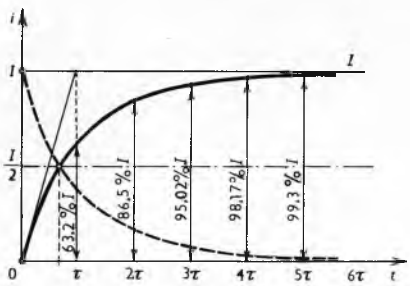
a supstitucijom $R/L = \tau$ dobije se diferencijalna jednadžba

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{\tau}$$

koja integrirana daje za struju i izraz:

$$i = I e^{-t/\tau}.$$

Struja se, dakle, na vrijednost nula, od konačnog prekida, smanjuje eksponencijalno, što je prikazano crtkano na sl. 64. I ovdje



Sl. 64. Eksponencijalni porast struje pri priključku svitka na izvor konstantnog napona (puna krivulja) i eksponencijalno opadanje struje (crtkana linija) pri isključenju

se konačno stanje $I = 0$ teoretski dobije tek za $t = \infty$, no praktički je to postignuto već nakon $t = 5\,\tau$.

Prisustvo induktivnosti L u strujnim krugovima očituje se time što struja pri svakoj promjeni nastoji zadržati prvobitnu vrijednost, pa induktivnost u strujnim krugovima djeluje slično tromoj masi u mehaničkim uređajima.

Sile u magnetskom polju. Za razliku od električnog polja, koje na električne naboje djeluje silom i ako oni miruju, magnetsko polje djeluje silom na električne naboje tek ako se ti naboji gibaju. To znači da će općenito u magnetskom polju na vodič kroz koji protječe struja djelovati sila. Najjednostavnija jednadžba za izračunavanje te sile dobije se za slučaj vodiča duljine l koji je smješten okomito na silnice magnetskog polja gustoće B i kroz koji protječe struja I. Tada je sila

$$F = I\, l\, B. \tag{53}$$

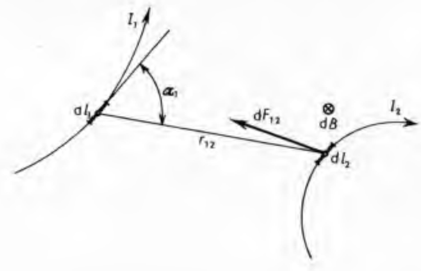
Smjer sile određuje se u tom slučaju *pravilom lijeve ruke* koje glasi ovako: postavi li se lijeva ruka tako da magnetske silnice udaraju u dlan, a ispruženi prsti pokazuju smjer struje, ispruženi palac pokazuje smjer sile (v. *Električni strojevi*, TE 4, str. 154). U tom najprikladnijem slučaju smjerovi F, l i B jedan su na drugi okomiti, pa se jednadžba (53) može napisati vektorski

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}). \tag{54}$$

Jednadžba (54) može se u diferencijalnom obliku primijeniti posve općenito na element vodiča dl kroz koji protječe struja i koji se nalazi u magnetskom polju s gustoćom toka B:

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Elektrodinamičko djelovanje. Budući da je magnetsko polje na mjestu gdje se nalazi element duljine vodiča dl stvoreno od neke struje koja protječe tim elementom, može se umjesto B u prethodnu jednadžbu uvrstiti izraz kojim je određena veličina dB kao posljedica elemenata struje $I_1\, dl_1$. To je prikazano na sl. 65. Sila dF_{12} je predočena kao posljedica djelovanja elementa



Sl. 65. Sila kojom elementi struja I_1 i I_2 djeluju jedan na drugog

struje $I_1\, dl_1$ na element struje $I_2\, dl_2$. Primjenjujući Biot-Savartov zakon (jedn. 45) za proračun magnetske gustoće, dobije se konačno jednadžba koja za element sile kao vektorski produkt daje iznos i smjer sile:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{1}{r_{12}^2} \cdot \left[d\vec{l}_2 \times \left(d\vec{l} \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \right) \right]. \tag{55}$$

Budući da struje uvijek teku u zatvorenim strujnim krugovima, za određivanje ukupne sile F_{12} treba sve elemente dF_{12} sumirati, i to vektorski.

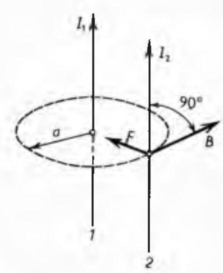
Izvedena jednadžba (55) zove se *Ampèreov zakon*, a djelovanje dviju struja jedne na drugu zove se *elektrodinamičko djelovanje.*

Ako kroz dva veoma tanka i veoma duga paralelna vodiča *1* i *2* (sl. 66) protječu struje I_1 i I_2, može se jednostavno izračunati sila kojom jedan djeluje na drugi. Jakost polja na mjestu drugog vodiča dobije se iz zakona protjecanja (43) $H\, dl = I_1$, pa je prema slici

$$H = \frac{I_1}{2a\pi}, \quad \text{a} \quad B = \mu_0 \frac{I_1}{2a\pi}.$$

Sila kojom djeluje vodič 1 na vodič 2 kroz koji protječe struja I_2 na duljini l_2, bit će prema (53)

$$F = I_2 l_2 B = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2a} l_2.$$



Sl. 66. Elektrodinamičko djelovanje dviju struja

Uz $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ sila iznosi $F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{a}$ N (njutna) za jedinicu duljine $l_2 = 1$. Pri tome je sila takvog smjera da se paralelne struje privlače, a antiparalelne odbijaju. Na osnovi već izvedenih jednadžbi definira se u SI jedinica amper (A) kako je iznijeto na str. 114.

Sila kojom magnetsko polje djeluje na električne naboje u gibanju. Djelovanje magnetske sile na vodič kroz koji protječe struja u biti je djelovanje sile na električne naboje u gibanju. Ako se u jednadžbi (53) za silu uvrsti $I = Q/t$, može se sila prikazati u obliku $F = Q\, l\, B/t = Q\, v\, B$, jer je $l/t = v$, brzina kojom se naboj Q giba u vodiču. Ta se sila može prikazati kao vektorski produkt

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

pri čemu se polazilo od struje I kao da se gibaju pozitivni naboji Q. Na negativne naboje u gibanju djeluje sila

$$\vec{F} = -Q(\vec{v} \times \vec{B}) = Q(\vec{B} \times \vec{v}).$$

Energija magnetskog polja. Kad se torusni svitak (v. sl. 53) priključi na izvor konstantnog istosmjernog napona U, predat će se u toku vremena dt od izvora u strujni krug energija dW_1, koja je jednaka $U\, i\, dt$. Budući da je u svakom trenutku suma napona izvora i napona samoindukcije jednaka padu napona na omskom otporu svitka, $U + e_s = i\, R$, može se u energetsku jednadžbu uvrstiti $U = i\, R - e_s$ i time dobiti izraz

$$dW_1 = i^2 R\, dt - e_s\, i\, dt.$$

Za inducirani napon e_s može se supstituirati izraz (46), $e = -N\frac{d\Phi}{dt}$ ili izraz (51) $e_s = -L\frac{di}{dt}$. U prvom slučaju prednja jednadžba dobiva oblik:

$$dW_i = i^2 R\,dt + N\,i\,d\Phi.$$

Budući da je $N\,i = H\,l$, a $d\Phi = S\,dB$, bit će za neko konačno vrijeme t predana energija W_i jednaka:

$$W_i = \int_0^t i^2 R\,dt + lS\int_0^B H\,dB. \qquad (56)$$

Vidi se da se energija izvora troši jednim dijelom $i^2 R\,dt = Q$ za stvaranje topline u otporu R, a drugi se dio $lS\int_0^B H\,dB$ predaje svitku u čijem je volumenu $V = l/S$ stvoreno magnetsko polje gustoće B. Taj je dio dakle energija magnetskog polja cijelog volumena:

$$W_m = V\cdot\int_0^B H\,dB.$$

Na jedinicu volumena otpada, dakle, jer je polje u torusu homogeno, energija $W_m/V = w_m$, a ta se količina energije može prikazati u više ekvivalentnih oblika:

$$w_m = \int_0^B H\,dB = \int_0^B \frac{B\,dB}{\mu} = \int_0^H \mu H\,dH.$$

Ako je μ konstantno, npr. u vakuumu ili u zraku jednako μ_0, onda je

$$w_m = \mu_0\frac{H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2}.$$

Budući da se veličine B i H odnose na pojedine točke u magnetskom polju, mogu se ove jednadžbe iskoristiti i za nehomogena polja, jer je u tom slučaju $dW_m = w_m\,dV$, a za cijeli volumen je

$$w_m = \int_V w_m\,dV = \int_V\int_0^B H\,dB\,dV.$$

Primjenom drugog izraza (51) za napon samoindukcije $e_s = -L\frac{di}{dt}$, dobije se iz (56):

$$W_i = \int_0^t i^2 R\,dt + \int_0^t L\,i\,di.$$

Magnetska energija, dakle, iznosi $W_m = L\,i\,di$, a uz L = konst., ona je $W_m = L\,I^2/2$, što se može prikazati također u više oblika:

$$W_m = \frac{L\,I^2}{2} = \frac{\Psi I}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Energija sustava svitaka može se izračunati ako se uzme u obzir i njihova međusobna magnetska povezanost. Tako je za dva svitka u njihovom magnetskom polju ukupna energija:

$$W_m = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2,$$

što se može preoblikovati u jednadžbu

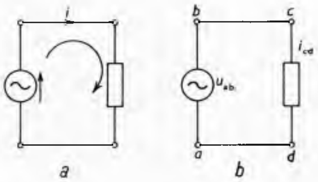
$$W_m = \frac{I_1\Psi_1}{2} + \frac{I_2\Psi_2}{2},$$

ili, općenito za n magnetski povezanih svitaka:

$$W_m = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \Psi_k.$$

Izmjenična struja

Veliku primjenu u elektrotehnici imaju osim konstantne istosmjerne struje i vremenski promjenljive struje kojima se mijenja ne samo jakost nego i smjer strujanja. Te se struje predočuju grafički vremenskim dijagramom (i, t), gdje za svaki trenutak vremena, predočen točkom na osi apscisa, ordinata daje podatak o jakosti struje (v. npr. na sl. 68 a). Da bi se označila razlika u smjeru strujanja, u strujnom se krugu odabere po volji jedan smjer kao pozitivan; suprotni je smjer onda negativan.



Sl. 67. Označavanje smjera strujanja: *a* strelicama, *b* indeksima

U spojnoj shemi (sl. 67 a) može se ucrtanom kružnom strelicom naznačiti koji je smjer odabran kao pozitivan; taj se smjer naziva *referentni smjer*. Strelicom na vodiču u spojnoj se shemi označava smjer struje, a strelicom uz izvor napona ili uz element strujnog kruga označuje se smjer napona, odnosno elektromotorne sile, koji se smatra pozitivnim. Ako su pojedine točke strujnog kruga imenovane, onda se umjesto strelicom može referentni smjer izmjenične (promjenljive) veličine označiti i dvostrukim indeksom. Na sl. 67 b promjenljiva je struja potpuno definirana oznakom i_{cd}, a napon oznakom u_{ab}, jer to znači da struja ima pozitivni predznak ako prolazi u smjeru od c prema d, a napon ako djeluje od a prema b.

Periodički promjenljive struje. U analizi strujnih krugova i u matematičkim proračunima predočene su vremenski promjenljive struje i naponi odgovarajućim jednadžbama

$$i = i(t); \quad e = e(t); \quad u = u(t).$$

Od sviju mogućih promjenjivih struja osobitu važnost u teoriji i primjeni imaju periodički promjenljive struje, tj. one kojih se promjene nakon vremena T stalno ponavljaju. Vrijeme T zove se trajanje jedne periode ili, kratko, jedna *perioda*. Za takve periodičke veličine vrijedi odnos:

$$i(t + nT) = i(t),$$

gdje je n cijeli broj.

Periodički promjenljive veličine kojih su promjene slične promjenama trigonometrijske funkcije sinus nazivaju se općenito harmoničkim veličinama, a u elektrotehnici takvi se sinusoidno promjenljivi naponi i struje nazivaju *izmjeničnim*.

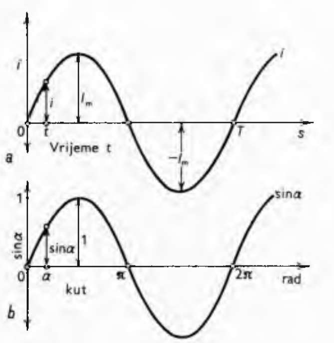
Promjenljivost izmjeničnih struja i napona označava se trajanjem jedne periode T, odnosno frekvencijom f, tj. brojem perioda u jedinici vremena. Jedinica SI za frekvenciju je *herc* (Hz): jedan herc odgovara jednoj periodi u sekundi (Hz = s^{-1}). Ako je npr. trajanje T jedne periode 1/50 sekunde, struja u 1 sekundi izvrši 50 ciklusa promjena ili 50 perioda, pa je f = 50 Hz. Vidi se da je:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{i} \quad T = \frac{1}{f},$$

gdje se f izražava u s^{-1}, a T u s.

Trenutna jakost izmjenične struje i mijenja se tokom vremena t između nule i svoje pozitivne, odnosno negativne maksimalne vrijednosti I_m (sl. 68 a), slično kao što se s promjenom kuta α mijenja vrijednost sinusa kuta α (sl. 68 b), pa je $i : \sin\alpha = I_m : 1$. Odavde slijedi analitički izraz za struju: $i = I_m \sin\alpha$. Budući da je struja funkcija vremena, treba umjesto kuta α supstituirati odgovarajuću vrijednost vremena t. To slijedi iz odnosa $\alpha : t = 2\pi : T$ pa je

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}t = 2\pi f t.$$



Sl. 68. Trenutna vrijednost izmjenične struje s obzirom na vrijeme (*a*) mijenja se na isti način kao trigonometrijska funkcija sin α u ovisnosti o kutu α (*b*)

Pri konstantnoj frekvenciji ima $2\pi f$ konstantnu vrijednost. Taj koeficijent, koji se označava grčkim slovom ω, zove se *kružna frekvencija*, kutna frekvencija, pulzacija ili rotancija i ima jedinicu radijan u sekundi (rad s^{-1}). Piše se, dakle:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T; \quad \alpha = \omega t. \qquad (57)$$

Analitički izraz sinusoidno promjenljive struje dan je, dakle, jednadžbom

$$i = I_m \sin\omega t, \qquad (58)$$

gdje I_m znači *maksimalnu vrijednost*, tjemenu vrijednost ili amplitudu struje. Ponekad se za obilježavanje maksimalne vrijednosti struje ili napona primjenjuju i oznake $\hat{I}$ i $\hat{U}$.

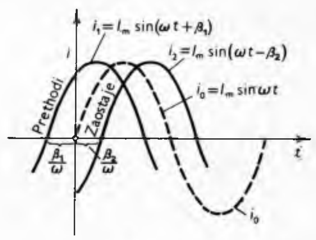
Kružna frekvencija ω služi za pretvaranje argumenata jednadžbe (58), tj. vremena t, u odgovarajući kut α za koji treba izračunati vrijednost sinusa. Vremenu t odgovara prema (57) kut $\alpha = \omega t$, pa je moguće kao varijablu umjesto vremena u računima uzeti i kut α, pri čemu je onda svakom kutu α pridruženo odgovarajuće vrijeme: $t = \alpha/\omega = \alpha/2\pi f$.

Prikazuje li sinusoida izmjenični napon, odnosno izmjeničnu elektromotornu silu, njihove jednadžbe analogno glase:

$$u = U_m \sin \omega t, \qquad \text{odnosno} \qquad e = E_m \sin \omega t.$$

Na sl. 69 prikazana je točkastom linijom sinusoidna struja kojoj vrijednosti rastu u vrijeme $t = 0$ od nule u pozitivnom smislu, a njena je jednadžba $i_0 = I_m \sin \omega t$. Ako se struja i_0 smatra referentnom, puno izvučena sinusoida struje i_1 imat će u vrijeme $t = 0$ već neku pozitivnu vrijednost i za nju se kaže da prethodi referentnoj struji i_0; njezina jednadžba glasi:

$$i_1 = I_m \sin(\omega t + \beta_1).$$



Sl. 69. Struja i_1 prethodi za fazni kut $+\beta_1$ referentnoj struji i_0 (crtkano), dok struja i_2 za njome zaostaje za kut $-\beta_2$

Ako sinusoida struje i_2 u vrijeme $t = 0$ ima još neku negativnu vrijednost, kaže se da ona zaostaje za referentnom strujom i_0, a njezina jednadžba glasi:

$$i_2 = I_m \sin(\omega t + \beta_2).$$

Struja i_1 prethodi referentnoj struji i_0 za vrijeme β_1/ω, odnosno za kut β_1, koji se zove *fazni kut*. Obratno, struja i_2 zaostaje za vrijeme β_2/ω, odnosno za fazni kut β_2.

Općenito, ako sinusoida promatrane veličine postiže svoj maksimum prije referentne veličine, tj. ako njoj prethodi, njezin fazni kut ima pozitivan predznak. Obratno, ako ona zaostaje za referentnom veličinom, predznak faznog kuta je negativan.

Ako su dvije izmjenične struje iste frekvencije zadane jednadžbama

$$i_1 = I_m \sin(\omega t + \beta_1),$$
$$i_2 = I_m \sin(\omega t + \beta_2),$$

njihove su sinusoide jedna prema drugoj pomaknute; taj se pomak može prikazati razlikom njihovih faznih kutova:

$$\gamma = \beta_2 - \beta_1$$

ili odgovarajućim vremenom: $t = \gamma/\omega$. Kut γ zove se *kut faznog pomaka* između obiju sinusoidnih struja.

Ako se radi o izmjeničnom naponu i izmjeničnoj struji iste frekvencije, koje su predočene dvjema pomaknutim sinusoidnim krivuljama

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta_u), \qquad i = I_m \sin(\omega t + \beta_i),$$

običaj je da se kut faznog pomaka označi grčkim slovom φ:

$$\varphi = \beta_u - \beta_i.$$

Za dvije sinusoidne veličine iste frekvencije koje istovremeno postižu iste karakteristične trenutne vrijednosti (nultočku i amplitudu) kaže se da su *u fazi* ili da među njima nema faznog pomaka, $\varphi = 0$.

Zakoni izmjenične struje. Osnovni teoremi kojima su se određivale strujne i naponske prilike u strujnim krugovima istosmjerne struje i zakoni o učincima električne struje vrijede u biti i za izmjeničnu struju jer su to zakoni proporcionalnosti koji vrijede i kad se promatraju trenutne ili određene srednje vrijednosti strujâ i naponâ. No, budući da su tokom konačnog vremena t pri izmjeničnoj struji naponi i struje promjenljive veličine, ovi će zakoni vrijediti samo ako se promatra infinitezimalno vrijeme dt, jer se u tako kratkom vremenskom intervalu može pretpostaviti da se te veličine ne mijenjaju.

Osnovni zakoni vrijede, dakle, i za izmjenične strujne krugove ako se primijene na trenutne vrijednosti, samo tu treba još uzeti u obzir dodatne pojave zbog promjenljivosti naponâ i strujâ kojih nije bilo pri konstantnoj istosmjernoj struji i naponu. Te dodatne pojave uzrokovane su promjenljivim elektromagnetskim poljem, jer promjenljivo magnetsko polje inducira u svicima uvrštenim u strujni krug dodatne napone samoindukcije, a promjenljivo električno polje u dielektriku kondenzatora dodatne struje dielektričnog pomaka. I osnovni se učinci moraju prvotno računati za diferencijal vremena, a za neko konačno vrijeme treba diferencijale učinaka integrirati.

Frekvencije izmjeničnih struja. U pojedinim granama elektrotehnike primjenjuju se izmjenične struje različitih frekvencija: za pogon električnih željezničkih lokomotiva $16\frac{2}{3}$ i 25 Hz, u električnim (jakostrujnim) mrežama za rasvjetu i snagu (42), 50, 60 (i 400) Hz, u elektroakustičnim uređajima 16 Hz do 20 kHz, u ultrazvučnim uređajima 20 kHz do 1 MHz, u radio-uređajima, radarskim i sličnim uređajima od 10 kHz do 300 GHz.

Sredine veličinâ izmjenične struje. Pokazalo se da bi bilo veoma korisno sve električne, a i energetske veličine u strujnim krugovima izmjenične struje, koje su po prirodi same pojave promjenljive, okarakterizirati u pogledu njihovog cjelokupnog djelovanja po jednom sredinom (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 375). Te se sredine razlikuju prema tome u kojoj potenciji promatrana veličina dolazi do izražaja pri svom djelovanju.

Srednja vrijednost zove se aritmetička sredina izmjenične veličine u toku jedne poluperiode

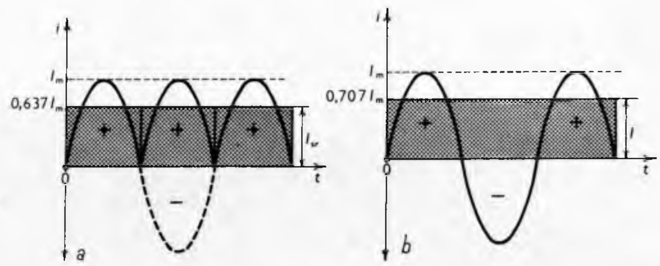
$$A_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} a \, dt. \tag{59}$$

Srednja vrijednost struje odgovara onoj istosmjernoj struji koja ima isto elektrolitsko djelovanje (koja bi u toku jedne poluperiode taložila istu masu materijala iz otopine elektrolita) kao promatrana izmjenična struja.

Budući da je srednja vrijednost sinusoidne struje za vrijeme jedne cijele periode (ili cijelog broja njih) jednaka nuli, $I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = 0$, izmjenična se struja ne može direktno upotrijebiti za elektrolizu. Ipak je moguće u tu svrhu iskoristiti energiju izmjenične struje ako se pomoću ispravljača izmjenična struja pretvori u istosmjerne impulse (sl. 70a). Pri ispravljenoj izmjeničnoj struji sve su polovice sinusoide pozitivne, pa je aritmetska sredina u svakoj poluperiodi pozitivna i prema tome srednja vrijednost takve struje uopće, jednaka srednjoj vrijednosti u jednoj poluperiodi:

$$I_{sr} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 \, I_m.$$

Srednje vrijednosti označavaju se ponekad simbolom veličine s crticom iznad njega, npr. $\bar{I}$, $\bar{U}$.



Sl. 70. Prosječne vrijednosti izmjenične struje. *a* Srednja vrijednost ispravljene izmjenične struje, *b* efektivna vrijednost

Efektivna vrijednost (sl. 70 b). Toplinski, a i elektrodinamički učinak, efekt ili snaga električne struje ovise o kvadratu jakosti struje (I^2), pa se u tom slučaju kao sredina tih veličina izmjenične struje uzima kvadratna sredina, koja je, npr. za struju, matematički definirana izrazom:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt}. \tag{60}$$

Ta se sredina zove *efektivna vrijednost* dotične veličine.

Efektivne vrijednosti struje i napona označavaju se u formulama obično samo velikim slovom (U, I). Samo u slučaju kad se želi naročito istaći da se radi o efektivnoj vrijednosti stavlja se uz slovo i indeks (U_{ef}, I_{ef}). Uvrštenjem izraza (58) $i = I_m \sin \omega t$ u izraz (60), dobije se da je efektivna vrijednost izmjenične struje:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m .$$

Analogni su izrazi za efektivnu vrijednost napona:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, U_m \quad \text{i} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 E_m . \tag{61}$$

Instrumenti za mjerenje izmjeničnih struja i napona (voltmetri i ampermetri) pokazuju efektivne vrijednosti, jer je sila koja otklanja kazaljku instrumenta dobivena na osnovi toplinskog ili elektrodinamičkog učinka (v. *Električna mjerenja*, TE 3, str. 590).

Obrnuto, mogu se na osnovi poznatih efektivnih vrijednosti odrediti maksimalne (tjemene) vrijednosti struje, napona i elektromotorne sile:

$$I_m = \sqrt{2}\, I \qquad U_m = \sqrt{2}\, U \qquad E_m = \sqrt{2}\, E . \tag{62}$$

Kvocijent $I_m/I = U_m/U = E_m/E = \sigma$ zove se *tjemeni faktor*. Za sinusoidnu struju on iznosi, kako izlazi iz (62), $\sqrt{2} = 1{,}414$.

Efektivna vrijednost dobiva se iz srednje vrijednosti pomoću tzv. *faktora oblika*:

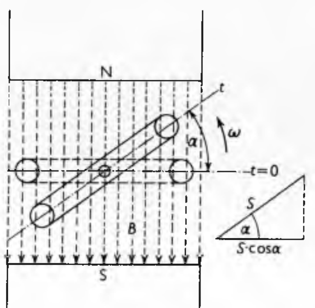
$$\xi = \frac{I}{I_{sr}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 . \tag{63}$$

Srednja vrijednost dobiva se iz maksimalne pomoću tzv. *srednjeg faktora* ζ:

$$\zeta = \frac{I_{sr}}{I_m} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637 .$$

Navedene vrijednosti faktorâ za pretvaranje jedne prosječne vrijednosti struje ili napona u drugu, σ, ξ i ζ vrijede samo za sinusoidni oblik struje. Za druge oblike periodične struje ti faktori imaju druge vrijednosti, npr. za pravokutni valni oblik je $\xi = 1$.

Izračunavanje induciranog napona. Za stvaranje sinusoidnih napona tehničkih frekvencija (50, odn. 60 Hz) primjenjuju se jednofazni ili višefazni generatori izmjenične struje koji rade na osnovi pojave elektromagnetske indukcije. Na sl. 71 shematski je prikazan rad takvih generatora. Svitak sa N navoja rotira jednoličnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju indukcije (gustoće) B.



Sl. 71. Shematski prikaz rada generatora izmjenične struje u kome svitak rotira u homogenom polju

Primjenom Faradayjevog zakona (48) može se izračunati inducirani napon

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} .$$

Iz slike se vidi da je maksimalni magnetski tok što ga svitak obuhvaća jednak $\Phi_0 = S\,B$. Zbog rotacije se obuhvaćeni tok tokom vremena harmonički mijenja i općenito je jednak

$$\Phi = B\,S \cos \alpha = \Phi_0 \cos \alpha = \Phi_0 \cos \omega t ,$$

pa je

$$e = N \frac{d}{dt} (\Phi_0 \cos \omega t) = N \omega \Phi_0 \sin \omega t .$$

Uz supstituciju $N\omega\Phi_0 = E_m$ dobiva se jednadžba iz koje se vidi također da je inducirani napon doista sinusoidan:

$$e = E_m \sin \omega t .$$

Primjenom međusobnih odnosa sredinâ (izraz 61) može se za sinusoidno inducirani napon u rotirajućem svitku iz dobivene maksimalne vrijednosti odrediti efektivna vrijednost:

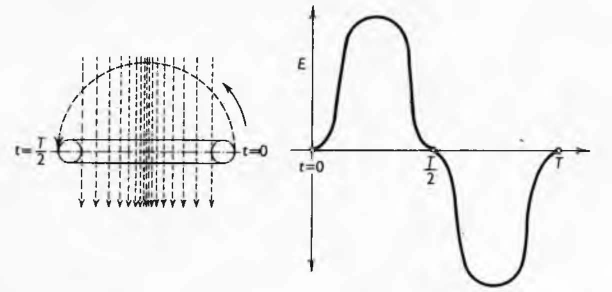
$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} N\Phi_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_0, \quad E = 4{,}44 f N \Phi_0 . \tag{64}$$

Dobivena jednadžba za izračunavanje efektivne vrijednosti induciranog sinusoidnog napona vrijedi ne samo ako se harmonička promjena magnetskog toka postiže rotacijom svitka nego također ako je napon dobiven na principu međuindukcije (v. str. 129). Pri tome sinusoidni inducirani napon vremenski fazno zaostaje iza magnetskog toka za 1/4 periode (tj. za 90°). Matematički je to izraženo time što je promjena magnetskog toka dana funkcijom kosinus, a inducirani napon funkcijom sinus.

Uvođenjem faktora oblika ξ efektivna se vrijednost induciranog napona E može prema (63 i 64) izraziti i ovako:

$$E = \xi \cdot 4 f N \Phi_0 .$$

Prednja jednadžba ima općenitije značenje, jer se može uz primjenu odgovarajućeg faktora ξ primijeniti za izračunavanje efektivnih vrijednosti induciranih napona kad polje nije homogeno i kad oblik napona nije sinusoidan (sl. 72).

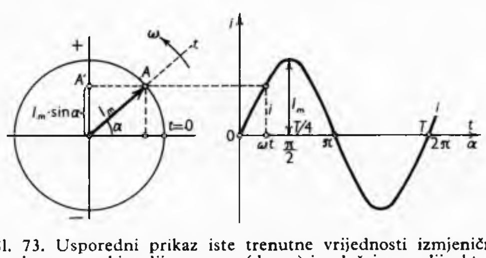


Sl. 72. Inducirani napon u svitku koji rotira u nehomogenom polju. *a* Prikaz svitka u polju, *b* vremenski dijagram induciranog napona

Simbolične metode prikazivanja izmjeničnih veličina. Izmjenične struje i naponi harmonički su promjenljive veličine, pa je razumljivo da se kao sinusoidne funkcije vremena predočuju analitičkim jednadžbama i pripadnim vremenskim dijagramima. Osim takvih načina prikazivanja mogu se izmjenične veličine prikazati i rotirajućim dvodimenzijskim radijvektorima (tzv. fazorima, kazaljkama ili, kratko, vektorima) ili kompleksnim brojevima.

Prikazivanje pomoću radijvektorâ. Ta simbolička metoda tretiranja izmjeničnih struja kružne frekvencije $\omega = 2\pi f$ osniva se na činjenici da je prema sl. 73 projekcija na vertikalnu os radijvektora duljine I_m koji rotira kutnom brzinom ω jednaka $I_m \sin \alpha$.

Ako je u vrijeme $t = 0$ radijvektor u horizontalnom položaju, bit će nakon vremena t opisani kut α jednak ωt, pa je projekcija $OA' = I_m \sin \omega t$, što je upravo trenutna vrijednost struje: $i = I_m \sin \omega t$. Ako je u isto vrijeme t radijvektor U_m prema radijvektoru I_m pomaknut za kut β u pozitivnom smjeru vrtnje, njegova je projekcija pri rotaciji istom kutnom brzinom u vrijeme t: $u = U_m \sin(\alpha + \beta) = U_m \sin(\omega t + \beta)$. To znači da su sinusoidna struja i napon jedno prema drugom fazno pomaknuti za kut β, kome odgovara vremenska fazna razlika $t' = \beta/\omega$. U toj se simboličkoj metodi prikazivanja vremenska fazna razlika pri rotirajućim vektorima pokazuje kao odgovarajući kut.



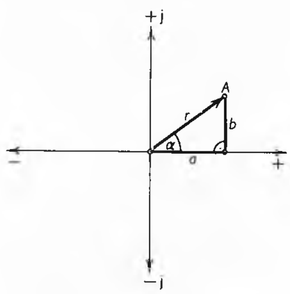
Sl. 73. Usporedni prikaz iste trenutne vrijednosti izmjenične struje vremenskim dijagramom (desno) i položajem radijvektora (lijevo)

Budući da je pri analizi mreža izmjenične struje, kao i pri energetskim proračunima, najčešće dovoljno znati samo efektivne vrijednosti struja i napona i njihove fazne pomake, to pri ovoj simboličkoj metodi nije ni potrebno da radijvektori rotiraju (jer nisu interesantne trenutne vrijednosti), nego se promatraju mirujući radijvektori, a njihove se duljine uzimaju smanjene ($I_m/\sqrt{2}$ i $U_m/\sqrt{2}$) da bi se predočile odmah efektivne vrijednosti.

Pri crtanju takvih vektorskih dijagrama od više napona i struja uzima se jedna veličina kao početna i njezin se vektor postavi ili u horizontalni ili u vertikalni položaj i prema njemu se crtaju vektori ostalih veličina s njihovim odgovarajućim faznim pomacima (v. npr. sl. 93).

Radijvektori (fazori, kazaljke) označeni su u ovom članku podcrtanim velikim slovom, npr. $\underline{U}$.

Izražavanje radijvektorâ kompleksnim brojevima. Radijvektori (fazori) su dvodimenzijske, tj. u ravnini usmjerene veličine, pa se stoga mogu izraziti i kompleksnim brojevima. Ti se brojevi sastoje od realnog dijela i imaginarnog dijela koji sadrži faktor $\sqrt{-1}$ (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 375). U matematici se za taj faktor primjenjuje slovčani simboli. Da u elektrotehnici ne bi došlo do zamjene sa simbolom za trenutnu vrijednost struje, umjesto njega upotrebljava se simbol j (j $= \sqrt{-1}$). Množenje sa +j znači zakretanje vektora za 90° u smislu prethodnje, a množenje sa −j zakretanje za 90° u smislu zaostajanja.



Sl. 74. Radijvektor u kompleksnoj ravnini

Svaki se kompleksni broj može predstaviti točkom u Gaussovoj ravnini brojeva koju realna (apscisna) os i imaginarna (ordinatna) os dijele u 4 kvadranta (sl. 74). Ta točka predstavlja vršak (šiljak) radijvektora, prema tome određuje njegov smjer. Mjerni broj r udaljenosti od ishodišta koordinatnog sistema (i radijvektora) do te točke (A) daje apsolutnu vrijednost radijvektora (fazora) i zove se *modul*. Kut α što ga radijvektor zatvara s pozitivnim smjerom realne (apscisne) osi zove se *argument*. Primjenom kompleksnih brojeva mogu se sve geometrijske operacije zbrajanja i odbijanja, koje se vrše s vektorima, pretvoriti u algebarske operacije, što čini simboličku metodu naročito prikladnom za analizu kompliciranije sastavljenih mreža.

Radijvektori prikazuju se kompleksnim brojevima općenito na tri načina: u algebarskom ili komponentnom obliku, trigonometrijski i eksponencijalno.

Radijvektor prikazan je kompleksnim brojem *u algebarskom obliku* ovako:

$$\underline{A} = a + \mathrm{j}\, b,$$

gdje je $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$, sa $|r| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i $\alpha = \arctan\frac{b}{a}$.

S pomoću modula r i argumenta α može se kompleksni broj izraziti i *trigonometrijski*:

$$\underline{A} = r\cos\alpha + \mathrm{j}\, r\sin\alpha = r(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha).$$

Primjenom tzv. Eulerovih jednadžbi: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$ i $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha - \mathrm{j}\sin\alpha$ može se kompleksni broj izraziti i *u eksponencijalnom obliku*:

$$\underline{A} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$$

Konjugirano kompleksni oblik radijvektora $\underline{A}$ označuje se sa $\underline{A}^*$. Predznak njegovog imaginarnog dijela uvijek je suprotan predznaku imaginarnog dijela osnovnog radijvektora. Ako je $\underline{A} = a + \mathrm{j}\,b$, tada je $\underline{A}^* = a - \mathrm{j}\,b$, a ako je $\underline{A} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$, tada je $\underline{A}^* = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}$.

Rotirajući radijvektori koji reprezentiraju trenutne vrijednosti struje i i napona u u kompleksnoj ravnini predočeni su u eksponencijalnom obliku u općem slučaju ovako:

$$i_{\mathrm{kompl}} = I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha_{\mathrm{i}})} = I_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_{\mathrm{i}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$u_{\mathrm{kompl}} = U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha_{\mathrm{u}})} = U_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_{\mathrm{u}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

a ako je α_{i}, odnosno α_{u} jednako nuli, vrijedi

$$i_{\mathrm{kompl}} = I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \quad u_{\mathrm{kompl}} = U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

ω je kutna brzina rotirajućeg radijvektora ili kružna frekvencija, I_{m} i U_{m} predočuju modul (apsolutnu vrijednost) rotirajućih radijvektora u početnom položaju: $t = 0$.

Pri postavljanju jednadžbi induciranih napona i pomačnih struja dolaze vremenske derivacije i integrali harmoničkih funkcija. Deriviranje i integriranje eksponencijalnih funkcija vrše se prema ovim pravilima:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{j}\,\omega A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\,\omega\underline{A},$$

odnosno

$$\int \underline{A}\,\mathrm{d}t = \int A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{A}{\mathrm{j}\,\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\underline{A}.$$

Efektivne vrijednosti s kojima se redovno analizira mreža predočene su mirujućim radijvektorima, i to je radijvektor struje $\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_{\mathrm{i}}}$, a radijvektor napona: $\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_{\mathrm{u}}}$, pri čemu je kut faznog pomaka među vektorima $\underline{U}$ i $\underline{I}$ jednak

$$\varphi = \alpha_{\mathrm{u}} - \alpha_{\mathrm{i}}.$$

Pojedinačno opterećenje izvora izmjenične struje. Analiza složenijih strujnih krugova izmjenične struje može se simboličkom metodom izvršiti jednostavno ako su poznate strujne i naponske prilike za tri karakteristične veličine trošila, a to su omski otpor R, induktivnost L i kapacitivnost C. Zbog omskog otpora R električna se energija nereverzibilno transformira u toplinu; zbog induktivnosti L svitka dolazi do izražaja magnetska, a zbog kapacitivnosti C kondenzatora električna komponenta promjenljivog elektromagnetskog polja.

Omsko opterećenje izvora. Uz pretpostavku da se strujnom krugu u kome postoji samo čist omski otpor narine izmjenični napon $u = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ i da se stoga može zanemariti utjecaj elektromagnetskog polja (što znači uz pretpostavku $L = 0$ i $C = 0$), prema Ohmovom je zakonu (2) jakost struje u svakom trenutku jednaka kvocijentu napona i otpora, pa je

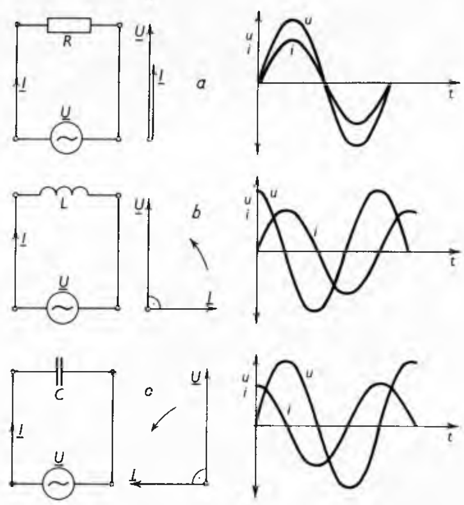
$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\mathrm{m}}\sin\omega t}{R} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\sin\omega t = I_{\mathrm{m}}\sin\omega t. \qquad (65)$$

Tu je $I_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}/R$ amplituda struje, a efektivne se vrijednosti dobiju dijeljenjem ove jednadžbe sa $\sqrt{2}$, pa je $I = U/R$, odnosno $U = I \cdot R$. Vidi se da za opterećenje omskim otporom R i pri izmjeničnoj struji vrijede formalno iste jednadžbe kao i pri istosmjernoj struji, ako su pisane za efektivne vrijednosti.

Struja i je u tom slučaju u fazi s naponom u ($\varphi = 0$), što je prikazano u vremenskom i vektorskom dijagramu (sl. 75 a), a i pripadnim jednadžbama u kompleksnom području:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}, \quad \underline{U} = \underline{I}R.$$

Ako se računa s vodljivošću $G = 1/R$, struja je: $\underline{I} = \underline{U}\,G$.



Sl. 75. Omsko (*a*), induktivno (*b*) i kapacitivno opterećenje (*c*) izvora izmjenične struje. Za sva tri slučaja prikazani su: spojna shema (lijevo) vektorski dijagram (u sredini) i vremenski dijagram (desno)

Induktivno opterećenje izvora. Ako je na izvor izmjeničnog napona $u = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ priključen samo svitak induktivnosti L (sl. 75 b), a uz pretpostavku da je otpor $R = 0$ i kapacitivnost $C = 0$, promjenljiva struja i inducira prema (51) u svitku napon samoindukcije $e_{\mathrm{s}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, pa jednadžba drugog Kirchhoffovog zakona glasi: $u + e_{\mathrm{s}} = 0$, odakle slijedi

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t,$$

i dalje

$$i = \frac{U_{\mathrm{m}}}{L}\int\sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{U_{\mathrm{m}}}{\omega L}\cos\omega t,$$

pa konačno:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - 90°) = I_m \sin(\omega t - 90°). \quad (66)$$

Struja je, dakle, sinusoidna, iste frekvencije kao i napon, ali vremenski fazno zaostaje iza napona za $T/4$, čemu odgovara fazni pomak od $-90°$. Amplituda struje je u izrazu (66) $I_m = U_m/\omega L$, a efektivna je vrijednost dana jednadžbom

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L}.$$

Taj izraz ima formalno oblik Ohmovog zakona, pa se $\omega L = X_L$ zove *induktivni otpor svitka*. Sl. 75 b prikazuje vremenski dijagram i pripadni vektorski dijagram za induktivno opterećenje izvora.

Odnos između radijvektorâ $\underline{U}$ i $\underline{I}$ u kompleksnom području dobiva se na osnovi jednadžbe (51): $u = -e_s = +L\frac{di}{dt}$, koja kompleksno prikazana glasi:

$$U_m e^{j\omega t} = j\,\omega L I_m e^{j\omega t},$$

a budući da u vektorskim dijagramima i pri analizi radimo s mirujućim vektorima i s efektivnim vrijednostima, treba ovu jednadžbu podijeliti sa $\sqrt{2}\,e^{j\omega t}$ pa je

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} = j X_L \underline{I} \quad \text{ili} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{j\omega L} = \frac{\underline{U}}{j X_L} = -j\frac{\underline{U}}{X_L}.$$

Uzme li se umjesto induktivnog otpora X_L *induktivna vodljivost* $B_L = 1/X_L$, radijvektor struje iznosi $\underline{I} = -j\,\underline{U} B_L$.

Kapacitivno opterećenje izvora. Priključi li se na izvor izmjeničnog napona $u = U_m \sin\omega t$ kondenzator kapacitivnosti C pojavit će se, uz pretpostavku da je $R = 0$ i $L = 0$, u dielektriku kondenzatora protok struje dielektričnog pomaka. Odnos napona i struje kondenzatora dan je jednadžbom (33) $u = \frac{1}{C}\int i\,dt$, odatle se dobije $\frac{i}{C} = \frac{d}{dt}(U_m \sin\omega t)$, pa je:

$$i = \frac{U_m}{1/\omega C} \cos\omega t = I_m \sin(\omega t + 90°).$$

Pri tome je

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C} = \frac{U_m}{X_C},$$

ili u efektivnim vrijednostima

$$I = \frac{U}{X_C},$$

gdje je: $X_C = 1/\omega C$ *kapacitivni otpor kondenzatora*. Struja u kondenzatoru prethodi naponu za $T/4$, što odgovara faznom pomaku od $+90°$. Vremenski i vektorski dijagram prikazuje sl. 75 c, a odnos struje i napona u kompleksnom području dobije se iz osnovne jednadžbe (33): $u = \frac{1}{C}\int i\,dt$. Odatle je

$$U_m e^{j\omega t} = \frac{1}{C}\frac{1}{j\omega} I_m e^{j\omega t} = -j X_C I_m e^{j\omega t}$$

a efektivne su vrijednosti:

$$\underline{I} = j\frac{\underline{U}}{X_C} \quad \text{i} \quad \underline{U} = -j\underline{I} X_C. \quad (67)$$

Upotrijebi li se za izračunavanje kapacitivne struje umjesto kapacitivnog otpora kapacitivna vodljivost $B_C = 1/X_C$, izraz (67) dobiva oblik

$$\underline{I} = j\,\underline{U} B_C.$$

Mješovito opterećenje izvora izmjenične struje. U sastavljenim strujnim krugovima pri izmjeničnoj struji mogu sva tri karakteristična otpora R, X_L i X_C (a također i X_M, v. str. 137) na različite načine biti povezana s izvorima. I ovdje će se posebno obraditi samo serijski i paralelni spojevi. Tu se za proračun struja i napona iskorišćuju jednadžbe prvog i drugog Kirchhoffovog zakona, koje se najprije postave za trenutne vrijednosti, a iz njih se za stacionarno stanje može odmah prijeći na vektorsko predočavanje, odnosno na simbolički račun.

Za serijski spoj otpora R, X_L i X_C priključenih na izvor napona $u = U_m \sin\omega t$, jednadžbe Kirchhoffovih zakona glase za trenutne vrijednosti:

$$i = i_R = i_L = i_C, \quad u = u_R + u_L + u_C.$$

Tome pripadaju ove kompleksne jednadžbe za efektivne vrijednosti struje:

$$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C,$$

i napona (sl. 76 a):

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + j\underline{I}X_L - j\underline{I}X_C = \underline{I}[R + j(X_L - X_C)] = \underline{I}(R + jX),$$

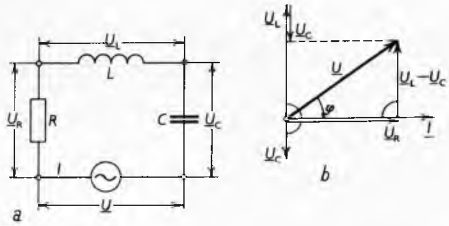
pri čemu je X *reaktivni otpor*, jalovi otpor ili *reaktancija*, koja predstavlja rezultantu induktivnog i kapacitivnog otpora:

$$X = X_L - X_C.$$

Taj slučaj prikazuje vektorski dijagram na sl. 76 b. Jednadžba Ohmova zakona glasi

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\underline{U}}{R + jX} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad \text{i} \quad \underline{U} = \underline{I}\cdot \underline{Z}.$$

Tu je $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX$ rezultantni kompleksni otpor ili *impedancija*.



Sl. 76. Opterećenje izvora izmjenične struje otpornikom, induktivnim svitkom i kondenzatorom u serijskom spoju. *a* Spojna shema, *b* vektorski dijagram struje i napona

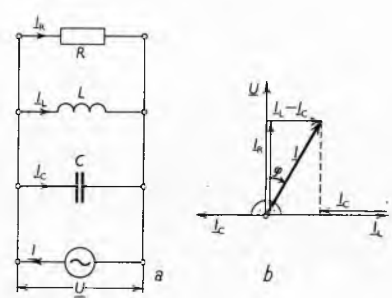
Iznos impedancije $Z = |\underline{Z}|$ dobije se ako se iznosi omskog otpora R i reaktancije $X = X_L - X_C$ geometrijski zbroje

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Iz vektorskog dijagrama (sl. 76 b) vidi se da je struja prema naponu fazno pomaknuta za kut φ čiji je tangens jednak:

$$\tan\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}.$$

Da li će fazni pomak biti induktivan (zaostajanje) ili kapacitivan (prethođenje) ovisi o tome koji je od reaktivnih otpora veći. Za $X_L > X_C$ je $\tan\varphi > 0$ (induktivni pomak), a za $X_C > X_L$ je $\tan\varphi < 0$ (kapacitivni fazni pomak).



Sl. 77. Opterećenje izvora izmjenične struje otpornikom, induktivnim svitkom i kondenzatorom u paralelnom spoju. *a* Spojna shema, *b* vektorski dijagram napona i struje

Za paralelni spoj R, L i C (sl. 77 a) jednadžbe Kirchhoffovih zakona za trenutne vrijednosti glase:

$$u = u_R = u_L = u_C, \quad i = i_R + i_L + i_C,$$

a tome odgovaraju jednadžbe efektivnih vrijednosti i vektorski dijagram na sl. 77 b:

$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C, \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} - j\frac{\underline{U}}{X_L} + j\frac{\underline{U}}{X_C},$$

što se može pisati i pomoću vodljivosti: $\underline{I} = \underline{U}G - j\underline{U}B_L + j\underline{U}B_C$, gdje je $B_L = \frac{1}{X_L}$ reaktivna induktivna, $B_C = \frac{1}{X_C}$

reaktivna kapacitivna, a G omska vodljivost. Prema tome je:

$$\underline{I} = \underline{U}\,[G + \mathrm{j}\,(B_C - B_L)] = \underline{U}\cdot\underline{Y},$$

gdje je Y kompleksna vodljivost ili *admitancija* jednaka $Y = G + \mathrm{j}\,(B_C - B_L) = G + \mathrm{j}\,B$, pri čemu je reaktivna vodljivost ili *susceptancija* $B = B_C - B_L$, a apsolutni iznos vodljivosti Y

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

Struja i napon jedno su prema drugom fazno pomaknuti za kut koji je

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan}\frac{B}{G}.$$

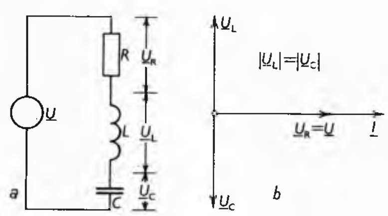
Rezonancija. Ako je u *serijskom spoju* R, L, C (sl. 78a) induktivni otpor X_L jednak kapacitivnom otporu X_C, bit će rezultantni otpor ili *impedancija*:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

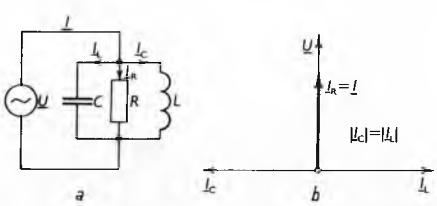
što znači da napon izvora $\underline{U}$ mora savladati samo otpor R, pa je struja $I = U/R$, a $\varphi = 0$, dakle struja je u fazi s naponom izvora.

Iz vektorskog se dijagrama (sl. 78 b) vidi da se naponi $\underline{U}_L$ i $\underline{U}_C$ u ukupnoj sumi napona kompenziraju, ali oni svaki za se postoje, pa ako je otpor R mali i struja $\underline{I}$ jaka, mogu biti $\underline{U}_L = \underline{I}\,X_L$ i $\underline{U}_C = \underline{I}\,X_C$ vrlo veliki i mogu prouzrokovati oštećenje izolacije svitka i kondenzatora.

Ova se pojava zove *serijska rezonancija* ili također *naponska rezonancija*, jer dolazi do kompenzacije napona.



Sl. 78. Serijska i naponska rezonancija. *a* Spojna shema, *b* vektorski dijagram



Sl. 79. Paralelna ili strujna rezonancija. *a* Spojna shema, *b* vektorski dijagram

Ovisnost između rezonancijske frekvencije f_r i parametara L i C daje relacija

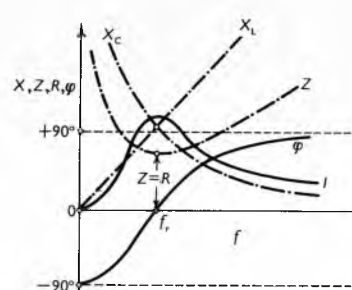
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Rezonancija se, dakle, može postići na dva načina: ili tako da se pri zadanoj frekvenciji mijenjaju vrijednosti L ili C, ili tako da se uz nepromijenjene vrijednosti L i C podesi frekvencija izvora na vrijednost f_r.

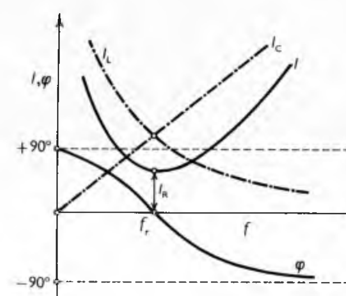
Frekvencijske karakteristike su krivulje koje pokazuju kako se promjenom frekvencije napona izvora mijenjaju pojedine električne veličine u različitim spojnim shemama. Za serijski spoj prikazane su te karakteristike na sl. 80, a za paralelni spoj na sl. 81.

Transformator i međuinduktivitet u strujnim krugovima izmjenične struje. Iz razmatranja o elektromagnetskoj indukciji poznato je da promjenljiva struja u jednom strujnom krugu može u nekom drugom strujnom krugu, koji je s prvim magnetski povezan, inducirati napon međuindukcije. Budući da do induciranja napona dolazi jedino ako su struja i od nje proizvedeni magnetski tok promjenljivi, to se međuindukcija općenito pojavljuje — a također korisno primjenjuje — baš u strujnim krugovima izmjenične struje.

Tako se u transformatorima iskorišćuje međuindukcija da se izmjenični napon izvora povisi ili snizi na onu vrijednost za koju je građeno trošilo (v. *Transformator*). Princip rada transformatora najbolje se može objasniti na idealnom transformatoru u kome se mogu zanemariti mali gubici uzrokovani nesavršenošću materijala od kojih je konstruiran transformator.



Sl. 80. Frekvencijska karakteristika: kapacitivnog otpora X_C, induktivnog otpora X_L, impedancije Z, faznog kuta φ i struje I kad su otpornik, svitak i kondenzator priključeni u seriji na izvor izmjenične struje promjenljive frekvencije



Sl. 81. Frekvencijska karakteristika: ukupne struje I, struje kroz kondenzator I_C, struje kroz svitak I_L i faznog kuta φ pri paralelnom spoju otpora, svitka i kondenzatora na izvor izmjenične struje promjenljive frekvencije

Analogno će pri *paralelnom spoju* R, L, C (sl. 79 a), ako je induktivna vodljivost jednaka kapacitivnoj vodljivosti, $B_L = B_C$ rezultantna vodljivost $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$ biti jednaka omskoj vodljivosti: $Y = G$. Napon izvora $\underline{U}$ daje, dakle, struju $\underline{I} = \underline{U}\,Y = \underline{U}\,G$ samo omskoj vodljivosti G, pa je struja $\underline{I}$ u fazi s naponom $\underline{U}$ (sl. 79 b).

Zbog prisustva napona $\underline{U}$ teći će i u svitku i u kondenzatoru struje: $\underline{I}_L = \underline{U}\,B_L$, $\underline{I}_C = \underline{U}\,B_C$ i one su jednake jakosti, ali se zbog suprotnih faznih pomaka u odnosu prema naponu $\underline{U}$ u ukupnoj sumi (tj. u struji izvora) kompenziraju. Ako su vodljivosti B_L i B_C velike, može, dakle, i mali napon prouzročiti unutar kombinacije vrlo jaku struju koja se u ostalom dijelu spojne sheme ne opaža. Ta se pojava zove *paralelna* ili *strujna rezonancija*.

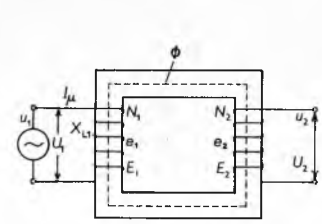
U oba slučaja do rezonancije dolazi ako su vrijednosti induktivnog i kapacitivnog otpora jednake, odn., što je isto, ako su induktivna i kapacitivna vodljivost jednake. Dakle, uvjet za nastajanje rezonancije jest:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \text{ odnosno } \frac{1}{\omega L} = \omega C,$$

što izlazi na to da mora pri serijskoj i paralelnoj rezonanciji biti $\omega^2 L C = 1$ ili

$$(2\pi f_r)^2 = \frac{1}{LC}.$$

U osnovi sastoji se transformator (sl. 82) od dva svitka, primarnog sa N_1 zavoja i sekundarnog sa N_2 zavoja koji su (da bi magnetska veza među njima bila što potpunija) smješteni na zatvorenoj željeznoj jezgri. Primarni svitak (primar) priključen je trajno na izmjenični napon izvora u_1 (efektivna vrijednost U_1). Dok na sekundarnoj strani (sekundaru) još nije priključeno trošilo, u primarnom strujnom krugu teče iz izvora struja $I = U_1/X_{L1}$. Ta je struja zbog velikog induktivnog otpora prema X_{L1} vrlo mala; ona ima u odnosu na primarni napon induktivni fazni pomak od 90° i stvara u željeznoj jezgri izmjenični magnetski tok Φ kojim su povezana oba svitka. Ta se struja često može u daljim izvodima zanemariti jer je u odnosu prema strujama pri opterećenju trošilom neznatna.



Sl. 82. Spojna shema neopterećenog transformatora

Tok Φ inducira u primaru prema (48) napon $e_1 = -N_1\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, a u sekundaru napon $e_2 = -N_2\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Na primaru je e_1 kao reaktivni napon uravnotežen naponom izvora u_1, a na sekundaru je inducirani napon e_2 priveden sekundarnim stezaljkama kao aktivni napon u_2. Dakle je:

$$u_1 = -e_1 \quad \text{i} \quad u_2 = e_2.$$

Iz odnosa $e_1 : e_2 = N_1 : N_2$ slijedi i odnos napona stezaljka $u_1 : u_2 = N_1 : N_2$ koji vrijedi i za efektivne vrijednosti: $E_1 : E_2 = N_1 : N_2$, pa je uz zanemarenja pada napona

$$U_1 : U_2 = N_1 : N_2. \tag{68}$$

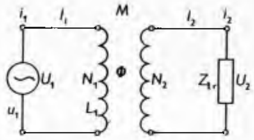
Odatle se vidi da se naponi primara i sekundara odnose direktno kao pripadni brojevi zavoja.

Ako se na sekundarnoj strani napon U_2 iskoristi za priključak trošila (sl. 83), teći će u sekundarnom strujnom krugu struja $I_2 = \dfrac{U_2}{Z_{tr}}$ (Z_{tr} je impedancija trošila). Amperzavoje od struje, $I_2 N_2$, mora poništiti dodatna struja primara I_1, amperzavojima $I_1 N_1$, jer magnetski tok Φ i pri opterećenju ostaje jednak kao i u praznom hodu budući da on mora inducirati zbog ravnoteže napona na primaru uvijek e_1 bez obzira na opterećenje trošilom. Po iznosu, dakle, amperzavoji su jednaki: $I_1 N_1 = I_2 N_2$, pa ako se I_μ zanemari, na primaru teče struja opterećenja

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{N_2}{N_1},$$

odakle slijedi odnos struja pri opterećenom transformatoru

$$I_1 : I_2 = N_2 : N_1.$$



Sl. 83. Spojna shema opterećenog transformatora

Umjesto da se naponi računaju pomoću zajedničkog magnetskog toka Φ, može se proračun naponâ provesti i pomoću koeficijenata samoindukcije i međuindukcije.

Tako se napon izvora u_1 određuje na osnovi činjenice (drugi Kirchhoffov zakon) da on mora savladati pri opterećenju osim induciranog napona samoindukcije još i inducirani napon međuindukcije. Ako se zanemari omski otpor primarnog svitka, naponska jednadžba glasi:

$$u_1 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

Pri tome se napon međuindukcije $u_M = M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ u simboličnom obliku predočuje — analogno naponu samoindukcije — kompleksnim brojem

$$\underline{U}_M = \mathrm{j}\,\omega\, M\, \underline{I}.$$

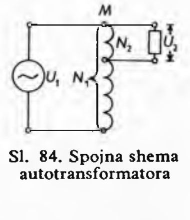
Vidi se da se, slično induktivnom otporu samoindukcije $X_L = \omega L$, i pri pojavi međuindukcije može uvesti pojam induktivnog otpora međuindukcije, koji je jednak: $X_M = \omega M$, pa je tako odgovarajući napon:

$$\underline{U}_M = \mathrm{j}\,\omega\, X_m \cdot \underline{I}_2.$$

Ovaj odnos, osim u prikazanom transformatoru, vrijedi i inače u bilo kako sastavljenoj mreži gdje su dva svitka magnetski povezana. U jednadžbi drugog Kirchhoffovog zakona mora se uz ostale napone (u_R, u_L, u_C) uzeti u obzir i napon međuindukcije, koji u kompleksnom prikazu iznosi općenito

$$\underline{U}_M = \mathrm{j}\,\omega\, M\, \underline{I}.$$

Autotransformator. Transformator se može izraditi i samo s jednim svitkom; u njemu onda ukupni broj zavoja pripada strani višeg napona, a odvojeni dio svitka s manjim brojem zavoja, strani nižeg napona. Takav se uređaj zove autotransformator. Na sl. 84 prikazana je spojna shema autotransformatora u kome se primarni napon izvora U_1 smanjuje na napon U_2 za priključak trošila. I ovdje vrijedi (za idealne prilike) osnovna naponska jednadžba (68) $U_1 : U_2 = N_1 : N_2$.



Sl. 84. Spojna shema autotransformatora

Trofazna struja je sustav triju izmjeničnih struja jednake frekvencije koje su jedna prema drugoj vremenski fazno pomaknute za jednu trećinu periode ($T/3$), što odgovara faznom kutu od 120°. Sustav je simetričan ako su, osim međusobnih faznih pomaka, i amplitude strujâ jednake. Te struje proizvodi trofazni sustav naponâ koji su zajednički inducirani u trofaznom generatoru, zajednički se redovno prenose trofaznim vodom, a mogu se zajedno i iskoristiti za rad u jedinstveno konstruiranim trofaznim trošilima (trofaznim motorima, trofaznim pećima i dr.), ili se pak može i svaka od tih struja zasebno upotrijebiti za rad u posebnim strujnim krugovima sa tzv. jednofaznim trošilima kao što su žarulje, grijala itd.

U generatorima se simetrični trofazni napon inducira u tri jednaka fazna svitka koji su prostorno razmaknuti za geometrijski kut od 120° ako promjenljivo (rotirajuće) magnetsko polje ima samo jedan par polova. Za p pari polova taj kut iznosi $120°/p$. Ovim prostornim razmakom svitaka postiže se vremenska fazna razlika u induciranim naponima. Svaki svitak predstavlja, dakle, generator za strujni krug jedne faze sistema, na koji se može vodičima priključiti trošilo. Na sl. 85 prikazana su sva tri strujna kruga kao jedan od drugog električki izolirana; taj se sustav zove *nevezan*. Nevezani trofazni sustavi u praksi se ne primjenjuju, nego se sva tri strujna kruga uvijek povezuju u *vezane sustave*. Dva su osnovna načina povezivanja: u *spoj zvijezde* i u *spoj trokuta*. Osim ovih postoje i neki posebni spojevi za specijalne svrhe (cikcak spoj, V-spoj i dr.).

Simetrični trofazni sustav struja (odnosno napona ili magnetskih tokova) može se predočiti bilo analitički jednadžbama bilo vektorski, ili pak simbolički kompleksnim brojevima.

Tako se npr. struje simetričnog trofaznog sustava mogu prikazati ovako:

$$i_\mathrm{I} = I_\mathrm{m} \sin \omega t, \qquad \underline{I}_\mathrm{I} = I,$$

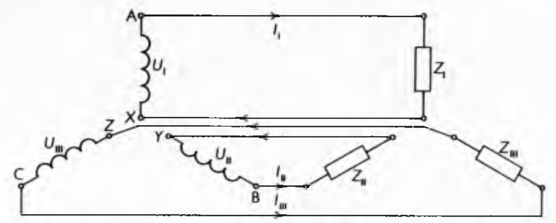
$$i_\mathrm{II} = I_\mathrm{m} \sin(\omega t - 2\pi/3), \qquad \underline{I}_\mathrm{II} = I\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 2\pi/3};$$

$$i_\mathrm{III} = I_\mathrm{m} \sin(\omega t - 4\pi/3), \qquad \underline{I}_\mathrm{III} = I\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 4\pi/3},$$

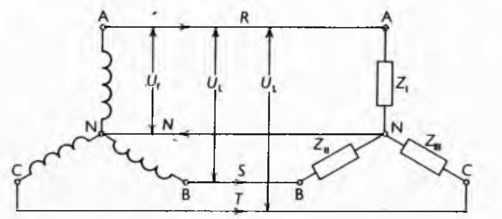
($2\pi/3$ u lučnoj mjeri odgovara 120° u kutnoj, $4\pi/3$ u lučnoj mjeri, 240° u kutnoj). Općenito je

$$\underline{I}_\mathrm{I} = \underline{I}, \qquad \underline{I}_\mathrm{II} = \underline{I} \cdot a^2, \qquad \underline{I}_\mathrm{III} = \underline{I} \cdot a, \tag{69}$$

gdje je $a = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 2\pi/3}$ operator rotacije vektora za 120° u matematički pozitivnom smjeru vrtnje (protivno od kazala na satu tj. protivno redoslijedu faza).



Sl. 85. Nevezani trofazni sustav sa 3 odvojena strujna kruga



Sl. 86. Trofazni sustav u spoju zvijezde. U_f Fazni napon, U_l linijski napon

U praksi se pri uređajima trofazne struje primjenjuje riječ faza ne samo kao sinonim za trenutnu vrijednost napona i struje nego i za strujne krugove sustava, pa i za pojedine dijelove tih strujnih krugova. Tako se npr. svici generatora nazivaju fazama generatora, a dijelovi trošila kroz koje protječe struja jedne faze, fazama trošila.

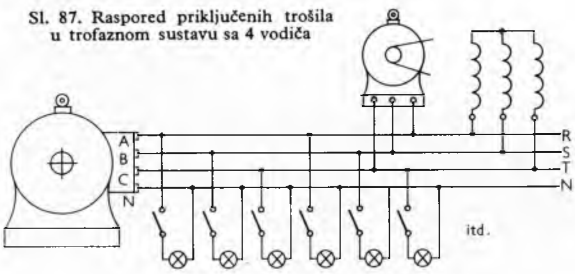
Spoj u zvijezdi (oznaka Y) nastaje povezivanjem početaka triju svitaka generatora u zajedničku točku nazvanu *zvjezdište* ili *nul-točka generatora* (sl. 86). Isto tako pri spoju trošila u zvijezdi sva su trošila jednim krajem povezana u *nultočku trošila*. Obje nultočke (generatora i trošila) — označuju se slovom N — spojene su zajedničkim povratnim vodičem u kome protječu sve tri struje zajedno. Ako su sve tri faze jednako opterećene, pa je sustav simetričan, suma je struja jednaka nuli, te kroz povratni vodič ne teče struja. U tom slučaju je povratni vodič nepotreban i prijenos energije od generatora do trošila može se provesti samo s tri fazna vodiča koji se označavaju slovima R, S, T i koji se zajednički zovu *trofazna linija* ili *trofazni vod.* Da je suma struja simetričnog opterećenja jednaka nuli vidi se iz vektorskog dijagrama ili ako se sumiraju tri jednadžbe za struju:

$$\sum_{j=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} i_j = 0.$$

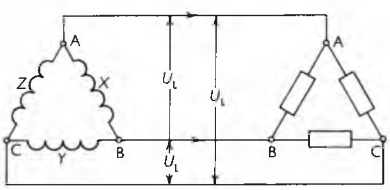
U razdjelnim mrežama, gdje su na pojedine faze priključena jednofazna trošila, ne može se računati na potpunu simetriju struja, pa će suma strujâ u zvjezdištu trošila biti svakako manja nego u faznim vodičima, ali neće biti jednaka nuli. Za rezultantnu povratnu struju bit će stoga potreban povratni vodič, koji povezuje obje nultočke i zato se zove *nulvodič N.* Njegov poprečni presjek može biti znatno manji, obično samo polovica poprečnog presjeka faznih vodiča.

Na sl. 87 prikazano je kako se već samom instalacijom, tj. razdiobom jednofaznih trošila na pojedine faze nastoji postići što bolja simetrija opterećenja, pri čemu se jednofazno trošilo priključuje na fazni vodič i nulvodič. Trofazno trošilo (npr. elektromotor), jer je simetrično sastavljeno, veže se na sva tri fazna vodiča bez priključka na nulvodič.

Sl. 87. Raspored priključenih trošila u trofaznom sustavu sa 4 vodiča



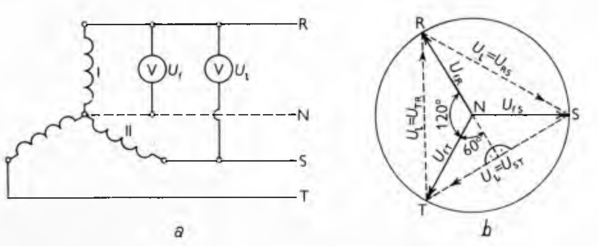
Spoj u trokutu (oznaka △) jest drugi osnovni spoj triju svitaka u generatoru, odnosno triju otpora trošila. Svici generatora spajaju se u trokut tako da se početak namota jedne faze spoji sa svršetkom namota susjedne faze (sl. 88). Vodiči R, S, T priključuju se na namot generatora u spojnim točkama A, B, C, koje su u spojnoj shemi vrhovi trokuta namotâ, po čemu je spoj dobio svoje ime. Otpori trošila vežu se u trokut na sličan način (na slici desno), pa prema tome spoj u trokutu predstavlja i tu zatvoreni strujni krug.



Sl. 88. Trofazni sustav sa 3 vodiča u spoju trokuta. U_l Linijski napon

Iako pri spoju u trokutu tri svitka generatora čine zatvoren strujni krug bez uključenih otpora trošila, ne mogu inducirani naponi generatora unutar konture trokuta potjerati struju kratkog spoja, jer se tri napona u trokutu sumiraju, a pri simetriji trofaznih napona njihova je suma jednaka nuli. Struja će proteći tek ako se na svitke generatora priključe trošila sa svojim otporima.

Fazne i linijske vrijednosti. *Fazni napon* je napon induciran u jednoj fazi (svitku) generatora, odnosno napon jedne faze trošila, tj. napon između vodičâ R i N, S i N, T i N. *Linijski napon* (zove se i međufazni napon) jest napon između dva vodiča trofazne linije, tj. između vodičâ R i S, S i T, T i R. (sl. 89 a). *Fazna struja* je struja što protječe jednom fazom generatora, odnosno jednom fazom trošila, a *linijska struja* je struja kroz jedan vodič trofazne linije.



Sl. 89. Fazne i linijske vrijednosti četverožičnog trofaznog sustava u zvijezdi. *a* Shema, *b* vektorski dijagram

Na osnovi ovih općenitih definicija mogu se iz spojne sheme i vektorskog dijagrama za simetrične trofazne sustave naponâ i strujâ dobiti odnosi između linijskih i faznih vrijednosti generatora i trošila (sl. 89 b). Za spoj u zvijezdi iznosi:

$$U_l = 2\sin 60^\circ\, U_f = \frac{2\sqrt{3}}{2}\, U_f = \sqrt{3}\, U_f; \qquad I_l = I_f,$$

odnosno

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}; \qquad I_f = I_l. \tag{70}$$

Za spoj u trokutu (v. sl. 88) vrijedi:

$$U_l = U_f, \qquad I_l = \sqrt{3}\, I_f,$$

odnosno

$$U_f = U_l, \qquad I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}. \tag{71}$$

Izračunavanje strujnih i naponskih prilika u mrežama trofazne struje pri općenito nesimetričnom opterećenju može se provesti bilo kojom metodom analize mreža (v. *Električni krugovi,* TE 4, str. 53). U slučaju simetričnog opterećenja, primjenom jednadžbi (70) i (71) račun je mnogo jednostavniji.

Ako je npr. generator vezan u spoj zvijezde, a trošilo otpora $R = 100\,\Omega$ u spoj trokuta, dobije se fazna struja generatora kako je navedeno u nastavku. Iz sl. 89b vidi se da je pri zadanom faznom naponu generatora od 220 V linijski napon: $U_l = \sqrt{3}\cdot 220$ V, što je ujedno i fazni napon za trošilo: $U_{ft} = U_l$, pa će struja jedne faze trošila biti:

$$I_{ft} = \frac{U_{ft}}{R_t} = \sqrt{3}\cdot 220/100 = 2{,}2\sqrt{3}\ \mathrm{A}.$$

Linijska struja kojom se energija dovodi trošilu jednaka je: $I_l = \sqrt{3}\, I_{ft}$, a to je ujedno i fazna struja generatora $I_{fg} = \sqrt{3}\cdot 2{,}2\cdot\sqrt{3} = 6{,}6$ A.

Snaga izmjenične struje. Snaga električne struje direktno je proporcionalna naponu i jakosti struje. Budući da su pri izmjeničnoj struji oba faktora promjenljiva, bit će i snaga izmjenične struje vremenski promjenljiva; trenutna vrijednost snage izmjenične struje jednaka je umnošku trenutnih vrijednosti napona i struje: $p = u\cdot i$.

Ako se promatra slučaj induktivnog opterećenja, kad je napon prema struji fazno pomaknut za kut $-\varphi$, mogu se napon i struja prikazati jednadžbama

$$u = U_m \sin\omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

pa je

$$p = u\cdot i = U_m \sin\omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi).$$

Supstitucijom $U_m = U\sqrt{2}$; $I_m = I\sqrt{2}$, te primjenom poučka: $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, dobije se konačno da je:

$$p = U\, I\, [\cos\varphi - \cos(2\,\omega t - \varphi)], \tag{72}$$

što znači da je trenutna snaga izmjenične struje također harmonički promjenljiva veličina, a zbog faktora $2\,\omega$ uz varijablu t ima dva puta veću frekvenciju nego struja i napon.

Da bi se odredila pomoću snage električna energija, mora se zbog vremenske promjenljivosti snage u račun uzeti sredina, i to aritmetička sredina, prema (59), jer se u jednadžbi energije $W = P\,t$ nalazi uz faktor vremena snaga u prvoj potenciji.

Aritmetička sredina (srednja vrijednost) snage označuje se slovom P i izračuna prema jednadžbi $P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t$, pa iz jedn. (72) izlazi

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U\, I\,[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]\,\mathrm{d}t$$

i konačno:

$$P = U\, I\cos\varphi. \tag{73}$$

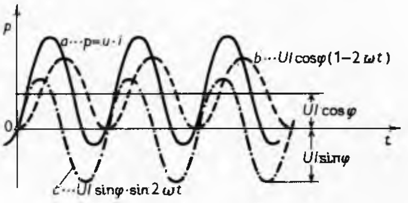
Zbog toga što korisna snaga izmjenične struje ovisi ne samo o naponu U i struji I nego i o faktoru $\cos\varphi$, zove se $\cos\varphi$ *faktor snage.*

Detaljniji uvid u energetske prilike pri sinusoidno promjenljivoj struji dobije se ako se jednadžba (72) transformira u oblik

$$p = U\,I\cos\varphi\,(1 - \cos 2\,\omega\,t) - U\,I\sin\varphi\cdot\sin 2\,\omega\,t$$

i prikaže grafički (sl. 90).

Vidi se da se snaga može rastaviti u dvije komponente, predočene dvjema harmoničkim krivuljama. Jedna komponenta, $U\,I\cos\varphi\,(1 - \cos 2\,\omega\,t)$, titra dvostrukom frekvencijom oko srednje vrijednosti $U\,I\cos\varphi$, koja predstavlja *korisnu snagu P.*

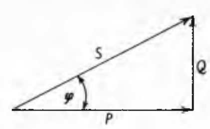


Sl. 90. Snaga izmjenične struje

Druga komponenta snage, $U\,I\sin\varphi\cdot\sin 2\,\omega\,t$, oscilira također dvostrukom frekvencijom, ali oko srednje vrijednosti nula. Zato se $Q = U\,I\sin\varphi$ naziva *jalova snaga.*

Da je to tako slijedi i iz razmatranja energija, koje su u vremenskom dijagramu predočene površinama što ih zatvaraju harmoničke krivulje snage s vremenskom osi. Između krivulje koja prikazuje prvu komponentu snage prenošene od izvora trošilu i osi apscisâ sve su površine pozitivne (tj. iznad osi apscisâ), a to znači da se sva predočena energija predaje trošilu kao korisna; između osi apscisâ i krivulje koja prikazuje drugu komponentu snage, pak, zbog osciliranja te krivulje oko osi apscisâ, pozitivne i negativne površine su jednake, što znači da se energija predana trošilu vraća u strujni krug. Ova komponenta energije samo oscilira između izvora i trošila i ne obavlja koristan rad.

Obje veličine: korisna snaga $P = U\,I\cos\varphi$ i jalova snaga $Q = U\,I\sin\varphi$ mogu se smatrati komponentama umnoška efektivnih vrijednosti napona i struje $S = U\,I$. S, U i I združeni predstavljaju trokut snaga (sl. 91). Umnožak $S = U\,I$ zove se *prividna snaga.*



Sl. 91. Trokut snaga

Sve tri veličine P, Q i S dimenzijski su jednake, pa im svima pripada jedinica vat ili voltamper. U praksi se ta jedinica naziva vat (W) samo kad se primjenjuje na korisnu (djelatnu, ili aktivnu, ili vatnu) snagu, dok se primijenjena na jalovu snagu (bezvatnu ili reaktivnu) naziva reaktivni voltamper (VAr), a za jedinicu prividne snage uobičajen je samo naziv voltamper (VA).

Jalova snaga Q ima važan utjecaj na dimenzioniranje vodiča za prijenos energije, a prema prividnoj snazi S proračunavaju se dimenzije generatorâ i transformatorâ.

Snaga trofazne struje. Općenito je srednja snaga trofaznog sustava jednaka sumi snagâ pojedinih faza: $P = P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}}$. Jedino se u slučaju simetričnog opterećenja može ova jednadžba za proračun snage pojednostavniti, jer je tada $P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{III}}$, pa je

$$P = 3\,P_{\mathrm{I}} = 3\,U_{\mathrm{f}}\,I_{\mathrm{f}}\cos\varphi.$$

Budući da je simetrično trofazno trošilo priključeno na generator samo trima vodičima R, S i T (bez nulvodiča) nisu mjerenju pristupačne fazne vrijednosti napona i struje, nego samo linijske.

Zato se supstitucijom:

$$U_{\mathrm{f}} = \frac{U_{\mathrm{l}}}{\sqrt{3}};\qquad I_{\mathrm{f}} = I_{\mathrm{l}}\qquad \text{za spoj u zvijezdi}$$

$$U_{\mathrm{f}} = U_{\mathrm{l}};\qquad I_{\mathrm{f}} = \frac{I_{\mathrm{l}}}{\sqrt{3}}\qquad \text{za spoj u trokutu}$$

pretvaraju fazne vrijednosti u linijske, pa se neovisno o načinu spoja dobije za snagu simetričnog trofaznog sustava jednadžba

$$P = \sqrt{3}\,U\,I\cos\varphi,$$

pri čemu su U i I linijske vrijednosti napona i struje.

Mjerenje snage i energije trofazne struje prikazano je u članku *Električna brojila,* TE 2, str. 526.

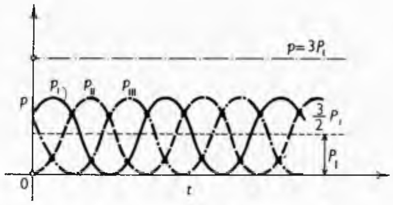
U pogledu energetskog korišćenja trofazne struje treba istaknuti da je pri simetričnom opterećenju snaga trofaznog sustava izmjeničnih struja vremenski konstantna: $p = f(t) =$ konst., što znači da se u trošilu rad obavlja kao i pri istosmjernoj struji jednoličnim privođenjem energije bez ikakvih pulzacija snage. Ta se konstantna vrijednost snage simetričnog trofaznog sustava dobije iz izraza (72) i iz osnovne jednadžbe $p = p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}} + p_{\mathrm{III}}$:

$$p = U\,I\cos\varphi - \cos(2\,\omega\,t - \varphi) + U\,I\cos\varphi - \cos(2\,\omega\,t - \varphi - 2\cdot 120°) + U\,I\,[\cos\varphi - \cos(2\,\omega\,t - \varphi - 4\cdot 120°) = 3\,U\,I\cos\varphi = 3\,P_{\mathrm{I}},$$

što je prikazano na sl. 92. Ovakav se sustav naziva *balansiranim,* a isti se naziv primjenjuje i na ostale višefazne sustave kojima je snaga

$$p = f(t) = \text{konst.} = m\,U\,I\cos\varphi.$$

Pri tom su U i I fazne vrijednosti napona i struje, a m broj faza.



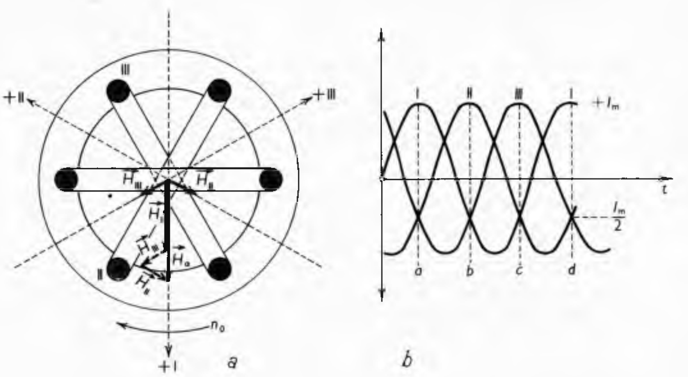
Sl. 92. Snaga trofazne struje. p_{I}, p_{II} i p_{III} Trenutne snage pojedinih faza pri čisto omskom simetričkom opterećenju

Magnetsko polje trofazne struje. Konstantna istosmjerna struja stvara konstantan magnetski tok $\Phi = I\,N/R_{\mathrm{m}}$, a magnetska os poklapa se s geometrijskom osi svitka kroz koji protječe struja I. Izmjenična struja stvara izmjenično magnetsko polje koja ima istu sliku kao polje istosmjerne struje, samo što su tok Φ i gustoća B vremenski promjenljive veličine kao i izmjenična struja koja ih stvara.

Ako bi simetrična trofazna struja prolazila kroz tri svitka čiji su zavoji jedan tik uz drugi, rezultantno magnetsko polje bilo bi jednako nuli, jer bi se prema jednadžbi za izračunavanje magnetskog toka: $\Phi = I\,N/R_{\mathrm{m}}$ amperzavoji svih triju struja poništavali:

$$I\,N = N\sum i = 0.$$

Prilike se bitno mijenjaju ako su svici pojedinih faza prostorno jedan od drugoga razmaknuti, jer onda svaki svitak može u prostoru stvarati svoje magnetsko polje, a u pojedinim točkama prostora rezultantno je polje jednako sumi tih triju komponenata.



Sl. 93. Shematski prikaz trofaznog stroja (a) s ucrtanim vektorima uzbude i vremenski dijagram uzbudnih strujâ u pojedinim svicima stroja (b)

Napose se pravilno rezultantno polje dobiva ako su tri jednaka svitka smještena radijalno u krugu, prostorno razmaknuta za 120°, koliko iznosi kut faznog pomaka triju struja trofaznog sustava. U rotacionim strojevima razmještena su takva tri svitka na željeznom jarmu statora (sl. 93 a), pa se od struje svakog svitka stvara u utorima statora magnetsko polje čiji se vektor uzbude H poklapa s geometrijskom osi promatranog svitka. Budući da su vektori H_I, H_{II} i H_{III}, kao i struje, vremenski promjenljivi, i rezultantna je vrijednost H promjenljiva. Na sl. 93 b prikazano je kako se u nekoliko karakterističnih trenutaka može vektorskim sumiranjem odrediti uzbuda H rezultantnog magnetskog polja. Pri tom se pretpostavlja da su svici na vodove R, S, T priključeni tako da pozitivna struja stvara polje u smjeru označenom kao pozitivan. U trenutku a ima rezultantni vektor H_a smjer geometrijske osi prvog svitka, čija je struja u maksimumu, a njegov je iznos $H_a = 1{,}5\, H_m$, gdje je H_m maksimalna vrijednost uzbude jednog svitka. U trenucima b i c također je vrijednost rezultantne uzbude $H_b = H_c = 1{,}5\, H_m$, samo se vektor H u svakom tom trenutku poklapa po smjeru sa smjerom geometrijske osi onog svitka čija je struja u maksimumu.

Rezultantno magnetsko polje je, dakle, konstantnog iznosa, a njegova magnetska os rotira brzinom vrtnje stroja. To se polje zove *okretno* ili *rotaciono magnetsko polje.*

Brzine vrtnje n_0 označuju se u tehnici brojem okretaja u jednoj minuti, a budući da se u prikazanom slučaju polje okrene jedan put u jednoj periodi (koja se izražava u sekundama) može se brzina vrtnje n_0 prikazati prilagođenom veličinskom jednadžbom

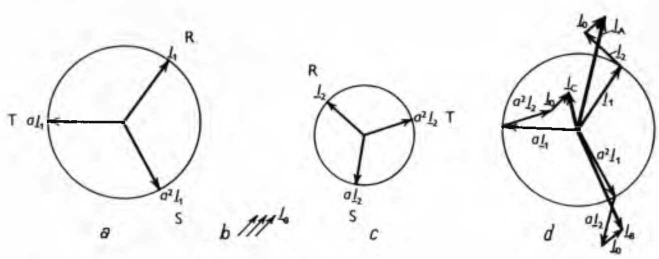
$$n_0 = 60 \cdot f \qquad [\text{okr/min}]$$

gdje f znači mrežnu frekvenciju. Ako svici pojedinih faza svaki za sebe stvaraju magnetsko polje sa p pari polova, brzina je vrtnje

$$n_0 = 60 \cdot \frac{f}{p}.$$

Simetrične komponente nesimetričnog trofaznog sustava. Mnogi problemi nesimetričnih trofaznih sustava mogu se računski jednostavnije riješiti ako se taj nesimetrični sustav rastavi na tri simetrične komponente. To vrijedi kako za napone i struje, tako i za impedancije. Te su komponente, općenito: direktna, inverzna i nulta komponenta.

Direktna komponenta (sl. 94 a) simetrični je trofazni sustav koji ima isti redoslijed faza kao i zadani nesimetrični.



Sl. 94. Uz tumačenje simetričnih komponenata. *a* Direktna komponenta, *b* nulta komponenta, *c* inverzna komponenta, *d* zbrajanje simetričkih komponenata

Inverzna komponenta (sl. 94 c) simetrični je trofazni sustav čiji je redoslijed faza obrnut od redoslijeda faza zadanog nesimetričnog sustava.

Nulta komponenta (sl. 94 b) su tri jednake istofazne izmjenične veličine.

Ako je zadani nesimetrični trofazni sustav predočen trima radijvektorima $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$, komponente se računaju prema ovim jednadžbama:

Nulta komponenta: $I_0 = \frac{1}{3}(I_A + I_B + I_C)$,

Direktna komponenta: $I_1 = \frac{1}{3}(I_A + a\, I_B + a^2\, I_C)$,

Inverzna komponenta: $I_2 = \frac{1}{3}(I_A + a^2\, I_B + a\, I_C)$,

pri čemu je operator rotacije a prema (69) jednak $a = e^{j \cdot 2\pi/3}$. Zbrajanje simetričnih komponenata na sl. 94 a, b i c prikazano je u vektorskom dijagramu 94 d (v. i članak *Dalekovodi*, TE 3, str. 159).

Nesinusoidni naponi i struje. Strujne i naponske jednadžbe te osnovni zakoni izvedeni za sinusoidno promjenljive struje ne mogu se direktno primijeniti na periodički promjenljive struje i napone koji nisu harmoničke funkcije vremena. No, ako se nesinusoidna periodička veličina rastavi u Fourierov red čiji su članovi sinusoidne veličine sa sve višim frekvencijama, mogu se na te komponente primijeniti izvedeni zakoni, pa na taj način superponiranjem analizirati mreža i pri nesinusoidno promjenljivim strujama.

Kao i pri sinusoidnim strujama nastoje se i nesinusoidne struje i naponi prikazati efektivnim vrijednostima, a snaga aritmetičkom srednjom vrijednošću. Te se vrijednosti dobiju iz osnovnih definicionih jednadžba; tako je efektivna vrijednost nesinusoidne struje

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t},$$

što nakon uvrštenja izraza za struju:

$$i = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1) + I_{2m}\sin(2\,\omega t + \alpha_2) + $$
$$+ I_{3m}\sin(3\,\omega t + \alpha_3) + \ldots.$$

daje konačni izraz za efektivnu vrijednost nesinusoidne struje

$$I = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots.,$$

i analogno za napon:

$$U = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots.$$

gdje I_0 i U_0 znače istosmjernu komponentu struje i napona, a $I_1, I_2 \ldots.$ odnosno $U_1, U_2 \ldots.$ harmoničke komponente.

Srednja vrijednost snage P određuje se uvrštenjem gornjeg izraza za struju i i analognog za napon u u jednadžbu (59)

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u i \mathrm{d}t,$$

što konačno daje

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots.,$$

pri čemu su P_0, P_1, $P_2 \ldots.$ snage struja pojedinih komponenata pa je prema tome

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots.$$

gdje su φ_1 i φ_2 fazni kutovi pojedinih harmoničkih komponenata.

Vidi se da se snaga (kao i energija) dobije algebarskim sumiranjem pojedinih komponenata, što je u vezi sa skalarnim karakterom energije.

Pri nesinusoidnoj struji i naponu ne može se kao pri sinusoidnoj struji za proračun snage izravno primijeniti jednadžba (73): $P = U I \cos\varphi$, jer tu kut faznog pomaka zbog postojećih harmoničkih komponenata nema fizikalno značenje. Moguće je, međutim, kao faktor snage λ u tom slučaju uzeti omjer

$$\lambda = \frac{P}{U I}.$$

Za slučaj da je napon sinusoidan, a struja nesinusoidna, može se faktor snage λ izraziti pomoću $\cos\varphi_1$ (tj. kosinusom faznog pomaka prve harmoničke komponente) pomnoženog faktorom udjela osnovnog titraja g, tako da je $\lambda = g \cos\varphi_1$.

Faktor λ je to manji od jedan što je više harmoničkih članova sadržano u krivulji struje, tj. što je faktor udjela osnovnog titraja g manji. On iznosi

$$g = \frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots.}.$$

Ponekad je važno poznavati udjel viših harmoničkih komponenata u nesinusoidnoj struji. Taj se udio izražava *faktorom izobličenja,* koji glasi

$$K = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{n} I_n^2}}{I} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 \ldots.}}{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \ldots.}.$$

Opisane zakonitosti odnose se na izmjenične struje niskih frekvencija, kod kojih je gubitak energije uslijed elektromagnetskog zračenja zanemarivo malen. Pojave pri strujama visokih frekvencija tumače se u teoriji elektromagnetskih polja.

V. Pinter

RAZVOJ ELEKTROTEHNIKE

O elektricitetu bila je kroz mnoga stoljeća poznata samo činjenica da natrljani jantar privlači laka tijela. To je vjerojatno znao najstariji poznati grčki filozof Tales iz Mileta u ← VI st., a sigurno je to znao Teofrast na prijelazu ← IV i ← III st., God. 1600 William Gilbert (1544—1603) utvrdio je da se kao jantar ponašaju također staklo i dvadesetak drugih tvari. On je korijen grčke riječi za jantar, ἤλεκτρον (elektron), prvi upotrijebio kao osnovu za naziv privlačne sile između tih tvari i lakih tijela: vis electrica. God. 1733 francuski fizičar C. F. de Cisternay du Fay (1698—1739) otkrio je da se elektricitet kojim se pri trljanju nabija staklo razlikuje od elektriciteta kojim se nabijaju jantar i druge smole, i te je dvije vrste elektriciteta nazvao staklastim i smolastim. Najzad je B. Franklin (1706—1790) iznjeo prvu teoriju o elektricitetu. On je 1747 god. uveo izraze pozitivni i negativni elektricitet za te dvije vrste električnih naboja i utvrdio da se one pojavljuju uvijek istodobno i u točno jednakim količinama. Na temelju toga on je formulirao princip održanja (konzervacije) naboja i time položio znanstvene osnove teorije o elektricitetu.

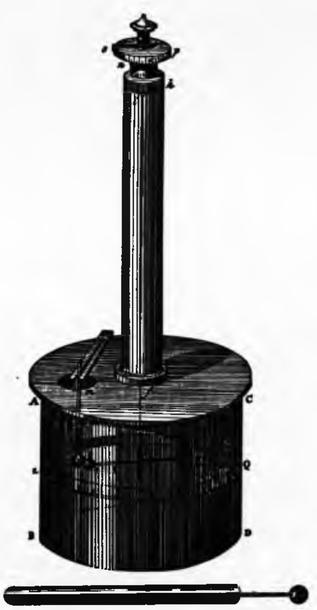
Makroskopske pojave u području poznatom pod imenom *elektrostatika* tvorile su osnovu za razvitak pojma elektrostatičkog naboja, kao mjerljive fizikalne veličine. Elektrostatika, jedno od glavnih područja nauke o elektricitetu, temelji se na samo jednom eksperimentalno utvrđenom zakonu, tzv. *Priestley-Coulombovom inverznom kvadratnom zakonu*

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{a}_r, \tag{74}$$

gdje je $\vec{F}$ sila koja djeluje između dva električki nabijena tijela, Q_1 i Q_2 električni naboji tih tijela uključujući i njihov predznak, r razmak između tijela, ε dielektričnost okolnog medija, a $\vec{a}_r$, vektor iznosa 1 i smjera od jednog naboja prema drugome, određuje smjer sile $\vec{F}$ (v. i *Elektricitet, statički*, TE 3, str. 580). Taj zakon kaže da dva električki nabijena tijela, kojima je volumen mali u odnosu prema udaljenosti između njih, djeluju jedno na drugo jednakim suprotnim silama koje su obrnuto razmjerne kvadratu udaljenosti među tijelima. Sila je privlačna ako su tijela nabijena elektricitetom suprotnog predznaka, a odbojna ako su nabijena elektricitetom istog predznaka. Budući da je algebarski predznak sila jednak predznaku produkta $Q_1 Q_2$, odbojna je sila pozitivna, a privlačna negativna.

Prvi značajan doprinos otkrivanju Coulombova zakona dao je B. Franklin, na čiji je poticaj J. Priestley (1733—1804) počeo istraživati djelovanje među električnim nabojima. Priestley je 1767 prvi izrekao misao da između dva električna naboja postoji određeno kvalitativno uzajamno djelovanje. Nezavisno od njega je H. Cavendish (1731—1810) iznio to isto mišljenje; on je 1773 eksperimentalno utvrdio inverzni kvadratni zakon za električnu silu.

Charles Augustin de Coulomb (1736—1806) je 1785 kvantitativno formulirao i demonstrirao inverzni kvadratni zakon koristeći se pri tom torzionom vagom (sl. 95). Njegova metoda eksperimentalnog određivanja zavisnosti izražene inverznim kvadratnim zakonom bila je direktna, kvantitativna i lako razumljiva, pa su njegovi rezultati spremno prihvaćeni. To su prvi rezultati istraživanja na području elektriciteta koji su dobili širok publicitet. Tome su znatno pridonijela i teoretska razmatranja Simeona Denisa Poissona (1781—1840), objavljena u dva rada 1812 i 1813. U njima je on, uzimajući Coulombov inverzni kvadratni zakon kao fundamentalni postulat, znatno unaprijedio i upotpunio elektrostatiku upotrebom analogije prema gravitacionoj teoriji, koja je tada bila visoko razvijena.



Sl. 95. Coulombova torziona vaga

Godine 1777 uveo je J. L. Lagrange (1736—1813) funkciju $\psi(x, y, z)$ pridruženu masama, za koju je P. S. Laplace (1749—1827) 1782 pokazao da zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \tag{75}$$

u svim točkama u kojima nema mase. Poisson je, na osnovi Coulombova zakona, uveo sličnu funkciju $\varphi(x, y, z)$, kojoj doprinose svi naboji jednog električnog sustava obrnuto proporcionalno udaljenosti. Zatim je, kao što je to učinio Lagrange u slučaju gravitacionih privlačnih sila, dokazao da parcijalne derivacije $-\partial\varphi/\partial x$, $-\partial\varphi/\partial y$, $-\partial\varphi/\partial z$ daju komponente električne sile u točki (x, y, z). Petnaest godina kasnije, u generaliziranju Poissonovih radova o električnim i magnetskim pojavama, George Green (1793—1841) dao je funkciji φ univerzalno ime *potencijal*. Slijedeći je značajan doprinos Poissona, zabilježen 1813, proširenje Laplaceove jednadžbe (75) tako da obuhvaća točke zauzete materijom

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho, \tag{76}$$

gdje je ϱ volumna gustoća mase. Jednadžba (76) nazvana je *Poissonovom*, a njena valjanost je opća, pa je stoga primjenljiva i u elektrostatici.

Usporedo s elektrostatikom razvijalo se, do tog doba istina odvojeno, drugo važno područje elektromagnetske teorije, *magnetostatika*.

Sile kojima djeluju magneti jedan na drugi, slično kao i elektrostatičke sile, bile su poznate još Talesu. I dok su stari filozofi miješali ove dvije vrste djelovanja, W. Gilbert je uočio različitost. Kada je 1785 Coulomb otkrio inverzni kvadratni zakon u elektrostatici, on je učinio pokuse i s polovima dvaju dugih tankih magneta i našao da se sile između polova mogu također računati s pomoću toga zakona. Utvrđena je sličnost između mnogih matematičkih izraza kojima se opisuju te dvije vrste sila. Mnogi, mada ne svi, principi elektrostatičke teorije, koju je unaprijedio Poisson, bili su valjani i za magnete. Magnetostatika se u to vrijeme razvijala u sjeni elektrostatike.

Prava priroda magnetizma istražena je početkom prošlog stoljeća, kad je cijelim nizom izvanrednih otkrića utvrđena povezanost među električnim i magnetskim pojavama. Kao rezultat tih istraživanja uočena je činjenica da je gibanje elektriciteta uvijek praćeno magnetskim pojavama. Naime, nakon što je 1800 Alessandro Volta (1745—1827) pronašao prvi izvor električne struje, u zimi 1819/1820 Hans Christian Oersted (1777—1851) otkrio je magnetsku interakciju između magnetske igle i vodiča kroz koji protječe struja. To otkriće je potaklo André-Marie Ampèrea (1775—1836) da nedugo zatim, 1820, utvrdi da električne struje djeluju jedna na drugu silama koje je i kvantitativno odredio. U međuvremenu, iste godine, Jean-Baptiste Biot (1774—1862) i Félix Savart (1791—1841) ponavljajući Oerstedove eksperimente, mjerenjem su također odredili zakon magnetske sile koja upravlja tom pojavom.

Prema današnjem načinu pisanja, rezultati svih tih eksperimenata mogu se prikazati izrazom

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_s \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_0}{r^2}, \tag{77}$$

koji određuje magnetsko polje u točki (x, y, z) proizvedeno sustavom stacionarnih struja I. Ova važna jednadžba, poznata kao *Biot-Savartov zakon*, često se uzima kao postulat na kome se zasniva cijela magnetostatika. Jednadžba (77) pokazuje da se elementarna sila $d\vec{F}$ na element vodiča duljine $d\vec{s}$ kroz koji protječe struja I u području gdje postoji magnetska indukcija $\vec{B}$, može odrediti jednadžbom

$$d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B}). \tag{78}$$

Jednadžba (78) može se izvesti iz jedn. (77), a rezultat je istraživanjâ koja je Ampère izvršio od 1820 do 1825, pa se često naziva *Ampèreov zakon sile*.

Ampèreova istraživanja, rezultati i zaključci do kojih je došao vrlo su važni za razvoj elektriciteta i magnetizma. Njegov poduži rad objavljen 1825, u kojem su sakupljeni rezultati svih njegovih istraživanja, spada, prema riječima Maxwella među najbriljantnije u nauci. Nakon svog otkrića sile između dviju struja, Ampère je nastavio istraživanja i zaključio da je magnetizam u biti električna pojava. Prema njemu nije potrebno postulirati neovisno postojanje magnetskih dipola u prirodi, nego se oni mogu smatrati manifestacijom kružnih molekularnih struja koje se gibaju u krugovima subatomskih dimenzija. Takvo gledanje čini danas jezgru teorije magnetizma. Uz to Ampère se može smatrati osnivačem elektrodinamike, jer je lučio pojave elektriciteta u mirovanju od pojava elektriciteta u gibanju i svrstao prve pod naziv elektrostatika, a druge pod naziv *elektrodinamika*.

Dalje bitno unapređenje nauke o elektricitetu učinjeno je fundamentalnim otkrićem elektromagnetske indukcije od Michaela Faradayja (1791—1867). Pošto je Oersted pokazao da elektricitet može proizvesti magnetske efekte, Faraday je 1831, šest godina nakon prvog pokušaja, uspio dokazati da magnetizam proizvodi elektricitet. Faradayjevo otkriće sastojalo se od važnog zapažanja da promjena magnetskog polja inducira u zavojnici elektromotornu silu. Svoje objašnjenje pojava induciranja elektriciteta relativnim gibanjem magnetskih linija sile (silnica) prema vodiču opisao je Faraday 1852 u referatu pročitanom pred Royal Society u Londonu. Maxwell ga je kasnije matematički opisao jednadžbom

$$e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S B_n\,\mathrm{d}S, \qquad (79)$$

gdje e predstavlja induciranu elektromotornu silu (EMS) u konturi, a integral u jednadžbi (79) predstavlja totalni magnetski tok obuhvaćen tom konturom. Jednadžba (79) izražava *Faradayjev zakon elektromagnetske indukcije*; na njemu se temelji elektrodinamika.

Nastavljajući s istraživanjem, nakon ovog početnog otkrića, Faraday iste godine 1831 uvodi prvi generator istosmjerne struje, koji se sastoji od bakarnog diska koji rotira između magnetskih polova. 1834 otkrio je pojavu samoindukcije, ne znajući da je Joseph Henry (1797—1878) u Americi učinio to otkriće već dvije godine prije.

Kao što je rečeno, spoznaje o električnim i magnetskim pojavama temeljile su se na nabojima i strujama kao izvorima, i koncentrirale pažnju na sile između električnih i magnetskih tijela. Ideje o postojanju *djelovanja na daljinu* između naboja i struja bile su povezane s takvim misliocima kao što su Franklin, Cavendish i Ampère. Osnivajući se na predstavi o djelovanju na daljinu, teorija W. E. Webera (1804—1891) u to je doba imala uspjeha u opisivanju različitih električnih i magnetskih pojava. Takav način gledanja bio je dominantan i u teoriji gravitacije. Faradayjev pristup elektromagnetizmu, naprotiv, temeljio se na ideji o fizičkoj realnosti procesâ koji se odigravaju u prostoru između električnih naboja i između vodiča kroz koje protječu struje. On je, pripisujući djelovanje kontinuumu uveo pojmove električnog i magnetskog polja. Ova ideja omogućila je Faradayu da zamijeni djelovanje na daljinu *lokalnom interakcijom* naboja i struja s poljem sila. Njegov pronicljivi način stvaranja fizikalnih predodžbi doveo ga je do slike linija magnetske sile, silnica, čiji se smjer u svakoj točki podudara sa smjerom magnetskog intenziteta. Zamišljao je da te linije povezuju molekule okolnog medija, polazeći od nabijenog vodiča ili magneta i da djeluju na druga tijela u njihovu susjedstvu. Te su veze napregnute, nastoje se skratiti i istodobno poprijeko raspršiti. Tako nabijeni vodič ili magnet nastoji privući tijela k sebi skraćujući svoje silnice.

Prema tome, po Faradayju, djelovanje među električnim nabojima prenosi se kroz kontinuum koji ih okružuje i posljedica je procesa koji se odigrava u njemu. Prostor u kojemu se događa taj proces naziva se *električno polje*. Postojanje tog polja u okolišu nabijenog tijela ispoljava se preko mehaničkih sila koje djeluju na ispitni naboj unesen u polje. Slično je i s djelovanjem između vodiča kroz koje protječu električne struje. Prostor oko takvih vodiča naziva se *magnetsko polje*; ono se može utvrditi mehaničkim silama ili, pak, elektromagnetskom indukcijom.

Voltin pronalazak prve električne baterije bio je neposredan poticaj i za studij *vođenja elektriciteta*. Vrijedne rezultate u istraživanju vođenja postigli su Humphry Davy (1778—1829) i George Simeon Ohm (1787—1854). Ovaj posljednji je 1826 formulirao rezultat eksperimentalnih istraživanja: da je jakost struje u žici koja ne sadrži nikakvu EMS proporcionalna razlici potencijala na njenim krajevima. Ta činjenica, iako ne spada u posebnu klasu zakona neovisnih o materiji, nazvana je *Ohmovim zakonom*. Zakon je u biti vrlo jednostavan, no mora se upotrebljavati s pažnjom jer nije primjenljiv za sve materijale. Za većinu metala je dobar, ali mnogi čvrsti nemetali pa čak i metali kao silicijum, ne pokoravaju se tom zakonu,oni su »neomski«. Upravo zbog njegove jednostavnosti, trebalo je proći nekih 14 godina, pa da to veliko otkriće u naučnom svijetu bude priznato i prihvaćeno. God. 1841 Joule (1818—1889) utvrđuje zakon koji povezuje struju koja protječe metalnim vodičem s toplinom razvijenom u njemu.

Veliki napredak u istraživanju električnog strujanja u vodičima zabilježen je 1847, kada je Gustav Robert Kirchhoff (1824—1887) dedukcijom izveo i formulirao svoja dva zakona, koji spadaju u grupu temeljnih zakona klasične elektromagnetske teorije. *Prvi Kirchhoffov zakon* postulira kontinuitet električne struje, a *drugi Kirchhoffov zakon* matematički je identičan sa zakonom da razlika potencijala između bilo kojih dviju točaka ima istu vrijednost po svim putovima između njih. Ti zakoni su vrlo korisni i mnogo su upotrebljavani u elektrotehnici. Imali su velikog udjela u njenom napretku i posebno su važni za razvoj teorije električnih krugova i mreža (v. članak *Električni krugovi*, TE 4, str. 50).

Primjenjujući bateriju, Davy, Oersted, Ampère, Ohm, Faraday i Henry — da nabrojimo samo nekoliko istraživača iz prve polovine XIX st.— došli su do mnoštva osnovnih ideja, teorija i uređaja. Neumann je dao matematički izraz Faradayjevim idejama indukcije, kao što je i Ampère ranije, potaknut Oerstedovim otkrićima, formulirao vezu između magnetskog polja i električne struje. Kirchhoff je proširio Ohmov rad o vođenju ustrojstvom fundamentalnih topoloških relacija između grana, čvorova i neovisnih petlji u mreži. Te relacije danas su temelj analize krugova i mreža. Istovremeno, kroz prvu polovinu XIX st., i druga polja elektrostatike i magnetostatike razvijali su dalje Poisson, Gauss i Weber, koji su slijedili ranije eksperimentalne radove Priestleyja, Coulomba i drugih. Pojam energije, spoznaja o njenoj univerzalnosti i princip njenog održanja, rezultati radova Younga, Rumforda, Joulea, R. Mayera i Helmholtza, imali su veliki utjecaj na uspostavljanje veza između mehanike, nauke o toplini i nauke o elektricitetu.

Ishodište moderne *elektromagnetske teorije* bila je spoznaja da se elektromagnetske sile mogu objasniti interakcijom naboja i polja. James Clerk Maxwell (1831—1879), direktor Cavendishovog laboratorija na univerzitetu u Cambridgeu, na osnovi Faradayjevih ideja, polazeći od fundamentalnih zakona o elektricitetu i magnetizmu, koji su do tada bili otkriveni i definitivno utvrđeni, i primjenjujući matematičke postupke razvijene od Lagrangea, postavio je 1864 prvu opću matematičku teoriju elektromagnetizma. Elektromagnetska teorija, bazirana na *Maxwellovim jednadžbama* kao postulatima, postala je egzaktna nauka. Klasična elektromagnetska teorija, zajedno s klasičnom i kvantnom mehanikom, čini jezgru suvremenog teoretskog pristupa studiju fizike. Današnja elektrotehnika, koja je preobrazila čovjekov život, plod je Faraday-Maxwellovih shvaćanja elektriciteta.

Georg F. B. Riemann objavio je 1858 pretpostavku da između električnih i magnetskih pojava, s jedne strane, i prostiranja svjetlosti, s druge strane, postoji tijesna povezanost. Vođen tom idejom izmijenio je Poissonovu potencijalnu jednadžbu i dopunio je vremenskim članom, čije rješenje daje *retardira ni potencijal*.

U to doba, kada je najviše principa elektrostatike i magnetostatike bilo već poznato, električne i magnetske pojave promatrane su kao neovisne i jedina veza između njih bila je činjenica da su struje koje proizvode polja električne po svojoj prirodi. Čitajući Faradayjev zapis »Experimental researches in electricity«, J. C. Maxwell je zaključio da prije svega njegove ideje treba prevesti na matematički jezik. Godine 1855, u svom radu »On Faraday's lines of force«, služeći se principom analogije, uspoređivao je silnice sa strujnicama idealnog fluida. Smatrao ga je imaginarnim, ali je na njega primijenio sve matematičke zakone kao da je realni fluid. Da bi dobio matematički izraz Faradayjevog zakona indukcije, koji je bio posebno interesantan, primijenio je *funkciju vektorskog potencijala* koju je uveo Neumann. Ta veličina nema ništa zajedničko s potencijalnom energijom i u stvari karakterizira uzajamnu kinetičku energiju nabojâ u gibanju. Faraday je tu funkciju nazivao elektrotoničko stanje, a Maxwell joj je dao ime elektrokinetički moment.

U nizu od tri članka, objavljena 1861, Maxwell je razradio posebnu teoriju za magnetska polja s pomoću magnetskih silocijevi kao vrtloga u eteru čije se osi rotacije podudaraju sa smjerom sile. Konačno, 1864 objavio je svoj čuveni rad »On a dynamical theory of the electromagnetic field« u kojem je postulirao da se elektromagnetske pojave događaju u eteru koji ispunjava cijeli prostor i u kojem je uveo pojam *struje pomaka*; time je otklonio jednu od najvećih poteškoća u razvoju njegove teorije. Uvođenje člana $\partial\vec{D}/\partial t$ (gustoće struje pomaka) u elektromagnetsku teoriju predstavlja bit Maxwellova doprinosa. Maxwellov naziv »struja pomaka« izrastao je iz *eterske teorije* elektromagnetizma i, budući da je pojam etera kasnije odbačen teorijom relativnosti, on danas ima samo historijsko opravdanje. Međutim, iako ono što danas nazivamo strujom pomaka nema onaj fizikalni smisao koji je tom pojmu pripisivao Maxwell, matematički izraz za Maxwellovu struju pomaka vrijedi i za struju pomaka u današnjem smislu.

Svi su osnovni zakoni elektromagnetike, izuzev Faradayjevog elektromagnetske indukcije bili izvedeni iz stacionarnih opažanja. Bio je potreban genije J. C. Maxwella da uoči nepotpunost tih zakona i da ih promijeni tako da bi uključili fizikalne pojave koje su u to vrijeme bile nepoznate, ali su kasnije otkrivene. Nedostatak je bio u Biot-Savartovom, odnosno Ampèreovom kružnom zakonu, koji je bio izveden za stacionarne struje s $\operatorname{div}\vec{J} = 0$. Potpuna jednadžba kontinuiteta za naboje ϱ i struje $\vec{J}$ treba da glasi $\operatorname{div}\vec{J} + \partial\varrho/\partial t = 0$. Odatle je bio potreban samo jedan korak da se s pomoću Gaussovog teorema dobije novi potpuni oblik Ampèreovog kružnog zakona: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$, koji sada obuhvaća i vremenski promjenljiva polja. Dodani član struje pomaka $\partial\vec{D}/\partial t$ od bitne je važnosti u brzo promjenljivim poljima. Bez njega nema elektromagnetskog zračenja. Ovakvim postupkom izveo je Maxwell skup od četiri jednadžbe, koje čine zakone teorije polja analogne Kirchhoffovim zakonima u teoriji krugova. Zbog ovog izvanrednog poteza izmijenjeni skup jednadžbi elektromagnetske teorije poznat je danas pod nazivom *Maxwellove jednadžbe*. One čine ishodišnu točku za razmatranje svih problema koji obuhvaćaju elektromagnetske pojave i predstavljaju znanstvenu osnovu današnje elektrotehnike.

U Maxwellovom djelu »A treatise on electricity and magnetism« objavljenom 1873, radu koji je imao presudan utjecaj na sve kasnije objavljene tekstove, sistematski je izložen pregled cjelokupne teorije elektromagnetizma. Posebno poglavlje posvetio je elektromagnetskoj teoriji svjetlosti, u kojem je s pomoću jednadžbi polja pokazao da se elektromagnetski poremećaji prostiru kao transverzalni valovi i da im je brzina širenja $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, tj. da je jednaka brzini prostiranja svjetlosti. (U zraku $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.) Na temelju toga Maxwell je zaključio da je i svjetlost elektromagnetska pojava koja se širi kroz prostor u skladu sa zakonima elektromagnetizma. Eksperimenti su kasnije pokazali potpuno slaganje između svjetlosnih i elektromagnetskih valova.

Maxwellovi radovi i teorija svratili su na se pažnju fizičara i podstakli mnoga teoretska i eksperimentalna istraživanja o elektromagnetizmu kroz drugu polovinu XIX stoljeća. Prije svega postojala je ozbiljna potreba za eksperimentalnom provjerom same Maxwellove teorije. To je uočio Helmholtz i na njegov poticaj njegov je učenik Heinrich Rudolf Hertz (1857—1894) potvrdio (1888) postojanje elektromagnetskih valova služeći se oscilatorom i rezonatorom. Za tu svrhu Hertz je napravio oscilator s iskrištem, s pomoću kojeg je u okolnom prostoru proizvodio Maxwellove elektromagnetske valove. Uveo je i »Hertzov vektor« kao matematičko pomagalo kojim se koristio da poveže struje u njegovom oscilatoru i polja u elektromagnetskim valovima. Tim pokusima i nizom drugih, koji su slijedili, bila je potvrđena teorija elektromagnetizma koju je izgradio Maxwell na osnovi Faradayjevih opažanja.

Iznenađujuća je činjenica, da suma ukupnog ljudskog znanja koje se odnosi na makroskopski elektricitet i magnetizam može biti sabrana u samo nekoliko jednadžbi i definicija. Elektrostatika se temelji na Coulombovom zakonu, magnetostatika na Biot-Savartovom, a elektromagnetizam na Faradayjevom. Svi oni su sadržani u Maxwellovim jednadžbama; njima se radi potpunosti dodaju još jednadžba za Lorentzovu silu, kojom elektromagnetsko polje djeluje na naboj u gibanju i tri empirijski određene relacije konstitucije, u kojima je za makroskopske tvari sadržan dinamički odgovor agregata atomâ materije na interakciju s poljem. Pristup problemima elektrotehnike je nakon toga uglavnom deduktivan, sve slijedi iz fundamentalnih Maxwellovih jednadžbi polja. Međutim, još više iznenađuje činjenica da se cjelokupna elektromagnetska teorija, uz pomoć specijalne teorije relativnosti, može razviti iz jednog jedinog postulata temeljenog na Coulombovom zakonu. Rezultati u magnetizmu i Biot-Savartov zakon tada su posljedica toga postulata, a Lorentzov zakon sile iskazuje se kao relativistička transformacija Coulombovog zakona. Iz Lorentzovog zakona sile lako je izvesti Faradayjev zakon indukcije i Maxwellove jednadžbe kao dodatne posljedice. Takvu mogućnost pristupa elektromagnetizmu demonstrirao je prvi puta 1912 Leigh Page, profesor na Yaleovom univerzitetu. Činjenica da je klasična teorija elektromagnetizma, kao znanstvena osnova elektrotehnike, bazirana na makroskopskom pristupu elektricitetu i magnetizmu dopušta da se zanemare granularne strukture materije i naboja, te omogućuje veliko pojednostavnjenje teorije. I dok se ograničenja koja se postavljaju klasičnoj Newtonovoj mehanici odnose na brzinu gibanja, na udaljenosti i na veličinu mase, za sve zakone klasične Maxwellove elektromagnetske teorije »razumne granice« za makroskopski su pristup dimenzije i naboj atoma i frekvencije reda veličine frekvencije svjetlosti.

Dalji razvoj elektromagnetske teorije, nastojanja da se obuhvate i relativistički efekti, povezan je imenima Hendrika Antoona Lorentza (1853—1928), H. Minkowskog (1864—1909) i A. Sommerfelda (1868—1951). Svojstva elektromagnetskih valova u odnosu na njihovu interakciju s materijom bitno su ovisna o valnoj duljini λ ili frekvenciji f, koji su povezani s brzinom svjetlosti odnosom $c = \lambda \cdot f$. Opis interakcije zračenja i materije zahtijeva kvantnu modifikaciju teorije elektromagnetskih valova. Za mnoge svrhe svjetlost se može prikazati tokom svjetlosnih kvanta, čija gibanja su statistički određena gibanjem udruženog klasičnog elektromagnetskog vala. Kvanti i njihova vjerojatnost ne igraju praktički nikakvu ulogu u teoriji radio-valova, čak ni kod mikrovalova. Zanemarujući kvante dolazi se u područje klasične elektromagnetske teorije, koja je unutar svojih granica potpuno točna.

Atomizam elektriciteta bio je kao sastavni dio uključen u Faradayjeve eksperimente o elektrolizi 1833 godine. God. 1881 G. Johnstone Stoney (1826—1911) izložio je atomsku teoriju elektriciteta, a 1891 godine upotrijebio je riječ *elektron* kao naziv »prirodne jedinice elektriciteta«. H. A. Lorentz je 1895 postavio teoriju elektromagnetskih i optičkih pojava, koja se s jedne strane oslanja na Maxwellovu teoriju, a s druge strane na predstavu o postojanju elementarnih električnih naboja povezanih s česticama materije. Ova teorija nakon otkrića elektrona nazvana je *elektronska teorija*. J. J. Thomson (1856—1940) je 1897 eksperimentalno otkrio elektron i utvrdio omjer njegovog naboja prema njegovoj masi. Ako je za XIX st. svojstveno da se razvila atomska teorija materije, za naše stoljeće karakteristična je crta strukturna analiza materije na dijelove manje od atoma. Elektron je prva subatomska čestica koja je bila identificirana. U prvoj četvrtini XX st. općenito je smatran sitnim dijelom materije s poznatom masom i poznatim nabojem, a atom je predstavljen kao sićušni sunčani sustav u kojem se elektroni gibaju u orbitama oko teške pozitivno nabijene jezgre. God. 1924 započeo je skup novih razvoja u dinamici atomskih fenomena poznatih kao kvantna mehanika, kvantna dinamika ili valna mehanika. Kvantna teorija valnih polja spaja u jedinstvenu cjelinu korpuskularna i valna svojstva materije sa specijalnom teorijom relativnosti, koju je 1905 razvio Albert Einstein (1879—1955). Kvantna teorija je područje fizike koje zadire najdublje u osnovne zakone prirode. Te nove ideje razvili su M. Planck (1858—1947), L. de Broglie (1892—), E. Schrödinger (1877—1961), W. Heisenberg (1901—), P. A. M. Dirac (1902—) i drugi. Oni su formulirali drugačiju sliku atomske strukture i sugerirali da elektron može poprimiti svojstva vala isto kao i čestice.

U vremenu kroz koje su nastajala ova otkrića i teorije, prirodno je da su se razvijala različita područja primjene. Nicala je elektroindustrija, razvijala se elektroenergetika, širile telekomunikacije i mnoga druga područja elektrotehnike, koj su na primjer sredinom ovog stoljeća zahtijevala u cijelom svijetu oko 40 milijardi kilovatsati električne energije godišnje. Sva ova područja sa njihovim mnogobrojnim primjenama uzrokovala su nagli razvoj elektronike, nove grane elektrotehnike koja je kroz razvoj poluvodiča dobila vitalni značaj.

U daljem tekstu bit će predstavljena makroskopska elektromagnetska teorija, koja predstavlja znanstvenu osnovu elektrotehnike, polazeći od fundamentalnih Maxwellovih jednadžbi i kroz pristup preko pojma polja, u obliku prilagođenom za inženjersku primjenu.

OSNOVE ELEKTROMAGNETSKE TEORIJE

Elektromagnetska se teorija temelji na Maxwellovim jednadžbama i pojmu polja. Stoga treba definirati osnovne veličine za predstavljanje polja, opisati Maxwellove jednadžbe koje povezuju polja s nabojima i strujama, uvesti elektromagnetske potencijale i izvesti različite oblike diferencijalnih i integralnih jednadžbi za opisivanje elektromagnetskih pojava, te na kraju utvrditi energetske odnose u elektromagnetskim poljima.

Maxwellove jednadžbe

Elektromagnetsko polje proizvode struje i nestacionarni naboji. Ograničimo li se na makroskopske učinke polja, mogu se raspodjele struja i naboja u prostoru, unatoč korpuskularnoj prirodi elektriciteta, opisati funkcijama koordinata i vremena koje su neprekinute i imaju neprekinute derivacije u ordinarnim točkama.

Pod ordinarnom točkom razumijeva se točka u čijem su okolišu fizikalna svojstva tvari nepromijenjena. Nisu ordinarne, prema tome, napose točke na rubnim plohama materijalnih tijela.

Gustoća naboja ϱ u nekoj točki je srednja vrijednost naboja u jedinici volumena u okolišu te točke. Prosječna je vrijednost naboja u elementu volumena tada

$$\delta q = \varrho\, \delta V, \tag{80}$$

gdje je δV volumen malog prostornog elementa, koji, iako malih dimenzija, treba da bude dovoljno velik da sadrži velik broj atomâ.

Volumna gustoća naboja može se računati prema jednadžbi

$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Gibanje naboja čini struju, čija se jakost definira količinom naboja koja u jedinici vremena proteče kroz plohu površine δS u okolišu promatrane točke

$$\delta I = \vec{J}\,\vec{n}\,\delta S, \tag{81}$$

gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normalan na element plohe δS; uzima se da je pozitivan ako je usmjeren prema van iz zatvorene plohe.

Raspodjela struje karakterizirana je vektorom gustoće struje $\vec{J}$, koji je određen gustoćom naboja i srednjom brzinom gibanja $\vec{v}$

$$\vec{J} = \varrho \vec{v}. \tag{82}$$

Struja kroz plohu površine S može se izračunati jednadžbom

$$I = \int_S \vec{J}\vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{83}$$

Iznos plošne gustoće struje računa se prema jednadžbi

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

Elektromagnetsko polje određuju u općem slučaju četiri vektora: $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$. Vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ definiraju se s pomoću mehaničke, tzv. *Lorentzove sile*, kojom električno i magnetsko polje djeluju na naboj q koji se giba u praznom prostoru brzinom $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{84}$$

Ako je naboj q konačan i dovoljno malen da ne djeluje na izvor polja, električna je sila na njega određena prvim članom desne strane definicione jednadžbe (84), te ona iznosi $q\vec{E}$. Vektor $\vec{E}$ naziva se *jakost električnog polja* i računa se prema jednadžbi

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{pri} \quad \vec{v} = 0.$$

Kako se naboj q giba brzinom $\vec{v}$, postoji i dodatna sila magnetskog polja $q\vec{v} \times \vec{B}$. Vektor $\vec{B}$ naziva se *gustoća magnetskog toka*, a vrlo često se upotrebljava i naziv *magnetska indukcija*. Na taj način uspostavljena je neposredna veza između mehaničkih sila i vektorâ određenih da opišu strukturu polja. Upotrijebljeni su zakoni za sile, jer one direktno djeluju na naša fizička osjetila.

Preostala dva vektora $\vec{D}$ i $\vec{H}$ u neposrednoj su vezi sa izvorima elektromagnetskog polja. Fundamentalno je svojstvo vektora $\vec{D}$, nazvanog *gustoćom električnog toka*, njegova povezanost s gustoćom slobodnog naboja ϱ. Definiciona jednadžba (103 a), tj. njen integralni oblik (173 c), pokazuje da taj vektor efektivno mjeri gustoću nastalog električnog toka i da je brojno jednak naboju. Zbog njegovog posebnog značenja u području dinamičkih elektromagnetskih polja i valova, Maxwell ga je nazvao *vektorom električne indukcije*. Treba uočiti bitnu razliku među vektorima $\vec{D}$ i $\vec{E}$: makroskopski je vektor $\vec{E}$ srednja vrijednost mikroskopskog električnog polja, dok je vektor $\vec{D}$ definiran isključivo unutar makroskopskog pristupa. U mikroskopskom pristupu polju nema potrebe za definiranjem vektora $\vec{D}$. Vektor $\vec{H}$, nazvan *jakošću magnetskog polja* ili često *magnetizirajućom silom* prema jednadžbi (85), odnosno (173 a), takav je da njegova ukupna vrijednost po zatvorenoj krivulji (*magnetomotorna sila*) efektivno mjeri totalnu struju obuhvaćenu tom krivuljom.

Potrebno je pretpostaviti da su vektori $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$ konačni, da su neprekinute funkcije koordinata i vremena i da imaju neprekinute derivacije u svim ordinarnim točkama polja. O njihovim svojstvima na rubnim plohama materijalnih tijela bit će govora kasnije (v. str. 156). Maxwell je postulirao da u ordinarnim točkama u prostoru, u sustavu koji se ne giba, elektromagnetsko polje zadovoljava jednadžbe

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{85}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{86}$$

Nazivamo ih *Maxwellovim jednadžbama*. One čine bazu elektromagnetske teorije. Jednadžba (85) pokazuje da je magnetsko polje intenziteta H izgrađeno zajednički gustoćama provodnih struja $\vec{J}$ i pomačnih struja $\partial\vec{D}/\partial t$. Uvođenje člana $\partial\vec{D}/\partial t$ dovelo je do ideje o prostiranju elektromagnetskog polja konačnom brzinom. Jednadžba (86) utvrđuje da je iznos smanjenja gustoće magnetskog toka $-\partial\vec{B}/\partial t$ vektorski izvor električnog polja jakosti $\vec{E}$. Taj izvor nije ni naboj ni struja, koje smatramo »primarnim« izvorima elektromagnetskog polja.

Maxwellovi postulati opravdani su time što su njihove konsekvencije u skladu s eksperimentima kako u parcijalnim slučajevima elektrostatike, magnetostatike, magnetskih efekata stacionarnih i sporo promjenljivih struja (gdje pojedini članovi jednadžbi mogu biti zanemareni) tako i u slučajevima brzo promjenljivih struja i širenja promjena, gdje svi članovi jednadžbi moraju biti uzeti u obzir.

Jednadžba kontinuiteta

Iz jednadžbe (83) može se, po analogiji između gustoće struje i gustoće mase u hidrodinamici, izvesti jednadžba

$$\oint_S \vec{J}\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}V. \tag{87}$$

Ovo je integralni oblik *jednadžbe kontinuiteta* i ta relacija izražava održanje naboja u makroskopskim razmjerima. Ako je ploha integracije neovisna o vremenu i integral konvergentan, upotrebom teorema divergencije dobiva se diferencijalni oblik jednadžbe kontinuiteta

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}. \tag{88}$$

Jednadžba (88) označava održanje naboja u okolišu točke i zajedno s Maxwellovim jednadžbama čini sustav jednadžbi koje određuju elektromagnetsko polje.

Makroskopska svojstva materije

Svojstva materijala izravno utječu na odnose u elektromagnetskom polju. Budući da jednadžbe (85), (86) i (88) ne određuju u cijelosti odnose među veličinama polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$, te strujama $\vec{J}$ i nabojima ϱ koji se također pojavljuju u tim jednadžbama, potrebno je uvesti dodatne relacije za interakciju polja i materije.

Materija se u elektromagnetskom polju ponaša na određen način. Stoga je potrebno opisati prirodu sredstva koje se promatra, jer metode rješavanja problema polja čvrsto ovise o tome da li se i kako karakteristike materije u prostoru koji je od interesa mijenjaju u ovisnosti o mjestu, izvorima naprezanja itd. Materija je *homogena* ako joj svojstva ne ovise o mjestu, inače je *nehomogena*. Praktički važan nehomogen medij je atmosfera. Materija je *izotropna* ako je njeno ponašanje neovisno o smjeru bilo kojeg vektora polja; ako odnosi ovise o smjerovima polja, ona je *anizotropna*. Materija je *linearna* ako relacije između fizikalnih veličina koje karakteriziraju promatranu pojavu ne ovise o njihovim iznosima. Konačno, materija može imati i vremenski nepostojana svojstva.

Materijale s kojima ćemo imati posla pri analiziranju i rješavanju problemâ polja smatrat ćemo po pravilu homogenim, izotropnim, linearnim i vremenski postojanim.

Pođimo od eksperimentalno utvrđene činjenice da u bilo kojoj točki u polju, u vakuumu ili unutar materije, vektor $\vec{D}$ može biti predstavljen kao funkcija od $\vec{E}$ i vektor $\vec{B}$ kao funkcija od $\vec{H}$. Oblik tih funkcionalnih veza ovisi jedino o fizikalnim svojstvima tvari u okolišu promatrane točke. U vakuumu se vektor $\vec{D}$ od vektora $\vec{E}$ i vektor $\vec{B}$ od vektora $\vec{H}$ razlikuje samo konstantnim faktorom:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \tag{89 a, b}$$

gdje su ε_0 i μ_0 konstante kojima vrijednosti ovise o prihvaćenom sustavu jedinica. U jedinicama racionaliziranog sustava temeljenog na četvorci jedinicâ metar, kilogram, sekunda i amper (MKSA) numerička je vrijednost konstante μ_0 $0{,}4\,\pi \cdot 10^{-6}$ H/m, što određuje i iznos konstante ε_0 jer je utvrđeno da je brzina svjetlosti u vakuumu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299\,792{,}5 \pm 0{,}4\ \mathrm{km/s} \approx 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}.$$

Prema tome je

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}.$$

U izotropnim materijalima koji nisu feromagnetski, $\vec{D}$ je paralelan sa $\vec{E}$, a $\vec{H}$ je paralelan sa $\vec{B}$. Odnosi između vektorâ su često linearni, pa imamo

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}. \qquad (90\,\mathrm{a, b})$$

Bezdimenzioni odnosi

$$K_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \mathrm{i} \quad K_m = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad (91\,\mathrm{a, b})$$

neovisni su o izboru sustava jedinica i obično se nazivaju specifične induktivne kapacitivnosti. U homogenim sredstvima te su veličine konstantne i u tom slučaju K_e označuje dielektričnost (dielektričnu konstantu), a K_m označuje permeabilitet. Radi jednostavnosti bit će ti nazivi upotrebljavani i onda kada sredstvo nije homogeno. Općenito su specifične induktivne kapacitivnosti skalarne funkcije položaja i karakterizirane su elektromagnetskim svojstvima materije.

Eksperimentima je utvrđena valjanost odnosa (90 a, b) i (91 a, b) za više plinova, tekućina i čvrstih materijala ako električno polje nije preveliko. Izmjereni su, nadalje, iznosi dielektričnosti i permeabiliteta za različite materijale, pa se ti podaci mogu naći u priručnicima i drugoj literaturi (v. također članak *Elektrotehnički materijali*). Dielektričnost nije nikad manja od jedinice. U plinovima ona iznosi ~ 1, u zraku 1,0006, a za čvrste tvari ima vrijednosti od 2 do 10. Dielektričnost tekućina znatnije varira, od 2 za petrolej do 81 za vodu. Permeabilitet može biti veći ili manji od jedan; ako je veći od jedan, sredstvo je *paramagnetično*, a ako je manji od jedan, ono je *dijamagnetično*. U većini paramagnetičnih i dijamagnetičnih sredstava približno je jednak jedan. Za aluminijum je 1,00002, a za bakar 0,999991. K_e i K_m variraju kada se mijenjaju veličine kao što su gustoća i temperatura sredstva i frekvencija polja, ali mi ćemo te promjene u daljem tekstu zanemariti i upotrebljavati približne vrijednosti.

U anizotropnim materijalima svojstva se mijenjaju na različite načine duž različitih smjerova u odnosu na točku promatranja. Vektor $\vec{D}$ paralelan je vektoru $\vec{E}$ i vektor $\vec{B}$ vektoru $\vec{H}$ samo duž određenih osi. Ako pretpostavimo da su odnosi još linearni, tada u materijalima kao što su dielektrici sa kristalnom strukturom imamo

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z, \end{aligned} \qquad (92)$$

gdje su D_x, D_y, D_z kartezijske komponente vektora $\vec{D}$. Koeficijenti ε_{ij} tih linearnih transformacija komponente su simetričnog tenzora $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, pa se sustav jednadžbi (92) može pisati ovako:

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}. \qquad (93)$$

i slično za magnetsko polje

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \vec{H}. \qquad (94)$$

Razlika između mikroskopskog i makroskopskog pristupa je najizraženija pri interpretaciji parametara $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ i $\overleftrightarrow{\mu}$ i njihovih tenzorskih ekvivalenata. Naš pristup, koji treba da ostane samo fenomenološki, ne dopušta nam da se ovdje upustimo u dublju analizu. Na ovaj način je postignuta svrha tim što je svaka supstancija elektromagnetski karakterizirana pomoću minimalnog broja parametara. Ovisnost tih parametara o fizičkim varijablama kao što su gustoća, temperatura i frekvencija utvrđuje se eksperimentima.

Električna i magnetska polarizacija. Za fenomenološko objašnjenje polarizacije poslužit će nam vrlo pojednostavnjena atomska teorija materije. Pretpostavimo atom oko čije se teške pozitivno nabijene jezgre polumjera između 10^{-15} i $3 \cdot 10^{-14}$ m u eliptičkim orbitama gibaju negativno nabijeni elektroni. Polumjer elektrona je reda veličine 10^{-15} m. Srednji orbitalni polumjeri su reda veličine 10^{-10} m. Udaljenosti između središta susjednih atoma dosežu od $\sim 10^{-10}$ m (u čvrstim materijalima) do 10^{-8} m (u plinovima pod normalnom temperaturom i tlakom). Iz omjera dimenzijâ čestica i elektronskih orbita očito je da je čak i u čvrstim materijalima slobodan prostor golem u poređenju s prostorom što ga zauzimaju elektroni i jezgre. Pri makroskopskom promatranju polja u području koje sadrži materiju nismo zainteresirani za promjene elektromagnetskog polja u međuatomskom prostoru (to je domena mikroskopskog istraživanja). Zanimaju nas samo vremenske i prostorne srednje vrijednosti polja preko volumenâ i intervalâ vremena koji su vrlo mali u poređenju s našim mjernim uređajima, ali veliki u atomskim mjerilima.

Naboji udruženi s atomima materije mogu biti klasificirani kao slobodni i vezani naboji. U čvrstim tvarima vezani naboji su vezani za mjesto nuklearnim ili atomskim silama. Pod djelovanjem narinutog elektromagnetskog polja ili zbog mehaničkih naprezanja u materijalu, oni se mogu relativno pomaknuti za red veličine dimenzija atoma. Ako nema narinutog polja ili naprezanja, pozitivni i negativni vezani naboji neutraliziraju međusobno svoje efekte. Zato kažemo da u neutralnoj materiji ne postoji makroskopsko električno polje. Gibanja vezanih naboja ograničena su na pomake unutar dimenzija atoma, slobodni naboji, naprotiv, mogu se gibati (strujiti) unutar materije od jednog do drugog elementa volumena, pa i izaći iz materije.

Narinuto vanjsko elektromagnetsko polje uzrokuje preraspodjelu nabojâ i strujâ u atomima materije, te u njemu ona više nije neutralna. Za tvar čija je raspodjela naboja poremećena i koja nije u normalnom stanju kaže se da je *električno ili magnetski polarizirana*. Mjera stupnja polarizacije takvih materijala jesu makroskopske veličine koje se mogu definirati uvođenjem pomoćnih pojmova, električnih i magnetskih dipola, čiji se dipolni moment s obzirom na točku $\vec{r}$ u prostoru definira, za statičku raspodjelu naboja, jednadžbom

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_V (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \varrho(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}V',$$

a za stacionarnu raspodjelu struja jednadžbom

$$\vec{m}(\vec{r}) = \int_V (\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{J}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}V'.$$

Tada je gustoća dipolnih momenata, električnih $\vec{P}$ i magnetskih $\vec{M}$, određena izrazima

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma \vec{p}_i}{\Delta V}, \qquad \vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma \vec{m}_i}{\Delta V}.$$

Ove vektorske veličine nazivaju se također *vektorom električne polarizacije* $\vec{P}$ i *vektorom magnetske polarizacije* $\vec{M}$. Oni predstavljaju dipolni moment polarizirane materije u jedinici volumena.

Kako poremećaj vezanih naboja u neutralnoj materiji izazvan vanjskim poljem i nazvan polarizacija povratno djeluje na samo narinuto polje, rezultantno stanje nastalo interakcijom polja i materije u promatranom prostoru može se opisati jednadžbama

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (95)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}. \qquad (96)$$

U vakuumu vektori polarizacije iščezavaju. U izotropnom sredstvu iz jednadžbi (90 a, b), (95) i (96) slijedi

$$\vec{P} = (K_e - 1)\,\varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (97)$$

$$\vec{M} = (K_m - 1)\vec{H}. \qquad (98)$$

Veličine

$$\lambda_e = K_e - 1 \quad \mathrm{i} \quad \lambda_m = K_m - 1, \qquad (99\,\mathrm{a, b})$$

jesu *električna* i *magnetska susceptibilnost*. U anizotropnom sredstvu susceptibilnosti su simetrični tenzori.

Već spomenute polarizacije ovise o narinutom polju i mogu se nazvati inducirane polarizacije. U izvjesnim feromagnetskim materijalima linearni odnosi između $\vec{B}$ i $\vec{H}$ su narušeni. Za dani $\vec{H}$ vrijednosti od $\vec{B}$ ovise o magnetskoj, mehaničkoj i termičkoj prethistoriji. Takvo sredstvo može imati vlastito magnetsko polje i u odsutnosti narinutog polja, pa se kaže da je ono *permanentno* magnetizirano. Ostanemo li pri definiciji polarizacije $\vec{M}$ prema jedn. (96), ona mora sadržavati sada dva bitno različita dijela, jedan koji je polarizacija i koji postoji i u odsutnosti vanjskog polja, i drugi koji je inducirana polarizacija i koji je ovisan o narinutom polju $\vec{H}$. Ukoliko se ne može izbjeći razmatranje feromagneta, najčešće se nastoji njihovo ponašanje prikazati jednadžbom (90 b) s konstantnim μ, što zadovoljava pri malim promjenama $\vec{B}$ i $\vec{H}$.

Spomenimo još i *ferite*, koji su, za razliku od feromagneta, karakterizirani činjenicom da interakcione sile u njima nastoje da susjedne magnetske momente učine antiparalelnim. Spontani magnetizam tog tipa nazvan je *ferimagnetizmom* i pojavljuje se u oksidima i feritima. Prirodan ferit je magnetit, a postoje i mnogi sintetski feriti (v. *Elektrotehnički materijali*).

Vodiči. Preostaje još da se Maxwellovim jednadžbama doda treća i posljednja empirička relacija između gustoće struje u vodljivom materijalu i polja. U čvrstim izotropnim tvarima i slabo ioniziranim otopinama taj odnos je linearan

$$\vec{J} = \varkappa \vec{E}. \tag{100}$$

Veličina $\varkappa$ zove se specifična (električna) vodljivost i jednadžba (100) poznata je kao *Ohmov zakon u elementarnom obliku.*

Zamislimo stacionarnu raspodjelu struja $\vec{J}$ po volumenu vodljivog materijala. Tada se, zbog bezdivergentnog karaktera strujanja, ono može predstaviti strujnicama. Označimo sa 1 i 2 dvije točke na jednoj strujnici, čiji je element duljine $\vec{ds}$, a sa S ploštinu poprečnog presjeka u ravnini normalnoj na strujnicu. Ploština S ne mora biti beskonačno malena, ali treba pretpostaviti da je upravo tolika da gustoća struje $\vec{J}$ po njoj bude konstantna. Tada je $S\vec{n}\vec{J}\cdot\vec{ds} = I\,\vec{ds}$, pa se pomoću (100) dobiva

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\varkappa}\cdot\vec{ds} = I\int_1^2 \frac{ds}{\varkappa S},$$

Označimo li sa U razliku potencijala u stacionarnom polju između točaka 1 i 2, može se gornji izraz pisati u obliku Ohmova zakona

$$U = I\cdot R,$$

gdje koeficijent

$$R = \int_1^2 \frac{ds}{\varkappa S}.$$

predstavlja otpor između točaka 1 i 2 u stacionarnom strujnom polju.

Pod vođenjem se razumijeva prijenos naboja od jednog do drugog područja. Svi materijali pokazuju, do izvjesnog stupnja, sposobnost vođenja. Razlika između dobrih i loših vodiča je graduelna. Najbolji vodiči su metali; oni imaju kristalnu strukturu i sadrže slobodne elektrone koji se relativno lako gibaju kroz kristalnu rešetku. Za najveći broj metala $\varkappa$ je pri sobnoj temperaturi reda veličine 10^7 S/m. Vrijednost veličine $\varkappa$ općenito se linearno mijenja s temperaturom u opsegu od nekoliko stotina stupnjeva. Neki metali, kao olovo, živa i kositar, pokazuju nagli porast vodljivosti pri temperaturi reda veličine 5 K. Ta pojava je poznata kao *supravodljivost* (v. članak *Elektrotehnički materijali*).

Parafinska ulja imaju specifičnu vodljivost reda veličine 10^{-11} S/m. Ona se upotrebljavaju kao izolatori. Otopine elektrolita (kiselina, baza ili soli) u vodi imaju specifičnu vodljivost oko 10^2 S/m i struja kroz njih zadovoljava jednadžbu (100). (Vidi članak *Elektrokemija.*) Čiste tekućine kao alkohol i voda imaju specifičnu vodljivost oko 10^{-3} S/m i ne mogu biti upotrijebljene ni kao izolatori ni kao dobri vodiči. Fenomen vođenja u plinovima vrlo je zamršen i isključit ćemo ga iz razmatranja (v. članak *Električna pražnjenja u plinovima*).

Elementi kao silicijum, germanijum i selen su izolatori na niskim, a vodiči na visokim temperaturama; takve elemente nazivamo *poluvodičima* (v. *Elektronika, sastavni dijelovi*, TE 4, str. 471 i članak *Poluvodiči*).

Preostaje još da se upozori na važnu činjenicu da ne može biti permanentne raspodjele slobodnih naboja u vodljivom sredstvu (v. dalje jednadžbu 109).

Potpuni sustav jednadžbi polja

Osnovni je zadatak u primijenjenoj teoriji elektromagnetizma da se riješi elektromagnetsko polje, tj. da se riješi odgovarajući sustav jednadžbi (kojemu su Maxwellove jednadžbe osnovni i nerazdvojni dio) primijenjen na određena zadana stanja. Na osnovi dosadašnjih razmatranja taj zadatak se formulira kako slijedi.

Neka se rješava elektromagnetsko polje u prostoru koji je, općenito, ispunjen materijom. Za promatrani prostor i materiju uvedimo neke uvjete. Prije svega prostor može biti ograničen ili neograničen (kad se njegove granice nalaze u beskonačnosti), ali se on zajedno s materijom koja se nalazi u njemu ne smije gibati u odnosu prema referentnom koordinatnom sustavu, što ima za posljedicu da se ni granice toga prostora ne mijenjaju i da nisu ovisne o vremenu. Ako bi bilo drugačije, tj. ako bi se prostor gibao, pojavili bi se efekti koji bi zahtijevali da se uvedu novi, dodatni članovi u Maxwellove jednadžbe. Za materiju se pretpostavlja da se njeno djelovanje na elektromagnetsko polje može izraziti jednadžbama (90 a, b) i (100) i da su ti odnosi eksperimentalno utvrđeni i poznati u zadanom slučaju.

Ako su ti uvjeti ispunjeni, onda su u tom prostoru — kojim teku struje gustoće $\vec{J}$ i u kojem postoje naboji raspodjele ϱ i egzistira elektromagnetsko polje određeno vektorima $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$ — odnosi među osnovnim veličinama dani sustavom jednadžbi

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \tag{101 a, b, c}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\qquad \vec{B} = \mu\vec{H},\qquad \vec{J} = \varkappa\vec{E}. \tag{101 d, e, f}$$

Sustav (101 a ⋯ f) sastoji se od dviju glavnih Maxwellovih jednadžbi koje su vektorske i koje se mogu pisati u obliku šest skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda; od skalarne parcijalne diferencijalne jednadžbe kontinuiteta i, ako je materija izotropna, od tri vektorske ordinarne jednadžbe konstitucije, koje se mogu pisati u obliku devet skalarnih jednadžbi. Ukupno se, dakle, sustav sastoji od 16 jednadžbi u kojima se pojavljuje pet vektorskih funkcija $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ i $\vec{J}$ i jedna skalarna funkcija ϱ, koje treba odrediti. Dakle, 16 jednadžbi i 16 skalarnih nepoznatih veličina, što znači da je sustav jednadžbi (101) potpun i određen.

Da bi se iz općih dobila jedinstvena partikularna rješenja sustava (101), za svaku posebnu zadaću određivanja elektromagnetskog stanja moraju biti zadani svi potrebni *rubni* i *početni uvjeti* (v. *Diferencijalne jednadžbe, parcijalne*). Broj potrebnih rubnih uvjeta varira od slučaja do slučaja. Ovisi o obliku prostora unutar kojeg se promatra polje i o raspodjeli veličina $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ i ϱ, te o načinu na koji je zadana ta raspodjela po rubnim plohama. Simetrija oblika zadanog prostora i izbor koordinatnog sustava također utječu na broj potrebnih rubnih uvjeta. Rubni uvjeti su najčešće kombinirani s početnim uvjetima, tj. zadaje se određena raspodjela veličina $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ i ϱ po rubnim plohama u jednom trenutku promatranja. To ne mora biti i nije uvijek tako zadano. Ovdje, međutim, treba posebno istaći da u Maxwellovoj elektrodinamici, kao i u Newtonovoj mehanici, vlada strogi *princip kauzalnosti.* To znači, ako u nekom početnom trenutku t_1 po volji zadamo početno stanje, Maxwellove jednadžbe određuju jednoznačno stanje polja u bilo koje kasnije vrijeme t. Stoga se početni uvjeti propisuju za samo jedan trenutak t_1, a potreban broj početnih uvjeta se dobije na taj način da se zada potreban broj funkcija $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ i ϱ, u ovisnosti o varijablama x_1, x_2, x_3, t_1, ili određen broj njihovih prvih ili viših derivacija po vremenu, zadanih također u istom početnom trenutku t_1.

Sustav jednadžbi (101) djelomično ćemo modificirati primjenom vektorskog računa i predstaviti ga u obliku koji je češće u upotrebi. Uvedimo stoga dvije sporedne Maxwellove jednadžbe tako da na dvije glavne Maxwellove jednadžbe (85) i (86) primijenimo operaciju divergencije kombinirano s jednadžbom kontinuiteta (88), nakon čega se dobivaju relacije

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\varrho + \operatorname{div}\vec{D}) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{B}) = 0\,. \qquad (102\text{ a, b})$$

One kazuju da su izrazi u zagradama u obje jednadžbe konstantni. Ako pretpostavimo da u beskonačno dalekom vremenu nije bilo početne uzbude polja, konstante su jednake nuli, pa dobivamo:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (103\text{ a, b})$$

Jednadžba (103 a) naziva se *Gaussov zakon*, pisan u diferencijalnom obliku, a jednadžba (103 b) kazuje da vektor magnetske indukcije $\vec{B}$ nema ni izvora ni ponora, tj. da ne postoje magnetski naboji. Ove dvije jednadžbe su tražene *sporedne Maxwellove jednadžbe*. Pripišemo li ih sustavu (101), uz ispuštanje jednadžbe kontinuiteta (88), koja je već sadržana u njima, dobiva se novi sustav jednadžbi

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (104\text{ a, b})$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad (104\text{ c, d})$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{J} = \varkappa\vec{E}. \qquad (104\text{ e, f, g})$$

Ovaj sustav, premda sadrži jednu jednadžbu više, predstavlja samo drugi oblik već prije opisanog potpunog sustava jednadžbi za proračun elektromagnetskih polja. Sve prije rečeno vrijedi i u ovom slučaju.

Valne jednadžbe u homogenim materijalima

Analiza i rješavanje polja umnogome se pojednostavnjuju ako se uvedu novi dodatni uvjeti u odnosu na materiju koja ispunjava prostor od interesa. Bavit ćemo se stoga posebno sa slučajem da se elektromagnetsko polje analizira u linearnom, homogenom, izotropnom materijalu (koji će se u daljem tekstu jednostavno nazivati homogeni materijal) u kojem su ε, μ, $\varkappa$ jednoznačno eksperimentalno određene konstante. U tom se slučaju, ako se (90 a, b) i (100) uvrste u Maxwellove jednadžbe (85), (86) i (103), potpuni sustav jednadžbi polja reducira na samo četiri parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varkappa\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad (105\text{ a, b})$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}. \qquad (105\text{ c, d})$$

Ponajprije možemo utvrditi da je ovaj sustav jednadžbi izveden iz potpunog sustava jednadžbi polja i da prema tome u cijelosti određuje elektromagnetsko polje u promatranom prostoru koji je ispunjen homogenim materijalom, ako su zadani rubni i početni uvjeti. Zatim, on je i jednostavniji, jer sadrži manji broj jednadžbi, tj. dvije vektorske i dvije skalarne diferencijalne jednadžbe, što u trodimenzionalnom prostoru čini ukupno osam skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U sustavu se pojavljuje šest skalarnih funkcija, komponenti od $\vec{E}$ i $\vec{H}$, koje treba odrediti. Na prvi pogled bi se moglo zaključiti da je sustav (105) preodređen i da su posljednje dvije jednadžbe u njemu suvišne. Da to nije tako pokazuje *Helmholtzov teorem*, prema kojem je vektorska funkcija jednoznačno određena tek kad su joj propisane obje operacije, i rotor i divergencija. Ta činjenica ujedno opravdava i formalno uvođenje dviju sporednih Maxwellovih jednadžbi (103 a, b).

Često se pokazuje vrlo prikladnim da se prijeđe na sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, u kojima se pojavljuje samo po jedan od vektora, ili $\vec{E}$ ili $\vec{H}$. Primjenom operacije rotora na sustav (105) i uz upotrebu identiteta

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \triangle\vec{H}, \qquad (106)$$

dobiva se novi oblik tog sustava, koji se sastoji od dvije jednadžbe

$$\triangle H - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0, \qquad (107)$$

$$\triangle\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varrho. \qquad (108)$$

Jednadžbe (107) i (108) su *vektorske valne jednadžbe* za magnetsko i električno polje i predstavljaju novi sustav linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. One su izvedene iz Maxwellovog sustava jednadžbi (105), pisanog za homogenu vodljivu materiju, pa se u rješavanju polja može poći od tih jednadžbi, jer su često pogodne za upotrebu. Treba posebno naglasiti da rješenja tih jednadžbi treba još podvrgnuti samim Maxwellovim jednadžbama (105). Pored toga rješenja moraju zadovoljavati početne i rubne uvjete konkretno zadanog problema; sve prije rečeno o tim uvjetima vrijedi i u ovom slučaju.

U jednadžbi (108) pojavljuje se na desnoj strani član $\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varrho\right)$ koji predstavlja slobodni naboj raspodjele ϱ u vodljivom materijalu. Jednostavnim se razmatranjem s pomoću jedn. (88) i (103 a) može pokazati da u vodljivim materijalima slobodni naboj iščezava prema relaciji

$$\varrho = \varrho_0 \exp\left(-\frac{\varkappa}{\varepsilon}t\right); \qquad (109)$$

ϱ_0 je početna razdioba naboja (u trenutku $t = 0$), a omjer $\varepsilon/\varkappa = T$ naziva se *vremenskom konstantom relaksacije slobodnog naboja u vodiču*. Očito je da se u vodljivom materijalu gustoća slobodnog naboja s vremenom eksponencijalno smanjuje i teži prema nuli, te je neovisna o vanjskom (narinutom) polju.

Na temelju jednadžbi (107), (108) i (109) možemo zaključiti da u vodljivim materijalima sustav Maxwellovih jednadžbi (105) prelazi u valne jednadžbe oblika

$$\begin{aligned}\triangle\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} &= 0,\\ \triangle\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= 0.\end{aligned} \qquad (110\text{ a, b})$$

Razmotrimo još neke posebne slučajeve koji se mogu izvesti iz sustava jednadžbi (110). Prvi je kada se promatra polje u dielektriku koji je karakteriziran time da nema slobodnih naboja i da mu je električna vodljivost jednaka nuli, tj. $\varkappa = 0$. Tada sustav (110) prelazi u *neprigušene valne jednadžbe*

$$\triangle\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0, \qquad \triangle\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (111\text{ a, b})$$

koje su jednostavnije od prethodnih i kojima ćemo se često koristiti pri analizi prostiranja elektromagnetskih valova.

Za *statička* magnetska i električna polja jednadžbe (110) prelaze u oblik

$$\triangle\vec{H} = 0, \qquad \triangle\vec{E} = 0. \qquad (112\text{a, b})$$

To su dvije *vektorske Laplaceove jednadžbe*, koje služe za rješavanje razdvojenih elektrostatičkih i magnetostatičkih polja. Ako se pretpostavi da postoji još i stalna raspodjela statičkih naboja ϱ ili stacionarnih struja $\vec{J}$ u promatranom prostoru, ove jednadžbe prelaze u nove, oblika

$$\triangle\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{J}, \qquad \triangle\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varrho. \qquad (113\text{ a, b})$$

To su *vektorske Poissonove jednadžbe* s pomoću kojih se onda rješavaju statička magnetska i električna polja.

Postoji u elektromagnetizmu cijelo jedno područje u kojem se posebna pažnja posvećuje problemima raspodjele poljâ i strujâ u dobro vodljivim materijalima, npr. metalima, koje ćemo nazivati vodičima. *Vodiči su karakterizirani velikim iznosom omjera provodnih prema pomačnim strujama.* Zato se u Maxwellovim jednadžbama može izostaviti član koji odgovara pomačnim strujama, te one prilagođene za polje u vodiču glase:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varkappa\vec{E}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad (114\text{ a, b})$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0. \qquad (114\text{ c, d})$$

Na sličan način kao već izvedene mogu se iz ovog sustava izvesti *difuzione jednadžbe* za vektore polja

$$\triangle\vec{H} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0, \qquad \triangle\vec{E} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (115\,\text{a, b})$$

koje predstavljaju pojednostavnjeni oblik sustava jednadžbi (110). To su temeljne jednadžbe za rješavanje problema *skin-efekta,* tj. za izračunavanje raspodjele struja u vodičima. Može im se dopisati nova jednadžba, za raspodjelu struje, koja glasi

$$\triangle\vec{J} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = 0. \qquad (116)$$

Na kraju treba istaći da su svi sustavi jednadžbi za rješavanje elektromagnetskih polja, počevši od sustava (101) pa do (115) sa (116), postavljeni na takav način da je u njih bila izravno ili posredno uključena i jednadžba konstitucije $\vec{J} = \varkappa\vec{E}$, što je imalo za posljedicu da se raspodjela provodnih struja $\vec{J}$ i slobodnih naboja ϱ, uostalom kao i vektora polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$, dobivala kao izravno rješenje tih sustava jednadžbi. Trebalo je zadati samo potrebne rubne i početne uvjete. Drugim riječima, nabrojani sustavi Maxwellovih jednadžbi bili su načinjeni tako da su raspodjele struja i naboja u prostorima od interesa bili direktno i jedino posljedica elektromagnetskih polja koja smo rješavali.

Često ćemo se, međutim, susretati sa zadaćama u kojima će već unaprijed biti poznate ili zadane raspodjele struja i slobodnih naboja, a proračunavat će se samo vektori polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$. U tom slučaju zadane raspodjele struja i naboja nazivamo *neovisnim* izvorima polja, a to su oni na koje polje ne djeluje, tj. njihova raspodjela je određena uzrocima koje u ovakvim vrstama zadaća ostavljamo izvan dosega primijenjenih sustava Maxwellovih jednadžbi. U takvim sustavima zadane su funkcije $\vec{J} = \vec{J}(x, y, z, t)$ i $\varrho = \varrho(x, y, z, t)$, pa oni ne sadrže jednadžbu $\vec{J} = \varkappa\vec{E}$.

U mnogo praktičnih problema koje ćemo rješavati svrsishodno je gustoću struje $\vec{J}$ razbiti u dva dijela

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_p\,, \qquad (117)$$

gdje $\vec{J}_i$ predstavlja gustoću zadane struje iz vanjskog izvora (koji nije obuhvaćen Maxwellovim jednadžbama), tj. gustoću neovisne struje, one na koju elektromagnetsko polje koje se računa ne djeluje, a $\vec{J}_p$ predstavlja gustoću provodne struje, za koju vrijedi $\vec{J}_p = \varkappa\vec{E}$, tj. one na koju polje djeluje i koja egzistira u materijalu specifične vodljivosti $\varkappa$ upravo kao posljedica izračunatog polja. Očito je da u sve već nabrojene sustave jednadžbi za gustoću struje treba mjesto (100) uvesti jednadžbu (117).

Ovime je završen opći pregled predstavljanja elektromagnetskih polja sustavima diferencijalnih jednadžbi, u kojima se kao osnovne veličine pojavljuju vektori polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$. Slijedeći je korak da se za predstavljanje polja uvedu nove pomoćne funkcije poznate kao elektromagnetski potencijali.

Elektromagnetski potencijali

Skalarni i vektorski potencijali. Utvrdili smo da u homogenim materijalima, uz zadanu raspodjelu naboja i struja, elektromagnetsko polje određuje šest skalarnih funkcija, tj. prostornih komponenata vektora $\vec{E}$ i $\vec{H}$. Proračunavamo ih iz Maxwellovog sustava jednadžbi (101), ili (103), ili (105), ili (114), ili pak iz sustava valnih jednadžbi (107) i (108), ili (110), ili (111), ili (115) sa (116).

Rješavanje tih sustava jednadžbi većinom je zamršeno i teško. Jedan od načina da se teškoće umanje jest da se uvedu *elektromagnetski potencijali,* s pomoću kojih se mogu na najjednostavniji način predstaviti polja. Ti novi matematički reprezentanti polja, nazvani vektorski i skalarni potencijali, uveden i sutako da budu suglasni s Maxwellovim jednadžbama i da zadovoljavaju jedan dodatni uvjet koji će biti propisan.

Promatramo sustav jednadžbi

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (118\,\text{a, b})$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \varrho, \qquad (118\,\text{c, d})$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad (118\,\text{e, f})$$

koje definiraju makroskopsko elektromagnetsko polje, proizvedeno zadanim »nezavisnim« gustoćama struja $\vec{J}$ i slobodnih naboja ϱ. Uz izvore treba zadati također odgovarajuće rubne i početne uvjete, koji moraju biti u skladu s već zadanim veličinama i sustavom jednadžbi, da bi zadaća imala smisla. Polje je određeno parom vektora $\vec{E}$ i $\vec{B}$, tj. sa 6 skalarnih funkcija položaja i vremena, koje treba izračunati.

Potencijale ćemo uvesti u sustav (118) na način prikazan u daljem izlaganju. Vektor $\vec{B}$ je solenoidan, tj. bez izvora, pa se može predstaviti rotorom drugog vektora $\vec{A}$, koji se naziva *vektorskim potencijalom*:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (119)$$

Uvrštavanjem ovoga u drugu Maxwellovu jednadžbu (118 b) dobiva se za jakost električnog polja izraz

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad (120)$$

gdje je φ skalarna funkcija nazvana *skalarnim potencijalom.* Negativni predznak pred gradijentom posljedica je definicije potencijala φ; želimo da u statičkom slučaju $\vec{E}$ ima smjer od većeg prema manjem potencijalu.

Netom uvedene veličine $\vec{A}$ i φ moraju zadovoljavati potpuni sustav Maxwellovih jednadžbi. Razmatranje se pojednostavnjuje ako se ograničimo na promatranje polja u prostoru čije granice nisu ovisne o vremenu i koji je ispunjen linearnim, homogenim, izotropnim materijalom. Ako (119) i (120) uvrstimo u Maxwellove jednadžbe (118 a) i (118 d), dobivamo

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \vec{J}, \qquad (121)$$

$$-\operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon}. \qquad (122)$$

Uvođenjem operatorâ

$$\triangle\vec{A} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} \quad \text{i} \quad \triangle\varphi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$$

mogu se ove jednadžbe pisati pomoću Laplaceovog vektorskog i skalarnog operatora u obliku

$$\triangle\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{J},$$

$$\triangle\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{A}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon}. \qquad (123\,\text{a, b})$$

Tako smo sustav (118) reducirali na samo dvije jednadžbe koje su, međutim, još uvijek jedna s drugom povezane. Njihovo razdvajanje se može postići iskorištavanjem proizvoljnosti koja je bila prisutna u definiciji potencijala. Potencijal $\vec{A}$ nije još jednoznačno propisan, jer je prema Helmholtzovom teoremu vektorska funkcija definirana jedinstveno tek pošto su joj zadani i rotor i divergencija. Naime, polje $\vec{B}$ je definirano preko $\vec{A}$ s pomoću (119), pa se vektoru $\vec{A}$ može dodati gradijent proizvoljne skalarne funkcije λ. Tako $\vec{B}$ ostaje nepromijenjen pri transformaciji

$$\vec{A} = \vec{A}_0 - \operatorname{grad}\lambda, \qquad (124\,\text{a})$$

a da bi i električno polje $\vec{E}$ ostalo nepromijenjeno, mora skalarni potencijal biti simultano transformiran:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \qquad (124\,\text{b})$$

Transformacije potencijala (124 a, b) nazivaju se ***baždarske transformacije*** (gauge transformations), a invarijantnost polja u ovim pretvorbama naziva se ***baždarska invarijantnost.***

Zadavanjem potencijala »predodređuju« se polja, ili, obratno, jedno te isto polje ima više od jednog skupa potencijala. S pomoću proizvoljne funkcije λ moguće je, matematički korektno, za jedno polje (par $\vec{B}$, $\vec{E}$) odabrati beskonačno mnogo odgovarajućih parova potencijala ($\vec{A}, \varphi$). U tom beskonačnom izboru mogućih potencijala od posebne su važnosti dvije grupe potencijalâ, nazvanih *Lorentzovi potencijali* i *Coulombovi potencijali.* I jedni i drugi dobiju se zadavanjem odgovarajućih dodatnih uvjeta, a pogodni su jer u prvom redu daju matematičke modele, tj. pridružene sustave potencijalnih jednadžbi, kojih rješenja se u potpunosti podudaraju s realnošću i eksperimentalnim činjenicama. S druge strane, par Lorentzovih potencijala pogodan je jer vodi k valnim jednadžbama koje $\vec{A}$ i φ tretiraju na isti način i jer je to pojam koji je neovisan o izboru koordinatnog sustava, što je posebno prikladno u relativističkoj teoriji polja. Par Coulombovih potencijala pogodan je zato što se njime postiže najpotpunije razdvajanje potencijalâ $\vec{A}$ i φ i njihovih tzv. transverzalnih i longitudinalnih polja, koje nijedan drugi izbor ne dopušta. U posebnim slučajevima može se izabrati par potencijalâ tako da φ iščezava, pa se elektromagnetsko polje može prikazati samo jednim vektorskim potencijalom $\vec{A}$. Velika prednost sustava Coulombovih potencijala jest u njegovoj jednostavnosti.

Lorentzovo baždarenje. S namjerom da razdvojimo par jednadžbi (123 a, b) propišemo za $\vec{A}$ i φ uvjet

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{125}$$

Taj dodatni uvjet naziva se *Lorentzov uvjet*, pa se stoga par potencijalâ koji ga zadovoljavaju naziva Lorentzovim potencijalima. Rjeđe se upotrebljava naziv Maxwellov uvjet. Primijetimo još da je relacija (125) između potencijalâ $\vec{A}$ i φ posljedica jednadžbe kontinuiteta (88) za struje $\vec{J}$ i naboje ϱ.

Proizvoljnost sadržana u (124 a, b) znači da mi možemo izabrati skup potencijala $\vec{A}$, φ tako da Lorentzov uvjet (125) bude ispunjen. To će biti osigurano ako proizvoljna skalarna funkcija λ zadovoljava jednadžbu

$$\triangle\lambda - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = \operatorname{div}\vec{A}_0 + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}, \tag{126}$$

gdje su $\vec{A}_0$ i φ_0 partikularna rješenja jednadžbi (123 a, b).

Uvođenjem uvjeta (125) u sustav (123) potencijali $\vec{A}$ i φ jedinstveno su definirani. To će separirati parcijalne diferencijalne jednadžbe (123 a, b), pa se dobiju dvije nehomogene valne jednadžbe oblika

$$\triangle\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}, \tag{127 a}$$

$$\triangle\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{127 b}$$

Jednadžbe (127) zajedno sa (125) čine skup jednadžbi u svim posljedicama ekvivalentan Maxwellovim jednadžbama. Po analogiji s valovima u elastičnom mediju, valovi po $\vec{A}$ nazivaju se transverzalnim valovima, a valovi po φ longitudinalnim valovima.

Provedeni postupak pokazuje ovo: ako su zadani »neovisni« izvori polja, tj. raspodjela naboja ϱ i struja $\vec{J}$ u promatranom prostoru, može se elektromagnetsko polje odrediti polazeći od sustava jednadžbi (127). To je sustav od samo četiri skalarne diferencijalne jednadžbe drugog reda sa po jednom nepoznatom funkcijom. Rješenja tih jednadžbi moraju biti podvrgnuta uvjetu (125), tj. jednoj skalarnoj diferencijalnoj jednadžbi. Za svaku posebnu zadaću rješenja moraju biti u skladu s postavljenim rubnim i početnim uvjetima. Nakon što su potencijali $\vec{A}$ i φ jednom izračunati, iz jednadžbi (119) i (120) jednoznačno se mogu odrediti vektori polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

Coulombovo baždarenje. Drugi upotrebljiv par potencijala za isto polje ($\vec{E}$, $\vec{B}$) dobije se ako primijenimo Coulombovo ili *transverzalno baždarenje,* tj. ako umjesto Lorentzovog uvjeta (125) izaberemo Coulombov dodatni uvjet

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{128}$$

Iz (123 b) može se vidjeti da skalarni potencijal u ovom slučaju zadovoljava Poissonovu jednadžbu

$$\triangle\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \tag{129 a}$$

koja uvijek određuje polje u stacionarnom stanju. Kako ovdje nije bilo zahtijevano da zadani naboj ϱ bude neovisan o vremenu, skalarni potencijal φ, kao rješenje jednadžbe (129 a), slijedi promjene ϱ bez ikakvog zakašnjenja, jer ta jednadžba nema člana $\partial^2\varphi/\partial t^2$ koji bi uzrokovao retardaciju. Svakako, Poissonovu jednadžbu je lakše riješiti nego nehomogenu valnu jednadžbu. Dobiveni istodobni (neretardirani) Coulombov skalarni potencijal φ uzrokovan je gustoćom »neovisnog« slobodnog naboja $\varrho(x, y, z, t)$. Kada je jednadžba (129 a) riješena, jednadžba (113 a) za odgovarajući vektorski potencijal $\vec{A}$ prelazi u oblik

$$\triangle\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} + \mu\varepsilon\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \tag{129 b}$$

i može biti spremno riješena uz zadane rubne i početne uvjete, uzimajući φ kao poznat i $\vec{J}$ kao »neovisni« zadani izvor polja. Kada su iz (129 a, b) potencijali φ i $\vec{A}$ izračunati, polja $\vec{B}$ i $\vec{E}$ mogu se jednostavno odrediti iz (119) i (120).

Rezultantno rješenje jednadžbe (129 b) za $\vec{A}$ uzrokovano je samo transverzalnom strujom, tj. strujom neslobodnih naboja, pa je zato pogodno zadanu gustoću struje $\vec{J}$ rastaviti na dva dijela

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t, \tag{130}$$

na longitudinalni i transverzalni dio, tako da bude $\operatorname{rot}\vec{J}_l = 0$ i $\operatorname{div}\vec{J}_t = 0$. Iz jednadžbe kontinuiteta

$$\operatorname{div}\vec{J} = \operatorname{div}\vec{J}_l = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}, \tag{131}$$

koja povezuje longitudinalni dio gustoće struje $\vec{J}$ s promjenom slobodnog naboja, i iz (129 a) slijedi

$$\vec{J}_l = \varepsilon\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{132}$$

Tako je u određenim zadaćama pogodno jednadžbu (129 b) pisati u članovima transverzalne gustoće struje $\vec{J}_t$, koja nije povezana s promjenama slobodnog naboja ϱ

$$\triangle\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_t. \tag{133}$$

Zbog toga se to baždarenje i naziva *transverzalno baždarenje.* Jednadžbe (129 a) i (133) pokazuju da se φ računa iz slobodnog naboja, ali da on na $\vec{A}$ ne djeluje, što je posljedica uvođenja Coulombovog uvjeta (128).

Potencijali u homogenom dielektriku. Elektromagnetska svojstva dielektrikâ mogu se najjednostavnije opisati na osnovi činjenica da u njima ne može biti slobodnih naboja ($\varrho = 0$) i provodnih struja ($\vec{J} = 0$), jer im je električna vodljivost jednaka nuli. Prema tome, u materijalima u kojima nema slobodnih naboja i struja, u dielektricima (i u dobrim izolatorima), sustav jednadžbi (127) prelazi u homogene valne jednadžbe Lorentzovih potencijala oblika

$$\triangle\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \triangle\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{134 a, b}$$

i napose u vakuumu i kartezijskim koordinatama one glase

$$\Box^2\vec{A} = 0, \qquad \Box^2\varphi = 0. \tag{135 a, b}$$

Ove su jednadžbe poznate kao *d'Alembertove valne jednadžbe.*

Coulombovo ili transverzalno baždarenje vrlo se često upotrebljava u područjima gdje nema izvora ($\varrho = 0$, $\vec{J} = 0$). U tom slučaju φ zadovoljava valnu jednadžbu (134 b), koju zadovoljava i proizvoljna funkcija λ. Mi stoga možemo izabrati takav λ da skalarni potencijal iščezne:

$$\varphi = 0, \tag{136 a}$$

pa uopće ne treba promatrati skalarni potencijal. To znači, u skladu sa (125), da će vektor $\vec{A}$ imati divergenciju jednaku nuli, pa elektromagnetsko polje može biti izraženo samo s pomoću vektora potencijala $\vec{A}$, a potrebne jednadžbe postaju

$$\triangle \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{A} = 0, \tag{136 b, c}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{136 d, e}$$

Sustav Coulombovih potencijala (136) u potpunosti zamjenjuje Maxwellove jednadžbe u dielektriku, tj. u materijalima gdje nema slobodnih naboja i provodnih struja.

Potencijali u homogenom vodljivom materijalu. U dobro vodljivim materijalima, sa stajališta vrlo kratkih vremena relaksacije, može se prema jedn. (109) pretpostaviti da je gustoća slobodnog naboja u unutrašnjosti uvijek jednaka nuli. Gustoća struje proporcionalna je jakosti polja, $\vec{J} = \varkappa \vec{E}$, gdje je $\varkappa$ specifična vodljivost materijala. To znači: pretpostavljamo da je ukupna provodna struja u takvom materijalu uzrokovana postojećim elektromagnetskim poljem i da nema »neovisnih« izvora. Polje se u takvim slučajevima može rješavati sustavima Maxwellovih jednadžbi (101) do (104).

Ako skalarne i vektorske potencijale podvrgnemo dodatnom uvjetu

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu\varkappa\varphi, \tag{137}$$

može se elektromagnetsko polje u homogenom vodljivom materijalu izračunati s pomoću jedn. (119) i (120) iz potencijala $\vec{A}$ i φ, koji mogu biti bilo koji par rješenja jednadžbi

$$\begin{aligned} \triangle \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\varkappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= 0, \\ \triangle \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{138 a, b}$$

To su prigušene valne jednadžbe elektromagnetskih potencijala u vodljivom materijalu, tj. u materijalu s gubicima. Gubici nastaju zbog Joulove topline koju proizvode provodne struje u vodljivom sredstvu. Članovi jednadžbi s prvim derivacijama $\partial\vec{A}/\partial t$ i $\partial\varphi/\partial t$ uvode prigušene članove u rješenja za potencijale, i to ili po prostornoj ili po vremenskoj ovisnosti, ili po objema.

Primijeni li se Coulombovo baždarenje, tj. dodatni uvjet da je $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, dobiva se novi par potencijala za predstavljanje polja u vodiču, čije jednadžbe glase:

$$\begin{aligned} &\triangle \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\varkappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{A} = 0, \\ &\varphi = 0, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{J} = \varkappa \vec{E}. \end{aligned} \tag{139 a-f}$$

Dakle, skalarni potencijal je izabran tako da iščezava, a cijelo polje je određeno samo vektorskim potencijalom, koji je određen prigušenom valnom jednadžbom i uvjetom $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, te odgovarajućim rubnim i početnim uvjetima.

U materijalima koji su izraziti vodiči (metalima) u kojima je omjer provodnih struja prema pomačnim strujama vrlo velik, pri rješavanju već postavljenih zadaća mogu se zanemariti članovi s drugim derivacijama u sustavima (138) i (139), pa one prelaze u jednadžbe difuzije oblika

$$\triangle \vec{A} - \mu\varkappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \qquad \triangle \varphi - \mu\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{140 a, b}$$

Preostaje još da se razmotri u praksi vrlo česta zadaća određivanja polja u vodiču koji je priključen na vanjski izvor struje gustoće $\vec{J}_i$, pa se ukupna gustoća struje može prema (117) pisati kao $\vec{J} = \vec{J}_i + \varkappa \vec{E}$. Upotrijebimo li uvjet (137), dobiju se iz sustava (123 a b), jednadžbe elektromagnetskih potencijala u vodljivom materijalu

$$\begin{aligned} \triangle \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\varkappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\mu \vec{J}_i, \\ \triangle \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \tag{141 a, b}$$

pa se iz izračunatih potencijala, uz pomoć (119) i (120), mogu odrediti vektori polja.

U metalnim vodičima, u kojima zanemarujemo pomačne struje (nema slobodnih naboja, $\varrho = 0$, a postoje »neovisne« struje gustoće $\vec{J}_i$), može se skalarni potencijal ispustiti iz razmatranja i primijeniti Coulombov dodatni uvjet, pa potrebni sustav jednadžbi polja glasi:

$$\triangle \vec{A} - \mu\varkappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J}_i, \tag{142 a}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \qquad \varphi = 0, \tag{142 b, c}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{J} = \vec{J}_i + \varkappa \vec{E}. \tag{142 d, e, f}$$

Potencijali u statičkim poljima. Iz provedene analize očito je da će za statička polja, tj. ona u kojima se uzima da nema vremenskih promjena, pripadni sustavi jednadžbi glasiti kako je navedeno u nastavku.

Za elektrostatička polja:

$$\triangle \varphi = 0, \ \text{ili} \ \triangle \varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \tag{143 a, b, c}$$

za magnetostatička polja:

$$\triangle \vec{A} = 0, \ \text{ili} \ \triangle \vec{A} = -\mu \vec{J}, \tag{144 a, b}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{144 c, d}$$

Te potencijalne jednadžbe poznate su kao Laplaceova i Poissonova jednadžba.

Hertzov vektor. Pokazano je da se elektromagnetsko polje može riješiti izračunavanjem vektorskog i skalarnog potencijala. Iz potencijalâ mogu se vektori $\vec{B}$ i $\vec{E}$ dobiti operacijama deriviranja. Hertz je pokazao da je moguće pod određenim uvjetima definirati elektromagnetsko polje preko samo jedne vektorske funkcije. Ta nova funkcija, nazvana *Hertzov vektor*, u stvari je *superpotencijal*, iz kojeg se potencijali $\vec{A}$ i φ mogu dobiti operacijom deriviranja.

Ograničit ćemo se na promatranje polja u prostoru ispunjenom linearnim homogenim, izotropnim dielektrikom ($\varkappa = 0$), unutar kojega nema »neovisnih« provodnih struja ni slobodnih naboja. Uvedimo sada Hertzov vektor $\vec{\Pi}$, kojemu ćemo propisati neke uvjete. Tražimo da se potencijal $\vec{A}$ iz njega dobiva prema jednadžbi

$$\vec{A} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}. \tag{145 a}$$

Uvrstimo (145 a) u Lorentzov uvjet (125), pa se i potencijal φ dobiva kao

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}. \tag{145 b}$$

Također želimo da $\vec{\Pi}$ zadovoljava valnu jednadžbu. Polje $\vec{B}$, $\vec{E}$ zadovoljava Maxwellove jednadžbe; to isto je dokazano i za potencijale $\vec{A}$ i φ, stoga Maxwellove jednadžbe mora zadovoljavati i Hertzov vektor $\vec{\Pi}$. Tako dobivamo

$$\vec{B} = \mu\varepsilon \cdot \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \tag{146 a}$$

$$\vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}. \tag{146 b}$$

Time su ujedno zadovoljene dvije Maxwellove jednadžbe, pa preostaje da te izraze uvedemo u preostale dvije jednadžbe, čime dobivamo valnu jednadžbu

$$\Delta\vec{\Pi} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0, \tag{147}$$

koju mora zadovoljiti Hertzov vektor. Nakon ovoga možemo zaključiti da svako rješenje ove valne jednadžbe po $\vec{\Pi}$ daje rješenje polja $\vec{B}$ i $\vec{E}$ za homogeni medij bez struja i slobodnih naboja, za koja su Maxwellove jednadžbe zadovoljene. Važi i obratno: svakom polju $\vec{B}$ i $\vec{E}$ u homogenom sredstvu koje zadovoljava Maxwellove jednadžbe može se pridružiti Hertzov vektor $\vec{\Pi}$ koji zadovoljava valnu jednadžbu (147).

Zbog simetrije sustava Maxwellovih jednadžbi u prostoru bez izvora i dok je vektor $\vec{D}$ solenoidan u području u kome nema slobodnih naboja, jedno alternativno rješenje može biti dano u obliku

$$\vec{A}' = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t}, \qquad \varphi' = -\operatorname{div}\vec{\Pi}', \tag{148 a, b}$$

$$\vec{D}' = -\mu\varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t}, \; \vec{H}' = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}', \tag{148 c, d}$$

gdje vektor $\vec{\Pi}'$, koji se često naziva *Fitzgeraldov vektor*, zadovoljava jednadžbu

$$\Delta\vec{\Pi}' - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} = 0. \tag{149}$$

Može se zaključiti da elektromagnetsko polje, unutar područja u kojem su ε i μ konstantni ($\varkappa = 0$) a ϱ i $\vec{J}$ jednaki nuli, može biti predstavljeno dvjema parcijalnim poljima, jednim izvedenim iz vektora $\vec{\Pi}$ i drugim izvedenim iz vektora $\vec{\Pi}'$. Izvori su tih polja, razumljivo, izvan područja promatranja. Želimo li dati fizikalno značenje Hertzovim vektorima, treba ih dovesti u relaciju s njihovim »izvorima«, koji će se nalaziti u prostoru promatranja. To ćemo postići korištenjem jednadžbama (95) i (96) za električnu i magnetsku polarizaciju materije koja ispunjava prostor i koja nastaje pod djelovanjem polja $\vec{B}$, $\vec{E}$ uzrokovanog vanjskim izvorima. Uvrstimo li te relacije u sustav Maxwellovih jednadžbi, dobivaju se za električni Hertzov vektor $\vec{\Pi}$ i za magnetski Hertzov vektor $\vec{\Pi}'$ nehomogene valne jednadžbe

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\Pi} - \mu\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} &= -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, \\ \Delta\vec{\Pi}' - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} &= -\vec{M}, \end{aligned} \tag{150 a, b}$$

koje oni moraju zadovoljavati. Jednadžbe (150 a, b) pokazuju da su izvori električnog vektora $\vec{\Pi}$ i parcijalnog polja definiranog iz njega, kao i vektora $\vec{\Pi}'$ i parcijalnog polja magnetskog tipa, električna i magnetska polarizacija materije u promatranom prostoru.

Ako u promatranom prostoru pored ove inducirane električne polarizacije $\vec{P}$ i magnetske polarizacije $\vec{M}$ imamo i takve električne i magnetske dipole (definirane električnim dipolnim momentom po jedinici volumena $\vec{p}$ i magnetskim dipolnim momentom po jedinici volumena $\vec{m}$), koji su »neovisni« o materiji i narinutom polju, koji obično predstavljaju električni ili magnetski moment dipolnog oscilatora i uzbuđivani su vanjskim izvorima, možemo uvesti jednadžbe

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \vec{p}, \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{m}. \tag{151 a, b}$$

Ovdje su $\vec{p}$ i $\vec{m}$ izvori »neovisni« od $\vec{E}$ i $\vec{H}$, a inducirana polarizacija je već uključena u konstante ε i μ. Konačno je ukupno elektromagnetsko polje, pobuđivano u zadanom prostoru neovisnim izvorima $\vec{p}$ i $\vec{m}$, određeno jednadžbama

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \mu\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t}, \\ \vec{H} &= \varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}', \end{aligned} \tag{152 a, b}$$

gdje $\vec{\Pi}$ i $\vec{\Pi}'$ moraju zadovoljavati nehomogene valne jednadžbe

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\Pi} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} &= -\frac{\vec{p}}{\varepsilon}, \\ \Delta\vec{\Pi}' - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} &= -\vec{m}. \end{aligned} \tag{153 a, b}$$

Prema tome, elektromagnetska polja mogu se prikazati Hertzovim vektorima i ovi mogu poslužiti pri rješavanju polja. Rješenja se ne moraju podvrgnuti nikakvim dodatnim uvjetima, pa je i to prednost pri upotrebi vektora $\vec{\Pi}$. Međutim, rješenja moraju zadovoljavati početne i rubne uvjete konkretno zadanog problema. Ti se uvjeti redovno odnose na vektore polja $\vec{B}$ i $\vec{E}$, teže ih je formulirati za $\vec{A}$ i φ i još teže za Hertzov vektor $\vec{\Pi}$. Ovdje, dakle, teškoće rastu s prijelazom od vektora polja na potencijale i Hertzov vektor. O tome treba voditi računa pri izboru metoda za rješavanje zadaća.

Metode rješavanja polja. U elektromagnetizmu postoje, u stvari, dva potpuna skupa ideja, tj. dva različita fundamentalna načina mišljenja i pristupa problemima. Jedan od njih je metoda elektromagnetskih polja, koja pripisuje djelovanje kontinuumu i svu važnost pridaje lokalnom polju i njegovim silnicama. Povezan je s takvim imenima kao što su Gilbert, Faraday i Maxwell. Drugi pristup je metoda elektromagnetskih izvora (naboja u mirovanju i gibanju), gdje se pozornost svraća na sile između elektriziranih i magnetiziranih tijela; taj je pristup povezan s idejama Franklina, Cavendisha i Ampèrea. U različitim područjima primjene dominantna je ili jedna ili druga metoda. Tako, npr., u proučavanju radio-antenâ pažnja je koncentrirana na naboje i struje u anteni, a npr. u analizi električnih strojeva i transformatora teorija polja je stvarno bez premca.

Metoda izvorâ bliža je našem svakodnevnom iskustvu i zato je osnovni pojam električnog naboja pogodan. On je ovdje od primarnog značenja i definiran je inverznim kvadratnim zakonom. Pojam potencijala je sekundaran i on je u ovoj metodi predstavnik uzajamne potencijalne energije, koja je definirana s obzirom na naboje. Budući da sam skalarni potencijal nije dovoljan da opiše elektromagnetske pojave, uveden je vektorski potencijal, koji nema ništa zajedničko s potencijalnom energijom. U metodi izvorâ on je predstavnik uzajamnog kinetičkog momenta nabojâ u gibanju. Pri rješavanju po metodi izvorâ sumiraju se efekti svih naboja u prostoru. To vodi do *integralnih jednadžbi*, tj. do primjene integralnog računa.

Centralni pojam *teorije polja* je potencijal. Teorija polja ne operira s nabojima; oni su u njoj od sporednog značenja. Pojam energetskog potencijala iščezava i potencijal postaje matematičko svojstvo samog prostora. Kada je jedanput potencijal definiran s pomoću naboja, naboji se ispuštaju i promatra se samo potencijal, što pruža znatne matematičke pogodnosti. Teorija polja upotrebljava dva potencijala, skalarni i vektorski, za određivanje i ispitivanje lokalnog polja, tj. elektromagnetskog stanja u okolišu bilo koje točke u prostoru. Važnost pripisana lokalnom polju čini teoriju polja idealnom primjenom *diferencijalnog računa*. Temeljni je prilaz teoriji polja kroz već opisane diferencijalne jednadžbe. Diferencijalna metoda ima naročite pogodnosti pri rješavanju problema u ograničenim područjima, što vodi do dobro istraženih problema rubnih vrijednosti. Širina razvoja i velike mogućnosti koje pruža teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi čine metodu polja temeljem na kojem počiva elektromagnetska teorija.

Dva pristupa elektromagnetskoj teoriji i problemima počivaju na različitim pridruženim matematičkim tehnikama. Metoda polja se temelji na diferencijalnim, a metoda izvorâ (nabojâ) na integralnim jednadžbama. Unifikacija i povezivanje tih dviju metoda je poželjna, ali tek nakon što obje budu detaljno opisane.

Zato treba nakon potencijalne teorije polja opisati i integralnu metodu izvora.

Integralno predstavljanje

Potencijal točkastog naboja. U mnogim problemima često će biti potrebno odrediti elektromagnetsko polje iz zadane raspodjele naboja i struja. Pri tome ćemo pretpostaviti da su zadane raspodjele izvora polja moguće, tj. da ne protuslove jednadžbama polja, i još k tome da je ta razdioba struja i naboja »neovisna«, tj. da izračunato polje ne utječe na nju niti je mijenja. Da bismo riješili takvu zadaću, možemo se odlučiti na izračunavanje elektromagnetskih potencijala $\vec{A}$ i φ. Za tu svrhu vrlo su pogodna opća integralna rješenja diferencijalnih jednadžbi potencijala. Da se pronađu takva opća rješenja jednadžbi tipa

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \qquad (154\,a)$$

poći ćemo od njihove primjene na najjednostavnije oblike polja. U jednadžbi (154 a) je uvršteno $\mu\,\varepsilon = 1/v^2$, gdje v ima dimenziju brzine.

Najjednostavnija raspodjela naboja koju možemo promatrati je ona pri kojoj je naboj malen svagdje osim u neposrednom okolišu izvora. Ovo vodi prema hipotetski idealiziranom modelu naboja koncentriranog u izvor. Takav se naboj zove *točkasti naboj*. Gustoća tako uvedenog točkastog naboja svagdje je nula, osim u naboju, gdje je beskonačna. Zamislimo sada točkasti naboj $f(t)$ koji miruje, ali se njegov iznos vremenski mijenja, tj. iznos mu je poznat kao funkcija vremena. To je fizikalno nemoguće, ali će nam ta pretpostavka pomoći da učinimo prvi korak prema općem rješenju postavljenog problema. Radi jednostavnosti smjestimo naboj u ishodište sfernog koordinatnog sustava i primijenimo na njegovo polje jednadžbu (154 a). Homogeni dio te jednadžbe

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad (154\,b)$$

mora vrijediti za sve točke prostora izuzev za izvor. Očito je da potencijal mora ovisiti samo o radijalnoj udaljenosti od izvora r i biti neovisan o smjeru. Dakle, zbog sferne simetrije, φ je funkcija samo od r i t. Stoga gornja jednadžba pisana u sfernim koordinatama prelazi u oblik

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad (155\,a)$$

a njeno rješenje je

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \qquad (155\,b)$$

gdje su f i g funkcije koje se mogu po volji odabrati.

Analizirajmo rješenje (155 b) dobiveno za potencijal zamišljenog točkastog naboja kojemu se iznos vremenski mijenja. Ono se sastoji iz dva pribrojnika od kojih prvi, $\frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{v}\right)$, predstavlja izlazeći val, čija amplituda postaje sve manja (zbog faktora $1/r$) kako se on giba prema van. Slično tome, drugi član izraza za potencijal φ predstavlja ulazeći val, koji putuje u izvor i čija amplituda raste kako se on giba prema unutra. Valovi se gibaju brzinom v. Točno određivanje funkcija f i g ovisi o zadanim uvjetima. Općenito f predstavlja promjenu koja će na udaljenosti r biti opažena kasnije, tj. sa zakašnjenjem r/v, a g predstavlja promjenu koja može biti opažena prije nego što je proizvedena od izvora. Kako je ta pojava u suprotnosti s eksperimentima u elektromagnetici, bit će pretpostavljeno da je g jednako nuli. Funkciju f treba izabrati tako da daje točan naboj u izvoru. Potencijal nepromjenljivog točkastog naboja iznosa Q je $Q/4\pi\varepsilon r$, pri čemu se pretpostavlja da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli, pa je tako i potencijal naboja zadanog iznosa $f(t)$ jednak

$$\varphi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}. \qquad (156)$$

Iako je ovo samo heurističko razmatranje, koje ne možemo nadomjestiti strogim razmatranjem, jer je zamišljeni model fizikalno nemoguće realizirati, ipak nam je rezultat (156) koristan. To je svakako jedno rješenje valne jednadžbe (154 b) s izuzetkom točke $r = 0$.

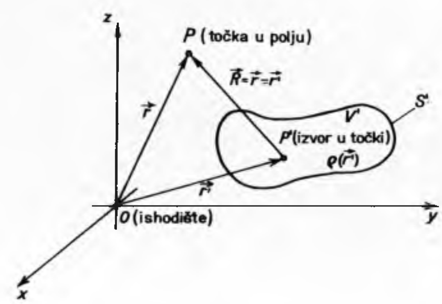
Retardirani potencijali. Riješimo sada potencijalnu jednadžbu (154 a) za opći slučaj, tj. uz zadanu raspodjelu vremenski i prostorno promjenljivog naboja gustoće $\varrho(x_1, x_2, x_3, t)$ u promatranom prostoru volumena V. Pogodno je stoga prikazati dobiveni skalarni potencijal točkastog naboja iznosa $f(t)$ kao rješenje diferencijalne jednadžbe potencijala, uvodeći *poopćene funkcije*. Tako se raspodjela gustoće promjenljivog točkastog naboja smještenog u ishodište može prikazati pomoću *Diracove delta-funkcije* kao $\varrho = f(t)\cdot\delta(\vec{r})$. Tada se rješenje jednadžbe

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}f(t)\,\delta(\vec{r}), \qquad (157\,a)$$

po analogiji sa (156), može pisati

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{|\vec{r}|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r}|}. \qquad (157\,b)$$

Učinimo korak dalje k poopćenju problema i smjestimo točkasti



Sl. 96. Definicija varijabli izvora i polja

naboj iznosa $f(t)$ u točku $\vec{r}'$, prema sl. 96. Tada je gustoća naboja

$$\varrho = f(t)\cdot\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \qquad (158)$$

i to tako da je

$$\int_V \varrho\,dV = f(t), \quad (\vec{r}' \in V); \qquad \int_V \varrho\,dV = 0, \quad (\vec{r}' \notin V). \qquad (159\,a, b)$$

Jednadžba (154 a) prelazi sada u oblik

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}f(t)\,\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \qquad (160\,a)$$

i njeno rješenje glasi

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{f\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}. \qquad (160\,b)$$

Uvedemo li dalje jediničnu gustoću naboja

$$\varrho_1 = \delta(t - t')\cdot\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \qquad (161\,a)$$

dobivamo kao rješenje jedinični potencijal

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}. \qquad (161\,b)$$

Konačno, ako se uvede kontinuirana raspodjela naboja $\varrho(\vec{r}, t)$ po volumenu V, može se pisati potencijalna jednadžba

$$\mathcal{D}\varphi \equiv \Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\varrho(\vec{r}, t), \qquad (162\,a)$$

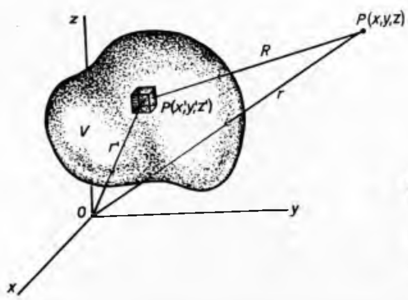
a ako je $\varrho = 0$ izvan volumena V, po pravilima računa s poopćenim funkcijama proizlazi da je rješenje

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \frac{\varrho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \qquad (162\text{ b})$$

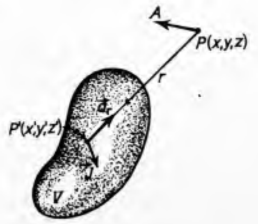
Prema tome je (162 b) jedno rješenje opće nehomogene valne jednadžbe (162 a) za skalarni elektromagnetski potencijal. To se rješenje naziva *retardirani potencijal*. Želimo li u točki $\vec{r}$ izračunati retardirani potencijal, u trenutku t, izazvan nabojem koji je smješten u $\vec{r}'$, mi moramo računati, prema (162 b) s vrijednošću naboja koja je bila u trenutku $\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)$. Dakle, djelovanje naboja prenosi se konačnom brzinom v i potrebno mu je određeno vrijeme da se prenese u neku drugu točku (sl. 97). Uobičajeno je da se retardirani potencijal (162 b) piše kraće

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{[\varrho]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V', \qquad (162\text{ c})$$

gdje je φ neprekinuta funkcija kada je i $[\varrho]$ neprekinuta funkcija.



Sl. 97. Uz određivanje skalarnog potencijala u točki P, prema (162 b,c)



Sl. 98. Uz određivanje vektorskog potencijala u točki P, prema (163 b)

Derivacije od φ su neprekinute kada su neprekinute i derivacije od $[\varrho]$. Već nam (155 b) pokazuje da (162 c) nije opće rješenje jednadžbe (162 a). Tom rješenju moglo bi se superponirati i ono koje bi se dobilo kada bi se stavio umjesto izraza $\varrho(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/v)$ izraz $\varrho(\vec{r}', t + |\vec{r}-\vec{r}'|/v)$. To je tzv. *advansirani potencijal*, koji u osnovi odbacujemo. Pored toga, jednadžbi (162 c) može se dodati i bilo koje rješenje homogenog dijela jednadžbe (162 a), što bi fizikalno značilo da smo polju naboja ϱ u (162 a) superponirali i neka druga elektromagnetska polja čiji su izvori izvan promatrane regije V. Stoga, da bismo mogli reći da je (162 c) rješenje jednadžbe (162 a), moraju biti propisani dodatni uvjeti. Ova razmatranja o jedinstvenosti rješenja u (162 c) moći će se u potpunosti prikazati tek kasnije, kada budu iznesena Kirchhoffova rješenja.

Slično kao za skalarni potencijal mogu se dobiti odgovarajuća rješenja vektorske valne jednadžbe (127 a)

$$\triangle\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}(\vec{r}, t). \qquad (163\text{ a})$$

Rastavimo li jednadžbu (163 a) u kartezijskom koordinatnom sustavu na komponente, prelazi ona u tri jednadžbe tipa (162 a). Odgovarajući integral retardiranog potencijala glasi

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{J}]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V', \qquad (163\text{ b})$$

uz pretpostavku da je $\vec{J} = 0$ izvan volumena V (sl. 98). Treba imati na umu da rješenja (162 c) i (163 b) moraju zadovoljavati Lorentzov uvjet, tj. jednadžbu (125).

Ponekad je vrlo pogodno računati sa strujom koncentriranom u geometrijsku liniju, tzv. strujnicu, što je naravno fizikalno nemoguće ostvariti. Ako element strujnice označimo sa $\mathrm{d}\vec{s}'$, rješenje (163 b) za potencijal poprima oblik

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_s \frac{[i]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\vec{s}', \qquad (164)$$

pri čemu se integracija mora izvršiti po zatvorenoj strujnici s. Oznaka $[i]$ znači iznos hipotetske struje koncentrirane u strujnicu.

Na kraju, slično kao za potencijal φ i $\vec{A}$, može se riješiti jednadžba (153 a) za Hertzov vektor

$$\triangle\vec{\Pi} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{p}(\vec{r}, t)}{\varepsilon}, \qquad (165\text{ a})$$

pa njen opći integral glasi

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \frac{[\vec{p}]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \qquad (165\text{ b})$$

Opisani opći integrali skalarnog i vektorskog potencijala i opći integral Hertzovog vektora rješenja su potencijalnih diferencijalnih jednadžbi izvedenih iz sustava Maxwellovih jednadžbi polja. Oni su ujedno rješenja za potencijale proizvedene »neovisnim« izvorima, tj. zadanom raspodjelom naboja, struja i električnih i magnetskih dipola. Time je dokazana čvrsta povezanost između metode polja i metode izvora, a za rješenje problemâ u elektromagnetizmu, kao alternativa diferencijalnim, dani su integralni matematički postupci.

Integral valne jednadžbe. U nastavku opisani postupak za dobivanje rješenja valne jednadžbe oblika (162 a) povezan je s imenima Helmholtza, Kirchhoffa i Poissona. Zadaća koju treba riješiti neka glasi: odrediti potencijal φ unutar zatvorenog područja V ako su zadane raspodjele potencijala φ i njegova normalna derivacija $\partial\varphi/\partial n'$ po rubnoj plohi S. Neka je dakle V područje ograničeno zatvorenom plohom S i neka $\vec{r}$ označuje točku promatranja, koja se uvijek nalazi unutar područja volumena V. Metoda koju ćemo primijeniti u biti je generaliziranje jednog od rješenja Poissonove diferencijalne jednadžbe uz upotrebu poopćenih funkcija. Koristit ćemo se Greenovim teoremom u obliku

$$\int\limits_V (u\,\triangle v - v\,\triangle u)\,\mathrm{d}V' = \oint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n'} - v\frac{\partial u}{\partial n'}\right)\mathrm{d}S', \qquad (166\text{ a})$$

gdje $\partial/\partial n'$ označuje derivaciju u smjeru normale na rubnu plohu S, usmjerenu prema van iz prostora koji se promatra. Primijenimo (166 a) na zadani prostor i uvedimo supstituciju $u = \varphi_1(\vec{r}, t)$ i $v = \varphi(\vec{r}', t')$. Prema (161 b) φ_1 je potencijal jediničnog točkastog naboja, a $\varphi(\vec{r}', t')$ je potencijal u točki izvora. Uz pomoć računa poopćenih funkcija i koristeći se izvodom iz prethodnog odjela, izračunajmo lijevu stranu jednadžbe (166 a). Uvrstimo li

$$\triangle\varphi_1 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t'^2} - \frac{1}{\varepsilon}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t'),$$

$$\triangle\varphi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} - \frac{\varrho}{\varepsilon},$$

u (166 a), lijeva strana postaje jednaka

$$\int\limits_V\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi_1\triangle\varphi - \varphi\triangle\varphi_1)\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' = \int\limits_V\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi_1\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} - \frac{\varrho}{\varepsilon}\right) - \right.$$
$$\left. - \varphi\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t'^2} - \frac{1}{\varepsilon}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\right)\right\}\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t'. \qquad (166\text{ b})$$

Deriviranjem δ-funkcije dobiva se iz (161 b) da je

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t'^2} = \frac{\delta''\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}, \qquad (167)$$

pa se izračunavanje integrala (166 b) svodi na izračunavanje četiriju parcijalnih integrala. Tako je prvi integral

$$\frac{1}{v^2}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon v^2}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon v^2}\int_V\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\mathrm{d}V'. \quad (168\,\mathrm{a})$$

Drugi parcijalni integral od (166 b) jest

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1\,\varrho\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varrho(\vec{r}',t')\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_V\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\varrho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\mathrm{d}V'. \quad (168\,\mathrm{b})$$

Treći parcijalni integral od (166 b) na isti način daje

$$-\frac{1}{v^2}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t'^2}\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon v^2}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}',t')\frac{\delta''\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon v^2}\int_V\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\mathrm{d}V'. \quad (168\,\mathrm{c})$$

I konačno, četvrti parcijalni integral od (166 b) jest

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}',t')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\vec{r},t). \quad (168\,\mathrm{d})$$

Integral (166 b) dobiva se zbrajanjem rješenjâ, što daje

$$\int_V\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_1\,\Delta\varphi-\varphi\,\Delta\varphi_1)\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_V\frac{[\varrho]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \quad (169)$$

Preformulirajmo sada desnu stranu identiteta (166 a) tako da uvrstimo odgovarajuće vrijednosti za u i v, odnosno za φ_1

$$\oint_S\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi_1(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\vec{r}',t')-\varphi(\vec{r}',t')\frac{\partial}{\partial n'}\varphi_1(\vec{r},t)\right\}\mathrm{d}S'\,\mathrm{d}t'. \quad (170\,\mathrm{a})$$

Prvi integral daje

$$\oint_S\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\,\mathrm{d}S'\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}S'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}\varphi\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\mathrm{d}S', \quad (170\,\mathrm{b})$$

a drugi integral nakon deriviranja po n' ima rješenje

$$-\oint_S\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n'}\,\mathrm{d}S'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}',t')\left\{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta'\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{v\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial n'}|\vec{r}-\vec{r}'|\right\}\mathrm{d}S'\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\left\{-\varphi\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{v|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)\frac{\partial}{\partial n'}|\vec{r}-\vec{r}'|\right\}\mathrm{d}S'. \quad (170\,\mathrm{c})$$

Desna strana jednadžbe (168 a) jednaka je sumi rješenja u (170 b) i (170 c), pa se njenim izjednačivanjem sa rješenjem lijeve strane jednadžbe (169), dobiva integral potencijalne funkcije u zadanom području:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{[\varrho]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right]-\right.$$

$$\left.-[\varphi]\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\frac{1}{v\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial n'}|\vec{r}-\vec{r}'|\right\}\mathrm{d}S', \quad (171)$$

gdje je $\vec{r}$ uvijek unutar volumena V.

Jednadžba (171) jest traženi integral potencijala unutar ograničenog prostora V. Volumni integral daje doprinos potencijalu od naboja unutar zatvorenog volumena V, a plošni integral određuje doprinos potencijalu od izvora izvan V. Na početku postavljena zadaća sada je riješena, jer ako su poznati potencijali φ, njihove normalne derivacije $\partial\varphi/\partial n'$ po cijeloj rubnoj plohi S i raspodjela naboja ϱ po volumenu V, potencijal φ unutar tog volumena u potpunosti je određen tom relacijom.

Treba odmah upozoriti da *nije moguće* potpuno proizvoljno i neovisno jedne o drugima zadati vrijednosti φ i $\partial\varphi/\partial n'$ po rubnoj plohi. Zato pretpostavimo da je poznat samo potencijal φ u svakom trenutku po plohi S, uz zadanu raspodjelu ϱ u volumenu V. U tom će se slučaju u (171) moći odrediti svi članovi u površinskom integralu izuzev onoga koji sadrži $\partial\varphi/\partial n'$. Rješenje za potencijal, koje sadrži i plošni integral preko $\partial\varphi/\partial n'$, mora zadovoljavati zadane vrijednosti potencijala na plohi S. Odatle će se dobiti za $\partial\varphi/\partial n'$ integralna jednadžba koja općenito neće kao rješenje imati jednu proizvoljnu funkciju. U daljem tekstu bit će temeljitije analizirani granični problemi i obrađeni različiti tipovi rubnih zadaća.

Spomenimo još da tek u slučaju kad promatrani prostor toliko proširimo da po njegovoj rubnoj plohi S budu zadovoljeni rubni uvjeti $\varphi = \partial\varphi/\partial n' = 0$, jednadžba (171) prelazi u (162 c) i daje kao rješenje retardirani potencijal. Takav slučaj redovito nastupa kad granice protegnemo u beskonačnost, tj. kad se integracija u (171) obavlja preko cijelog (neograničenog) prostora. Tada točno pisano rješenje potencijalne jednadžbe (162 a) u stvari glasi

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{[\varrho]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \quad (172\,\mathrm{a})$$

(V **neograničen**)

To rješenje vrijedi i za konačan prostor ako je zadana raspodjela takva da je na njegovoj rubnoj plohi posvuda ispunjen uvjet $\varphi = \partial\varphi/\partial n' = 0$.

Često će biti pogodno da se udaljenost između točke promatranja i točke u kojoj se nalazi izvor označi sa $R = |\vec r - \vec r'|$, pa se rješenje za retardirani potencijal piše u obliku

$$\varphi(\vec r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\varrho\left(\vec r', t - \frac{R}{v}\right)}{R}\,\mathrm{d}V'. \qquad (172\ \mathrm{b})$$

Postoje i druga rješenja potencijalnih jednadžbi koja su ili manje opća ili se odnose na jednu određenu vrstu polja. Ta rješenja su obično povezana s imenima poznatih matematičara koji su ih razvili.

Integral jednadžbi polja. Maxwellove jednadžbe, kao što je prije pokazano, mogu biti pisane na različite načine, već prema vrsti zadaće, zadanim izvorima polja, rubnim i početnim uvjetima, te ovisno o vrsti materije koja ispunjava promatrani prostor. Zajedničko za sve njih je diferencijalno predstavljanje polja. Svojstva elektromagnetskih polja mogu također biti izražena odgovarajućim sustavom integralnih jednadžbi. Tako se primjenom Stokesovog teorema i teorema divergencije na četiri Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku, dobiva slijedeći sustav jednadžbi

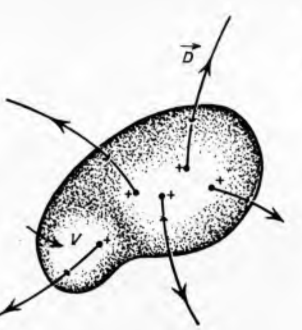
$$\oint_s \vec H\,\mathrm{d}\vec s = \int_S \vec J \vec n\,\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec D \vec n\,\mathrm{d}S, \qquad (173\ \mathrm{a})$$

$$\oint_s \vec E\,\mathrm{d}\vec s = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec B \vec n\,\mathrm{d}S, \qquad (173\ \mathrm{b})$$

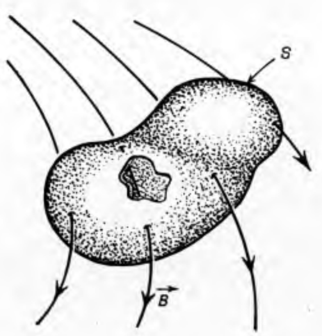
$$\oint_S \vec D \vec n\,\mathrm{d}S = Q, \qquad \oint_S \vec B \vec n\,\mathrm{d}S = 0. \qquad (173\ \mathrm{c,\ d})$$

Ovaj sustav jednadžbi predstavlja integralni oblik Maxwellovih jednadžbi.

Prva jednadžba (173 a) izražava *poopćeni Ampèreov kružni zakon* ili *zakon protjecanja*, a druga (173 b) je poznata kao *Faradayjev zakon indukcije*. U obje jednadžbe se pri parcijalnom deriviranju po vremenu podrazumijeva da se električni, odnosno magnetski tok vremenski mijenja kroz konturu s koja ne mijenja



Sl. 99. D-linije koje izviru iz naboja Q u volumenu V; jednadžba (173 c)



Sl. 100. B-linije prolaze kroz zatvorenu plohu S; jednadžba (173 d)

oblik (sl. 99 i sl. 100). Ako uvedemo pretpostavku da se kontura može gibati i deformirati, totalna se promjena toka kroz takvu konturu može uzeti u obzir jednadžbama

$$\oint_s \vec H\,\mathrm{d}\vec s = \int_S \vec J \vec n\,\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec D \vec n\,\mathrm{d}S, \qquad (174\ \mathrm{a})$$

$$\oint_s \vec E\,\mathrm{d}\vec s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec B \vec n\,\mathrm{d}S. \qquad (174\ \mathrm{b})$$

Prvi integral na desnoj strani u jednadžbi (174 a) predstavlja ukupnu provodnu struju I koja protječe kroz plohu S i obuhvaćena je rubnom konturom s. Po sličnosti s gustoćom provodne struje $\vec J$ uveo je Maxwell veličinu $\partial\vec D/\partial t$, kao gustoću *pomačnih struja*.

Prema definiciji je

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_S \vec B \vec n\,\mathrm{d}S \qquad (175\ \mathrm{a})$$

statički *magnetski tok*, ili tok vektora $\vec B$ kroz plohu S. Integral

$$\Phi_\mathrm{e} = \int_S \vec D \vec n\,\mathrm{d}S \qquad (175\ \mathrm{b})$$

predstavlja statički *električni tok*, tj. tok vektora $\vec D$ kroz plohu S.

U poglavlju o valnim jednadžbama u homogenim materijalima (str. 147) pokazano je da vektori polja $\vec E$ i $\vec H$ mogu biti obuhvaćeni i vektorskim valnim jednadžbama, pa se može očekivati da se njihovim rješavanjem mogu dobiti integralna rješenja oblika (171) kao i za potencijale. Postavimo zadatak ovako: treba da se utvrdi integral vektora polja $\vec E$ i $\vec H$ u zadanom konačnom prostoru volumena V, s poznatom raspodjelom »neovisnih« izvora polja, struja $\vec J$ i naboja ϱ. Pri tome su zadani i svi potrebni rubni i početni uvjeti, tj. poznate su veličine polja i njihove prve derivacije po rubnoj plohi S, koja zatvara volumen V.

Za tu svrhu prilagodimo jednadžbe (107) i (108) i pišimo ih u nešto izmijenjenom obliku, uključivanjem zadanih »neovisnih« raspodjela struja $\vec J$ i naboja ϱ:

$$\triangle\vec E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec J}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varrho, \qquad (176\ \mathrm{a})$$

$$\triangle\vec H - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec H}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\vec J. \qquad (176\ \mathrm{b})$$

Rastavljanjem na komponente u kartezijskom koordinatnom sustavu prelaze ove vektorske jednadžbe u šest skalarnih diferencijalnih jednadžbi tipa (162 a). Analogno rješenju u (171), njihova rješenja nakon slaganja komponenata u vektore glase

$$\begin{aligned}\vec E(\vec r, t) = {} & -\frac{1}{4\pi}\int_V\left[\mu\frac{\partial\vec J}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}'\varrho\right]\frac{\mathrm{d}V'}{|\vec r - \vec r'|} + \\ & + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{[(\vec n'\cdot\operatorname{grad}')\vec E]}{|\vec r - \vec r'|} - [\vec E]\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{v|\vec r - \vec r'|}\left[\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial n'}|\vec r - \vec r'|\right\}\mathrm{d}S', \end{aligned} \qquad (177\ \mathrm{a})$$

$$\begin{aligned}\vec H(\vec r, t) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_V[\operatorname{rot}'\vec J]\frac{\mathrm{d}V'}{|\vec r - \vec r'|} + \oint_S\left\{\frac{[(\vec n'\cdot\operatorname{grad}')\vec H]}{|\vec r - \vec r'|} - \right. \\ & \left. - [\vec H]\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} + \frac{1}{v|\vec r - \vec r'|}\left[\frac{\partial\vec H}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial n'}|\vec r - \vec r'|\right\}\mathrm{d}S'. \end{aligned} \qquad (177\ \mathrm{b})$$

Nakon sređivanja, ova rješenja mogu se pisati u konačnom obliku koji je pogodan za upotrebu:

$$\begin{aligned}\vec E(\vec r, t) = {} & -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{[\vec J]}{|\vec r - \vec r'|}\mathrm{d}V' - \operatorname{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{[\varrho]}{|\vec r - \vec r'|}\mathrm{d}V' - \\ & - \frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{(\vec n'\times[\vec E])\times\operatorname{grad}'\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} - \frac{1}{v|\vec r - \vec r'|}\left(\vec n'\times\left[\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right]\right)\times\right. \\ & \times\operatorname{grad}'|\vec r - \vec r'| + \left(\vec n'\cdot\left[\vec E\right]\right)\operatorname{grad}'\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} - \frac{1}{v|\vec r - \vec r'|}\cdot \\ & \left.\cdot\left(\vec n'\cdot\left[\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right]\right)\operatorname{grad}'|\vec r - \vec r'| - \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\vec n'\times\left[\frac{\partial\vec B}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}S', \end{aligned} \qquad (178\ \mathrm{a})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \mathrm{rot}\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{J}]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left\{\left(\vec{n}' \times \left[\vec{H}\right]\right) \times \right.$$

$$\times\ \mathrm{grad}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{v\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\vec{n}' \times \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right]\right) \times \mathrm{grad}'\,|\vec{r}-\vec{r}'| +$$

$$+ \left(\vec{n}' \cdot \left[\vec{H}\right]\right)\mathrm{grad}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{v\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(\vec{n}' \cdot \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right]\right) \cdot$$

$$\left. \cdot\ \mathrm{grad}'\,|\vec{r}-\vec{r}'| + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\vec{n}' \times \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}S'. \qquad (178\ \mathrm{b})$$

U gornjim jednadžbama izraz $\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$ označava u stvari operaciju $\frac{\partial [\vec{E}]}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}\vec{E}(\vec{r}', t')$.

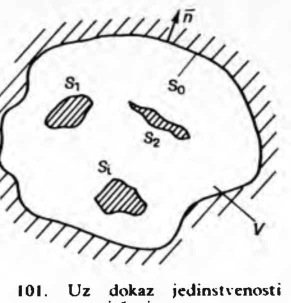
Jedinstvenost rješenja

Pokazano je da se rješenja elektromagnetskih problema mogu dobiti rješavanjem sustava diferencijalnih jednadžbi vektora polja i potencijala ili izračunavanjem integralnih jednadžbi po zadanim izvorima, tj. nabojima i strujama. Osobina je parcijalnih diferencijalnih jednadžbi da imaju beskonačan broj jednako valjanih rješenja. Zato je jedan od zadataka primijenjene matematike da fizikalno interpretira matematičke rezultate. Ako se očekuje samo jedna vrsta ponašanja promatranih pojava, postaje potrebno da se izdvoji *samo jedno* od više prikladnih rješenja. To se postiže primjenom dodatnih ograničenja izvedenih iz predviđenih fizikalnih predodžbi. Ograničenja se uvode propisivanjem *rubnih i početnih uvjeta* koje mora zadovoljiti polje. Očito je da se mora dokazati da ti uvjeti osiguravaju *jedinstveno rješenje*.

Ako se rješavaju problemi u kojima smo interesirani samo za rješenja koja su valjana u potpuno homogenom prostoru, jedinstveno će se rješenje dobiti iz skupa ograničenja postavljenih ponašanju polja u beskonačnosti u prostoru i vremenu, osiguravši da potpuni podaci o izvorima (u cijelom prostoru i vremenu) budu dani.

Najviše problema u primjenama elektromagnetske teorije obuhvaća prostor koji je bar do izvjesnog stupnja nehomogen. Najprikladnije je podijeliti nehomogeni prostor u područja od kojih je svako homogeno. Pošto općenito komponente polja mogu na rubnim plohama između tih homogenih područja biti diskontinuirane, bitno je poznavati uvjete koji moraju za polja na svakoj graničnoj plohi između dva dijela prostora biti ispunjeni da bi se osigurala jedinstvenost rješenja. Uvjeti na granici su zato od posebnog interesa i bit će izvedeni iz osnovnih jednadžbi polja u odjelku koji slijedi.

Promatrajmo konačno područje volumena V koje je iznutra ograničeno plohom S i izvana plohom S_0. Ploha S može biti rastavljena u određen broj odvojenih zatvorenih ploha S_i, kao na slici 101. Svojstva su materijala u volumenu V izotropna, a parametri ε, μ i $\varkappa$ mogu biti proizvoljne funkcije položaja. Površine S_i predstavljaju granice različitih stranih objekata u polju. Uobičajeni je postupak za dokazivanje jedinstvenosti rješenja problema polja, tj. rješenja pridruženog sustava diferencijalnih jednadžbi da se pretpostave dva moguća rješenja $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ i $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ koja su u trenutku $t = 0$ identična u svim točkama prostora V. Treba naći najmanji mogući broj uvjeta koji moraju biti zadani za komponente vektora polja na granicama S i S_0 s namjerom da ova dva rješenja ostanu identična tokom vremena, tj. za $t > 0$. Zbog linearnosti jednadžbi polja (isključeni su feromagnetski materijali) razlika poljâ $\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$ i $\vec{H} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$ također je rješenje, za koje je Stratton s pomoću Poyntingovog teorema pokazao da je uvijek jednako nuli kada su ili $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ ili $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$, tj. kada su tangencijalne komponente od $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ ili $\vec{H}_1$ i $\vec{H}_2$ identične na graničnoj plohi $(S + S_0)$ prostora V za sve vrijeme $t > 0$. Prema tome, u linearnim i izotropnim materijalima (za koje se ne zahtijeva da budu i homogeni) elektromagnetsko polje unutar zatvorenog područja V jedinstveno je određeno za sve vrijeme $t > 0$ sa zadanim početnim vrijednostima vektora električnog i magnetskog polja po volumenu V u $t = 0$, zajedno sa zadanim vrijednostima tangencijalnih komponenti električnog polja ili tangencijalnih komponenti magnetskog polja na rubnoj plohi $(S + S_0)$ za vrijeme $t \geqq 0$. Pretpostavlja se da u volumenu V nema izvorâ ili da su zadani. Dokaz može biti proširen na anizotropne materijale i na izvjesne vrste nelinearnih materijala, ali ne i na materijale koji imaju višeznačne odnose između $\vec{D}$ i $\vec{E}$ ili između $\vec{B}$ i $\vec{H}$. U stacionarnim problemima nismo interesirani za propisivanje inicijalnih uvjeta potrebnih za opći teorem jedinstvenosti.

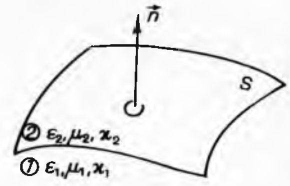


Sl. 101. Uz dokaz jedinstvenosti rješenja

Argumenti jedinstvenosti mogu se primijeniti i na otvorena područja. Ako se S_0 udaljava prema beskonačnosti, V postaje izvana neograničen. Elektromagnetsko polje je u otvorenom (neograničenom) području jedinstveno određeno ako su izvori po cijelom volumenu V i za sve vrijeme zadani, ako produkti od $(r\,\vec{E})$ i $(r\,\vec{H})$ ostaju konačni kad se r približava beskonačnosti (uvjet *regularnosti* polja u beskonačnosti) i ako komponente jakosti polja zadovoljavaju *radijacioni uvjet*, koji osigurava da kod velikih udaljenosti od izvora polje predstavlja izlazeći putujući val. Otuda je lako pokazati da potencijalna jednadžba (154 a) za neograničen prostor ima jedino rješenje (172 a), koje predstavlja izlazeći val elektromagnetskog polja. Ovaj teorem je valjan samo ako u promatranom prostoru nema zapreka.

Uvjeti na granici

U prethodnom odjelu bilo je istaknuto da najviše problema u primjeni elektromagnetske teorije obuhvaća nehomogene prostore, koje onda nastojimo podijeliti u područja od kojih je svako homogeno. Kroz svaku graničnu plohu koja razdvaja dva homogena područja s različitim materijalima značajke ε, μ i $\varkappa$ naglo se mijenjaju. Makroskopski promatrano, ova promjena može biti smatrana *diskontinuiranom*, pa se može stoga očekivati da će i vektori polja imati na tim mjestima diskontinuitete. Valjanost Maxwellovih jednadžbi bila je postulirana samo za točke u prostoru u okolišu kojih se fizikalna svojstva materije mijenjaju kontinuirano. Zato diferencijalne jednadžbe (104 a···d) mogu biti primijenjene samo odvojeno za svako homogeno područje. Kako u cijeloj regiji od interesa, bez obzira na granice između područja s homogenim materijalima, postoji jedno jedinstveno elektromagnetsko polje, očito je da je glavna poteškoća u slijeđenju i spajanju rješenjâ kroz plohe diskontinuiteta. Da bi se našla povezanost između vektorâ elektromagnetskog polja s obje strane plohe diskontinuiteta, upotrebljvaju se Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku (100 a···d). Nakon njihove primjene dobiju se za točke rubne plohe prikazane na slici 102 ove relacije



Sl. 102. Normala na graničnu plohu između dva materijala

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \qquad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}, \qquad (179\ \mathrm{a, b})$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \qquad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma, \qquad (179\ \mathrm{c, d})$$

koje čine potpuni *skup uvjetâ na granici* kojima se koristimo za rješavanje problema elektromagnetskih polja. Jednadžbe (179 a i c) kazuju da normalna komponenta od $\vec{B}$ i tangencijalna komponenta od $\vec{E}$ ostaju kontinuirane pri prolazu kroz plohu diskontinuiteta, tj. pri promjeni medija. Relacija (179 b) pokazuje da se tangencijalna komponenta od $\vec{H}$ pri prolazu kroz graničnu plohu između dva materijala mijenja diskontinuirano za iznos gustoće plošne struje $\vec{K}$ na granici. Ovdje se pretpostavlja da je $\vec{K}$ vektor nezavisne gustoće plošne struje koja je konačna i leži u S, a za struju gustoće $\vec{J}$ se pretpostavlja da je singularna u smjeru normalnom na plohu S, tj.

$$\vec{K} = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \vec{J} \to \infty}} \vec{J} \Delta l. \qquad (180)$$

Vrlo često se upotrebljava za vektor $\vec{K}$ i naziv *strujni oblog*. Ako je materijal konačne vodljivosti, ne može biti plošne struje ($\vec{K} = 0$) pa relacija (179 b) glasi

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \qquad (181)$$

tj. tangencijalna komponenta od $\vec{H}$ ostaje u tom slučaju kontinuirana kroz graničnu plohu. Na kraju, jednadžba (179 d) kazuje nam da se normalna komponenta od $\vec{D}$ pri diskontinuiranoj promjeni medija diskontinuirano mijenja za iznos jednak plošnoj gustoći slobodnog naboja σ. Plošna gustoća naboja σ je konačna kada volumna gustoća naboja postane singularna u smjeru normalnom na S, tj.

$$\sigma = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \varrho \to \infty}} \varrho \Delta l. \qquad (182)$$

Na granici između dva materijala koja su oba konačno vodljivi i kojima teku i provodne struje, relacija koja povezuje njihove normalne komponente jest

$$\vec{n}(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad (183)$$

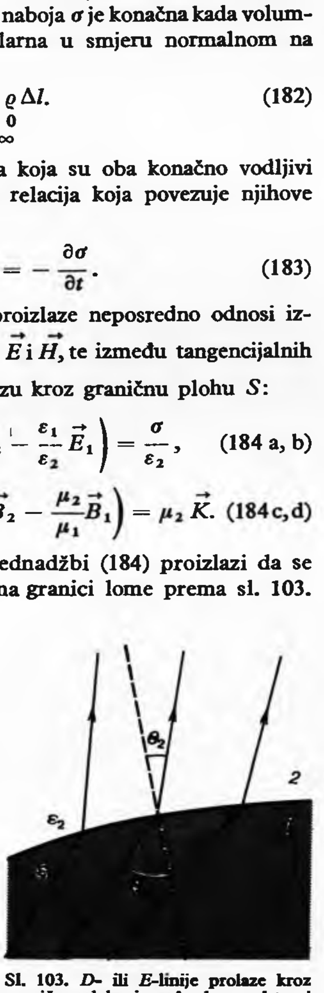
Iz sustava jednadžbi (179 a...d) proizlaze neposredno odnosi između normalnih komponenata od $\vec{E}$ i $\vec{H}$, te između tangencijalnih komponenata od $\vec{D}$ i $\vec{B}$, pri prolazu kroz graničnu plohu S:

$$\vec{n}\left(\vec{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\vec{H}_1\right) = 0, \quad \vec{n}\left(\vec{E}_2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\vec{E}_1\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}, \qquad (184\text{ a, b})$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{D}_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\vec{D}_1\right) = 0, \quad \vec{n} \times \left(\vec{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\vec{B}_1\right) = \mu_2 \vec{K}. \qquad (184\text{ c, d})$$

Tako na primjer iz sustava jednadžbi (184) proizlazi da se u elektrostatičkom polju silnice na granici lome prema sl. 103.

Za vremenski promjenljiva polja, koja su od najveće važnosti za primjenu, uvjeti za normalneko mponente polja nisu neovisni o uvjetima danim za tangencijalne komponente. Tako, za jedinstveno elektromagnetsko polje na granici između dva medija zadavanje tangencijalnih komponenata od $\vec{E}$ na graničnoj plohi jedinstveno određuje komponentu od $\vec{H}$ normalnu na S; zadavanje komponenata od $\vec{E}$ tangencijalnih na S također određuje normalne derivacije produkata tangencijalnih komponenata od $\vec{H}$ i odgovarajućih metričkih koeficijenata; kontinuitet komponenata od $\vec{E}$ tangencijalnih na S uključuje kontinuitet normalne komponente od $\vec{B}$, tj. (179 c) sadrži u sebi i uvjet (179 a) na granici; zadavanje



Sl. 103. D- ili E-linije prolaze kroz graničnu plohu između dva sredstva i lome se prema jednadžbi (184)

komponenata od $\vec{H}$ tangencijalnih na S jedinstveno određuje normalnu komponentu od $\vec{E}$ na granici; zadavanje komponenata od $\vec{H}$ tangencijalnih na S određuje i normalne derivacije produkata komponenata od $\vec{E}$ tangencijalnih na S i odgovarajućih metričkih koeficijenata; i kontinuitet komponenata od $\vec{H}$ tangencijalnih na S uključuje kontinuitet normalnih komponenata totalne gustoće struje, tj. uvjet (181) sadrži u sebi i uvjet

$$\vec{n}\left[\left(\varkappa_2 + \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}_2 - \left(\varkappa_1 + \varepsilon_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{E}_1\right] = 0. \qquad (185)$$

Idealni vodič. Zanimljiv je jedan poseban slučaj, kada se idealan vodič nalazi u području 2. Idealan vodič je materijal u kojem se pretpostavlja da je $\varkappa \to \infty$, pa se naboji gibaju slobodno ako je primijenjeno električno polje. Oni će se gibati dok god na njih djeluje sila, tj. dok sva polja u vodiču postanu jednaka nuli. Svi slobodni naboji u idealnom vodiču moraju se po površini vodiča raspodijeliti tako da tangencijalna komponenta električnog polja na površini i ukupno polje u vodiču budu jednaki nuli.

Polja su, dakle, isključena iz unutrašnjosti vodiča; sve su struje i naboji u beskonačno tankom sloju na površini. Budući da samo supravodiči imaju neizmjernu vodljivost, za svakodnevnu upotrebu dobra se aproksimacija za više praktičnih slučajeva postiže tako da se dobar vodič, kao bakar ili aluminijum, pri razmatranju elektromagnetskog polja izvan njega uzima kao da je idealan. Relacije (179) za površinu idealnog vodiča, jer u njemu nema polja, glase:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \qquad (186\text{ a, b})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma, \quad \vec{D} = \vec{n}\sigma, \qquad (186\text{ c, d})$$

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{K}; \quad \vec{H} = \vec{K} \times \vec{n}. \qquad (186\text{ e, f})$$

Na površini idealnog vodiča ne može biti u elektromagnetskom polju tangencijalne komponente od $\vec{E}$, niti normalne komponente od $\vec{B}$.

Naprezanje i energija

Tenzor naprezanja u polju. Jedan od važnih uspjeha Maxwellove teorije elektromagnetskih polja bila je njezina sposobnost da volumnu silu izrazi s pomoću naprezanja u polju koje se prenosi kroz graničnu plohu volumena. Time je omogućeno da se mehanički efekti u polju opišu s pomoću djelovanja koje se prenosi kroz prostor preko infinitezimalne udaljenosti, pa je izbjegnut račun sa silama koje djeluju na daljinu.

Neka je elektromagnetsko polje u prostoru volumena V, koji je ispunjen homogenim materijalom i ograničen plohom S, sa zadanom raspodjelom nezavisnih naboja ϱ i struja $\vec{J}$, predmet Maxwellovih jednadžbi (104 a...d). Suglasno s jedn. (84), polje djeluje na naboje i struje u tom prostoru ukupnom volumnom silom

$$\vec{F} = \int(\varrho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})\,\mathrm{d}V, \qquad (187\text{ a})$$

čija je gustoća u okolišu jedne točke u prostoru

$$f = \varrho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \qquad (187\text{ b})$$

Ta se činjenica može izraziti i na drugi način. Ako se skup jednadžbi polja (104 a...d) uredi i uvede *tenzor elektromagnetskog naprezanja* $\overleftrightarrow{S}$, koji se npr. u kartezijskom koordinatnom sustavu može izraziti s pomoću vektorâ polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ i njihovih komponenata u obliku matrice

$$\overleftrightarrow{S} = \begin{bmatrix} \varepsilon(E_x^2 - \frac{1}{2}E^2) + \mu(H_x^2 - \frac{1}{2}H^2) & \varepsilon E_x E_y + \mu H_x H_y & \varepsilon E_x E_z + \mu H_x H_z \\ \varepsilon E_x E_y + \mu H_y H_x & \varepsilon(E_y^2 - \frac{1}{2}E^2) + \mu(H_y^2 - \frac{1}{2}H^2) & \varepsilon E_y E_z + \mu H_y H_z \\ \varepsilon E_z E_x + \mu H_z H_x & \varepsilon E_z E_y + \mu H_z H_y & \varepsilon(E_z^2 - \frac{1}{2}E^2) + \mu(H_z^2 - \frac{1}{2}H^2) \end{bmatrix} \qquad (188)$$

dobiva se relacija

$$\operatorname{rot}\vec{E} \times \vec{D} + \operatorname{rot}\vec{H} \times \vec{B} = \operatorname{div}\overleftrightarrow{S} - \varrho\vec{E} = \vec{J} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}). \qquad (189)$$

Nakon integracije jednadžbe (189) po volumenu V dobiva se relacija za ukupnu volumnu silu koja djeluje na naboje i struje u tom prostoru

$$\vec{F} = \int_V \left(\varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}V = \oint_S \overleftrightarrow{S} \vec{n}\, \mathrm{d}S - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{D} \times \vec{B}\, \mathrm{d}V. \quad (190)$$

Promatrajmo prvo polje koje je neovisno o vremenu. Tada jedn. (190) pokazuje da se ukupna sila koja djeluje na naboje i struje unutar volumena V može izraziti integralom vektora naprezanja $\vec{t}$ na element površine s normalom $\vec{n}$:

$$\vec{t} = \overleftrightarrow{S} \cdot \vec{n}, \quad (191\text{ a})$$

po regularnoj plohi S koja zatvara volumen V. Po analogiji s naprezanjem u teoriji elastičnosti, $\overleftrightarrow{S}$ je nazvan tenzorom elektromagnetskog naprezanja. Uveo ga je Maxwell, koji je postulirao postojanje etera u cijelom prostoru. Eter je, po njemu, bio u stanju naprezanja određenom tenzorom $\overleftrightarrow{S}$ i bio je odgovoran za prenošenje sile od jednog naboja do drugog, slično kao u elastičnom mediju. Danas znamo da komponente od $\overleftrightarrow{S}$ nemaju fizikalne realnosti i najviše što se može reći jest da se sile mogu izračunati na temelju pretpostavke da postoji fiktivno stanje napregnutosti dano tenzorom $\overleftrightarrow{S}$.

Vektor naprezanja $\vec{t}$ u jedn. (191 a) može se izraziti s pomoću vektora polja

$$\begin{aligned}\vec{t} = \vec{t}_e + \vec{t}_m = \varepsilon(\vec{E} \cdot \vec{n})\vec{E} - \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \vec{n} + \\ + \mu(\vec{H} \cdot \vec{n})\vec{H} - \tfrac{1}{2}\mu H^2 \vec{n},\end{aligned} \quad (191\text{ b})$$

a njegov modul iznosi

$$|\vec{t}| = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2. \quad (191\text{ c})$$

Može se pokazati da u nehomogenom, linearnom izotropnom materijalu jednadžba (190) prelazi u

$$\begin{aligned}\oint_S \overleftrightarrow{S}\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \Big[\varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \tfrac{1}{2}|\vec{E}|^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \tfrac{1}{2}|\vec{H}|^2 \operatorname{grad} \mu + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D} \times \vec{B}\right)\Big] \mathrm{d}V,\end{aligned} \quad (192\text{ a})$$

pa je sila u točki volumena V prema Minkowskom

$$\varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \tfrac{1}{2}|\vec{E}|^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \tfrac{1}{2}|\vec{H}|^2 \operatorname{grad} \mu. \quad (192\text{ b})$$

Ova formula zanemaruje elektrostrikciju i magnetostrikciju, jer ne uzima u obzir promjenu u ε i μ uzrokovanu deformacijom koju proizvode elektromagnetske sile. Za čvrste materijale ona je dovoljno točna.

Impuls elektromagnetskog polja. Po analogiji s relacijom, poznatom iz mehanike, da je sila općenito jednaka promjeni impulsa u jedinici vremena, mogu se u jednadžbu (190) uvesti relacije

$$\frac{\mathrm{d}\vec{G}_{\mathrm{meh}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = \int_V \left(\varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}V, \quad (193)$$

gdje je $\vec{G}_{\mathrm{meh}}$ ukupni linearni impuls mjerljivih naboja u gibanju, i

$$\vec{G}_{\mathrm{EM}} = \int_V \vec{D} \times \vec{B}\, \mathrm{d}V = \frac{1}{v^2} \int_V \vec{E} \times \vec{H}\, \mathrm{d}V, \quad (194\text{ a})$$

gdje je $\vec{G}_{\mathrm{EM}}$ ukupni *elektromagnetski impuls polja* sadržanog u volumenu V. Jedinični elektromagnetski impuls, ili gustoća impulsa polja, tada je

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \frac{1}{v^2} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (194\text{ b})$$

Konačno jednadžba (190) glasi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{G}_{\mathrm{meh}} + \vec{G}_{\mathrm{EM}}) = \oint_S \overleftrightarrow{S}\vec{n}\,\mathrm{d}S. \quad (195\text{ a})$$

Ako se volumen V toliko poveća da plošna naprezanja na graničnoj plohi S iščeznu, desna je strana jedn. (195 a) jednaka nuli, pa dobivamo

$$\vec{G}_{\mathrm{meh}} + \vec{G}_{\mathrm{EM}} = \text{konst}, \quad (195\text{ b})$$

što predstavlja *stavak o održanju impulsa* elektromagnetskog sustava. Relacija (195 b) kazuje da se elektromagnetskom polju može pripisati *svojstvo inercije*, slično inerciji materije.

Prema jedn. (190) i (191) ukupna sila koja djeluje na naboje, struje i materiju unutar volumena V jednaka je

$$\begin{aligned}\oint_S \overleftrightarrow{S}\vec{n}\,\mathrm{d}S &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{G}_{\mathrm{meh}} + \vec{G}_{\mathrm{EM}}\right) = \oint_S \Big[\varepsilon(\vec{E}\vec{n})\vec{E} + \mu(\vec{H}\vec{n})\vec{H} - \\ &- \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\vec{n}\Big] \mathrm{d}S = \\ &= \int_V \Big[\varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \frac{1}{2}E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{1}{2}H^2 \operatorname{grad} \mu + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B})\Big] \mathrm{d}V.\end{aligned} \quad (196)$$

Jednadžba (196) pokazuje da, općenito, u dinamičkim elektromagnetskim poljima na materiju u volumenu može djelovati rezultantna elektromagnetska sila različita od nule, iako u promatranom prostoru ne mora biti ni slobodnih naboja ni struja. U statičkim poljima to ne može biti, jer ako u homogenom prostoru nema naboja ni struja, i ukupna sila je jednaka nuli. Međutim, naprezanje i u statičkom polju općenito postoji i različito je od nule.

Energija. Poyntingov teorem. Princip održanja energije nije do sada bio upotrijebljen u rješavanju elektromagnetskih problema, jer se željelo podvući da Maxwellovim jednadžbama zajedno s rubnim uvjetima i izvorima nije potrebna pomoć drugih principa. Međutim, kako pojam energije često može biti iskorišten u rješavanju problema, i kako su pitanja prijenosa i opskrbe energijom vrlo često od prvotne važnosti u tehničkim primjenama, energetski odnosi izraženi s pomoću vektora polja ne mogu se ignorirati.

Polazeći od rada utrošenog u elektrostatičkom polju da bi se točkasti naboj q prenio iz beskonačnosti, gdje nema polja, u točku u polju kojoj se pripisuje skalarni potencijal φ, može se pokazati da je prirast energije točkastog naboja

$$W = \varphi \cdot q. \quad (197\text{ a})$$

Energija potpunog sistema ($\sum q = 0$) od n točkastih naboja je onda

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i, \quad (197\text{ b})$$

a ako je naboj raspodijeljen u izoliranom volumenu V zadanom gustoćom ϱ, onda je

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \varrho\, \mathrm{d}V. \quad (198)$$

Konačno se elektrostatička energija može izraziti i kao funkcija vektora polja

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D}\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V E^2\, \mathrm{d}V, \quad (199\text{ a})$$

a ako je materijal u volumenu V nelinearan, tada je

$$W = \int_V \int_0^{\vec{D}} \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{D}\, \mathrm{d}V. \quad (199\text{ b})$$

Slično je u magnetostatičkim problemima energija polja u volumenu V izražena gustoćom struje i vektorom potencijala

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{J}\vec{A}\, \mathrm{d}V, \quad (200)$$

i s pomoću vektora polja

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{H}\vec{B}\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2\, \mathrm{d}V, \quad (201\text{ a})$$

te za nelinearne materijale

$$W = \int_V \int_0^{\vec{B}} \vec{H}\, d\vec{B}\, dV. \tag{201 b}$$

J. H. Poynting je 1884 prvi pokazao, a iste godine i Heaviside neovisno od njega, da se iz Maxwellovih jednadžbi uz primjenu principa održanja energije na probleme koji obuhvaćaju elektromagnetska polja, može zaključiti da *elektromagnetska energija* ostaje u prostoru i teče kroz prostor. Da dođemo do tog rezultata, promatrajmo volumen V, zatvoren graničnom plohom S i ispunjen materijalom za koji se pretpostavlja da je krut (tako da je isključena elektrostrikcija i magnetostrikcija), da nema pojava histereze i da se mogu zanemariti dielektrični gubici (uzrokovani stvaranjem topline unutarnjim trenjem). U tome prostoru postoji elektromagnetsko polje, u kojemu je energija raspoređena s volumnom gustoćom

$$w = w_E + w_M = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}\, d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \vec{H}\, d\vec{B}. \tag{202}$$

Ovdje je pretpostavljeno da je izraz (202) za gustoću energije akumulirane u elektromagnetskom polju formalno isti kao i u stacionarnom slučaju, što se podudara s opažanjima. Primijenimo sada na polje u volumenu V, sa zadanim strujama i nabojima, Maxwellove jednadžbe (104 a...d), uređene tako da dobijemo

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E}\vec{J} - \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right). \tag{203}$$

Nakon integracije po volumenu V, koji je ograničen plohom S, i s pomoću teorema divergencije, dobiva se relacija koja predstavlja *Poyntingov teorem*

$$-\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV = \int_V \vec{E}\vec{J}\, dV + \oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)\vec{n}\, dS. \tag{204}$$

Jednadžba (204), koja je sukladna s principom održanja energije, može biti objašnjena kako slijedi. Integral na lijevoj strani jednadžbe, suglasno sa (202), predstavlja iznos promjene (smanjenja) energije uskladištene u elektromagnetskom polju i u polariziranoj i magnetiziranoj materiji u volumenu V. Što je uzrokovalo taj gubitak pokazuju dva člana na desnoj strani jednadžbe. Umnožak $(\vec{E}\vec{J})$ je iznos topline proizvedene u jedinici volumena u jedinici vremena (nastale zbog provodnih struja), pa prema tome prvi član desne strane predstavlja snagu izgubljenu u Jouleovoj toplini u volumenu V. Prema principu održanja energije, ravnoteža može biti sačuvana s pomoću toka elektromagnetske energije kroz plohu S koja ograničava volumen V, što je uzeto u obzir drugim članom na desnoj strani. Drugim riječima, smanjenje elektromagnetske energije akumulirane u volumenu V uzrokovan je djelomično gubicima zbog Joulove topline, a ostatak P_N istječe napolje kroz graničnu plohu S i dan je integralom

$$\oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)\vec{n}\, dS = \oint_S \vec{N}\vec{n}\, dS = P_N. \tag{205}$$

Poyntingov vektor, definiran jednadžbom

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}, \tag{206}$$

može se tumačiti kao *intenzitet toka energije* u točki polja, tj. kao elektromagnetska energija u jedinici vremena (snaga) koja prolazi kroz jediničnu plohu, čija je normala orijentirana u smjeru vektora $(\vec{E} \times \vec{H})$. U skladu s jednadžbom (194 b), može se $\vec{N}$ povezati s gustoćom elektromagnetskog impulsa relacijom

$$\vec{g} = \frac{\vec{N}}{v^2}. \tag{207}$$

Ako je materijal u promatranom prostoru linearan (npr. neferomagnetski) i izotropan, gustoća je akumulirane energije u svakom trenutku, prema jedn. (202),

$$w = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2, \tag{208}$$

pa se Poyntingov teorem (204) reducira na jednadžbu

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \tfrac{1}{2}\mu H^2\right) dV = \int_V \frac{J^2}{\varkappa}\, dV + \oint_S \vec{N}\vec{n}\, dS. \tag{209}$$

Na kraju treba reći da je energija u elektromagnetskom polju bila predmetom mnogih rasprava te su bili predlagani drugi oblici energetskih teorema. Naime, i kad se prihvati da je ukupna energija kroz zatvorenu plohu točno prikazana jednadžbom (205), ne može se iz toga zaključiti definitivno da je intenzitet toka energije u promatranoj tački $\vec{N} = E \times \vec{H}$. Poyntingovom vektoru $\vec{N}$ može se dodati bilo koji vektor kojemu je integral preko zatvorene plohe S jednak nuli. S druge strane, mi smo rijetko suočeni s tokom energije kroz točku, a u mnogim primjenama želimo znati iznos energije koja prolazi kroz zatvorenu plohu. Ali ideja o gustoći energije u elektromagnetskom polju i o toku intenziteta $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ vrlo je korisna i dobro objašnjava pojave u prirodi.

Harmonička polja

U jednostavnim (homogenim, linearnim, izotropnim i vremenski postojanim) materijalima jednadžbe polja čine linearan sustav. No, moguća rješenja su još uvijek tako općenita da se problemi znatno kompliciraju. Pogodno je zato ograničiti probleme, bez gubitka općenitosti Maxwellovih jednadžbi, na dvije posebne vrste vremenskih promjena u polju. Za praksu su, naime, od najvećeg interesa dva slučaja: slučaj kad vremenskih promjena u polju nema — *statička polja* — i slučaj kad su vremenske promjene polja sinusne — *harmonička polja*. Oba ova slučaja zbog njihove važnosti treba obraditi s posebnom pažnjom, a slučaj harmoničkog polja još i zbog toga što predstavlja osnovu za rješavanje i sintetiziranje (s pomoću Fourierovog teorema) bilo kojeg linearnog polja proizvoljne vremenske ovisnosti.

Ograničit ćemo, dakle, u nastavku našu pažnju na polja koja se mijenjaju sinusno u vremenu, tj. na ona koja titraju nekom kružnom frekvencijom ω i često se nazivaju harmoničkim *monokromatskim* poljima. Opisat ćemo *stacionarna stanja* i isključiti nelinearne materijale. U ovom slučaju vrlo je pogodno *eksponencijalno ili fazorsko obilježavanje*, tj. predstavljanje varijabli polja kompleksnim brojevima. S matematičkog stajališta velika je prednost toga postupka što se iz jednadžbi polja može eliminirati vremenska varijabla.

Tako izraz za sinusnu funkciju po vremenu, pisan ovako:

$$A = A_m \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(A_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A_0 e^{j\omega t}), \tag{210 a}$$

gdje je

$$A_0 = A_m e^{j\alpha}, \tag{210 b}$$

a $j = \sqrt{-1}$, vodi k predstavljanju realne vremenske funkcije A s pomoću kompleksnog broja A_0, koji se naziva *fazor* (ili simbolički vektor). Ovaj se postupak može protegnuti i na predstavljanje skalarnih ili vektorskih polja sa sinusnim vremenskim promjenama uvođenjem prostornog fazora. No, iako je iz matematičkih razloga pogodno upotrebljavati kompleksne veličine (fazore), uvijek treba držati na umu *da se fizikalna bit mora predstaviti realnim funkcijama.*

Promatrajmo polja što ih proizvode struje i naboji čije su promjene u vremenu sinusne. Tako naboj gustoće

$$\varrho(\vec{r}, \omega t) = f(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t + \alpha) = \varrho_m \cdot \cos(\omega t + \alpha), \tag{211 a}$$

u neograničenom slobodnom prostoru, prema valnoj jednadžbi (162 a), proizvodi polje koje se mijenja također sinusno u vremenu i čiji je potencijal prema (162 b) dan izrazom

$$\varphi(\vec{r}, \omega t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{f(\vec{r}') \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}|\vec{r} - \vec{r}'| + \alpha\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dV' \tag{211 b}$$

Na temelju jedn. (210 a, b) možemo pisati

$$\varrho(\vec{r}\,\omega t) = \operatorname{Re}\left(f(\vec{r}) \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}\right), \tag{212 a}$$

$$\varphi(\vec{r}, \omega t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{v}|\vec{r} - \vec{r}'| + \alpha\right)}\, dV'\right). \tag{212 b}$$

Zbog sličnosti jednadžbi (162 a), (163 a) i (176 a, b), te na osnovi jedn. (212 a, b), može se očekivati da će sinusni izvori proizvoditi sinusna elektromagnetska polja općenitog oblika:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega t) = \vec{a}_E E_m \cos(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\vec{a}_E E_0(\vec{r})\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})}\right) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, j\omega)\right),$$
$$\vec{H}(\vec{r}, \omega t) = \vec{a}_H H_m \cos(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\vec{a}_H H_0(\vec{r})\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})}\right) = \mathrm{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}, j\omega)\right), \quad (213\text{ a, b})$$

gdje je Re matematički operator koji uzima u obzir samo realni dio kompleksne veličine a $\vec{a}$ jedinični vektor. Svrsishodno je ispustiti simbol Re u samoj matematičkoj analizi i primijeniti ga tek na kraju. Tako ćemo polja prikazati pridruženim kompleksnim funkcijama (214 a, b)

$$\vec{E}(\vec{r}, j\omega) = \vec{a}_E E_0(\vec{r})\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})} = \vec{a}_E |E_0|\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E)},$$
$$\vec{H}(\vec{r}, j\omega) = \vec{a}_H H_0(\vec{r})\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})} = \vec{a}_H |H_0|\, e^{j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H)},$$

gdje su

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{a}_E |E_0|\, e^{j\alpha_E} = \vec{a}_E (E_{0r} + j E_{0i}),$$
$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{a}_H |H_0|\, e^{j\alpha_H} = \vec{a}_H (H_{0r} + j H_{0i}) \quad (215\text{ a, b})$$

fazori električnog i magnetskog polja. $\vec{E}_0$ i $\vec{H}_0$ općenito su kompleksne funkcije položaja (ali ne i vremena). Iz (213 a b) je vidljivo da su maksimalne vrijednosti polja jednake modulu fazora, tj. $E_m = |E_0|$ i $H_m = |H_0|$, a vremenske se srednje vrijednosti mogu računati prema jednadžbama

$$E_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T E(\vec{r}, \omega t)\,dt = 0,$$
$$H_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T H(\vec{r}, \omega t)\,dt = 0, \quad (216\text{ a, b})$$

gdje je period pune promjene $T = 2\pi/\omega = 1/f$.

Ovakvo predstavljanje je dozvoljeno upotrijebiti samo kada su posrijedi linearne operacije, tako da se može uzeti realni dio ili prije ili poslije operacije. Tipične su linearne operacije zbrajanje, oduzimanje, množenje s konstantom, deriviranje i integriranje:

$$\mathrm{Re}(A_0) + \mathrm{Re}(B_0) = \mathrm{Re}(A_0 + B_0),$$
$$\mathrm{Re}(a \cdot A_0) = a \cdot \mathrm{Re}(A_0),$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Re}(A_0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial A_0}{\partial s}\right),$$
$$\int \mathrm{Re}(A_0)\,ds = \mathrm{Re}\left(\int A_0\,ds\right).$$

U slučaju nelinearnih operacija, npr. množenja, treba prvo izdvojiti realne dijelove pojedinih faktora i onda ih tek pomnožiti. Uvođenjem konjugirano kompleksnih veličina za električno polje

$$\vec{E}^*(\vec{r}, j\omega) = \vec{a}_E E_0^*(\vec{r})\, e^{-j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r})} = \vec{a}_E |E_0|\, e^{-j(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E)},$$
$$\vec{E}_0^*(\vec{r}) = \vec{a}_E |E_0|\, e^{-j\alpha_E} = \vec{a}_E (E_{0r} - j E_{0i}), \quad (217\text{ a, b})$$

i slično za magnetsko polje, mogu se operacije množenja i kvadriranja prikazati jednostavnijim izrazima. Tako je

$$|A_0|^2 = A_0 \cdot A_0^* = A_r^2 + A_i^2,$$
$$\mathrm{Re}(A_0) = \frac{A_0 + A_0^*}{2} = A_r$$
$$\mathrm{Re}(A_0) \cdot \mathrm{Re}(B_0) = \tfrac{1}{4}(A_0 + A_0^*)(B_0 + B_0^*).$$

Očito je da su operacije u Maxwellovim jednadžbama linearne, pa monokromatski oblik sustava (104a···d) glasi

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}, j\omega) = \vec{J}(\vec{r}, j\omega) + j\omega\varepsilon\,\vec{E}(\vec{r}, j\omega), \quad (218\text{ a})$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}, j\omega) = -j\omega\mu\,\vec{H}(\vec{r}, j\omega), \quad (218\text{ b})$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r}, j\omega) = \frac{1}{\varepsilon}\varrho(\vec{r}, j\omega), \quad (218\text{ c})$$
$$\mathrm{div}\,\vec{H}(\vec{r}, j\omega) = 0. \quad (218\text{ d})$$

Slično, jednadžba kontinuiteta (88), postaje

$$\mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r}, j\omega) = -j\omega\varrho(\vec{r}, j\omega). \quad (219)$$

Budući da se iz samog oblika jednadžbi može vidjeti jesu li pisane u kompleksnom obliku, u daljem će tekstu, radi kratkoće, biti ispušteno označavanje kompleksnih veličina polja. Napomenimo još da često u materijalima koji pokazuju mikroskopske inercijalne ili relaksacione efekte jedan ili više parametara konstitucije može biti kompleksna frekvencijski ovisna funkcija. Kompleksni parametri nisu nužno statički parametri, ali je

$$\hat{\varepsilon}(j\omega),\ \hat{\mu}(j\omega),\ \hat{\varkappa}(j\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} \varepsilon, \mu, \varkappa.$$

Povezanost između kompleksnih polja i potencijala se nešto pojednostavnjuje, pa jednadžbe (119) i (120) prelaze u oblik

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A},$$
$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \mathrm{grad}\,\varphi, \quad (220\text{ a, b})$$

a Lorentzov uvjet (125) sada glasi

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\varphi. \quad (221)$$

Posebno je zanimljivo istaći da u harmoničkim monokromatskim poljima vektorski potencijal i Hertzov vektor postaju identični, što slijedi iz jedn. (145 a)

$$\vec{A} = j\omega\mu\varepsilon\vec{\Pi}. \quad (222)$$

Valne se jednadžbe za elektromagnetske potencijale pojednostavnjuju, pa sustav (127 a, b) glasi

$$\triangle\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J},$$
$$\triangle\varphi + \omega^2\mu\varepsilon\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad (223\text{ a, b})$$

a sustav (138 a, b) prelazi u oblik

$$\triangle\vec{A} + (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\varkappa)\vec{A} = 0,$$
$$\triangle\varphi + (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\varkappa)\varphi = 0, \quad (224\text{ a, b})$$

te konačno jedn. (141 a, b) postaju

$$\triangle\vec{A} + (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\varkappa)\vec{A} = -\mu\vec{J}_i,$$
$$\triangle\varphi + (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\varkappa)\varphi = 0. \quad (225\text{ a, b})$$

Sustavi jednadžbi (223 a, b), (224 a, b) i (225 a, b) pripadaju posebnoj vrsti *eliptičkih* parcijalnih diferencijalnih jednadžbi poznatoj pod nazivom homogene i nehomogene *Helmholtzove jednadžbe.*

Već je pokazano, da se harmoničke vremenske promjene mogu zamijeniti operatorom $e^{j\omega t}$ ako su posrijedi samo linearne operacije. Kod rada s Maxwellovim jednadžbama i valnim jednadžbama polja u kompleksnom području pogodno je uvesti kompleksne izraze za energiju i snagu u elektromagnetskom polju. U proračunu energetskih odnosa, međutim, pojavljuju se nelinarne operacije, pa treba postupati sa mnogo opreza.

Gustoća w elektromagnetske energije *u svakom trenutku*, prema jedn. (202) i (208), iznosi u harmoničkim poljima

$$w(\vec{r}, \omega t) = w_E(\vec{r}, \omega t) + w_M(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\vec{E}(\vec{r}, \omega t)\right)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mu\left(\vec{H}(\vec{r}, \omega t)\right)^2, \quad (226)$$

gdje su trenutne vrijednosti električne i magnetske komponente

$$w_E(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{2}\varepsilon E_m^2 \cos^2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\varepsilon E_m^2\left(1 + \cos 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E)\right), \quad (227\text{ a})$$
$$w_M(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{2}\mu H_m^2 \cos^2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\mu H_m^2\left(1 + \cos 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H)\right). \quad (227\text{ b})$$

Trenutna vrijednost gustoće elektromagnetske energije, izražena s pomoću kompleksnih vrijednosti, iznosi prema jedn. (226)

$$w(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon \operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}\,\mathrm{j}\,\omega)\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) + \tfrac{1}{2}\, \mu \operatorname{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}\,\mathrm{j}\,\omega)\right) = \tfrac{1}{8}\, \varepsilon \left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) + \vec{E}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right)^2 + \tfrac{1}{8}\, \mu \left(\vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) + \vec{H}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right)^2. \tag{228}$$

U tehničkoj praksi najčešće se operira sa srednjim vrijednostima energije i snage u harmoničkim poljima, pa je *realna srednja vrijednost gustoće energije* u elektromagnetskom polju, računata preko jednog vremenskog perioda, dana izrazom

$$w_{sr}(\vec{r}, \omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T w(\vec{r}, \omega t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\, \varepsilon E_m^2 + \tfrac{1}{4}\, \mu H_m^2, \tag{229 a}$$

a prikazana s pomoću kompleksnih fazora polja, iznosi

$$w_{sr}(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{4}\, \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) + \tfrac{1}{4}\, \mu \vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) = \tfrac{1}{4}\, \varepsilon \vec{E}_0 \vec{E}_0^* + \tfrac{1}{4}\, \mu \vec{H}_0 \vec{H}_0^* = \tfrac{1}{4}\, \varepsilon |E_0|^2 + \tfrac{1}{4}\, \mu |H_0|^2 \tag{229 b}$$

i neovisna je o vremenu.

Intenzitet trenutne promjene gustoće energije elektromagnetskog polja, ili specifična elektromagnetska snaga, može se izračunati iz jedn. (226):

$$p(\vec{r}, \omega t) = p_E(\vec{r}, \omega t) + p_M(\vec{r}, \omega t) = \frac{\partial w_E(\vec{r}, \omega t)}{\partial t} + \frac{\partial w_M(\vec{r}, \omega t)}{\partial t} =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon E_m^2\, \omega \cdot \sin 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E) - \tfrac{1}{2}\, \mu H_m^2\, \omega \sin 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H) =$$
$$= -2\,\omega\, w_{E,sr} \sin 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E) - 2\,\omega\, w_{M,sr} \sin 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_H), \tag{230a}$$

a s pomoću kompleksnih veličina

$$p(\vec{r}, \omega t) = \frac{1}{2}\, \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right)\right\} + \frac{1}{2}\, \mu \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right)\right\}. \tag{230 b}$$

Budući da je srednja vrijednost gustoće energije u elektromagnetskom polju, prema jedn. (229 a, b), konstantna, to je $\partial w_{sr}/\partial t = p_{sr} = 0$, što znači da nema vremenske promjene srednje gustoće energije u prostoru polja sa stacionarnim harmoničkim stanjem.

Specifični gubici snage zbog Jouleove topline u elektromagnetskom polju, koji nastaju zbog provodnih struja gustoće J, mogu se *u svakom trenutku* računati s pomoću jednadžbe

$$p_g(\vec{r}, \omega t) = \vec{E}(\vec{r}, \omega t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, \omega t) = \frac{1}{\varkappa}\left(\vec{J}(\vec{r}, \omega t)\right)^2 = \frac{J_m^2}{\varkappa} \cos^2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E) = \frac{1}{2}\frac{J_m^2}{\varkappa}\left((1 + \cos 2(\omega t \mp \vec{k}\vec{r} + \alpha_E)\right). \tag{231 a}$$

Srednji specifični gubitak snage zbog Jouleove topline može se odrediti iz jedn. (231 a) i iznosi

$$p_{g\,sr} = \frac{1}{T}\int_0^T p_g(\vec{r}, \omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{J_m^2}{\varkappa} = \frac{1}{2}\varkappa E_m^2 = \frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) \cdot \vec{J}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{2}\vec{E}_0 \vec{J}_0^* = \frac{1}{2}\frac{|J_0|^2}{\varkappa}. \tag{231 b}$$

Poyntingov vektor (206) predstavlja intenzitet toka energije kroz jediničnu plohu u okolišu točke promatranja, i u harmoničkim elektromagnetskim poljima njegova *realna trenutna vrijednost* iznosi

$$\vec{N}(\vec{r}, \omega t) = \vec{E}(\vec{r}, \omega t) \times \vec{H}(\vec{r}, \omega t) = \tag{232 a}$$
$$= \tfrac{1}{2}\vec{E}_m \times \vec{H}_m \cdot [\cos(2\,\omega t \mp 2\vec{k}\vec{r} + \varphi_E + \varphi_H) + \cos(\varphi_E - \varphi_H)],$$

a ako se trenutna vrijednost računa s pomoću kompleksnih veličina polja,

$$\vec{N}(\vec{r}, \omega t) = \operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) \times \operatorname{Re}\left(\vec{H}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right). \tag{232 b}$$

Srednja vrijednost realnog Poyntingovog vektora, tj. srednja vrijednost intenziteta toka energije je tada dana izrazima

$$\vec{N}_{sr}(\vec{r}, \omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{N}(\vec{r}, \omega t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(\vec{E}_m \times \vec{H}_m) \cdot \cos(\varphi_E - \varphi_H), \tag{233 a}$$

a računata iz kompleksnih vektora polja iznosi

$$\vec{N}_{sr}(\vec{r}, \omega t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) \times \vec{H}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*). \tag{233 b}$$

Srednja snaga koja struji u polju kroz jediničnu površinu definirana je tako da je u stacionarnom stanju neovisna o vremenu, a trenutna vrijednost snage sastoji se prema jedn. (232 a) od dva dijela, jednog koji je stalan i jednak srednjoj vrijednosti, i drugog koji harmonički titra s dvostrukom frekvencijom $2\,\omega$. U jedn. (233 b) pojavljuje se tzv. *kompleksni Poyntingov vektor*, čija su svojstva zanimljiva u harmoničkim elektromagnetskim poljima:

$$\vec{N}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) = \tfrac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) \times \vec{H}^*(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) = \tfrac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*) = \tfrac{1}{2}\vec{E}_m \times \vec{H}_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_E - \varphi_H)} = \tfrac{1}{2}\vec{E}_m \times \vec{H}_m [\cos(\varphi_E - \varphi_H) + \mathrm{j}\sin(\varphi_E - \varphi_H)] = R + \mathrm{j}Q. \tag{234}$$

Kao što se vidi, on se sastoji od realnog i imaginarnog dijela, od kojih prvi predstavlja (realnu) *aktivnu srednju snagu* koja struji u elektromagnetskom polju kroz jediničnu površinu, a drugi *reaktivnu srednju snagu* u polju.

Zanimljivo je također da ispitamo integral kompleksnog Poyntingovog vektora preko zatvorene plohe S i da tako Poyntingov teorem (204) prilagodimo harmoničkim valovima. U tom cilju prilagodimo prve dvije Maxwellove jednadžbe (218 a, b) za kompleksno konjugirane veličine polja (pišući ih skraćeno)

$$\operatorname{rot}\vec{H}^* = \vec{J}^* - \mathrm{j}\,\omega\,\varepsilon\,\vec{E}^*, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mathrm{j}\,\omega\,\mu\,\vec{H}, \tag{235 a, b}$$

pa pomnoživši prvu sa $\vec{E}$ i drugu sa $\vec{H}^*$, te odbivši od druge prvu, dobivamo

$$\vec{H}^* \cdot \operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{H}^* = -\vec{E}\vec{J}^* - \mathrm{j}\,\omega\,(\mu\,\vec{H}\vec{H}^* - \varepsilon\,\vec{E}\vec{E}^*).$$

Nakon integracije unutar volumena V i množenja s faktorom 1/2 slijedi kompleksna relacija za Poyntingov teorem:

$$\oint_S \tfrac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\int_V \tfrac{1}{2}\vec{E}\vec{J}^*\,\mathrm{d}V + \mathrm{j}\,\omega\int_V (\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\vec{E}\vec{E}^* - \tfrac{1}{2}\mu\,\vec{H}\vec{H}^*)\,\mathrm{d}V, \tag{236}$$

koja izražava princip održanja energije u harmoničkom polju. Uvedemo li prema jedn. (205) P_N kao ukupnu *prividnu* (kompleksnu) snagu koja u jedinici vremena proteče kroz zatvorenu plohu S, dobivamo

$$P_\mathrm{N}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega) = \oint_S \vec{N}(\vec{r}, \mathrm{j}\,\omega)\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = -P_{g\,sr} + \mathrm{j} \cdot 2\,\omega\,(W_{E\,sr} - W_{M\,sr}). \tag{237}$$

Teorem (237) kazuje da je u stacionarnom stanju u harmoničkom polju negativni realni dio prividne snage (aktivna snaga) koja protječe kroz zatvorenu plohu S jednak srednjoj količini topline proizvedenoj u volumenu V, tj.

$$-\operatorname{Re}(P_\mathrm{N}) = -\operatorname{Re}\oint_S \vec{N}\vec{n}\,\mathrm{d}S = P_{g\,sr}, \tag{238 a}$$

a imaginarni dio prividne snage (reaktivna snaga) koja proteče kroz S jednak je umnošku $2\,\omega$ i razlike srednjih vrijednosti ukupne električne i magnetske energije u volumenu V, tj.

$$\operatorname{Im}(P_\mathrm{N}) = \operatorname{Im}\oint_S \vec{N}\vec{n}\,\mathrm{d}S = 2\,\omega\,(W_{E\,sr} - W_{M\,sr}). \tag{238 b}$$

STATIČKA POLJA

Nakon općeg pregleda osnova elektromagnetske teorije koja počiva na Maxwellovim jednadžbama, u ovom poglavlju analizirat će se svojstva *statičkih električnih i magnetskih polja.* Polja sa stacionarnom raspodjelom naboja i sa stacionarnom raspodjelom struja, tj. polja koja se vremenski ne mijenjaju, najjednostavnija su, pa će na njima biti prikazane metode za analizu i upotreba različitih matematičkih postupaka rješavanja kojima je primjenljivost šira i općenitija.

U slučaju statičkih polja, tj. onih u kojima nema vremenskih promjena, dvije glavne Maxwellove jednadžbe (85) i (86) postaju neovisne jedna o drugoj, a dodaju li im se dvije sporedne jednadžbe (103), Maxwellov sustav reducira se na ovaj skup jednadžbi:

za *elektrostatička polja*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \ \operatorname{div} \vec{D} = \varrho, \tag{239 a, b}$$

za *magnetostatička polja*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{240 a, b}$$

Jednadžbe (239) i (240) predstavljaju znatno pojednostavnjenje sustava Maxwellovih jednadžbi i iz njih slijedi da se elektrostatička i magnetostatička polja mogu analizirati odvojeno, jer nema interakcija između tih polja.

Principi rješavanja statičkih polja bit će u ovom poglavlju primijenjeni na brojne tehničke probleme. Kako su u većini slučajeva praktičnih primjena posrijedi vremenski promjenljiva polja, postavlja se pitanje valjanosti i upotrebljivosti rezultata dobivenih analizirajući statička polja. Primjenljivost rezultata statičkih polja na vremenski sinusoidno promjenljiva polja i probleme kakvi se u praksi najčešće susreću, ograničena je dimenzijama sistema i frekvencijom polja. Prema izlaganju na str. 144 elektromagnetsko polje se prostire kroz prostor brzinom $v = 1/\sqrt{\mu\,\varepsilon}$, koja je u harmonički vremenski promjenljivim poljima povezana s frekvencijom f i valnom duljinom λ izrazom

$$v = f\lambda. \tag{241}$$

Ako sa l označimo najveću geometrijsku dimenziju fizikalnog sustava koji se razmatra, statičko polje će biti dobra aproksimacija ako se može zanemariti retardacija polja u tom prostoru, tj. ako je zadovoljen uvjet

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{lf}{v} \ll 1, \tag{242}$$

koji kaže da su rješenja statičkog polja dovoljno dobra čak i za polja visoke frekvencije, *ako su geometrijske dimenzije fizikalnog sistema dovoljno male.*

Osnovne jednadžbe elektrostatičkog polja

Osnovne jednadžbe (239 a, b) i (90 a) za elektrostatičko polje proizvedeno stacionarnom raspodjelom naboja ϱ u linearnom, homogenom, izotropnom materijalu, postaju

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{243 a, b}$$

Primjenom operacije rot dobivaju se vektorske jednadžbe. Poissonova (113 b), koja uzima u obzir lokalnu gustoću naboja:

$$\triangle \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varrho, \tag{244 a}$$

i Laplaceova (112 b), koja vrijedi ako nema naboja u prostoru od interesa:

$$\triangle \vec{E} = 0. \tag{244 b}$$

Iz bezvrtložnog karaktera polja, određenog jednadžbom (243 a), slijedi da polje može biti predstavljeno pomoću skalarnog potencijala (143):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi(x,y,z) = -\int_{\infty}^{(x,y,z)} \vec{E}\, d\vec{s}. \tag{245 a, b}$$

Konzervativno svojstvo elektrostatičkog polja može se tada izraziti jednadžbom

$$\oint_s \vec{E}\, d\vec{s} = 0. \tag{246}$$

Konačno se, prema jedn. (143), polje može riješiti s pomoću skalarne Poissonove ili Laplaceove jednadžbe za potencijal, zavisno od toga da li u prostoru ima slobodnog naboja

$$\triangle\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \tag{247 a}$$

ili ga nema

$$\triangle\varphi = 0, \tag{247 b}$$

pri čemu je φ regularan u beskonačnosti, što znači da je produkt $(R\,\varphi)$ konačan kad $R \to \infty$.

Ako je prostor u kojem promatramo polje ispunjen nehomogenim izotropnim dielektrikom, potencijalne jednadžbe (247) poprimaju oblik

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon + \varepsilon \cdot \triangle\varphi = -\varrho. \tag{248}$$

Slika polja. Kao pomoć u prikazivanju statičkih polja često pomažu slike polja, koje su u većini slučajeva ograničene na dvodimenzionalnu ravninu jer se trodimenzionalna polja mogu samo teško slikovito predstavljati. Sliku polja u trodimenzionalnom prostoru čine *linije polja* i *ekvipotencijalne plohe.*

Linije polja mogu biti ili E-linije, i onda ih nazivamo *silnicama,* ili D-linije, koje nazivamo *linijama toka* ili strujnicama. Linije polja definirane su tako, da su u svakoj točki prostora vektori $\vec{E}$ i $\vec{D}$ (već prema tome da li se radi o E-linijama ili o D-linijama, silnicama ili strujnicama) tangencijalni na te linije, da je smjer linija i smjer odgovarajućih vektora polja isti, a gustoća linija u okolišu točke od interesa da je direktno razmjerna jakosti polja $\vec{E}$, odnosno vektoru gustoće električnog toka $\vec{D}$. Stoga se iznos električnog toka Φ_e, dan jednadžbom (175 b), može predstaviti brojem strujnica kroz plohu promatranja. Treba odmah istaći da su u neograničenom izotropnom homogenom materijalu E-linije i D-linije identične, ali da se razlikuju na granici između dva homogena materijala ili u nehomogenom i anizotropnom dielektriku. Na temelju dane definicije lako je uz pomoć analitičke geometrije u prostoru dobiti diferencijalne jednadžbe silnica u trodimenzionalnom koordinatnom pravokutnom sustavu:

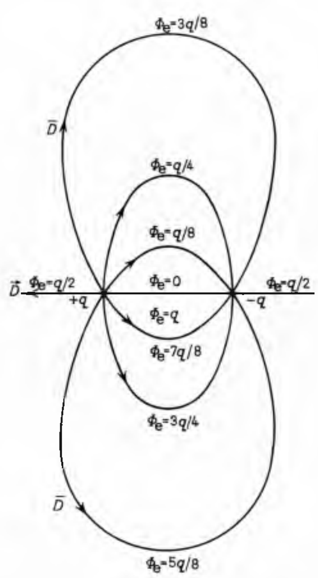
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \tag{249 a}$$

u cilindričnom sustavu:

$$\frac{d\varrho}{E_\varrho} = \frac{\varrho\, d\alpha}{E_\alpha} = \frac{dz}{E_z}, \tag{249 b}$$

i u sfernom sustavu:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\, d\alpha}{E_\alpha} = \frac{r \sin\vartheta\, d\vartheta}{E_\vartheta}. \tag{249 c}$$



Sl. 104. Linije toka (D-linije) između dva točkasta naboja, jednaka po iznosu i suprotna predznaka

Bilo koje dvije diferencijalne jednadžbe dane u simetričnim relacijama (249 a, b, c) zadovoljene su dvjema familijama geometrijskih ploha. Kad se izrađuju dvodimenzionalne slike polja, linije polja se dobiju kao presječene linije tih dviju familija ploha s ravninom crtanja. Na takav način u slučaju dva točkasta naboja jednaka po iznosu i suprotna po predznaku dobivene su linije toka prikazane na slici 104, a u slučaju dva beskonačna paralelna linijska naboja, također jednaka po iznosu i suprotnih predznaka, linije toka prikazane na slici 105.

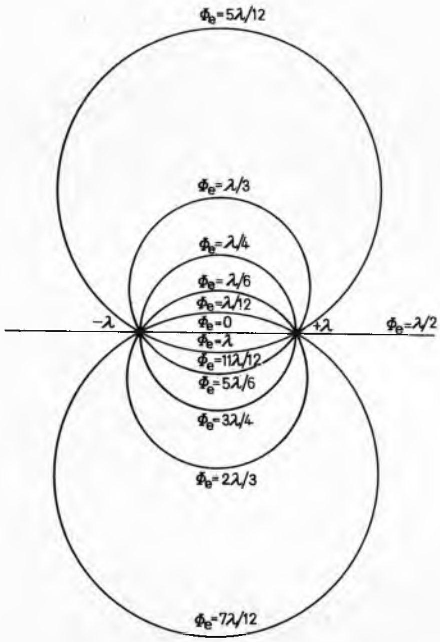
U konzervativnom polju geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju isti potencijal je ploha. Takve plohe nazivaju se *ekvi-*

potencijalne plohe, a njihovi tragovi u ravnini promatranja *ekvipotencijalne linije* Na slici 106 a prikazane su ekvipotencijalne linije u polju točkastog naboja q, a na sl. 106 b u polju linijskog naboja λ. Kako je, prema definiciji, ekvipotencijalna ploha karakterizirana konstantnim potencijalom, ona je određena jednadžbom

$$\mathrm{d}\varphi(x, y, z) = 0, \tag{250 a}$$

ili u diferencijalnom obliku, pisano u pravocrtnim koordinatama

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = 0. \tag{250 b}$$



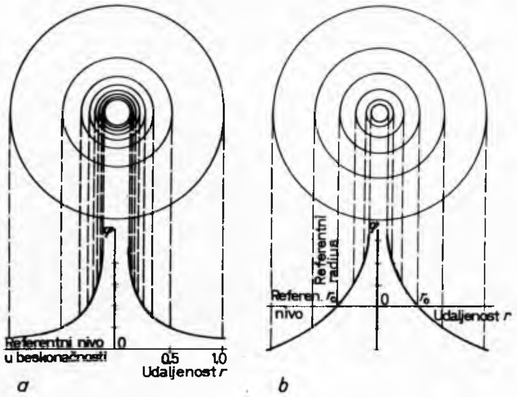
Sl. 105. Linije toka (D-linije) između dva beskonačno duga linijska naboja, jednaka po iznosu i suprotna predznaka

Uvodeći $\vec{ds} = \vec{a}_x\,\mathrm{d}x + \vec{a}_y\,\mathrm{d}y + \vec{a}_z\,\mathrm{d}z$ kao element puta po ekvipotencijalnoj plohi, i uz pomoć jedn. (245 a), može se jednadžba ekvipotencijalne plohe (250 b) izraziti i u obliku

$$\mathrm{d}\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{ds} = -\vec{E} \cdot \vec{ds} = 0, \tag{250 c}$$

što znači da je ekvipotencijalna ploha karakterizirana time što je vektor jakosti polja $\vec{E}$ uvijek okomit na nju. Drugim riječima, u elektrostatičkom polju linije su polja *normalne* na ekvipotencijalne plohe.

U dvodimenzionalnoj slici linije polja (silnice ili strujnice) i ekvipotencijalne linije čine *mrežu ortogonalnih trajektorija* i ta



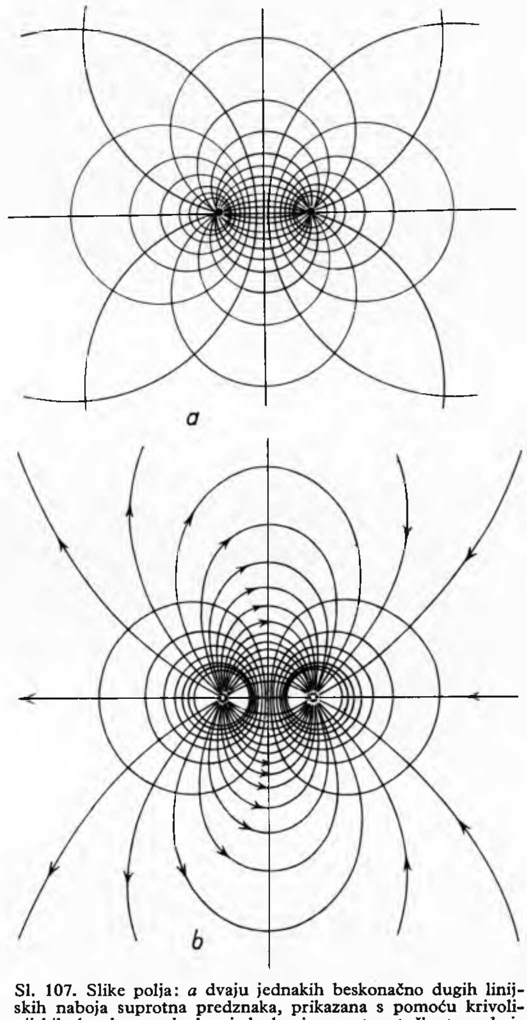
Sl. 106. Potencijalna polja: *a* točkastog naboja, *b* linijskog naboja

mreža se naziva *slika polja*. Zbog toga, jedna familija krivulja može biti izvedena iz druge s pomoću jednadžbe

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\varphi = \mathrm{konst}} = -\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\Phi_e = \mathrm{konst}}} \tag{251}$$

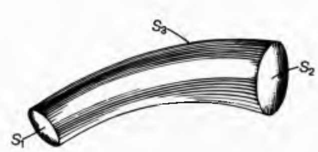
koja je pisana za sliku polja u ravnini (x, y).

Slike polja daju ne samo kvalitativnu nego i kvantitativnu raspodjelu polja u prostoru. Kao što je rečeno, linije toka definirane su jednadžbom $\Phi_e = \mathrm{konst}$, a ekvipotencijalne linije jednadžbom $\varphi = \mathrm{konst}$, pa ako se Φ_e i φ mijenjaju od linije do linije u jednakim stupnjevima, dobit će se slika polja s područjima u obliku krivolinijskih pravokutnika. Na slici 107 polje dvaju



Sl. 107. Slike polja: *a* dvaju jednakih beskonačno dugih linijskih naboja suprotna predznaka, prikazana s pomoću krivolinijskih kvadrata, *b* dva jednaka i suprotna točkasta naboja

jednakih po iznosu i suprotnih linijskih odnosno točkastih naboja prikazano je s pomoću kvadratičnih područja. Na taj način dolazimo do pojma *silocijevi* ili *cijevi toka*, koji je karakterističan



Sl. 108. Silocijev

za statička polja. Silocijev, prikazana na slici 108, izgrađena je tako da joj osnovice S_1 i S_2 čine dijelovi ekvipotencijalnih ploha, a plašt S_3 je sačinjen od linija toka tako da ni jedna strujnica ne prolazi kroz njega. Zato je električni tok Φ_e duž silocijevi konstantan, pa jevi u elektrostatičkom polju može pridružiti pojam dielektrične *vodljivosti silocijevi*, koja se izračunava prema relaciji

$$\lambda = \varepsilon \frac{S}{l}, \tag{252}$$

gdje S predstavlja srednju površinu elementarne silocijevi, a l njezinu duljinu.

Proračun polja iz raspodjele naboja

U prethodnom odjelu pokazano je da je središnje pitanje teorije polja u statičkim uvjetima *Laplaceova* (ili jednostavno *potencijalna*) jednadžba (247 b), ili, s laganom promjenom, *Poissonova* jednadžba (247 a), koja uzima u obzir lokalnu gustoću naboja. U matematičkom smislu glavni zadatak postaje rješavanje diferencijalne jednadžbe s njoj pridruženim rubnim uvjetima.

Problem se može preformulirati u zadaću s izvorima, ako se potencijal u točki promatranja računa kao suma doprinosa od svih pojedinačnih točkastih naboja, tj. s pomoću jednadžbe (156) prilagođene za statičke naboje

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{Q}{R}, \tag{253 a}$$

koja prelazi u statički oblik jednadžbe (172) ako je naboj gustoće ϱ kontinuirano raspodijeljen po volumenu:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\varrho\, \mathrm{d}V'}{R}. \tag{253 b}$$

Integraciju treba izvršiti preko *svih* izvora (tj. preko *cijelog* prostora). Načelno to nije teško, ali zahtijeva opsežno računanje i postupak je mukotrpan, pogotovu ako je od interesa samo određeno konačno područje. U tom slučaju diferencijalna metoda dijeli prostor u proizvoljan broj područja i koristi se rubnim uvjetima da potencijal učini jedinstvenim, pa se ne postavlja pitanje istraživanja potencijala izvan izabranog područja. Sličan postupak u metodi s integralnim jednadžbama omogućuje upotreba Greenovih funkcija.

Polje u ograničenom prostoru. U stvarnosti problemi elektrostatike najčešće obuhvaćaju konačna područja prostora, sa nabojem ili bez njega unutar područja i sa propisanim rubnim uvjetima po rubnim plohama. U takvim slučajevima jednadžba (253 b) nepogodna je i nedovoljna za proračun polja.

Da se postavljeni problem riješi, potrebno je upotrijebiti *Greenov teorem* u obliku jedn. (166 a). Postupkom sličnim postupku primijenjenom za rješavanje valne jednadžbe (162 a) može se Poissonova diferencijalna jednadžba (247 a) za potencijal u statičkom polju pretvoriti u integralnu jednadžbu. Uvrstimo u jedn. (166 a) za $u = \varphi$, gdje je $\triangle\varphi = -\varrho/\varepsilon$, a za $v = 1/R \equiv 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$, gdje je v karakteristična funkcija Poissonove jednadžbe. Nakon uređenja dobiva se jedno moguće rješenje jednadžbe (247 a) u integralnom obliku

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\varrho\, \mathrm{d}V'}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}S', \quad \vec{r} \in V, \tag{254}$$

koje je vrlo slično rješenju u jedn. (171). U slučaju da se potencijal $\varphi(\vec{r})$ računa u točki koja leži na rubnoj plohi $S(\vec{r} \in S)$, jednadžba (254) će se promijeniti tako da se svagdje umjesto faktora $1/(4\pi)$ uvrsti faktor $1/(2\pi)$. Ako $\vec{r}$ leži izvan plohe S, lijeva strana od (254) jednaka je nuli.

Rezultat (254) može se objasniti kako slijedi. Volumni integral predstavlja doprinos potencijalu od naboja *unutar* plohe S, a plošni integrali uzimaju u obzir doprinos svih naboja *izvan* plohe S. Prvi plošni integral je ekvivalentan potencijalu *jednosloja* naboja raspoređenog po plohi S sa gustoćom

$$\sigma = \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n'}, \tag{255 a}$$

a drugi se može predstaviti kao potencijal *dvosloja* na plohi S, čija je gustoća

$$\tau = \varepsilon\varphi. \tag{255 b}$$

Drugim riječima, naboji izvan plohe S mogu biti nadomješteni dvjema ekvivalentnim slojevima, jednostrukim i dvostrukim, gustoće kojih su određene jednadžbama (255 a, b), a da to ne utječe na promjenu potencijala u unutrašnjosti. Važno je primijetiti da su ovi ekvivalentni slojevi naboja na plohi S upravo takvi da reduciraju i potencijal i jakost polja na nulu u svakoj točki izvan plohe S. Ova zamjena izvora izvan volumena V rubnim uvjetima (fizikalno interpretiranim jednostrukim i dvostrukim slojem naboja) na plohi S koja zatvara zadani volumen vrlo je važan korak u rješavanju problemâ elektrostatike.

U skladu s već iznesenim, ako se zatvorena ploha S protegne u beskonačnost, i $\varphi(\vec{r}')$ i $\partial\varphi(\vec{r}')/\partial n'$ na plohi S iščezavaju kako $\vec{r}' \to \infty$, i to brže od R^{-1}, tada plošni integral teži k nuli i rezultat (254) prelazi u rješenje (253 b) za cijeli prostor. Drugi zanimljiv slučaj nastupa kada je $\varrho = 0$ unutar plohe S. Tada je potencijal u volumenu V izražen veličinama $\varphi(\vec{r}')$ i $\partial\varphi(\vec{r}')/\partial n'$ na plohi S, pa jednadžba (254) postaje integralna jednadžba.

Treba posebno istaći da je u rezultatu (254) upotrijebljena kao supstitucija u (166 a) funkcija $v = 1/R$, koja je samo jedna iz klase funkcijâ ovisnih o $\vec{r}$ i $\vec{r}'$, a koje se nazivaju *Greenove funkcije*. Općenito Greenova funkcija u potencijalnim problemima ima značenje *potencijala* u točki $(\vec{r})$ udruženog s *jediničnim točkastim nabojem* gustoće $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ smještenim u točki $(\vec{r}')$. Drugim riječima, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ zadovoljava Poissonovu jednadžbu

$$\triangle' G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon}, \tag{256 a}$$

i dobiva se kao njezino rješenje u obliku

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}'). \tag{256 b}$$

Članu $1/R$ u Greenovoj funkciji (256 b) dodana je još funkcija $F(\vec{r}, \vec{r}')$, koja je rješenje Laplaceove jednadžbe unutar volumena V:

$$\triangle' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \tag{256 c}$$

i čije je fizikalno značenje da predstavlja potencijal sistema naboja izvan volumena V.

U jednadžbi (254) susrećemo se s problemom zadovoljenja propisanih rubnih uvjeta za φ i $\partial\varphi/\partial n'$ po zatvorenoj rubnoj plohi S. Odmah treba istaći da (254) nije rješenje koje zadovoljava korektan tip rubnih uvjeta. Razlog je za to što fizikalno iskustvo potvrđuje da već samo propisivanje potencijala φ po zatvorenoj plohi S jedinstveno definira potencijalni problem, tj. potencijal u volumenu V. To je tzv. *Dirichletov problem*, a propisani uvjeti su Dirichletovi rubni uvjeti. Slično se propisivanjem normalne derivacije potencijala $\partial\varphi/\partial n'$ po zatvorenoj rubnoj plohi S može jedinstveno, do na jednu dodatnu konstantu, definirati potencijalni problem, koji se tada naziva *Neumannovim rubnim problemom*. Očito je da rješenje Poissonove (ili Laplaceove) diferencijalne jednadžbe s propisanim φ i $\partial\varphi/\partial n'$ po zatvorenoj plohi S (Cauchyjev rubni problem) preodređuje zadaću. Takvo rješenje zapravo ne postoji, jer je nemoguće neovisno zadati φ i $\partial\varphi/\partial n'$ po rubnoj plohi S. Na strani 156 detaljno su opisani problemi egzistencije i jedinstvenosti rješenja rubnih zadaća polja. Iz svega ovoga se može zaključiti da rješenje (254) zahtijeva više informacija nego što je potrebno za jedinstveno rješenje problema.

S poopćenim pojmom Greenove funkcije i njezinom dodatnom slobodom (preko funkcije F), može se njezinim uvođenjem u (166 a) kao $v = G(\vec{r}, \vec{r}')$ i izborom $F(\vec{r}, \vec{r}')$, tako da se eliminira jedan ili drugi od dva plošna integrala u jedn. (254), dobiti opće rješenje jedn. (247 a) u obliku

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \varrho(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, \mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] \mathrm{d}S', \tag{257}$$

koje se rješenje onda može svesti ili samo na Dirichletove ili samo na Neumannove rubne uvjete. Sloboda u izboru funkcija

G prema jedn. (256 b) znači da se može učiniti plošni integral u jedn. (257) ovisnim samo o izabranom tipu rubnih uvjeta. Stoga treba razlikovati nekoliko tipova problema:

1. U Dirichletovom problemu zahtijeva se

$$G_D(\vec{r},\vec{r}') = 0 \text{ za } \vec{r}' \in S, \tag{258 a}$$

tj. da Greenova funkcija može biti smatrana potencijalnom u točki $\vec{r}$ proizvedenim jediničnim točkastim nabojem smještenim u $\vec{r}'$ i sistemom »zamišljenih« naboja tako smještenih izvan plohe S da se osigura $G_D \equiv 0$ na plohi S. Moguće je i drugo tumačenje, pogodno za određivanje funkcije G_D zadanog problema; ono se sastoji u tome da se zamisli da je S uzemljena vodljiva ploha koja sadrži *induciranu* raspodjelu plošnog naboja gustoće $\sigma = \varepsilon\, \partial G_D/\partial n'$, uzrokovanu točkastim nabojem u $\vec{r}'$. Tada prvi član u plošnom integralu (257) iščezava i rješenje je

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \varrho(\vec{r}')\,G_D(\vec{r},\vec{r}')\,dV' - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \varphi(\vec{r}')\,\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n'}\,dS'. \tag{258 b}$$

2. Slično se u Neumannovom problemu zahtijeva

$$\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n'} = 0 \text{ za } \vec{r}' \in S, \tag{259 a}$$

tj. da se Greenova funkcija može uzeti kao potencijal proizveden jediničnim točkastim nabojem i raspodjelom naboja i izvan volumena V tako da bude $\partial G_N/\partial n' \equiv 0$ na plohi S, pa to čini da drugi član u plošnom integralu u jedn. (257) iščezava, kao što se željelo. No ovdje moramo biti pažljivi, jer primjena Gaussovog teorema na jedn. (256 a) pokazuje da je

$$\oint\limits_S (\partial G/\partial n')\,dS' = -1,$$

pa je još najjednostavniji mogući rubni uvjet za G_N

$$\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{S}, \quad \text{za } \vec{r}' \in S, \tag{259 b}$$

gdje je S ukupna površina rubne plohe. Tada je rješenje

$$\varphi(\vec{r}) = \overline{\varphi}_S + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \varrho(\vec{r}')\,G_N(\vec{r},\vec{r}')\,dV' + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}\,G_N(\vec{r},\vec{r}')\,dS', \tag{259 c}$$

gdje je $\overline{\varphi}_S$ srednja vrijednost potencijala preko cijele plohe S.

Od posebnog praktičnog značenja je Neumannov »vanjski rubni problem«, u kojem je volumen V ograničen dvjema plohama, jednom zatvorenom i konačnom, i drugom u beskonačnosti. Tada je površina plohe S beskonačna, pa rubni uvjet (259 b) postaje homogen (tj. desna strana je nula) i srednja vrijednost $\overline{\varphi}_S$ u (259 c) iščezava.

3. Već je spomenuto da je efekt vanjskih izvora dan površinskim integralom u jedn. (257). Taj površinski član iščezava kada je *cijeli* prostor uključen u volumen V, pa izraz (257) prelazi u jednostavni volumni integral

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{(V\to\text{ neograničen})} \varrho(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,dV'. \tag{260}$$

Ako G izaberemo tako da je $F = 0$, tj. $G = 1/R$, ako se, nadalje, S sastoji od jedne plohe koju smo protegli na beskonačnost i ako je φ regularan u beskonačnosti, tada jedn. (257), odn. (260) prelazi u poznati oblik (253 b).

U rješenju (257), zbog ograničenog volumena V, postoji općenito površinski integral, ali postoje važni posebni slučajevi kada površinski član u jedn. (257) iščezava iako su područja promatranja konačna i ograničena. To se događa ako ne postoji interakcija između vanjskih izvora i izvora unutar područja, tj. ako je volumen V izoliran, pa vanjski prostor može biti zanemaren jer nema utjecaja na unutarnji. Da bi se odredio potencijal u takvoj izoliranoj regiji, treba jednostavno s pomoću jednadžbe (260) sumirati efekte svih naboja unutar tog područja. Postoje tri mogućnosti da se područje zatvoreno plohom S izolira od vanjskog prostora. Treba da budu: a) G i φ jednaki nuli svuda na plohi S, b) $\partial G/\partial n'$ i $\partial\varphi/\partial n'$ jednaki nuli svuda po plohi S, c) u svakoj točki plohe S ispunjena oba prednja uvjeta. Takvi rubni uvjeti nazivaju se *homogenim*, a fizikalno se to postiže ako se vodljivi rubovi područja uzemlje. Bilo bi matematički vrlo pogodno kada bi svi problemi rubnih vrijednosti imali homogene rubne uvjete, ali to u praksi, naravno, nije tako. Okružiti područje od interesa uzemljenom plohom, i kad bi to bilo moguće, obično bi toliko fizikalno izmijenilo funkciju naprave u određenom sustavu ili sklopu da bi bila promašena upravo svrha zbog koje je naprava i projektirana, a koja zahtijeva interakciju s vanjskim prostorom.

4. Konačno, promatrani prostor može biti i bez naboja u njemu, $\varrho = 0$. Tada u jedn. (257) za proračun potencijala ostaje samo plošni integral. Kako je poznavanje veličina φ ili $\partial\varphi/\partial n'$ na plohi S dovoljno za jedinstveno određivanje potencijala φ u volumenu V, to i u ovom slučaju, koji predstavlja rješenje Laplaceove jednadžbe (247 b), vrijedi sve što je već prije pod točkom 1 i 2 ovoga odjeljka rečeno za rješenje Poissonove jednadžbe (247 a).

Ovdje opisana integralna rješenja imaju svojstvo općenitosti, jer je obično integral invarijantan prema transformaciji koordinata. Greenova funkcija ovisi o *geometriji* rubova problema i njeno određivanje u zadaćama s rubovima proizvoljnog oblika vrlo je teško. No kada je Greenova funkcija jedanput nađena, može se naći i bilo koje rješenje homogene ili nehomogene diferencijalne jednadžbe. Greenove funkcije zadovoljavaju jednostavne rubne uvjete (258 a) i (259 b) koji nisu ovisni o detaljnom obliku Dirichletovih ili Neumannovih rubnih vrijednosti. Važno je svojstvo Greenovih funkcija da su one simetrične s obzirom na koordinate izvora i promatrača, tj. $G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}',\vec{r})$. Taj se rezultat naziva *principom reciprociteta*. Za Neumannove rubne uvjete simetrija nije sama po sebi osigurana, ali može biti nametnuta kao poseban zahtjev.

Na kraju ćemo analizirati značenje funkcije $F(\vec{r},\vec{r}')$ u jedn. (256 b). Ona predstavlja potencijal proizveden vanjskom raspodjelom naboja, izabran tako da zadovolji homogene rubne uvjete, tj. da potencijal (ili njegova normalna derivacija) bude nula na plohi S, kada se kombinira s potencijalom točkastog naboja u točki izvora $\vec{r}'$. Kako potencijal u točki $\vec{r}$ na plohi S uzrokovan točkastim nabojem ovisi o položaju $\vec{r}'$ naboja u volumenu V, raspodjela vanjskog naboja $F(\vec{r},\vec{r}')$ mora također ovisiti o parametru $\vec{r}'$. Zato je *metoda odslikavanja* fizikalni ekvivalent određivanju funkcije $F(\vec{r},\vec{r}')$ pogodne da se zadovolje rubni uvjeti (258 a) ili (259 b). Za Dirichletov problem s vodičima, funkcija $F(\vec{r},\vec{r}')$ može biti uzeta kao potencijal uzrokovan plošnim nabojem induciranim u vodiču zbog blizine točkastog naboja u točki izvora $\vec{r}'$. Ona predstavlja *odziv* sustava na dovođenje slobodnog naboja u točku $\vec{r}'$.

U svakom slučaju, tehnika integralnih rješenja s Greenovim funkcijama omogućava da se za svrhu računanja odijeli područje od interesa od ostalog prostora.

Sustav vodiča u elektrostatičkom polju

Koeficijenti potencijala, indukcije i kapaciteta. Ako u prostoru od interesa postoji više nabijenih odvojenih vodljivih tijela, npr. njih N kao na slici 109 a, tada se potencijal j-tog tijela određuje s pomoću jedn. (253 a i b):

$$\varphi_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{V_i}\frac{\varrho_i\,dV_i}{R_{ji}}, \tag{261}$$

gdje R_{ji} znači udaljenost bilo koje točke na j-tom tijelu od elemenata dV_i na i-tom tijelu.

Uvođenjem koeficijenata p_{ji} definiranih izrazom

$$p_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\int\limits_{V_i} \frac{\varrho_i \, dV_i}{R_{ji}}}{\int\limits_{V_i} \varrho_i \, dV_i}, \tag{262}$$

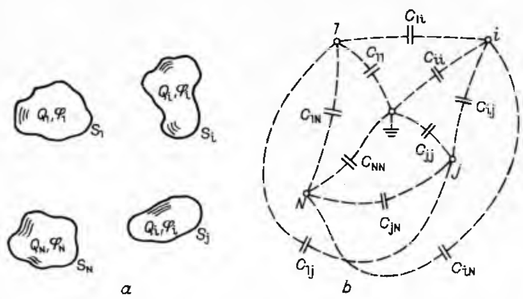
jednadžba raspodjele potencijala (261) prelazi u oblik

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{N} p_{ji} Q_i, \tag{263}$$

gdje Q_i označava ukupni naboj na i-tom tijelu. Konačno se potencijali i naboji svih vodljivih tijela mogu povezati matričnom jednadžbom

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix}, \tag{264 a}$$

kojoj (263) predstavlja j-ti redak. Veličina p_{ji} predstavlja potencijal j-tog tijela proizveden *pozitivnim jediničnim* nabojem na i-tom tijelu, a za sva ostala metalna tijela u tom prostoru uzima se da su nenabijena. p_{ji} naziva se *koeficijentom potencijala* i u biti je konstanta koja izražava prostornu geometrijsku raspodjelu.



Sl. 109. N vodljivih ploha nabijenih na različite potencijale (a), i ekvivalentna mreža parcijalnih kapaciteta između vodljivih ploha (b)

Uvijek zadovoljava uvjet

$$p_{ii} \geqq p_{ji} \geqq 0. \tag{264 b}$$

Matrica koeficijenata potencijala p_{ji} je *simetrična*, što se može dokazati kako slijedi. Prema definiciji, potencijal j-tog vodljivog tijela je razmjeran radu utrošenom na povećanje naboja na tom istom j-tom tijelu, dok naboji ostalih tijela ostaju konstantni

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial Q_j}, \tag{265 a}$$

pa je ukupna energija sustava vodljivih tijela koja miruju dana jednadžbom (197 b), prilagođenom za ovaj slučaj:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \cdot Q_i, \tag{265 b}$$

jer je potencijal φ_i konstantan po svakom vodljivom tijelu. Supstituiramo li izraz za energiju u jedn. (265 a), dobiva se

$$\varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_j} Q_i = \tfrac{1}{2} \varphi_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} p_{ij} Q_i. \tag{265 c}$$

Uvodeći (263) u (265 c), dobiva se za bilo koji proizvoljni skup naboja Q_i da je

$$\sum_{i=1}^{N} (p_{ji} - p_{ij}) Q_i = 0, \tag{266}$$

što je moguće samo ako je

$$p_{ji} = p_{ij}. \tag{266 b}$$

To je traženi dokaz simetrije koeficijenata potencijala, od kojih su, dakle, samo njih $\frac{1}{2} N(N+1)$ neovisni.

Simetrična matrica $[p_{ji}]$ općenito nije singularna i može se invertirati, tako da se jednadžba (264 a), pisana u kraćem obliku $[\varphi] = [p_{ji}] \cdot [Q]$, može pisati i kao

$$[Q] = [p_{ji}]^{-1} \cdot [\varphi]. \tag{267}$$

Uvođenjem koeficijenta c_{ij} tako da bude

$$[c_{ij}] = [p_{ji}]^{-1}, \quad c_{ij} = \frac{(F_{ji})_p}{|p_{ji}|}, \tag{268 a, b}$$

gdje je $(F_{ji})_p$ kofaktor člana p_{ji} u determinanti $|p_{ji}|$, može se jednadžba (267) pisati i u obliku

$$[Q] = [c_{ij}] \cdot [\varphi]. \tag{269}$$

Koeficijenti c_{ij} čine simetričnu matricu i zadovoljavaju uvjete:

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ii} \geqq 0, \quad c_{ij} \leqq 0 \ (i \neq j), \quad \sum_{i=1}^{N} c_{ij} \geqq 0. \tag{270}$$

Oni su također geometrijske veličine ovisne samo o dimenzijama, obliku, orijentaciji i smještaju svakog vodljivog tijela. Fizikalno, c_{ij} izražava naboj induciran na i-tom vodiču, ako je j-ti vodič na jediničnom potencijalu, a svi su ostali vodiči na potencijalu $\varphi = 0$. Zato se nazivaju *koeficijentima indukcije*, izuzev dijagonalne elemente c_{ii}. Ovi ne mogu imati značenje naboja induciranog na vodiču od samog sebe; stoga se ti dijagonalni elementi nazivaju *koeficijentima kapaciteta*. S pomoću tih koeficijenata može se energija sustava (265 b) izraziti u obliku

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \varphi_i \varphi_j, \tag{271}$$

koji je vrlo koristan za upotrebu, jer se potencijal skupine vodiča može općenito lakše izmjeriti nego naboj.

Korisno je definirati *kapacitet* sustava dvaju vodljivih tijela (sl. 110) koja se nalaze u neograničenom prostoru, nabijena su nabojem $+Q$ i $-Q$, a između kojih vlada potencijalna razlika $U = \varphi_1 - \varphi_2$, kao omjer

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\Phi_e}{U}. \tag{272}$$

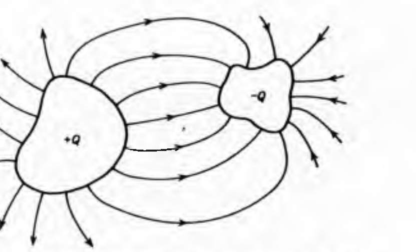
Energija takvog sustava, koji se sastoji od dva vodljiva tijela, prema (202 b), iznosi

$$W = \tfrac{1}{2} Q U, \tag{273 a}$$

ili s pomoću jedn. (272):

$$W = \tfrac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \tag{273 b}$$

Jednadžbe (272) i (273 b) mogu se jednako dobro upotrijebiti za izračunavanje ili eksperimentalno određivanje kapaciteta C.



Sl. 110. Kapacitet sustava dvaju vodljivih tijela

Uvodeći u proračun sustava vodiča prikazanog na slici 109 a pojam *parcijalnog kapaciteta* definiranog relacijama

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}; \quad C_{ij} = -c_{ij}, \quad i \neq j, \tag{274 a, b}$$

dobiva se ekvivalentna mreža parcijalnih kapaciteta prikazana na slici 109 b. To vodi k fizikalno očiglednijem obliku jednadžbe (269), koja sada glasi

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} \varphi_1 + C_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1N} (\varphi_1 - \varphi_N), \\ Q_2 &= C_{21} (\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22} \varphi_2 + \dots + C_{2N} (\varphi_2 - \varphi_N), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_N &= C_{N1} (\varphi_N - \varphi_1) + C_{N2} (\varphi_N - \varphi_2) + \dots + C_{NN} \varphi_N. \end{aligned} \tag{275}$$

Parcijalni kapacitet C_{ii} poznat je kao *vlastiti kapacitet* i-tog tijela (prema beskonačnosti), a C_{ij} je *zajednički kapacitet* između i-tog i j-tog tijela. Oni također zadovoljavaju ove uvjete

$$C_{ij} = C_{ji}; \quad C_{ij} > 0 \text{ za sve } i, j. \tag{276}$$

Skup jednadžbi (275) može se zornije interpretirati tako da se naboj Q_1 prikaže sastavljenim od dijelova. Jedan je takav dio $C_{11}\varphi_1$ koji može biti pripisan kapacitetu C_{11} između prvog tijela i beskonačnosti (ili zemlje ako je ona u blizini), jer je φ_1 apsolutni potencijal. Drugi dio naboja čini iznos $C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$, koji može biti pripisan kapacitetu C_{12} između prvog i drugog tijela, između kojih vlada razlika potencijala $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. Budući da je $C_{21} = C_{12}$, na drugom tijelu postoji isti i suprotan naboj $C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1)$. Konačno se mogu naboju na prvom tijelu pribrojiti i svi ostali naboji, zaključno s nabojem $C_{1N}(\varphi_1 - \varphi_N)$. Na isti način mogu se objasniti naboji i na ostalim tijelima u sustavu na slici 109 a. Svi su ovi kapaciteti veličine ovisne o geometrijskim odnosima sustava vodiča.

Često je još od interesa izračunati i totalni kapacitet C_i i-tog tijela u sustavu od N vodiča. On je definiran relacijom

$$Q_i = C_i \varphi_i, \tag{277}$$

gdje je Q_i ukupni naboj na tijelu i, a φ_i njegov apsolutni potencijal.

Matrično rješavanje potencijalnih problema. Izračunavanje potencijala iz zadane raspodjele naboja s pomoću integrala (253 b) može i uz relativno jednostavnu raspodjelu biti težak zadatak. Međutim, najveći broj praktičnih problema svodi se na obratnu zadaću: pronaći raspodjelu naboja koja će odgovarati danom skupu potencijala. Tako postavljen zadatak mnogo je teži i, izuzev nekoliko jednostavnijih slučajeva, analitički se ne može riješiti. Stoga se mnogi praktični problemi mogu riješiti samo numeričkim metodama.

Relativno jednostavna približna metoda temelji se na matrici koeficijenata potencijala. Sastoji se u podjeli vodljivih tijela zadanog potencijala na *dione vodiče* po kojima su potencijal i raspodjela naboja *konstantni*. Zato se za svaki dioni vodič može uzeti da integral (262) daje koeficijent potencijala

$$p_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon V_i}\int \frac{\mathrm{d}V}{R_{ji}}. \tag{278 a}$$

Budući da se na vodljivim tijelima svi naboji nalaze na površini u obliku plošnog naboja, integral (278 a) prelazi u oblik

$$p_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon S_i}\int \frac{\mathrm{d}S}{R_{ji}}. \tag{278 b}$$

Ta metoda naziva se *metoda dionih površina*. Podjela se može uvijek izvršiti tako da rješavanje integrala (278 a) ili (278 b) ne predstavlja poteškoću, ili čak tako da integraciju ne treba ni obaviti. Jednom kada su koeficijenti potencijala određeni i matrica koeficijenata poznata, problem određivanja raspodjele naboja po dionim površinama rješiv je tako da se matrica invertira u matricu koeficijenata indukcije i kapaciteta i da se ona pomnoži s matricom zadanih potencijala, prema jednadžbi (269).

Osnovne jednadžbe magnetostatičkog polja

Glavni cilj elektrotehnike je upravljanje elektromagnetskom energijom i njena upotreba. U velikom broju praktičnih uređaja i naprava koji se upotrebljavaju u elektrotehnici, kao npr. u transformatorima, rotacionim strojevima i drugim aparatima koji sadrže feromagnetske materijale, kad oni rade, akumulira se energija u magnetskom polju. Brojni problemi magnetskih polja izrastaju upravo iz analize i projekata ovakvih uređaja. Zato analizi fizikalnih osnova magnetskih poljâ i matematičkim metodama njihovog rješavanja treba pokloniti punu pažnju.

Između statičkih električnih i magnetskih polja postoji analogija jer se svako magnetostatičko polje može prikazati elektrostatičkim poljem identične strukture. Ekvivalencija je čisto formalna, jer u magnetostatici ne postoji fizikalna veličina koja bi odgovarala slobodnom električnom naboju — *ne postoje slobodni magnetski naboji*. Dakle, matematičke pogodnosti analogije s elektrostatikom postoje, ali fizikalna struktura polja proizvedenog stacionarnim strujama bitno se razlikuje od konfiguracije proizvedene električnim nabojima u miru.

Iz Maxwellovih jednadžbi izvedene osnovne jednadžbe (240 a, b) i (90 b) za magnetsko polje proizvedeno stacionarnom raspodjelom struja $\vec{J}$ u linearnom, homogenom, izotropnom materijalu mogu se pisati u obliku

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{279 a, b}$$

One pokazuju da magnetostatičko polje ima obilježja *vrtložnog solenoidnog* polja i da se može, kao i svako drugo statičko polje, predstaviti B-linijama, tj. *linijama polja* (silnicama), kojih jednadžba u pravocrtnom koordinatnom sustavu glasi

$$\frac{\mathrm{d}x}{B_x} = \frac{\mathrm{d}y}{B_y} = \frac{\mathrm{d}z}{B_z}. \tag{280}$$

Jednadžbe silnica u drugim koordinatnim sustavima podudarne su s jednadžbama (249 b i c).

Primjenom operacije rot na jedn. (279 a, b) dobivaju se vektorska Poissonova i Laplaceova jednadžba, analogne jednadžbama (112 a) i (113 a):

$$\triangle\vec{B} = -\operatorname{rot}(\mu\vec{J}), \qquad \triangle\vec{B} = 0, \tag{281 a, b}$$

za prostor sa zadanom raspodjelom neovisnih struja gustoće $\vec{J}$, i za prostor bez struja ($\vec{J} = 0$).

Bitno pojednostavnjenje proračuna magnetskog polja postiže se uvođenjem vektorskog potencijala $\vec{A}$, definiranog prema (119) i (128), tj.

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}, \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0, \tag{282 a, b}$$

što prepoznajemo kao Coulombovo baždarenje. Uvrštenjem definicija (282) u (281) dobivaju se odgovarajuće diferencijalne jednadžbe (144) vektorskog potencijala u homogenom mediju

$$\triangle\vec{A} = -\mu\vec{J}, \qquad \triangle\vec{A} = 0, \tag{283 a, b}$$

iz kojih se onda uz zadane rubne uvjete može odrediti raspodjela vektora $\vec{A}$ u promatranom prostoru, a iz ovog pomoću (282 a) i raspodjela vektora $\vec{B}$.

Magnetski tok Φ_m ili tok vektora $\vec{B}$ određen je jednadžbom (175 a), no pomoću vektora $\vec{A}$ može se također računati prema relaciji

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_s \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{s}, \tag{284}$$

gdje je s rubna krivulja koja zatvara plohu S kroz koju se računa tok.

Za područja bez izvora, $\vec{J} = 0$, $\varrho = 0$, elektrostatičke i magnetostatičke jednadžbe su analogne, pa se može uvesti *magnetski skalarni potencijal* φ' (mjeren jedinicama jakosti struje), definiran relacijama

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi', \quad \varphi'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2 = \int_1^2 \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}, \tag{285 a, b}$$

jer je u području bez struja: $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$. Polje se tada može računati iz skalarne potencijalne jednadžbe

$$\triangle\varphi' = 0, \tag{286 a}$$

uz zadane rubne uvjete. Za *nelinearne*, feromagnetske materijale, u području bez struja, jednadžba polja je

$$\nabla\varphi' \cdot \nabla\mu + \mu \cdot \triangle\varphi' = 0. \tag{286 b}$$

Očito je da i u feromagnetskom materijalu, u području male jakosti polja $|\vec{H}| = |-\operatorname{grad}\varphi'|$, ili u području malih promjena permeabilnosti ($\nabla\mu$ vrlo mali), ili u području gdje su vektori $\nabla\varphi'$ i $\nabla\mu$ okomiti (pa je skalarni produkt $\nabla\varphi' \cdot \nabla\mu = 0$), jednadžba (286 b) prelazi u potencijalnu Laplaceovu jednadžbu (286 a), što umnogome pojednostavnjuje proračun.

Međutim, treba reći da se za proračun statičkih i kvazistatičkih magnetskih polja u uređajima i napravama koji se susreću u praksi a napravljeni su od nelinearnih feromagnetskih materijala upotrebljavaju poglavito jednadžbe vektorskog potencijala. Uvođenjem *magnetske reluktancije* ν kao recipročne vrijednosti magnetske permeabilnosti ($\nu = 1/\mu$) i iz sustava jednadžbi (240 a, b) i (282 a, b) dobiva se diferencijalna jednadžba

$$\nu \triangle \vec{A} - \nabla \nu \times \nabla \times \vec{A} = -\vec{J}. \qquad (286\text{ c})$$

Rješavanjem te jednadžbe, uz zadanu raspodjelu neovisnih struja $\vec{J}$, i uz propisane rubne uvjete, određuje se vektorski potencijal u prostoru od interesa. Jednadžba (286 c) zamršena je i rješava se isključivo numeričkim metodama uz upotrebu elektroničkog računala.

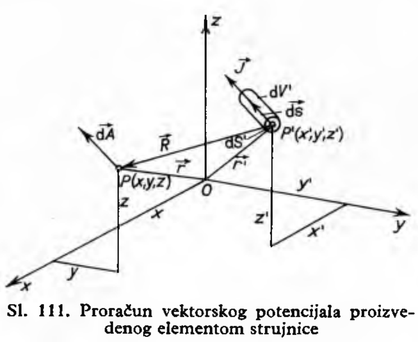
Proračun polja s pomoću vektorskog potencijala iz zadane raspodjele struja. Rješavanjem bilo kojeg od sustavâ diferencijalnih jednadžbi (279 a, b), (281 a, b) ili (283 a, b), uz zadane izvore i pripadajuće rubne uvjete, moguće je primjenom jedne od niza matematičkih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi dobiti rješenje problema rubnih vrijednosti u magnetostatičkom polju. Međutim, kao i u elektrostatičkim poljima, metoda izvora i njoj pridružene integralne jednadžbe pružaju niz novih mogućnosti za rješavanje magnetostatičkih polja. S tog stanovišta osobito je pogodna za primjenu jednadžba (163 b) za vektorski potencijal $\vec{A}$, prilagođena za statička polja u obliku

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\,dV'}{R}. \qquad (287\text{ a})$$

Ta jednadžba vrijedi za neograničen prostor. Ako je područje od interesa ograničeno i izvan njega postoje izvori ($\vec{J} \neq 0$,) treba primijeniti rješenja s Greenovim funkcijama, kao u jednadžbama (257), (258 b) i (259 a, b, c). Često je zadaća postavljena i tako da je uz prostornu raspodjelu struje $\vec{J}$ zadana i plošna gustoća $\vec{K}$, nazvana *strujni sloj* ili *strujni oblog* i definirana jednadžbom (180). Tada je vektorski potencijal prikazan izrazom

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\,dV'}{R} + \frac{\mu}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{K}\,dS'}{R}. \qquad (287\text{ b})$$

U mnogim primjenama može se jednadžba (287 a) pojednostaviti time što se ukupna struja I koncentrira u tanku nit (geometrijsku crtu), ako je poprečni presjek vodiča vrlo mali u usporedbi



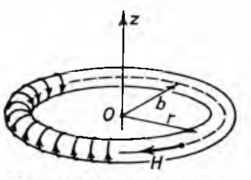
Sl. 111. Proračun vektorskog potencijala proizvedenog elementom strujnice

s udaljenošću R od točke promatranja (sl. 111), pa je tada $\vec{J}\,dV' \equiv I\,d\vec{s}$ i konačno, zbog $\nabla \vec{J} = 0$,

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_s \frac{d\vec{s}}{R}. \qquad (287\text{ c})$$

Integral pokazuje da element strujnice ($I\,d\vec{s}$) tvori vektor $d\vec{A}$ tako da je u promatranoj točki paralelan sa $d\vec{s}$. Mora se, naravno, očekivati, da $\vec{A} \to \infty$ kada se točka promatranja približava strujnici. Jednadžba (287 c) vodi izravno do proračuna indukcije $\vec{B}$ s pomoću jedn. (282 a), što daje poopćeni oblik Biot-Savartova zakona (77), spomenutog u uvodu.

Vektor jakosti magnetskog polja $\vec{H}$, ako je unaprijed poznato da je $\vec{H}$ makar i približno konstantan duž puta i da je tangencijalan u svakoj točki na krivulju puta (kao npr. na sl. 112), može se i izravno izračunati iz pojednostavnjenog oblika Maxwellove jednadžbe (240 a), prilagođenog za proračun polja struje koncentrirane u strujnicu, koji glasi



Sl. 112. Torusni prsten

$$\oint_s \vec{H}\,d\vec{s} = -\oint_s d\varphi' = I, \qquad (288)$$

i koji se naziva Ampèreov kružni zakon.

Utjecaj magnetskog materijala. Utjecaj magnetskog materijala u polju uzima se u obzir preko *vektora magnetske polarizacije* ili kraće *vektora magnetizacije* $\vec{M}$, definiranog jednadžbama (96) i (98), koji predstavlja magnetski dipolni moment po jedinici volumena ispunjenog materijom. Unošenje magnetskog materijala u polje ima za posljedicu pojavu novih članova u diferencijalnim jednadžbama (283 a, b), pa se one, da bi se istakao utjecaj materije, mogu pisati u drugom obliku:

$$\triangle \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{M}. \qquad (289\text{ a})$$

Očito se efekt magnetskog materijala može predstaviti djelovanjem ekvivalentne magnetizacione struje gustoće

$$\vec{J}_m = \operatorname{rot} \vec{M}, \qquad (289\text{ b})$$

raspodijeljene po volumenu magnetskog materijala. Integral magnetskog potencijala (287 a), za prostor V u kome se uz izvore $\vec{J}$ nalaze i tijela od magnetskog materijala, postaje

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\,dV'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_m} \frac{\vec{J}_m\,dV'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S_m} \frac{\vec{K}_m\,dS'}{R}, \qquad (290\text{ a})$$

gdje je V_m volumen ispunjen magnetskim materijalom, a S_m iznos površine rubne plohe magnetskog materijala. U integralu se pojavljuje i član sa

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n}, \qquad (290\text{ b})$$

koji predstavlja doprinos magnetskog materijala polju izražen pomoću fiktivne plošne struje, tj. pomoću fiktivnog magnetizacionog strujnog obloga $\vec{K}_m$ na površini materijala.

Ako u području od interesa ima tijela od magnetskog materijala, na graničnoj su plohi takvog materijala ispunjeni rubni uvjeti (179 a, b) za vektore $\vec{B}$ i $\vec{H}$, a za vektor $\vec{A}$ oni glase

$$\vec{n} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = 0, \qquad \vec{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = 0, \qquad (291\text{ a, b})$$

ako je magnetizacija $\vec{M}$ normalna na rubnu plohu.

Magnetski dipol. Na str. 145 definiran je magnetski dipolni moment s obzirom na točku $\vec{r}$ u prostoru. Jednostavniji izraz za magnetski dipolni moment dobije se ako se moment definira s obzirom na ishodište O relacijom

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V (\vec{r}' \times \vec{J})\,dV'. \qquad (292\text{ a})$$

Magnetski moment zatvorene strujne petlje kroz koju protječe struja I definira se s obzirom na ishodište izrazom

$$\vec{m} = I\int_S \vec{n}\,dS' = \frac{I}{2}\oint_s \vec{r}' \times d\vec{s}, \qquad (292\text{ b})$$

gdje je S površina plohe koju zatvara petlja s. Očito je magnetski moment vrlo male strujne petlje $\vec{m} = \vec{n}\,I\,S$. $\vec{n}$ je jedinični vektor normalan na plohu S.

Vektorski potencijal u točki $\vec{r}$ proizveden magnetskim dipolom smještenim u točki $\vec{r}'$ iznosi

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\vec{m} \times \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (293)$$

Mehanički zakretni moment oko ishodišta O kojim magnetsko polje indukcije $\vec{B}$ djeluje na dipol $\vec{m}$ iznosi

$$\vec{M}_{\text{meh}} = \vec{m} \times \vec{B}, \tag{294}$$

a rezultantna sila koja djeluje na dipol je

$$\vec{F}_{\text{m}} = (\vec{m} \cdot \nabla)\, \vec{B}. \tag{295}$$

Proračun induktiviteta

Ulančeni tok. Totalni magnetski tok kroz zatvorenu strujnu petlju s proizveden od svoje vlastite struje i, određen je jednadžbom (284). Očito, za jednu strujnicu (struju koncentriranu u geometrijsku krivulju), taj se izraz neće moći primijeniti, jer $A \to \infty$ duž puta integracije. Ako se, s druge strane, dopusti konačan presjek vodiča kroz koji protječe struja, pojam magnetskog toka mora biti proširen. U tom slučaju vektorski potencijal može se bilo gdje u prostoru odrediti u skladu s jedn. (287) ako je poznata i zadana raspodjela struje $\vec{J}$ po presjeku vodiča. Ako se taj presjek sav razdijeli na elementarne strujnice s iznosom struje $\vec{J}\,\mathrm{d}S'$, i za svaku takvu strujnicu izračuna vlastiti ukupni tok u skladu s jedn. (284), ukupni će integral preko cijelog presjeka vodiča dati *ulančeni magnetski tok*

$$\psi = \frac{1}{I} \int\limits_S \vec{J} \left(\oint\limits_s \vec{A}\, \mathrm{d}\vec{s} \right) \mathrm{d}S', \tag{296 a}$$

gdje je I ukupna struja koja protječe presjekom vodiča S. Integraciju (296 a) treba izvršiti po cijelom volumenu zatvorenog vodiča, pa se to, s pomoću formule (200), može izraziti i ovako:

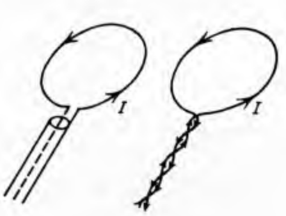
$$\psi = \frac{1}{I} \int\limits_V \vec{J}\,\vec{A}\, \mathrm{d}V' = \frac{2\,W_{\mathrm{M}}}{I}. \tag{296 b}$$

Izraz (296 b) povezuje ulančeni magnetski tok zatvorene strujne petlje s energijom tako izgrađenog sustava. Pojam ulančenog toka od posebnog je značenja u magnetostatičkim problemima i naročito se upotrebljava za izračunavanje induktiviteta (pri proračunu transformatorâ, električnih strojeva, prijenosnih linija).

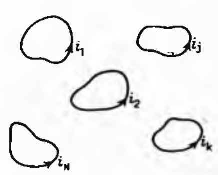
Koeficijenti induktiviteta. Promatra li se jedna strujna petlja (sl. 113), pogodno je uvesti odnos

$$L = \frac{\psi}{I}, \tag{297 a}$$

koji se naziva *koeficijent induktiviteta* ili kraće *induktivitet* petlje i isključivo je geometrijska veličina ovisna o raspodjeli magnet-



Sl. 113. Dvije izvedbe idealizirane strujne petlje



Sl. 114. Sustav od N zatvorenih strujnih petlji

skog polja. Uz pomoć (296 b) može se induktivitet petlje definirati i s pomoću energije magnetskog polja sustava kao

$$L = \frac{2\,W_{\mathrm{M}}}{I^2}. \tag{297 b}$$

Pojam se induktiviteta može proširiti, općenito, na *sustav* stacionarnih struja. Sustav struja može biti takav da je algebarska suma svih struja koje prolaze kroz neograničenu (ravnu ili zakrivljenu) plohu jednaka nuli ili različita od nule. U prvom slučaju, kada je $\sum i = 0$, sustav je *potpun*, sve struje teku u zatvorenim petljama (kao na slici 114) i moguće je definirati tok i energiju u konačnim iznosima. Drugi je slučaj fizikalno nezamisliv i dalje neće biti razmatran. Dalje, promatrat će se samo *linearni* magnetski materijali, koji omogućuju linearne odnose između struja i polja; za permeabilitet μ pretpostavlja se da je neovisan o struji. Za potpun sustav strujnih petlji, prikazan na slici 114, pisat ćemo jednadžbe (296 b) i (297 b) u obliku prilagođenom za proračun ukupne energije polja

$$W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \psi_k\, i_k, \qquad W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{jk}\, i_j\, i_k, \tag{298 a, b}$$

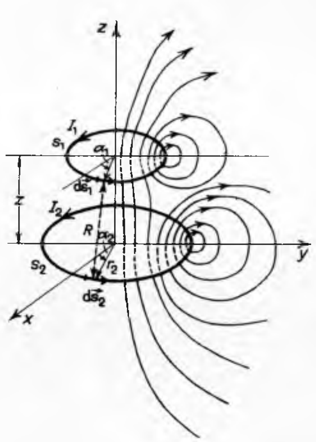
gdje je ψ_k ukupni ulančeni tok kroz k-tu petlju, proizveden svim strujama sustava i određen izrazom (297 a) prilagođenim sustavu

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{N} L_{jk}\, i_j. \tag{299}$$

Veličine L_{jk} su koeficijenti induktiviteta; za $j \neq k$ predstavljaju *međuinduktivitet* između petlji j i k, a za $j = k$ predstavljaju *samoinduktivitet* k-te petlje L_{kk}. Mogu se računati na različite načine, uglavnom koristeći se definicionim jednadžbama (297 a, b). Tako je

$$L_{jk} = \frac{\psi_k}{i_j}, \tag{300 a}$$

ako se pretpostavi da su sve struje, osim struje i_j, jednake nuli.



Sl. 115. Magnetsko polje od dvije kružne strujne petlje

Koristeći se relacijama (284) (287 c) može se izračunati parcijalni induktivitet između j-te i k-te petlje jednadžbom

$$L_{jk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{s_j} \oint\limits_{s_k} \frac{\mathrm{d}\vec{s}_j \cdot \mathrm{d}\vec{s}_k}{R_{jk}}, \tag{300 b}$$

gdje je R_{jk} udaljenost između elemenata $\mathrm{d}\vec{s}_j$ i $\mathrm{d}\vec{s}_k$. Izraz (300 b) poznat je kao *Neumannova formula*. Neposredno slijedi iz nje da je $L_{jk} = L_{kj}$.

Potrebno je primjetiti da je računanje i mjerenje induktiviteta s pomoću izraza (298 b) preko energije često lakše i jednostavnije nego preko ulančenog toka ψ.

Dvije kružne strujne petlje. Ako kroz dvije kružne petlje smještene blizu protječu struje I_1 i I_2 (sl. 115), magnetski tok jedne petlje ulančit će drugu i obratno. Ulančeni tokovi 1 i 2 petlje prema jedn. (299) jesu

$$\psi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2, \qquad \psi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2. \tag{301 a, b}$$

Samoinduktiviteti L_{11} i L_{22}, kao i međuinduktiviteti $L_{12} = L_{21}$ mogu se odrediti s pomoću Neumannove formule (300 b), koja preuređena za ovaj slučaj glasi

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} r_1 \int_0^{2\pi} r_2 \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\, \mathrm{d}\alpha_2}{\sqrt{z^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}\, \mathrm{d}\alpha_1, \tag{302}$$

i koja se uvođenjem supstitucije

$$k^2 = \frac{4 r_1 r_2}{z^2 + (r_1 + r_2)^2}, \qquad \alpha = \pi - 2\varphi, \tag{303 a, b}$$

svodi na formu potpunih eliptičkih integrala prve i druge vrste, $K(k)$ i $E(k)$. Nakon uređenja, jednadžba (302) postaje konačno

$$L_{12} = \mu \sqrt{r_1 r_2} \cdot h(k), \qquad h(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) \cdot K(k) - \frac{2}{k} E(k). \tag{304 a, b}$$

Vrijednosti eliptičkih integrala $K(k)$, $E(k)$ i faktora $h(k)$ mogu se naći u tabelama. Za samoinduktivitete L_{11} i L_{22} dobile bi se, iz poznatih razloga, beskonačne vrijednosti. Da bi se dobile realnije vrijednosti samoinduktiviteta, treba prvu integraciju izvršiti po kružnici polumjera r, a drugu po kružnici polumjera $(r - a)$; a je polumjer vodiča od koga je načinjena strujna petlja. To onda daje

$$L = \mu r h \left(1 - \frac{a^2}{8r^2}\right). \qquad (305\text{ a})$$

Ako je $a/r \ll 1$, može se upotrijebiti i približan izraz

$$L \approx \mu r \left(\ln \frac{8r}{a} - 2\right). \qquad (305\text{ b})$$

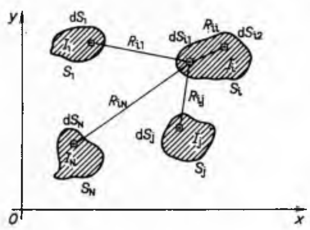
Da se istakne samo djelomična ulančenost strujnih petlji magnetskim tokom, mogu se jednadžbe (301 a, b) pisati u drugom obliku, koji je više uobičajen u analizi polja transformatora

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (L_{11} - L_{12}) I_1 + L_{12}(I_1 + I_2), \\ \Psi_2 &= (L_{22} - L_{21}) I_2 + L_{21}(I_1 + I_2). \end{aligned} \qquad (306\text{ a, b})$$

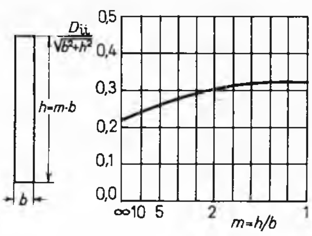
Mogu se uvesti nove oznake: $M = L_{12} = L_{21}$ jest međuinduktivitet, a $S_1 = L_{11} - M$ i $S_2 = L_{22} - M$ jesu primarni i sekundarni *rasipni induktiviteti*. Obično se član $\Psi_m = M(I_1 + I_2)$ naziva *glavni ulančeni tok*, ili samo *glavni tok*. Ukupna energija magnetskog polja sustava dvaju namota iznosi prema jedn. (298)

$$W_M = \tfrac{1}{2}(\psi_1 I_1 + \psi_2 I_2) = \tfrac{1}{2}(L_{11} I_1^2 + 2 L_{12} I_1 I_2 + L_{22} I_2^2). \qquad (307)$$

Metoda srednjih geometrijskih udaljenosti. Za proračun induktiviteta sustava ravnih vodiča vrlo je pogodna *metoda srednjih geometrijskih udaljenosti* (*SGU*). Metoda se u biti svodi na aproksimativno rješavanje, podjelom na *dione površine*, integralne jednadžbe (287 a) za vektorski magnetski potencijal $\vec{A}$.



Sl. 116. Potpuni sustav ravnih vodiča kroz koje protječe struja, smješten u neograničenom prostoru



Sl. 117. Vlastita srednja geometrijska udaljenost (SGU) pravokutnog presjeka

(uključivo i $j = i$) dobiva se iznos totalnog vektora potencijala na mjestu elementa dS_i

$$A_i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \frac{I_j}{S_j} \int_{S_j} \ln R_{ij}\, dS_j, \qquad (309)$$

pri čemu je zbog uravnoteženosti sustava strujâ nestao član sa $\ln R_{i0}$. Usporedbom izraza (298 b) za totalnu magnetsku energiju sustava, koju računamo *po jedinici duljine*, s jednadžbom (200) prilagođenom za ovaj slučaj, slijedi ekvivalencija

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} I_i I_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} A_i J_i dS_i, \qquad (310)$$

odakle kombiniranjem s jedn. (309) slijedi traženi izraz za proračun induktiviteta

$$L_{ij} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln D_{ij}, \qquad (311\text{ a})$$

gdje je

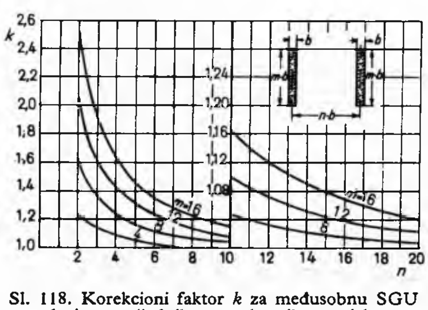
$$\ln D_{ij} = \frac{1}{S_i S_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \ln R_{ij} dS_i dS_j. \qquad (311\text{ b})$$

Veličina D_{ij} predstavlja *srednju geometrijsku udaljenost* dvaju likova površine S_i i S_j. Proračun SGU dvaju likova D_{ij} ili SGU lika od samog sebe D_{ii}, znatno se olakšava primjenom već prije spomenute metode dionih površina, koja dovodi do numeričke tehnike rješavanja. Metoda počiva na činjenici da se SGU između dva jednaka kvadrata stranice a — čak i u najnepovoljnijem slučaju, kada se kvadrati dodiruju cijelom jednom stranicom — neznatno razlikuju od razmaka s između težištâ

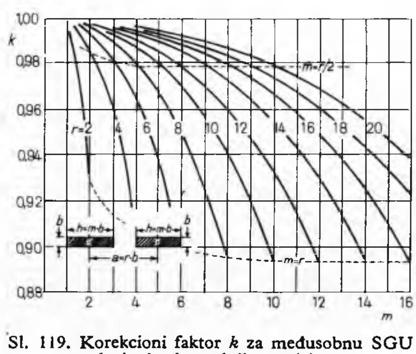
$$\begin{aligned} D_{ij\square} &\approx s_{ij}, \quad \text{za } s_{ij} \geqq 2a, \\ D_{ij\square} &\approx 1{,}00655\, s_{ij}, \quad \text{za } s_{ij} = a. \end{aligned} \qquad (312\text{ a, b})$$

Zato likove na slici 116 dijelimo na veći broj jednakih kvadrata površine ΔS, kojih ima u i-tom liku n_i, a u j-tom liku n_j, pa jednadžba (311 b) prelazi u oblik

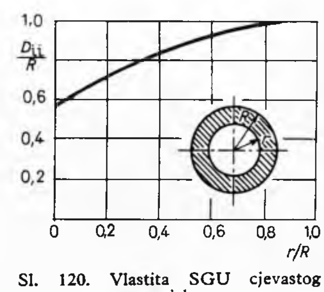
$$\ln D_{ij} = \frac{1}{n_i n_j} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \ln R_{ij} = \frac{1}{n_i n_j} \ln \prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=n_i\\ j=n_j}} R_{ij}, \qquad (313\text{ a})$$



Sl. 118. Korekcioni faktor k za međusobnu SGU dvaju vertikalnih pravokutnih presjeka



Sl. 119. Korekcioni faktor k za međusobnu SGU dvaju horizontalnih presjeka



Sl. 120. Vlastita SGU cjevastog presjeka

Neka je zadana geometrija sustava od N vodiča prema slici 116. Vodiči su od neferomagnetskog materijala proizvoljnog oblika presjeka, okruženi zrakom i smješteni u neograničenom prostoru. Zadane su struje u svakom vodiču i pretpostavlja se jednolika raspodjela struje po presjeku svakog vodiča, tj. $J_i = I_i/S_i$; sustav struja je potpun, pa je $\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$. Označimo li sa dA_{ij} doprinos vektorskom potencijalu struje koja protječe elementarnom površinom dS_j na mjestu elemenata površine dS_i, onda je

$$dA_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} dI_j \ln \frac{R_{i0}}{R_{ij}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_j \frac{dS_j}{S_j} \ln \frac{R_{i0}}{R_{ij}}. \qquad (308)$$

Ovdje R_{i0} predstavlja udaljenost elemenata dS_i od beskonačno dalekog vodiča, koji predstavlja povratni vodič svake strujnice sustava. Ukupna struja u tom zamišljenom povratnom vodiču je nula, zbog toga što je sustav potpun. Integracijom jednadžbe (308) po površini S_j i zbrajanjem tih iznosa po $j = 1, 2, \ldots, N$

odakle se konačno dobiva relacija za izračunavanje srednje geometrijske udaljenosti dvaju likova

$$D_{ij} = \sqrt[(n_i \cdot n_j)]{\prod_{n_i, n_j} R_{ij}}. \qquad (313\text{ b})$$

Na temelju ovih razmatranja izračunate su vrijednosti vlastite SGU D_{ii} za vodič pravokutnog presjeka i date na sl. 117, a vrijednosti korekcionog faktora k, definiranog prema

$$k = \frac{D_{ij}}{s} \qquad (314)$$

(gdje je s razmak između težištâ dvaju zadanih likova) za dva pravokutnika postavljena u različite položaje, dane su na sl. 118 i 119. Vlastita SGU vodiča okruglog presjeka jednaka je $D_{ii} = r e^{-1/4} = 0{,}7788\, r$, gdje je r polumjer vodiča. Ista ta vrijednost može se uzeti s dovoljnom točnošću i za SGU užeta. Kao međusobna

SGU okruglih presjeka može se uzeti udaljenost između središtâ krugova. Vlastita SGU cjevastih presjeka prikazana je na sl. 120.

DINAMIČKA POLJA

Svako konačno i jednoznačno rješenje Maxwellovih jednadžbi predstavlja moguće elektromagnetsko polje. Temeljno je svojstvo tih jednadžbi da one pokazuju egzistenciju rješenja u obliku putujućih valova, koji predstavljaju transport energije u prostoru od jedne točke do druge. Valna rješenja Maxwellovih jednadžbi postoje u više oblika: kao ravni valovi, divergirajući i konvergirajući sferni valovi, cilindrični valovi i kao drugi oblici valova. Transverzalni ravni val je najjednostavniji i elementarni oblik elektromagnetskog vala. Zato se u mnogim slučajevima dinamičko elektromagnetsko polje analizira s pomoću harmoničkih ravnih valova i s pomoću rješenja dobivenih njihovom superpozicijom. U ovom poglavlju opisat će se svojstva harmoničkih ravnih valova u neograničenom izotropnom mediju, a da se pri tom neće ulaziti u probleme njihovog nastanka i analizu njihovih izvora.

Svojstva elektromagnetskih valova s obzirom na interakciju s materijom ovisna su o valnoj duljini λ ili o frekvenciji f, koje su jedna s drugom povezane odnosom (241). Uobičajena je zato podjela elektromagnetskih valova prema frekvenciji ili valnoj duljini. Područje najkraćih valova, duljine ispod 10^{-6} cm poznato je pod nazivom X-zrakâ ili *rendgenskih zraka*. U starijoj literaturi bio je općenito uobičajen i naziv *gama-zrake* za onu vrstu X-zraka, koje imaju vrlo veliku energiju i ekstremno malu valnu duljinu. (I danas se ta podjela ponekad upotrebljava, ali se ona ne zasniva na razlikama među energijama i valnim duljinama zračenja nego više na razlici u načinu njegovog postanka: ako je postanak povezan s procesima izvan atomske jezgre, govori se o X-zrakama, a o gama-zrakama se govori ako one nastaju u atomskoj jezgri.) Dalje, sve do $\lambda < 3{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm je područje *ultravioletnog* (*ultraljubičastog*) *svjetla*. *Vidljivo svjetlo* zauzima u spektru elektromagnetskog zračenja područje između valnih duljina $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm i $7{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm, a zatim slijede područja bližeg i daljeg *infracrvenog svjetla*. Konačno, elektromagnetski valovi čije su valne duljine reda veličine milimetara i centimetara nazivaju se *mikrovalovi*, a valovi još većih valnih duljina poznati su kao *radio-valovi* ili *Hertzovi valovi*. Kao što je već u uvodu rečeno, analize u elektrotehnici ograničavaju se na područje tehničkih frekvencija, odn. makroskopskih valnih duljina.

Ravni valovi

Da bi se riješio bilo koji problem elektromagnetskog polja, potrebno je naći rješenje sustava Maxwellovih jednadžbi, bilo u integralnom bilo u diferencijalnom obliku. Različiti oblici sustava tih jednadžbi koji se odnose na vektore elektromagnetskog polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$, kako je to uobičajeno u analizi valova, dani su u jednadžbama (101), (104), (105), (114) i (118). Kao što je rečeno, rješavanje tih sustava vrlo je teško; zato se upotrebljavaju iz njih izvedeni sustavi vektorskih valnih jednadžbi (107) i (108), (110), (111), (115). Rješavanje i ovih sustava jednadžbi još uvijek je vrlo zamršeno, pa se stoga uvodi *hipotetski model ravnog vala*, koji daje najjednostavnija rješenja, matematički i fizikalno vrlo pregledna i pogodna za analizu i složenijih dinamičkih elektromagnetskih polja.

U definiranju modela ravnog vala uvest ćemo pretpostavke navedene u nastavku. Prostor u kome se promatra elektromagnetsko polje *neograničen* je i ispunjen homogenim, izotropnim i *linearnim* materijalom (određenim veličinama ε, μ, $\varkappa$), koji se *ne giba*. Bez obzira na kvalitet materijala, pretpostavit ćemo da *nema ni slobodnih naboja ni neovisnih struja* ($\varrho = 0$, $\vec{J}_i = 0$), pa se rješavanje polja svodi na rješavanje sustava

$$\Delta\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0,$$
$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\varkappa\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0, \qquad (315\text{ a, b})$$

koji se sastoji od dvije *opće homogene vektorske valne jednadžbe*. Za njihovo rješavanje primijenit ćemo metodu separacije varijabli, koja se osniva na pretpostavci da se problem matematički može razdijeliti na dva dijela, jedan koji sadrži samo vrijeme i drugi koji sadrži samo koordinate prostora. Uvedimo zato umjesto vektorâ $\vec{E}$ i $\vec{H}$ opći vektor polja $\vec{W}(\vec{r}, t)$ i izrazimo ga produktom

$$\vec{W}(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r}) \cdot T(t), \qquad (316)$$

gdje je $\vec{V}$ vremenski neovisan vektor polja, a $\vec{T}$ je prostorno neovisna funkcija. Uvrštenjem rješenja (316) u jednadžbe oblika (315) dobiva se diferencijalna jednadžba

$$\Delta\vec{V} - f(t) \cdot \vec{V} = 0. \qquad (317\text{ a})$$

gdje je

$$f(t) = \frac{\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\varkappa\dfrac{\partial T}{\partial t}}{T}. \qquad (317\text{ b})$$

Deriviranje jednadžbe (317 a) daje

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\vec{V}) = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}f(t) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{V} = 0, \qquad (317\text{ c})$$

jer je $\vec{V}$, pa prema tome i $\Delta\vec{V}$ neovisno o vremenu. Iz jedn. (317 c) slijedi da mora biti

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad (318\text{ a})$$

tj. $f(t)$ je konstanta:

$$f(t) = -k^2, \qquad (318\text{ b})$$

što se i očekivalo u prostorima i materijalima koji se ne gibaju. Sa $-k^2$ označena je proizvoljna konstanta; ona je uzeta negativnom da bi jednadžba (317 a) prešla u *Helmholtzovu jednadžbu* oblika

$$\Delta\vec{V} + k^2\vec{V} = 0, \qquad (319\text{ a})$$

koja ne sadrži u sebi vrijeme kao varijablu. Druga separirana jednadžba ovog sustava, za vremenski ovisan faktor polja, slijedi iz (317 b) i (318 b)

$$\mu\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \mu\varkappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + k^2 T = 0. \qquad (319\text{ b})$$

Jednadžbe (319 a) i (319 b) matematički su neovisne, ali ne i fizikalno, jer se u objema pojavljuje ista konstanta k.

Vektorska jednadžba (319 a) može se rješavati numeričkom tehnikom, ili u određenom broju slučajeva (u 11 koordinatnih sustava), analitički, metodom separacije varijabli. Ograničimo li se na pravocrtni koordinatni sustav, može se vektor $\vec{V}(\vec{r})$ rastaviti u tri prostorne komponente, koje ćemo označavati sa $V_i(\vec{r})$, pa se prema tome sustav jednadžbi elektromagnetskog polja (315) svodi na rješavanje sustava od šest identičnih skalarnih jednadžbi oblika

$$\Delta V_i + k^2 V_i = 0, \qquad (320\text{ a})$$

ili konačno

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} + k^2 V_i = 0. \qquad (320\text{ b})$$

Uobičajen je postupak da se pretpostavi za svaku pravocrtnu komponentu vektorâ polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ rješenje u obliku produkta

$$V_i = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \qquad (320\text{ c})$$

gdje su X, Y i Z funkcije samo jedne prostorne koordinate. Nakon supstitucije jedn. (320 c) u (320 b), razlaže se ova posljednja u tri ordinarne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -k_x^2,$$
$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2, \qquad (321\text{ a, b, c})$$
$$\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -k_z^2,$$

gdje su separacione komponente $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$ *vlastite vrijednosti* (njem. Eigenwerte, engl. eigenvalues) pripadajućih im diferencijalnih jednadžbi i očito moraju zadovoljavati uvjet

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \qquad (322)$$

a veličine X, Y, Z su njihove odgovarajuće *vlastite funkcije* (njem. Eigenfunktionen, engl. eigenfunctions). Rješavanjem sustava (321 a, b, c) dobiva se s pomoću jedn. (320 c) i (322) rješenje jednadžbe (320 a) u obliku

$$V_t = V_{t0}\, e^{\pm j(k_x x + k_y y + k_z z)} = V_{t0}\, e^{\pm j\vec{k}\vec{r}}, \tag{323}$$

koje se naziva trodimenzionalni pravokutni *zonalni harmonik.* U jedn. (323) uvedeno je

$$\vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z \quad \text{i} \quad \vec{k} = \vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z. \tag{324}$$

Druga jednadžba iz sustava (319) može se lako riješiti ako se ograničimo na analizu *stacionarnih vremenskih sinusno promjenljivih* (*harmoničkih*) elektromagnetskih polja. Tada u skladu s iznesenim na str. 159 u nju treba uvrstiti

$$T = e^{j\omega t}, \tag{325}$$

pa se kao rezultat dobiva

$$-\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega\mu\varkappa + k^2 = 0, \tag{326 a}$$

ili

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - j\omega\mu\varkappa}. \tag{326 b}$$

Broj k se obično naziva *valni broj*; općenito je kompleksna veličina. Očito je to modul vektora $\vec{k}$ u jedn. (324).

Konačno se rješenje vektorskih valnih jednadžbi (315 a, b) može pomoću jedn. (316), (323) i (325) pisati po prostornim komponentama u obliku *elementarnog vala*, tj. prostorno-vremenskih harmonika

$$W_t(\vec{r}, t) = W_{t1}\, e^{j(\omega t + \vec{k}\vec{r})} + W_{t2}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{327}$$

To je valjano uz sva već spomenuta ograničenja.

Treba posebno istaći da vektor $\vec{k}$ iz jedn. (324), kojemu je modul određen jednadžbom (326 b) i koji se naziva valni broj, određuje *smjer prostiranja* elementarnog elektromagnetskog vala. Očito je da se rješenje jedn. (327) sastoji od dva elementarna »putujuća« vala, jednog koji se prostire u smjeru $-\vec{k}$ i drugog koji se prostire u smjeru $+\vec{k}$. Suma ovih elementarnih valova, za sva rješenja po $\vec{k}$, čini trostruki Fourierov red, s pomoću kojeg se nakon sumacije po ω dobiva rješenje za val bilo kojeg prostornog oblika i proizvoljne ovisnosti o vremenu.

Općenito se može zaključiti da bilo koja linearna kombinacija rješenja (327) mora biti također rješenje, jer u neograničenom prostoru nisu propisani rubni uvjeti koji bi isključili bilo koje partikularno rješenje. Želimo li dobiti samo jedno rješenje, moraju biti propisani odgovarajući *dodatni uvjeti*, koji će odrediti jedinstveno rješenje jednadžbi (315 a, b). Proizvoljno, pretpostavimo zato da je

$$\vec{V} \equiv \vec{H} = \vec{a}_y H(z), \tag{328}$$

ne garantirajući a priori da će takvo rješenje biti nađeno. Jednadžba (320 b) prelazi tada u oblik

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + k^2 H = 0, \tag{329 a}$$

a njeno rješenje je u skladu s jednadžbama (323) i (327) za harmonička polja

$$\vec{H} = \vec{a}_y H_1\, e^{j(\omega t + k_z z)} + \vec{a}_y H_2\, e^{j(\omega t - k_z z)}, \tag{329 b}$$

gdje su H_1 i H_2 općenito kompleksne konstante neovisne o koordinatama prostora i o vremenu. Uvodeći slične pretpostavke za vektor $\vec{E}$, tj. uvjet da je $\vec{E} = \vec{E}(z)$, i uz pomoć druge Maxwellove jednadžbe (218 b), dobiva se kao rješenje jednadžbe (315 b) relacija

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_1\, e^{j(\omega t + k_z z)} + \vec{a}_x E_2\, e^{j(\omega t - k_z z)}. \tag{330}$$

Uvede li se prema jedn. (326 b) »*funkcija prostiranja*« kao

$$\gamma(j\omega) = j\, k_z(j\omega) = \alpha(\omega) + j\,\beta(\omega) = \sqrt{j\omega\mu\varkappa - \omega^2 \mu \varepsilon}, \tag{331}$$

tada je *prigušna funkcija*

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}, \tag{332 a}$$

fazna funkcija

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varkappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}, \tag{332 b}$$

a *unutarnja impedancija materijala*

$$-\frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z. \tag{333}$$

U ovim izrazima je $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, a *fazna brzina vala* je

$$v = \pm \frac{\omega}{\beta}. \tag{334}$$

Unutarnja impedancija kojom materija reagira na prostiranje elektromagnetskog vala u njoj općenito je kompleksna veličina i može se izraziti i kao

$$Z = |Z|\, e^{j\varphi}, \quad |Z| = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \tan\varphi = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{335 a, b, c}$$

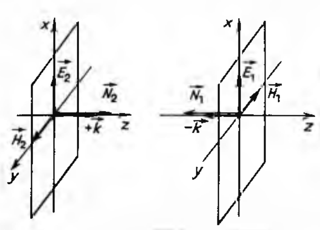
Konačno se može zaključiti da se dobivena rješenja (329 b) i (330) mogu pisati i u obliku

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{a}_x \left(E_1\, e^{j\omega t + \gamma z} + E_2\, e^{j\omega t - \gamma z}\right), \\ \vec{H} &= \vec{a}_y \left(-\frac{E_1}{Z} e^{j\omega t + \gamma z} + \frac{E_2}{Z} e^{j\omega t - \gamma z}\right), \end{aligned} \tag{336 a, b}$$

ili u realnom području

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{a}_x \left[|E_1|\, e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \alpha_{E1}) + |E_2|\, e^{-\alpha z} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(\omega t - \beta z + \alpha_{E2})\right], \\ \vec{H} &= \vec{a}_y \left[-\frac{|E_1|}{|Z|} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \alpha_{E1} - \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|E_2|}{|Z|} e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \alpha_{E2} - \varphi)\right]. \end{aligned} \tag{337 a, b}$$

Rješenja (336) i (337) nazivaju se *transverzalnim elektromagnetskim* (*TEM*) *uniformnim ravnim valom*, kojemu je vektor $\vec{E}$ (pa prema tome i $\vec{H}$) *linearno polariziran.* Sastoje se općenito od dva ravna vala: prvoga, sa komponentama (E_1, H_1), kojemu energija putuje u negativnom smjeru osi z brzinom v; i drugoga, s komponentama (E_2, H_2), koji prenosi energiju u pozitivnom smjeru osi z (sl. 121). Srednja vrijednost kompleksne energije koju oni prenose kroz prostor u jedinici vremena po jediničnoj površini određena je Poyntingovim vektorom $\vec{N}$ prema (234).



Sl. 121. Direktna i inverzna komponenta ravnog TEM vala

Već opisano matematički najjednostavnije rješenje Maxwellovog sustava jednadžbi predstavlja ravan elektromagnetski val koji ima ova svojstva: a) da je transverzalan, tj. da postoji uvijek jedna ravnina (ravnina konstantne faze), u kojoj se nalaze vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$, koja je okomita na smjer prostiranja energije valom; b) da su vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ uvijek jedan na drugom normalni u svakoj točki prostora; c) da su u svakom trenutku vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u jednoj točki prostora fazno pomaknuti za kut φ, tj. da vektor $\vec{H}$ zaostaje za kut φ prema $\vec{E}$ za svaki val koji putuje u jednom smjeru; d) da su kod uniformnog vala vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ u jednom trenutku konstantni i ne ovise o koordinatama točke u ravnini konstantne faze.

Proračun skin-efekta

Posebno je od interesa analiza struja koje pod utjecajem sinusnih elektromagnetskih polja teku u dobro (ali ne idealno) vodljivim materijalima, takvim kao što su metalni vodiči, u području tehničkih frekvencija. Harmonička elektromagnetska polja upravljaju se općenito prema jednadžbama (315 a, b), ili (138 a, b), ili (141 a, b), ili (224 a, b), ili (225 a, b). Dobar vodič karakteriziran je u elektromagnetskom pogledu velikim omjerom provodnih prema pomačnim strujama, što se u praksi svodi na uvjet

$$\frac{\varkappa}{\omega\,\varepsilon} \geq 100, \tag{338}$$

gdje ε u metalu iznosi približno ε_0. Očito je da je taj omjer za određeni materijal ovisan o frekvenciji polja i da u prirodi ima i materijala (morska voda, vlažno tlo) koji mogu biti svrstani i među vodiče i među izolatore, sve u području tehničkih frekvencija. Kada je uvjet (338) ispunjen, mogu se pomačne struje zanemariti, pa jednadžbe polja prelaze u oblik

$$\Delta\vec{E} - \gamma^2\vec{E} = 0, \qquad \Delta\vec{H} - \gamma^2\vec{H} = 0, \tag{339 a, b}$$

gdje je prema jednadžbama (331) i (338) funkcija prostiranja, te prigušna i fazna funkcija

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\,\beta \approx (1+\mathrm{j})\sqrt{\tfrac{1}{2}\,\omega\,\mu\,\varkappa}, \quad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\tfrac{1}{2}\,\omega\,\mu\,\varkappa}. \tag{340 a, b}$$

Unutarnja impedancija (333) dobrog vodiča jest

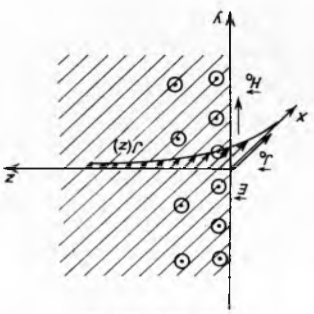
$$Z \approx (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\varkappa}} = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{\varkappa}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/4}, \tag{341}$$

tj. magnetsko polje fazno zaostaje za električnim poljem u dobro vodljivom mediju za kut $\pi/4$.

Dubina prodiranja. Zadaća koju treba analizom riješiti prikazana je na sl. 122. Struje gustoće $\vec{J} = \varkappa\,\vec{E}$ teku u smjeru osi x u polubeskonačnoj ploči ograničenoj s lijeve strane ravninom x, y. Magnetsko polje je u smjeru osi y. Rješenjem sustava (339) dobiva se raspodjela polja u vodiču

$$\vec{E} = \vec{a}_x H_0 \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{\varkappa}}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z + \pi/4)},$$

$$\vec{H} = \vec{a}_y H_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)}. \tag{342 a, b}$$



Sl. 122. Skin-efekt

Očito je, prema jedn. (342 a), da je *struja potisnuta prema površini vodiča* i da je koncentrirana u sloju uz površinu, koji je to tanji što je frekvencija polja veća. Mjerilo debljine toga sloja, odnosno prodiranja elektromagnetskog polja u vodič, jest veličina

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\,\mu\,\varkappa}}, \tag{343}$$

koji se naziva *dubina prodiranja*. To je ona udaljenost od površine u vodiču na kojoj amplituda gustoće struje padne na iznos $\frac{1}{\mathrm{e}} J_0 \approx 36{,}8\%\, J_0$ (J_0 je amplituda gustoće struje na površini vodiča). Praktički se uzima da je na dubini $5\,d$ gustoća struje pala na nulu (točnije 0,7% J_0). Amplituda strujnog obloga ili struja po jedinici poprečne dužine može se odrediti iz jednadžbe

$$K = \int_{z=0}^{\infty} J\,\mathrm{d}z = \int_0^{\infty} \varkappa E\,\mathrm{d}z = \int_0^{\infty} \varkappa H_0 (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\varkappa}}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{d}z = H_0. \tag{344}$$

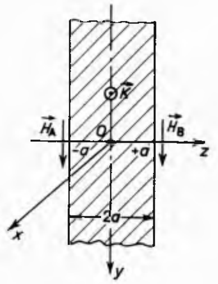
Amplituda strujnog obloga jednaka je amplitudi jakosti magnetskog polja na površini vodiča.

Gubici po jedinici površine mogu se računati s pomoću Poyntingovog vektora kao

$$N = \frac{1}{2}E_0 H_0 \cos\varphi = \frac{1}{2}H_0^2\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{\varkappa}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\varkappa}}K^2. \tag{345}$$

Ekvivalentni otpor koji odgovara gubicima po jedinici rubne površine može se odrediti iz jednadžbe

$$R' = \frac{2P'_s}{K^2} = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\varkappa}} = \frac{1}{\varkappa\, d}, \tag{346}$$



Sl. 123. Uz proračun skin-efekta u ravnoj ploči

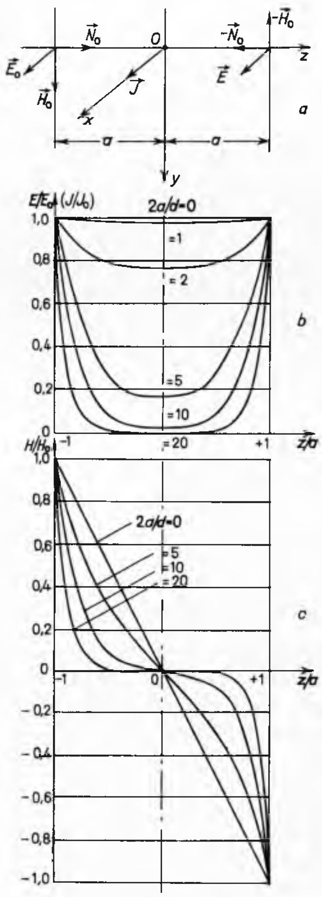
što pokazuje da su gubici ekvivalentni onima koji bi nastali u hipotetskom slučaju kad bi strujni sloj bio realiziran tako da se sva struja koncentrira u sloj dubine d uz površinu i da je unutar sloja konstantne gustoće. Dubina prodiranja je u bakru, npr., pri frekvenciji 50 Hz, $d \approx 9{,}4$ mm, pri frekvenciji 100 MHz, $d \approx 7{,}1\cdot 10^{-3}$ mm.

Ravna ploča. Da bi se odredila raspodjela struje J po presjeku beskonačne ploče od vodljivog materijala s danim μ i $\varkappa$, debljine $2\,a$, kroz koju protječe sinusna struja jakosti K po jedinici visine, frekvencije ω, uz zadane rubne uvjete prema sl. 123, tj. uz zadano magnetsko polje H_A i H_B na površini s obje strane treba najprije riješiti jednadžbu (339 b), čije rješenje zbog $\vec{H} = \vec{a}_y \cdot H(z)$ uz pomoć jedn. (326 b), glasi

$$H = \frac{H_A + H_B}{2}\cdot\frac{\cosh\gamma z}{\cosh\gamma a} - \frac{H_A - H_B}{2}\cdot\frac{\sinh\gamma z}{\sinh\gamma a}, \tag{347}$$

a onda iz poznatog magnetskog polja (347) izračunati pomoću prve Maxwellove jednadžbe (rot $\vec{H} = \vec{J}$)

$$J = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\gamma\frac{H_A + H_B}{2}\,\frac{\sinh\gamma z}{\cosh\gamma a} + \gamma\frac{H_A - H_B}{2}\,\frac{\cosh\gamma z}{\sinh\gamma a}. \tag{348}$$



Sl. 124. Raspodjela struje i polja u usamljenoj beskonačnoj ploči

Rubne vrijednosti polja H_A i H_B povezane su sa strujom koja protječe kroz ploču po jedinici visine K relacijom

$$K = \int_{-a}^{+a} J\,\mathrm{d}z = H_A - H_B, \tag{349}$$

gdje je za J trebalo uvrstiti vrijednost iz jedn. (348).

Očito je da su rubne vrijednosti polja određene iznosom struje kroz ploču, i to bez obzira na način kako je ona raspodijeljena po presjeku ploče. Tako je za *usamljenu ploču* prema sl. 124 a, zbog simetrije, $H_B = -H_A = -H_0$, a iz jedn. (349) slijedi da je $H_0 = K/2$, pa se s pomoću jed. (347) izračunava raspodjela polja u ploči:

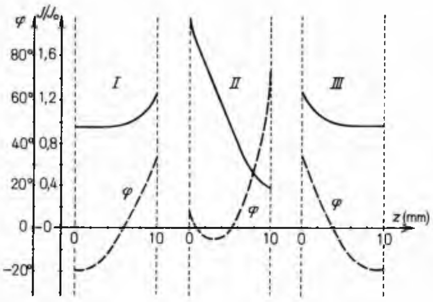
$$H = -\frac{K}{2}\,\frac{\sinh\gamma z}{\sinh\gamma a}, \tag{350 a}$$

a raspodjela gustoće struje je

$$J = \gamma\frac{K}{2}\,\frac{\cosh\gamma z}{\sinh\gamma a}. \tag{350 b}$$

Dijagrami raspodjele gustoće struje i magnetskog polja po presjeku usamljene ploče u ovisnosti o parametru $2\,a/d$ dani su na slikama 124 b i c. Omjer debljine ploče $2a$ i dubine prodiranja d, reducirana debljina ploče, za izabrani je materijal i određene dimenzije funkcija samo frekvencije.

Za sustav koji čine tri paralelne beskonačne ploče kroz koje protječe simetrični sustav trofaznih struja $K_{\mathrm{I}} = K_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$, $K_{\mathrm{II}} = K_0 \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\right)$, $K_{\mathrm{III}} = K_0 \exp\left(+\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\right)$, rubne vrijednosti polja na površinama ploča jesu $H_{\mathrm{IA}} = 0$; $H_{\mathrm{IB}} = H_{\mathrm{IIA}} = K_{\mathrm{I}}$; $H_{\mathrm{IIB}} = H_{\mathrm{IIIA}} = -K_{\mathrm{III}}$; $H_{\mathrm{IIIB}} = 0$. Dijagram raspodjele struja u pojedinim pločama, izračunatih iz rubnih uvjeta s pomoću jedn. (348), dan je na sl. 125. Zanimljivo je da se kao posljedica računa pokazuje i mjerenjem dokazana činjenica da uz potpuno simetričnu raspodjelu u dvije vanjske ploče simetričnost nije ostvarena i u srednjoj ploči, u kojoj su uz to vrijednosti struja i faznih pomaka na graničnim plohama vrlo različite. Dakle, s obzirom na srednju ravninu kroz srednji vodič postoji samo geometrijska, ali ne i elektromagnetska simetrija sustava.



Sl. 125. Grafički prikaz amplitudne i fazne raspodjele struja po površini beskonačnih ploča kojima protječe trofazni simetrični sustav struja

Sličnim postupkom se s pomoću jednadžbi (347), (348) i (349) može za bilo koji raspored beskonačnih ploča kroz koje protječe bilo kakav sustav struja odrediti raspodjela magnetskog polja i gustoće struje po presjeku tih ploča.

Okrugli vodič. Jednadžbe polja (339 a, b) treba razviti u kružnom cilindričnom koordinatnom sustavu, pa one za usamljen okrugli vodič polumjera ϱ_0, kroz koji protječe struja I poprimaju oblik

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E}{\partial \varrho} + k^2 E = 0,$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial H}{\partial \varrho} + \left(k^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right) H = 0, \qquad (351\text{ a, b})$$

gdje je prema jedn. (331) i (338) $k^2 = -\gamma^2 = -\mathrm{j}\,\omega\,\mu\,\varkappa$. Jednadžbe (351 a, b) jesu Besselove diferencijalne jednadžbe i njihova su rješenja

$$E = \frac{k}{\varkappa}\frac{I}{2\pi\varrho_0}\frac{J_0(k\varrho)}{J_1(k\varrho_0)},$$
$$H = \frac{I}{2\pi\varrho_0}\frac{J_1(k\varrho)}{J_1(k\varrho_0)}, \qquad (352\text{ a, b})$$

gdje su J_0 i J_1 Besselove funkcije prve vrste nultog i prvog reda (v. Specijalne funkcije u članku *Funkcije*). Izrazi (352 a, b) određuju raspodjelu polja i struje po kružnom poprečnom presjeku usamljenog ravnog beskonačno dugog vodiča.

Proračun skin-efekta u sustavu ravnih vodiča

Problemi skin-efekta u sustavima ravnih vodiča mogu se rješavati na dva načina: integralnim i diferencijalnim postupkom. Integralni način temelji se na korištenju općeg integrala vektorskog potencijala (309) u cilindričnim sustavima i pojma SGU (jedn. 311). Primjenjuje se uglavnom u tipovima problema gdje se rubovi promatranog područja protežu u beskonačnost, tj. u otvorenim sustavima. U zatvorenim sustavima vodiča, kakvi se najčešće susreću u električnim strojevima, prikladan je za upotrebu diferencijalni način, gdje se upotrebljava Helmholtzova jednadžba. Ovdje su moguća dva pristupa, s pomoću zadanog napona ili s pomoću zadane struje.

Opišimo ukratko naš matematički model sustava ravnih vodiča, koji je u presjeku prikazan na sl. 126. Skup paralelnih ravnih vodiča proizvoljnog oblika presjeka smješten je unutar područja omeđenog valjkom čiji trag predstavlja krivulja C na sl. 126. Granica područja može biti i u beskonačnosti; ako nije, na njoj treba da budu zadani odgovarajući rubni i početni uvjeti. Zadana je ukupna struja svakog vodiča. Dodatni uvjeti jesu da su vodiči smješteni u zraku te je pretpostavljena jednolika električna vodljivost po njihovom poprečnom presjeku. Uzima se, nadalje, da su vodiči građeni od neferomagnetskog materijala.

Veličine polja s kojima računamo jesu: plošna gustoća struje $\vec{J}(\vec{\varrho},t)$ i elektromagnetski potencijali $\vec{A}(\vec{\varrho},t)$ i $\varphi(\vec{\varrho},t)$. Još ćemo pretpostaviti da su sve veličine sinusoidno vremenski promjenljive, tj. da prema (210 a) vrijedi, npr. za vektorski potencijal:

$$\vec{A}(\vec{\varrho},t) = \mathrm{Re}\,[A(\vec{\varrho})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]. \qquad (353)$$

Rješavanje s pomoću integralnih jednadžbi. Ako se vektorski potencijal $\vec{A}$ može dovesti u odnos sa gustoćom struje $\vec{J}$ uz pomoć integrala oblika

$$\vec{A}(\vec{\varrho}) = \int_S J(\vec{\varrho}\,')\,K(\vec{\varrho},\vec{\varrho}\,')\,\mathrm{d}S', \quad \vec{\varrho}\,' \in S, \qquad (354)$$

gdje je $K(\vec{\varrho},\vec{\varrho}\,')$ poznata funkcija i integracija se obavlja po svim površinama presjeka vodiča, gustoća se struje J može izraziti u obliku Fredholmove integralne jednadžbe

$$J(\vec{\varrho}) = \varkappa\,U_1 - \mathrm{j}\,\omega\,\varkappa \int_S J(\vec{\varrho}\,')\,K(\vec{\varrho},\vec{\varrho}\,')\,\mathrm{d}S'. \qquad (355)$$

Funkcija U_1 predstavlja u stvari od vanjskog izvora narinuti napon po jedinici duljine i ona je ovdje uvedena kao izvor elektromagnetskog polja. $U_1 = 0$ definira pasivni vodič.

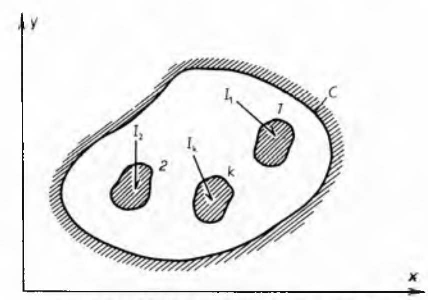
Ukoliko su frekvencije dovoljno niske, U_1 možemo zadati preko površina presjeka pojedinih vodiča, i to kao konstante. Možemo zaključiti da će unutar promatranog područja broj različitih konstanti U_1 bez obzira na broj vodiča odgovarati broju faza.

Treba uočiti da za sustave ravnih vodiča funkcija K ima oblik $-K_0 \cdot \ln(\vec{\varrho},\vec{\varrho}\,')$, gdje je K_0 pozitivna konstanta. Kompleksna konstanta U_1 zadana je za svaki vodič, bilo neposredno bilo uvjetom

$$\int_{S_i} J(\vec{\varrho}\,')\,\mathrm{d}S' = \varkappa \int_{S_i} [U_1 - \mathrm{j}\,\mu\,\vec{A}(\vec{\varrho}\,')]\,\mathrm{d}S' = I_i. \qquad (356)$$

Integracija se obavlja po površini presjeka i-tog vodiča. Približno rješavanje upotrebom integralnih jednadžbi dolazi u obzir gotovo isključivo ako je granica C računanog područja (v. sl. 126) u beskonačnosti.

Analitičko rješenje razdiobe struje moguće je u vrlo ograničenom broju slučajeva (sustavi beskonačnih ravnih paralelnih ploča, puni i šuplji usamljeni okrugli vodiči, usamljeni pravokutni vodič), a i tada se često rješenja pojavljuju u obliku beskonačnih redova, neprikladnih za praktičnu primjenu. Stoga se mora zamijeniti funkcija $J(\varrho)$ apstraktnim vektorom (jednostupačnom matricom) $[J]$ čija je svaka komponenta približna vrijednost plošne gustoće struje u nekoj točki, ili preko neke male površine područja računanja. Već je napomenuto da se integralna jednadžba upotrebljava samo za otvorene sustave, tj. s granicom u beskonačnosti.



Sl. 126. Model sustava ravnih vodiča

Sve površine presjeka vodiča podijelimo na ukupno N dionih presjeka ΔS_i. Uvedimo, zatim, pojam srednje geometrijske udaljenosti dionih površina označenih indeksima i i k s pomoću formule

$$\ln D_{ik} = \frac{1}{\Delta S_i\,\Delta S_k} \int_{\Delta S_i} \int_{\Delta S_k} \ln \varrho_{ik}\,\mathrm{d}(\Delta S_i) \cdot \mathrm{d}(\Delta S_k). \qquad (357)$$

Veličina D_{ik} ima svojstvo simetričnosti $D_{ki} = D_{ik}$ i odgovara *prosječnom* iznosu vektorskog potencijala preko jednog dionog presjeka što ga stvara struja *jednoliko* raspoređena po drugom dionom presjeku. Ako i-ta komponenta pridruženih vektora $[J]$ i $[A]$ označava prosječnu vrijednost plošne gustoće struje, odnosno vektorskog potencijala preko i-tog dionog presjeka, jedn. (355) pretvara se u oblik

$$[J] + \mathrm{j}\omega\varkappa\,[A] - \varkappa\,[U_1] = [0], \tag{358}$$

gdje je $[U_1]$ vektor s komponentama jednakim faznoj konstanti U_1 one faze kojoj pripada i-ti dioni presjek, a jednadžba (354) pretvara se u ovu:

$$[A] = [K] \cdot [J], \tag{359}$$

gdje je $[K]$ matrica $N \times N$ koja odgovara »jezgri« (*kernelu*) $K(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}')$ s članovima $K_{ik} = -K_0 \cdot \Delta S \ln D_{ik}$. Valja primijetiti da takav oblik »jezgre« uvjetuje da suma strujâ mora biti jednaka nuli. Ako taj uvjet nije zadovoljen, npr. ako je posrijedi usamljeni vodič, zamišlja se povratni vodič u obliku okruglog tankog valjka polumjera R, koji obuhvaća područje proračuna i po čijem plaštu struja teče jednoliko raspoređena. Unutar takvog valjka iznos je vektorskog potencijala konstantan i iznosi $(\mu_0/2\,\pi)\; I_{\mathrm{pov}} \cdot \ln\,(1/R)$. Najzgodnije je zamisliti da je R jednak jedinici duljine, čime su sve teškoće izbjegnute. Konačno je

$$[J] + \mathrm{j}\,\omega\,\varkappa\,[K]\,[J] - \varkappa\,[U_1] = [0]. \tag{360}$$

Jedn. (360) predstavlja u matričnom obliku napisan sustav od N jednadžbi s N kompleksnih nepoznanica. Ako vrijednosti konstanti U_1 nisu poznate, treba dodati još toliko jednadžbi koliko zadani sustav ima faza. Oblik je tih jednadžbi

$$\sum_k J_k \Delta S_k = I, \tag{361}$$

gdje je I ukupna struja faze. Općenito se sustav jednadžbi (360) i (361) može pisati

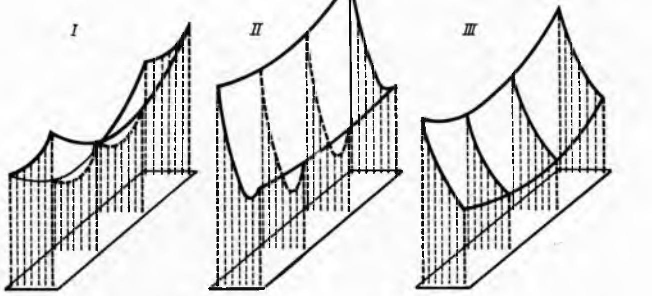
$$[M] \cdot [J'] = [S], \qquad [J'] = [M]^{-1} \cdot [S]. \tag{362 a, b}$$

$[J']$ je kompleksni vektor (jednostupčana matrica) nepoznatih plošnih strujnih gustoća produljen za nepoznate kompleksne konstante U_1, $[M]$ je matrica kompleksnih članova, a $[S]$ je poznati kompleksni vektor. Dimenzija matrice $[M]$ je $m = N + n$, gdje je N već uveden kao ukupan broj dionih presjeka, a n je ukupan broj faza.

Ako je $[M] = [A] + \mathrm{j}\,[B]$, a $[M]^{-1} = [C] + \mathrm{j}\,[D]$, vrijedi

$$[C] = \{[A] + [B]\,[A]^{-1}\,[B]\}^{-1},$$
$$[D] = -\,[A]^{-1}\,[B]\,[C],$$

pa je time određena inverzna matrica $[M]^{-1}$. Sustav (362 a, b) rješava se inverzijom dviju matrica $[A]$ i $[C]$ reda m. Pri tom se $[A]^{-1}$ može često odrediti neposredno, bez proračuna na računalu. Drugu olakšavajuću okolnost predstavlja činjenica da su sve spomenute matrice simetrične. Ipak, inverzija matrica velike dimenzije ostaje glavni problem proračuna. Na sl. 127 prikazana je raspodjela struja u trofaznom sustavu ravnih vodiča pravokutnog poprečnog presjeka.



Sl. 127. Grafički prikaz raspodjele vršnih vrijednosti struja po površinama presjeka ravnih vodiča trofaznog sustava

Rješavanje s pomoću diferencijalnih jednadžbi. Transformacijom Maxwellovih jednadžbi u *sustavu zadanog napona* problem proračuna skin-efekta u vodiču svodi se na rješavanje Helmholtzove diferencijalne jednadžbe primijenjene u dvodimenzionalnom pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \mathrm{j}\,\omega\,\mu\,\varkappa\,A = -\,\mu\,\varkappa\,U_1, \tag{363}$$

uz zadani napon po jedinici duljine U_1 i poznate rubne uvjete. Pošto se odredi A, može se računati i gustoća struje

$$J = \varkappa\,E = \varkappa\,U_1 - \mathrm{j}\,\omega\,\varkappa\,A. \tag{364}$$

Ukupna struja koja teče vodičem je tada

$$I = \int_{S_i} J\,\mathrm{d}S = \varkappa \int_{S_i} (U_1 - \mathrm{j}\,\omega\,A)\,\mathrm{d}S. \tag{365}$$

U *sustavu zadane struje* treba alternativno riješiti jednadžbu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \mathrm{j}\,\omega\,\mu\,\varkappa\,A = -\,\mu\,J_i, \tag{366}$$

pri čemu je gustoća struje iz vanjskog izvora J_i zadana. Gustoća vrtložnih struja po presjeku je

$$J_v = -\,\mathrm{j}\,\omega\,\varkappa\,A, \tag{367 a}$$

i mora zadovoljavati uvjet

$$\int_{S_i} J_v\,\mathrm{d}S = -\int_{S_i} \mathrm{j}\,\omega\,\varkappa\,A\,\mathrm{d}S = 0. \tag{367 b}$$

Diferencijalne jednadžbe Helmholtzovog tipa (363) ili (366) rješavaju se numeričkim metodama koje su opisane u idućem poglavlju ovog članka.

NUMERIČKO RJEŠAVANJE POLJA

U elektromagnetskim poljima obično je najpogodniji matematički opis problema u vidu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi oblika

$$F\varphi = g, \tag{368}$$

koje predstavljaju opći izraz fizikalnih zakona primijenjenih na probleme. Svojstva i podjela tih jednadžbi potanko su opisani u prvom poglavlju ovog članka, a ovdje ćemo nabrojiti neke koje su najčešće u upotrebi:

Laplaceova jednadžba

$$\Delta\varphi = 0, \tag{369 a}$$

Poissonova jednadžba

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \tag{370 a}$$

Helmholtzova jednadžba

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \tag{371 a}$$

difuziona jednadžba

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{372 a}$$

valna jednadžba

$$\Delta\varphi - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{373 a}$$

jednadžba elektromagnetskog potencijala

$$\Delta\varphi - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{374 a}$$

Vektorski oblici tih jednadžbi jesu:

$$\Delta\vec{A} = 0, \qquad \nabla\vec{A} = 0, \tag{369 b}$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu\,\vec{J}, \qquad \nabla\vec{A} = 0, \tag{370 b}$$

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = 0, \qquad \nabla\vec{A} = 0, \tag{371 b}$$

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla\vec{A} = 0, \tag{372 b}$$

$$\Delta\vec{A} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla\vec{A} = 0, \tag{373 b}$$

$$\Delta\vec{A} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\,\mu\,\vec{J}, \qquad \nabla\vec{A} = -\,\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{374 b}$$

Veličine φ i $\vec{A}$ (skalarni električni i vektorski magnetski potencijal) općenito su funkcije triju koordinata prostora (x_1, x_2, x_3) i vremena (t). Svojstva materijala su opisana veličinama ε, μ i $\varkappa$, a veličine ϱ i $\vec{J}$ predstavljaju gustoće električnih naboja i struja. Oznakama $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ i $\Delta\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$ označeni su skalarni i vektorski Laplaceovi operatori.

Dvodimenzionalna polja

Ograničimo razmatranja na dvodimenzionalna polja u pravokutnom pravocrtnom koordinatnom sustavu. Elektromagnetski potencijali mogu biti funkcije samo dviju prostornih koordinata: $\varphi = \varphi(x, y)$ i $\vec{A} = \vec{a}_z A(x, y)$. Gustoće izvora polja mogu se u tom slučaju definirati kao $\sigma = \sigma(x, y)$ (plošna gustoća slobodnog naboja u ravnini x, y i $\vec{J} = \vec{a}_z J(x, y)$ (plošna gustoća struje). Očito je da su na taj način obuhvaćena dvodimenzionalna cilindrična polja, tj. ona u kojima se veličine φ i $\vec{A}$ ne mijenjaju duž treće koordinatne osi z, ili ako se mijenjaju, onda na takav način da to ne utječe na raspodjelu polja u ravnini x, y. Takav je slučaj, npr., kod proračuna poprečnog polja ravnog neuniformnog transverzalnog elektromagnetskog vala koji se prostire po prijenosnoj liniji u smjeru osi z.

Sada se mogu uvesti dva važna pojednostavnjenja. Ako se uzme u obzir da su u pravocrtnom sustavu skalarni i vektorski Laplaceov operator jednostavno povezani tako da je $\triangle\vec{A} = \vec{a}_x \triangle A_x + \vec{a}_y \triangle A_y + \vec{a}_z \triangle A_z$, tada je u dvodimenzionalnim cilindričnim poljima: $\triangle\vec{A} = \vec{a}_z \triangle A$.

Usredotočimo pažnju na statička električna i magnetska polja, te na sinusno vremenski promjenljiva elektromagnetska polja (za koja se u prostoru od interesa može zanemariti retardacija). Kod prvih, statičkih polja, sve su veličine neovisne o vremenu, pa su potencijali realne funkcije koordinatâ ravnine: $\varphi = \varphi(x, y)$ i $A = A(x, y)$. Kod drugih, sinusnih polja, uvodi se eksponencijalni faktor $e^{j\omega t}$ što vodi k uvođenju kompleksnih funkcija za potencijale $\varphi(x, y) = \varphi_r(x, y) + j\varphi_i(x, y)$ i $A(x, y) = A_r(x, y) + jA_i(x, y)$, kako je to opisano u odjelu o harmoničkim poljima (str. 159). (Radi jednostavnosti ispušteno je posebno označavanje kompleksnih funkcija.)

Konačno, mogu se za potencijale φ i A, u dvodimenzionalnim statičkim i sinusno promjenljivim elektromagnetskim poljima, diferencijalne jednadžbe (369) i (374) svesti na jednadžbu oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f u + g. \tag{375}$$

To je *nehomogena Helmholtzova jednadžba* u kojoj je $u = u(x, y)$ nepoznata potencijalna realna ili kompleksna funkcija koordinatâ ravnine, f koeficijent koji može biti predstavljen realnom ili kompleksnom konstantom i čija vrijednost je nula u statičkim poljima, $g = g(x, y)$ realna ili kompleksna zadana funkcija koordinata ravnine, koja može biti i konstantna i jednaka nuli. Ova jednadžba pripada posebnoj vrsti eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Helmholtzova jednadžba (375) primijenjena na sustave cilindričnih dvodimenzionalnih statičkih i kvazistatičkih polja omogućava u proračunu električnih rotacionih strojeva i transformatora rješavanje problema povezanih s proračunom magnetskih polja generiranih istosmjernim ili sinusnim izmjeničnim strujama jednolike raspodjele, i također proračunavanje raspodjele struja, tj. skin-efekta, u vodičima i namotima strojeva i transformatorima. S pomoću jedn. (375) rješavaju se također problemi proračuna električnih polja u uređajima i aparatima u visokonaponskoj tehnici, te polja neuniformnih ravnih transverzalnih elektromagnetskih valova sinusnog oblika u prijenosnim sustavima ravnih vodiča.

Pogodno je pri rješavanju različitih složenih problema linearnih magnetskih polja opću jednadžbu (375) pisati za vektorski potencijal kao

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + F = 0, \tag{376}$$

gdje veličina F poprima različite oblike. Tako je

a) za vodič priključen na zadani napon U_1, u kojemu se uzima u obzir skin-efekt

$$F = -j\omega\mu\varkappa A + \mu\varkappa U_1, \tag{377}$$

i jednadžba (376) je nehomogena Helmholtzova jednadžba;

b) za vodič u kojemu se zanemaruje skin-efekt

$$F = \mu\varkappa U_1, \tag{378}$$

i (376) prelazi u Poissonovu jednadžbu;

c) za pasivni vodič u kojemu se induciraju vrtložne struje

$$F = -j\omega\mu\varkappa A \tag{379}$$

i (376) postaje homogena Helmholtzova jednadžba;

d) za prostor koji nije vodljiv ($\varkappa = 0$)

$$F = 0, \tag{380}$$

i (376) postaje Laplaceova jednadžba.

Eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe

Opći je oblik dvodimenzionalne linearne eliptičke diferencijalne jednadžbe ovaj:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f u + g(x, y) = 0. \tag{381}$$

Promatramo li elektromagnetsko polje u prostoru koji je ispunjen homogenim materijalom, koeficijenti u jednadžbi (381) su konstantni, pri čemu mora biti ispunjen uvjet: $a > 0$, $c > 0$.

Jednadžba (375), koja je odabrana za primjer rješavanja, samo je jedan poseban slučaj opće eliptičke jednadžbe (381), za koju su koeficijenti: $a = c = 1$, $d = e = 0$. U problemima statičkih i kvazistatičkih električnih i magnetskih polja, kada u polju nema naboja ni struja, veličine f i g iščezavaju ($f = g = 0$) i jedn. (375) prelazi u Laplaceovu jednadžbu. Ako su u takvim poljima prisutni naboji ili struje čija je raspodjela određena funkcijom $g = g(x, y)$, uz $f = 0$, jednadžba (375) prelazi u Poissonovu. U problemima skin-efekta, tj. određivanja raspodjele sinusno promjenljivih struja u sustavima ravnih vodiča, funkcije f i g općenito su različite od nule i (375) predstavlja nehomogenu Helmholtzovu jednadžbu.

Rješavanje pojedinih problema elektromagnetskih polja predstavljenih parcijalnim diferencijalnim jednadžbama oblika (375), koje pripadaju općoj jednadžbi eliptičnog tipa (381), svodi se na rješavanje tih jednadžbi uz zadovoljenje pridruženih rubnih uvjeta svojstvenih za svaki praktički problem zasebno. Rješavanje jednadžbe (375) sastoji se u pronalaženju svih ili gotovo svih mogućih rješenja jednadžbe, između kojih, zatim, treba izabrati određenu kombinaciju rješenjâ koja zadovoljava postavljene rubne uvjete za problem koji se promatra. Analitičke metode rješavanja eliptičkih jednadžbi, integralna rješenja (s pomoću *Greenovih funkcija*) i separirana rješenja (s pomoću *vlastitih funkcija*), provedive su u relativno ograničenom broju slučajeva, pa ne zadovoljavaju današnje potrebe teorije polja.

Približne numeričke metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi polja, uz upotrebu suvremenih brzih elektroničkih računala, pružaju najveće praktične mogućnosti za proračun elektromagnetskih polja. U upotrebi su dva načina numeričkog rješavanja: ***metoda konačnih razlika*** (***diferencija***) i ***metoda konačnih elemenata***. Dok se ova druga tek počela primjenjivati, metoda konačnih razlika već je široko primijenjena u rješavanju elektromagnetskih polja i bit će detaljnije opisana.

Problemi rubnih vrijednosti

Svi problemi elektromagnetskih polja koji se prikazuju eliptičkim diferencijalnim jednadžbama udruženi su s rubnim uvjetima i tako tvore probleme rubnih vrijednosti. (V. i članak *Diferencijalne jednadžbe, parcijalne*.) Rubni uvjeti imaju oblik specifikacije ponašanja rješenja u neposrednoj blizini rubne plohe, a fizikalno mogu biti uzeti kao da su ekvivalentni raspodjeli izvora po toj plohi. Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe eliptičkog tipa funkcija je koordinata točke u ravnini promatranja, ali također i komplicirana funkcionala njenih rubnih vrijednosti, rubne krivulje i koeficijenata jednadžbe.

U dvodimenzionalnim poljima govori se o rubnoj krivulji C ili jednostavno o rubu, čiji oblik mora biti propisan u svakoj zadaći. Postoje otvoreni i zatvoreni rubovi. Rub je zatvoren ako potpuno okružuje područje rješenja, čak i ako je dio ruba u beskonačnosti, a otvoren je ako se proteže prema beskonačnosti, a da rubni uvjeti nisu propisani duž dijelova u beskonačnosti. Kaže se i za područje promatranja da je zatvoreno ako mu je rub zatvoren, tj. ako je potpuno okruženo rubnim uvjetima; inače je otvoreno.

Problemi rubnih vrijednosti obično se razlikuju po prirodi rubnih uvjeta; ili varira geometrija ruba ili je propisano ponašanje polja na rubu različito. Razmotrimo prvo utjecaj ruba. Za eliptičke jednadžbe koje se rješavaju numerički, rub treba da bude zatvoren, tj. da obuhvaćeno područje promatranja u ravnini treba da ima konačnu površinu i da su u svim točkama rubne krivulje propisani odgovarajući rubni uvjeti. Oblik ruba uvjetuje i izbor koordinatnog sustava. U pravocrtnom koordinatnom sustavu u ravnini pogodno je da je zatvorena rubna krivulja sačinjena od pravaca paralelnih s koordinatnim osima.

Svakom tipu jednadžbe polja odgovara određeni skup rubnih uvjeta koji će dati jedinstvena i stabilna rješenja. Kao što je rečeno, za eliptičke jednadžbe preferirani su zatvoreni rubovi, na kojima može biti propisano nekoliko tipova rubnih uvjeta. Razlikujemo ove tipove rubnih uvjeta: *Dirichletove*, *Neumannove*, *Churchillove* i *»miješane«*. U daljem tekstu bit će ukratko opisani problemi rubnih vrijednosti za eliptičke jednadžbe udružene s nabrojenim tipovima rubnih uvjeta.

Dirichletov unutrašnji problem. Neka je S ograničeni skup točaka u ravnini čije je unutrašnje područje D jednostavno povezano i čiji je rub C regularan. Ako je $v = v(x,y)$ kontinuirana funkcija kojoj su vrijednosti propisane u svakoj točki rubne krivulje C, Dirichletov problem je taj da se odredi funkcija $u = u(x,y)$ koja je kontinuirana preko $D + C$ i definirana tako da zadovoljava jednadžbu (375) u području D i jednadžbu $u = v$ na rubu C.

Dirichletov problem daje jedinstveno i stabilno rješenje jednadžbe (375) i nema nikakvih dodatnih ograničenja s obzirom na propisivanje vrijednosti funkcije v na rubu C. Ako je zadano $v(x,y) = 0$ na rubu C, rubni uvjeti se nazivaju homogenim, za razliku od nehomogenih, kada je $v \neq 0$.

Neumannov unutrašnji problem. Ako je $v = v(x,y)$ kontinuirana funkcija propisana u svakoj točki ruba C koji obuhvaća konačno područje D, Neumannov problem je taj da se odredi funkcija $u = u(x,y)$, kontinuirana i definirana preko $D + C$, tako da u području D zadovoljava jednadžbu (375) i da se njena normalna derivacija $\partial u/\partial n$ podudara s vrijednostima funkcije v u svakoj točki ruba C ($\partial u/\partial n = v$).

Takvi problemi imaju beskonačan broj rješenja, od kojih se bilo koja dva razlikuju samo za jednu dodatnu konstantu. Da bi se dobilo jedinstveno rješenje Neumannovog rubnog problema, potrebno je propisati dodatni uvjet, tj. zadati još i vrijednost rješenja u samo jednoj točki, koja može biti u području promatranja D ili na rubu C.

Da se osigura *egzistencija* rješenja unutrašnjeg Neumannovog problema, postavljaju se za pojedine oblike jednadžbe (375) još neka dodatna ograničenja s obzirom na propisivanje vrijednosti

$$\partial u/\partial n = v(P) \text{ na } C (P \in C). \tag{382}$$

Za Laplaceovu jednadžbu, $f = g = 0$ u jedn. (375), nuždan uvjet egzistencije rješenja jest

$$\oint_C v(P)\,\mathrm{d}s = 0, \tag{383}$$

a za Poissonovu jednadžbu, $f = 0$ i $g = g(x,y)$ u jedn. (375) taj uvjet glasi

$$\oint_C v(P)\,\mathrm{d}s = -\int_D g\,\mathrm{d}S. \tag{384}$$

Helmholtzova jednadžba, $f \neq 0$ u jedn. (375), ne postavlja nikakva ograničenja u smislu propisivanja vrijednosti normalne derivacije rješenja na rubu C. Mi smo u ovom slučaju slobodni u izboru $v(P) = \partial u/\partial n$, $P \in C$.

Churchillov unutrašnji problem. Ako je $v = v(x,y)$ kontinuirana funkcija propisana u svakoj točki P rubne krivulje C, koja zatvara konačnu površinu D, Churchillov problem se sastoji u tome da se izračuna funkcija $u = u(x,y)$, kontinuirana i definirana preko $D + C$ tako da zadovoljava jednadžbu (375) na površini D i jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k\,u = v(P) \tag{385}$$

u svakoj točki od C. Rješenja problema ovog tipa su jedinstvena.

Problem »miješanih« rubnih vrijednosti. U problemima Dirichleta, Neumanna i Churchilla funkcija u ili njena normalna derivacija $\partial u/\partial n$ ili linearna kombinacija obiju bila je propisana preko cijele krivulje C koja je zatvarala područje D, u kojemu je jednadžba (375) bila zadovoljena. U problemima »miješanih« rubnih vrijednosti uvjeti različitog tipa propisuju se na pojedinim dijelovima C. U problemima ovog tipa treba odrediti funkciju $u = u(x,y)$ koja zadovoljava jednadžbu (375) u području D, i

$$u = v(P), \qquad P \in C_1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = w(P), \qquad P \in C_2, \tag{386 a, b}$$

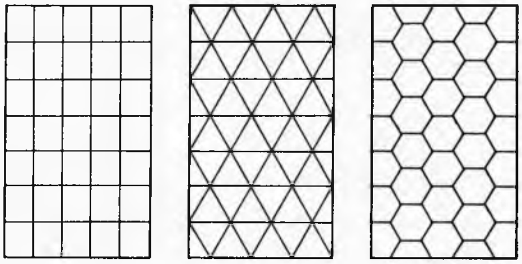
gdje je $C_1 + C_2 = C$ rubna krivulja područja D, a funkcije $v = v(x,y)$ i $w = w(x,y)$ su propisane. Problemi ovog tipa imaju također jedinstveno rješenje.

Očito je da su fizikalni zakoni, pa prema tome i parcijalne diferencijalne jednadžbe zajedno s propisanim rubnim uvjetima, samo idealizacija određene fizikalne situacije. Postoje tri kriterija koja moraju biti zadovoljena kod svakog dobro formuliranog problema rubnih vrijednosti ako on treba da reprezentira realnost. Ti kriteriji jesu: problem treba da ima rješenje (kriterij egzistencije), rješenje mora biti jedinstveno i stabilno (kriteriji jedinstvenosti i stabilnosti). Za svaki realni fizikalni problem, ako naš matematički model odgovara stvarnosti, mogu se ispravno postaviti rubni uvjeti. No ponekad ih ne znamo, a vrlo je često njihovo propisivanje zamršeno. Iako je određivanje ispravnih rubnih uvjeta, koji će dati jedinstveno rješenje, matematički problem, u mnogim praktičnim situacijama pomoći će nam fizikalno zaključivanje da postavimo ispravne rubne uvjete.

Metoda konačnih diferencija

Metoda konačnih diferencija je numerička metoda koja se primjenjuje za aproksimativno rješavanje fizikalnih problema čiji su matematički modeli problemi rubnih vrijednosti opisani u prethodnom odjeljku. Rješavanje elektromagnetskih polja metodom konačnih diferencija sastoji se od nekoliko dijelova: a) izbora odgovarajućeg sustava mreže, koji se sastoji od pravokutnih, trokutastih, ili heksagonalnih konačnih elemenata; b) pretvorbe temeljne diferencijalne jednadžbe polja (375), odn. (376), i rubnih uvjeta u skup jednadžbi konačnih diferencija, s pomoću aproksimacije Taylorovim redom; c) rješenje skupa jednadžbi konačnih diferencija, koja daju tražene veličine polja.

Izbor sustava mreže. Iz opisa metode proizlazi da se numerički proračun električnih i magnetskih polja temelji na diskretnoj predodžbi tih polja, pri čemu se upotrebljavaju konačni elementi plohe s nepromjenljivim svojstvima unutar njih. Da bi se formirali takvi elementi, treba u ravninu promatranja ucrtati mrežu. Izboru odgovarajućeg sustava mreže treba pokloniti dovoljno pažnje. Mreža može biti različitog oblika, a na sl. 128 prikazani su pravokutni, trokutasti i heksagonalni oblici koji zadovoljavaju zahtjevu da su jednadžbe diferencija za sve čvorove mreže istog oblika. Najčešće se upotrebljava pravokutni oblik;



Sl. 128. Oblici mreža: *a* pravokutna, *b* trokutasta, *c* heksagonalna

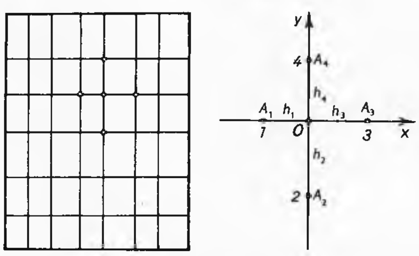
on će i ovdje biti primijenjen. Izbor oblika mreže često ovisi o geometriji polja. Treba općenito nastojati izabrati takav oblik da se sve rubne linije podudaraju s linijama mreže. Zakrivljene rubne crte zamjenjuju se stepeničastim konturama, dijelovima mreže.

Fina, tj. gušća mreža omogućava veću točnost numeričkog proračuna polja, no istodobno stavlja veće zahtjeve za prostorom u memoriji elektroničkog računala i produljuje trajanje proračuna. Kao kompromis može se izabrati fina mreža u području oko rubova, a za unutrašnje površine različitih regija u polju može se upotrijebiti grublja mreža. Kasnije će biti pokazano (v. str. 180) da izbor veličine mreže utječe i na konvergenciju procesa računanja u problemima proračuna skin-efekta.

Svojstva materijala unutar jednog elementa mreže uzima se da su konstantna, pa se tako svakom elementu pridružuje određena vodljivost i permeabilnost. Unošenjem tih podataka u memoriju računala nastaje, npr., »slika« vodljivosti polja. Alternativa je u tome da se za različite tipove rubnih čvorova (točaka) mreže upotrijebe posebne jednadžbe za proračun polja, pa da se stroj programira tako da se kontrolira položaj svakog čvora u mreži.

Jednadžba konačnih diferencija. Eliptičnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (376) Helmholtzova tipa nemoguće je eksplicitno riješiti u slučaju geometrije i rubnih uvjeta kakve susrećemo u električnim strojevima i transformatorima. Na jedan aproksimativan način moguće je tu jednadžbu transformirati u jednadžbu diferencija valjanu u skupu točaka mreže raspodijeljenih preko ravnine koja predstavlja poprečni presjek cilindričnog polja. Postupak se sastoji u tome da se u okolišu točke O (sl. 129) funkcija $A = A(x,y)$ razvije u Taylorov red:

$$A(x,y) = A_0 + \frac{1}{1!}(x - x_0)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{1!}(y - y_0)\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_0 + \\ + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{2!}(y - y_0)^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_0 + \\ + \frac{2}{2!}(x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \dots \qquad (387)$$



Sl. 129. Podjela pravokutnom mrežom (*a*), i dio mreže u okolišu točke O (*b*)

Zanemarenjem u jedn. (387) članova reda višeg od drugog i uvrštenjem tako izračunatih drugih derivacija u diferencijalnu jednadžbu (376), dobiva se njoj ekvivalentna jednadžba diferencijâ za svaku ordinarnu točku u promatranom polju, tj. algebarska jednadžba oblika

$$A_0 = \frac{F + \sum_i a_i A_i}{\sum_i a_i}, \qquad i = 1,2,3,4, \qquad (388)$$

gdje su koeficijenti a_i funkcije geometrijskog rasporeda i značajki materijala i za homogeni materijal jesu

$$a_1 = \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}, \quad a_2 = \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)}, \\ a_3 = \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)}, \quad a_4 = \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)}. \qquad (389\text{ a, b, c, d})$$

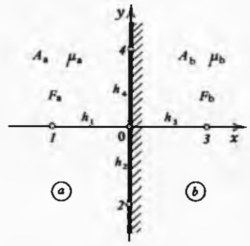
Ovaj algoritam izveden je očito uz pretpostavku linearne promjene veličine A preko elemenata mreže i pruža veliku prednost u namjeri da se pojednostavni logika računskog programa za različite tipove pravokutne mreže.

Najjednostavniji slučaj nastupa za jednoliku pravokutnu mrežu, kada je $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, pa se prema jedn. (388) i (389) dobiva

$$A_0 = \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + h^2 F). \qquad (390)$$

Jednadžba diferencija za točku na rubu. U prethodnom odjeljku izvedena je diferencijalnoj jednadžbi (376) ekvivalentna jednadžba diferencijâ (388). Ona je valjana za svaku ordinarnu točku mreže u polju u okolišu koje se svojstva materijala ne mijenjaju. Točke na rubovima zahtijevaju posebno razmatranje, jer rubni uvjeti moraju biti zadovoljeni. Stoga ćemo za nekoliko tipova rubnih točaka izvesti jednadžbe diferencijâ, koje su posebni slučajevi opće jednadžbe (388) i istodobno zadovoljavaju uvjete kontinuiteta na rubovima. Zanimljive će biti aproksimacije diferencija za rubove između dva područja, koji mogu biti npr. željezo i zrak, ili dva područja od kojih kroz jedno protječe struja, a kroz drugo ne.

Ravni rub između dva područja. Neka se dva različita homogena područja dodiruju u ravnom rubu prema sl. 130. Pretpostavit ćemo u općem slučaju da su značajke materijala ε, μ i $\varkappa$ različite i da je u svakom području druga vrijednost veličine F u jednadžbi (388), tj. F_a i F_b. Ako je odnos permeabiliteta



Sl. 130. Uz izvod algoritma za točku na rubu između dva područja

$$R = \frac{\mu_a}{\mu_b} \qquad (391)$$

i ako su na granici između dva područja zadovoljeni opći rubni uvjeti:
a) kontinuitet potencijala: $A_a = A_b$,
b) kontinuitet tangencijalnih komponenata jakosti magnetskog polja:

$$\frac{1}{\mu_a}\frac{\partial A_a}{\partial n} = \frac{1}{\mu_b}\frac{\partial A_b}{\partial n},$$

tada je za raznoliku pravokutnu mrežu algoritam potencijala

$$A_0 = \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{h_1 h_3 + h_2 h_4}\left[\frac{(A_a)_1}{h_2(R h_1 + h_3)} + \frac{(A_a)_2}{h_2(h_2 + h_4)} + \right. \\ \left. + \frac{R(A_b)_3}{h_3(R h_1 + h_3)} + \frac{(A_a)_4}{h_4(h_2 + h_4)} + \frac{R F_b h_1 + F_a h_3}{2(R h_1 + h_3)}\right]. \qquad (392)$$

Očito je da se već u tako jednostavnom slučaju dolazi do zamršenijih oblika jednadžbe (392), koje onda nastojimo što više pojednostavniti. Tako je za slučaj jednolike pravokutne mreže i za različite oblike granica između dva područja algoritam potencijala dan na sl. 131.

Rub simetrije. U poljima koja su geometrijski simetrična, linije toka (silnice) su normalne na rub simetrije, pa u točkama na rubu mora biti zadovoljen uvjet

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0. \qquad (393)$$

Rub na kojemu je iznos potencijala konstantan. U dvodimenzionalnim cilindričnim poljima, ako je primijenjen pravocrtni koordinatni sustav, linija konstantnog vektorskog potencijala, $A =$ konst, jest *silnica.* Naime, ako je $A =$ konst, tada je po toj liniji

$$\mathrm{d}A = \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}y = \mu(-H_y\,\mathrm{d}x + H_x\,\mathrm{d}y) = 0.$$

Odatle slijedi da je:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{H_x}{H_y}, \qquad (394)$$

tj. linija konstantnog vektora potencijala jest silnica u magnetskom polju.

Rub na kojemu je iznos normalne derivacije zadan. Neka je sredstvo s obje strane ruba isto i neka je iznos normalne derivacije potencijala zadan na rubu: $B_t = \pm \frac{\partial A}{\partial n}$. Ako sa A_u i A_v označimo potencijale u točkama odmah do ruba s unutarnje i s vanjske strane, potencijal je u fiktivnoj točki izvan polja

$$A_v = A_u \mp 2\,h\,B_t. \qquad (395)$$

Rub željezo—zrak. Iz općih uvjeta na granici između dva sredstva u magnetskom polju zaključujemo da na rubu željeza prema zraku moraju biti zadovoljeni odnosi:

$$\frac{1}{\mu_{Fe}}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_{Fe} = \frac{1}{\mu_{zr}}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_{zr}, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{Fe} = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{zr}. \qquad (396\text{ a, b})$$

Ako pretpostavimo da je $\mu_{Fe} \to \infty$, uvjet (396 a) postaje identičan s uvjetom (393), a rub se po svojim svojstvima ne razlikuje od ruba simetrije.

Rub zrak—vodič kroz koji protječe struja. Uvjeti na rubu definirani su kao u prethodnom slučaju, uz pretpostavku da vrijedi $\mu_v = \mu_{zr} = \mu_0$. Iz jednadžbe (396 a) slijedi

$$\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_v = \left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_{zr} \qquad (396\ c)$$

što znači da su i iznosi normalnih derivacija potencijala na rubu zrak—vodič kojim protječe struja jednaki.

Postupci rješavanja jednadžbi diferencija

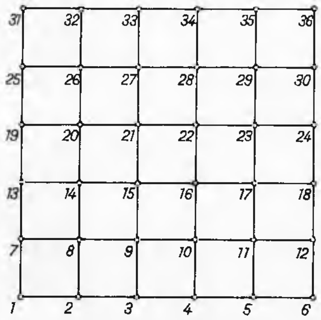
Kada su diferencijalne jednadžbe i rubni uvjeti jednom predstavljeni njihovim aproksimativnim ekvivalentima, jednadžbama konačnih diferencija, za njihovo rješavanje mogu biti primijenjene različite metode.

Vektorski potencijal u svakom čvoru mreže u polju povezan je s pomoću algoritma (388) sa potencijalima u susjednim čvorovima linearnim algebarskim jednadžbama. Broj tih jednadžbi, koje su općenito kompleksnog oblika, jednak je broju čvorova u kojima su potencijali nepoznati. Jedinstveno rješenje skupa jednadžbi diferencijâ (388) postoji, ali je problem stvarnog izračunavanja rješenja težak, jer treba simultano rješavati veliki broj jednadžbi. Rezultirajući skup jednadžbi može izravno biti složen u matričnu jednadžbu

$$[S] \cdot [A] = [C], \qquad (397)$$

gdje je $[A]$ vektor (jednostupačna matrica) nepoznatih kompleksnih vrijednosti A u čvorovima, $[C]$ odgovarajući vektor zadanih kompleksnih napona ili struja izvora, i $[S]$ matrica koeficijenata čvornih potencijala. Matrica $[S]$ sadrži koeficijente koji se izračanavaju iz jedn. (389), (392), (393), (394), (395) i (396), ili se očitaju sa sl. 131. Za polje od $(N \times M)$ točaka, matrica $[S]$ ima $(N \times M)^2$ članova. Zbog golemog broja članova matrice $[S]$, od kojih je relativno mali broj različit od nule, mnogo je lakše izračunati vektor $[A]$ iterativnim postupcima nego inverzijom matrice $[S]$.

Iterativni postupak sukcesivne nadrelaksacije. Postoji nekoliko iterativnih postupaka koji mogu biti upotrijebljeni za rješavanje matrične jednadžbe (397). Vrlo je djelotvoran iterativni postupak sukcesivne nadrelaksacije. Postupak se temelji na poopćenoj Newton-Raphsonovoj metodi, koja se upotrebljava za približno rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Primijenimo je na matričnu jednadžbu (397), koja je matrični oblik skupa jednadžbi (388) i rubnih uvjeta za sve točke u polju. Uz pretpostavku da matrica koeficijenta S nije singularna i da su joj dijagonalni elementi jedinice, što je slučaj kad su problemi polja ispravno postavljeni, može se ona rastaviti u tri matrice oblika



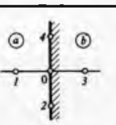
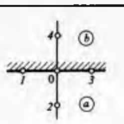
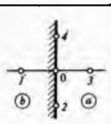
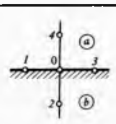
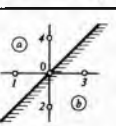
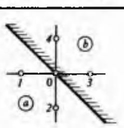
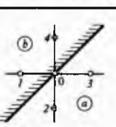
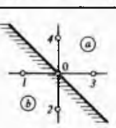
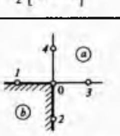
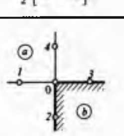
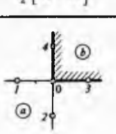
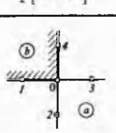
Sl. 132. Redoslijed računanja potencijala u polju s pravokutnom mrežom

$$[S] = [L] + [I] + [U], \qquad (398)$$

gdje je $[I]$ jedinična matrica, a $[L]$ i $[U]$ su donja i gornja trokutasta matrica. Tada se za rješenje jednadžbe (397) u $(n+1)$-voj iteraciji, postupkom sukcesivne nadrelaksacije, dobiva

$$[A]^{(n+1)} = [A]^{(n)} + \alpha\{-[L][A]^{(n+1)} - [U][A]^{(n)} + \\ + [C] - [A]^n\}, \qquad (399)$$

gdje je α općenito kompleksna konstanta zvana *faktor nadrelaksacije* ili *ubrzanja*. Pri upotrebi jednadžbe (399) za rješavanje izraza (397) poredak izračunavanja potencijala u točkama mreže označen je brojevima od 1 do 36 na slici 132. Tako primjenom

Položaj granice / Vrst graničnog područja				
Općenito	$\frac{1}{4}\left[\frac{2A_1}{R+1} + A_2 + \frac{2RA_3}{R+1} + A_4 + \frac{F_a + RF_b}{R+1}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + \frac{2A_2}{R+1} + A_3 + \frac{2RA_4}{R+1} + \frac{F_a + RF_b}{R+1}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[\frac{2RA_1}{R+1} + A_2 + \frac{2A_3}{R+1} + A_4 + \frac{F_a + RF_b}{R+1}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + \frac{2RA_2}{R+1} + A_3 + \frac{2A_4}{R+1} + \frac{F_a + RF_b}{R+1}h^2\right]$
$R = 1$, $F_a = 0$, $F_b = F_b$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{2}h^2\right]$
$R \to 0$, $F_a = 0$, $F_b = 0$	$\frac{1}{4}\left[2A_1 + A_2 + A_4\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + 2A_2 + A_3\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_2 + 2A_3 + A_4\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_3 + 2A_4\right]$
Položaj granice / Vrst graničnog područja				
Općenito	$\frac{1}{2(R+1)}\left[A_1 + RA_2 + RA_3 + A_4 + \frac{F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(R+1)}\left[A_1 + A_2 + RA_3 + RA_4 + \frac{F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(R+1)}\left[RA_1 + A_2 + A_3 + RA_4 + \frac{F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(R+1)}\left[RA_1 + RA_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_a + RF_b}{2}h^2\right]$
$R = 1$, $F_a = 0$, $F_b = F_b$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$
$R = 0$, $F_a = 0$, $F_b = 0$	$\frac{1}{2}\left[A_1 + A_4\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_1 + A_2\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_2 + A_3\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_3 + A_4\right]$
Položaj granice / Vrst graničnog područja				
Općenito	$\frac{1}{2(3+R)}\left[A_1(R+1) + A_2(R+1) + 2A_3 + 2A_4 + \frac{3F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(3+R)}\left[2A_1 + A_2(R+1) + A_3(R+1) + 2A_4 + \frac{3F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(3+R)}\left[2A_1 + 2A_2 + A_3(R+1) + A_4(R+1) + \frac{3F_a + RF_b}{2}h^2\right]$	$\frac{1}{2(3+R)}\left[2A_1(R+1) + 2A_2 + 2A_3 + A_4(R+1) + \frac{3F_a + RF_b}{2}h^2\right]$
$R = 1$, $F_a = 0$, $F_b = F_b$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{F_b}{4}h^2\right]$
$R = 1$, $F_a = F_a$, $F_b = 0$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{3F_a}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{3F_a}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{3F_a}{4}h^2\right]$	$\frac{1}{4}\left[A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \frac{3F_a}{4}h^2\right]$
$R \to 0$, $F_a = 0$, $F_b = 0$	$\frac{1}{6}\left[A_1 + A_2 + 2A_3 + 2A_4\right]$	$\frac{1}{6}\left[2A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4\right]$	$\frac{1}{6}\left[2A_1 + 2A_2 + A_3 + A_4\right]$	$\frac{1}{6}\left[A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4\right]$
$R \to \infty$, $F_a = 0$, $F_b = 0$	$\frac{1}{2}\left[A_1 + A_2\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_2 + A_3\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_3 + A_4\right]$	$\frac{1}{2}\left[A_1 + A_4\right]$

Sl. 131. Algoritam potencijala za točku na rubu između dva područja

jednadžbe (399) na točku O u mreži, za koju vrijedi jednadžba (390), dobiva se:

$$A_0^{(n+1)} = A_0^{(n)} + \alpha\,[\tfrac{1}{4}(A_1^{(n+1)} + A_2^{(n+1)} + A_3^{(n)} + A_4^{(n)} + h^2\,F) - A_0^{(n)}]. \qquad (400)$$

Ovaj se postupak često naziva i *Liebmannovom ekstrapolacijom.*

Postoje i drugi, ne tako djelotvorni postupci iterativnog rješavanja jednadžbi oblika (397). Tako se prema *Jacobijevu* postupku rješenje dobiva algoritmom:

$$[A]^{(n+1)} = -([L] + [U])\,[A]^{(n)} + [C], \qquad (401)$$

a po *Gauss-Seidelovu* postupku

$$[A]^{(n+1)} = -[L]\,[A]^{(n+1)} - [U]\,[A]^{(n)} + [C]. \qquad (402)$$

Ispitivanje faktora nadrelaksacije. Ispitivanju ovog za konvergenciju iterativnog postupka veoma važnog faktora poklanja se veoma mnogo pažnje. Pokazalo se svrsishodnim utvrditi, makar i približno, iznos optimalnog faktora nadrelaksacije α_0, s pomoću kojeg se uz najmanji broj iteracija postiže željena točnost potencijalâ prema jedn. (399). Konvergencija procesa je najbrža. Postoji nekoliko načina da se pokuša odrediti optimalni α_0. Tako se on može računati iz izraza

$$\alpha_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}, \qquad (403)$$

gdje je μ vlastita vrijednost Jacobijeve matrice koja se dobiva iz jedn. (398):

$$[J] = [U] + [L]. \qquad (404)$$

Kako je analitičko određivanje faktora nadrelaksacije zamršeno, jer vodi kod određivanja vlastite vrijednosti μ na rješavanje matrica, u praksi se često pomažemo približnim postupcima. Može se primijeniti postupak sukcesivnog približavanja optimalnoj vrijednosti faktora nadrelaksacije praćenjem toka iterativnog procesa s pomoću *vektora pomaka* $[\delta]^{(n)}$. Vektor pomaka definira se kao

$$[\delta]^{(n)} = [A]^{(n)} - [A]^{(n-1)}, \qquad (405\,a)$$

a norma se vektora pomaka uvodi kao

$$||\delta|| = \left[\sum_{i=1}^{N} (\delta)^p\right]^{1/p}. \qquad (405\,b)$$

N je ukupni broj točaka u polju, a p se uzima jednako ili 1, ili 2, ili ∞, već prema tome da li se računa linearna, euklidska ili maksimalna norma. Često je i ovaj način praćenja neprikladan, pa je za manje probleme polja iskustvo pokazalo da se α_0 može odabrati pokušavanjem, imajući na umu da realna vrijednost faktora nadrelaksacije varira u granicama $1 \leqq \alpha \leqq 2$.

Ispitivanjem i analizom utvrđeno je da se za rubne probleme polja Dirichletova, Neumannova ili miješanog tipa u polju pravokutne geometrije sa $(M \times N)$ točaka mreže može u jednadžbi (403) vlastita vrijednost μ računati prema jednadžbi

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{M} + \cos\frac{\pi}{N}\right), \qquad (406)$$

ako polje ima samo realnu komponentu. Također je utvrđeno da se u kompleksnim poljima jednadžba (406) može primijeniti u obliku

$$\mu = \frac{1}{2 + \mathrm{j}\,k_2}\left(\cos\frac{\pi}{M} + \cos\frac{\pi}{N}\right), \qquad (407)$$

pa se s tako izračunatim μ može iz jedn. (403) odrediti optimalni faktor nadrelaksacije. Uz $k_2 \leqq 0{,}1$ može se uzeti da je α_0 izračunat iz jedn. (407) i (403) zaista optimalan. Ako je $k_2 > 0{,}4$, proces računanja je divergentan. Ovaj se faktor računa prema formuli $k_2 = 2(h/d)^2$, gdje je h širina mreže, a d dubina prodiranja polja prema jedn. (343). Sigurno je da se i vrijednosti faktora nadrelaksacije moraju nalaziti u određenim granicama, da bi dobivena rješenja zadovoljavala jednadžbu (397). Da bi se dobila rješenja za potencijal koja bi u gubicima zbog skin-efekta imala točnost od $p \approx 1\%$, potrebno je da se odabere mreža sa

$$h \leqq 0{,}2\,d, \qquad (408)$$

što odgovara koeficijentu $k_2 \leqq 0{,}08$. Za te vrijednosti koeficijenta k_2 njegov je utjecaj na α neznatan, pa se optimalni faktor α_0 može računati prema jedn. (406) i (403) i u problemima skin-efekta. Iskustvo pokazuje da nije potrebno odabirati h mnogo manje od 0,2 d.

Još se jedan zaključak nameće. Pri proračunu skin-efekta u bakrenim vodičima, uvažavajući fizikalni uvjet (408), razmaci u mreži (na frekvenciji 50 Hz) ne bi smjeli biti veći od 2 mm. Ako je broj točaka u polju ograničen brzinom ili kapacitetom memorije stroja na, primjerice, 4000···5000 točaka, tada je najveća površina presjeka vodiča koja se može izračunati $\sim$2 dm². Jasno je da tog ograničenja nema za polja gdje se skin-efekt ne uzima u obzir.

Dodatno ubrzanje i praćenje konvergencije

U cijelom numeričkom postupku rješavanja problema polja najviše se vremena rada elektroničkog računala utroši za rješavanje konačnog skupa jednadžbi diferencijâ. Stoga su znatni napori učinjeni da se pronađu postupci za ubrzanje konvergencije iterativnih metoda. Sva dosadašnja istraživanja su pokazala da su glavnim uzrokom vrlo spore konvergencije, ili pojave oscilacije, ili, pak, divergencije iterativnog postupka: a) velike razlike u permeabilitetu na rubu željezo—zrak, koji je uključen u polje, unatoč činjenici da se za željezo u pogledu ovisnosti $B = B(H)$ uzima da je linearno; b) ovisnost permeabiliteta o indukciji $\mu = \mu(B)$, u problemima u kojima se za željezo uzima da je nelinearno; c) postojanje singulariteta u polju, tj. područja s diskontinuirano raspodijeljenom gustoćom struje (domena primjene Poissonove i Helmholtzove jednadžbe).

Postoji nekoliko načina da se konvergencija dodatno pospješi:

a) Postupak »forsiranja« polja. Postavljaju se različiti pogodni fizikalni uvjeti da bi se konvergencija potencijala ubrzala korekcijom izvora u polju.

b) Blok-relaksaciona tehnika. Temelji se na fizikalnim principima, tj. na primjeni Ampèreova kružnog zakona.

c) Linijska iteraciona tehnika. Svi potencijali na jednoj liniji računaju se iz potencijalâ dviju susjednih linija mreže.

Numeričko rješenje jednadžbi diferencija sukcesivnom nadrelaksacijom nikad nije egzaktno. U većini problemâ polja rezultati, koji su aproksimacija točnih rezultata, zadovoljavaju ako se zna koliko su oni blizu egzaktnim rezultatima. To svojstvo iterativnih rješenja naziva se konvergencijom. Teško je pitanje kako mjeriti kvalitet približnog rješenja, kako utvrditi kriterij konvergencije. Postoji nekoliko kriterija za praćenje konvergencije: normom vektora pomaka, s pomoću gubitaka vrtložnih struja, s pomoću Ampèreova zakona.

Praćenje konvergencije normom vektora pomaka. Za tu svrhu koristan je pojam norme vektora pomaka, uveden jedn. (405 a, b). Tokom iterativnog procesa on mora težiti nuli. Tako se može propisati po volji mala količina ε, pa kad je ispunjen uvjet

$$||\delta|| \leqq \varepsilon, \qquad (409)$$

proces računanja se zaustavlja. Obično se propisuje $\varepsilon = 0{,}1\%$. Smatra se da je takav način zaustavljanja iterativnog procesa obično nesiguran i zbog toga se rjeđe primjenjuje.

Praćenje konvergencije s pomoću gubitaka vrtložnih struja. Gubici su vrlo osjetljiv kriterij praćenja konvergencije procesa računanja. Često se za praćenje toka proračuna gubitaka upotrebljava kriterij DP koji se izračunava prema formuli

$$\mathrm{DP} = (-2\,P^{(n-3)} + 9\,P^{(n-2)} - 18\,P^{(n-1)} + 11\,P^{(n)})/P^{(n-1)}, \qquad (410)$$

gdje su $P^{(n-3)}$, $P^{(n-2)}$, $P^{(n-1)}$, $P^{(n)}$ gubici uzrokovani vrtložnim strujama u četiri uzastopne iteracije.

Prema toj metodi iterativni postupak je završen kad je

$$\mathrm{DP} \leqq 5 \cdot 10^{-4} \qquad (411)$$

u dvije uzastopne iteracije.

Praćenje konvergencije s pomoću Ampèreova zakona. Prema Ampèreovu kružnom zakonu

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \sum I \qquad (412)$$

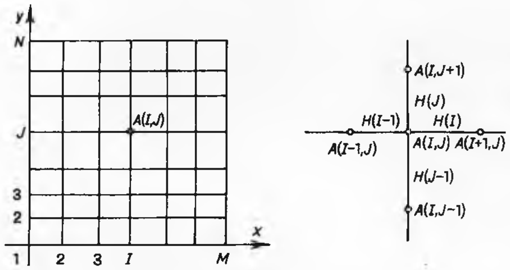
može se pratiti konvergencija procesa ako se odabere takav put integracije da se unaprijed zna kolika je struja obuhvaćena tim putom. Dovoljno je, za zaustavljanje procesa, da se uzme da je pogreška u izračunatoj struji

$$p \leqq 0{,}1\%. \tag{413}$$

Program proračuna

Algoritam potencijala (388), prilagođen točki (I, J) u polju prema sl. 133, općenito se može izraziti ovako:

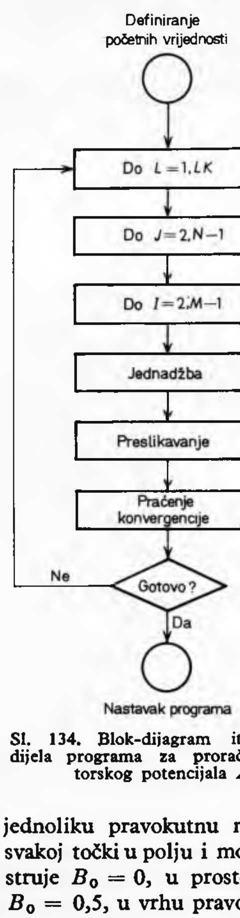
$$A(I,J) = \frac{1}{\alpha}\left[\alpha_1 A(I-1,J) + \alpha_2 A(I,J-1) + \right.$$
$$\left. + \alpha_3 A(I+1,J) + \alpha_4 A(I,J+1) + F\right]. \tag{414}$$



Sl. 133. Obilježavanje točaka mreže u FORTRAN-u. *a* Mreže polja, *b* okoliš točke (I, J)

Na sl. 131 dane su također odgovarajuće jednadžbe za različite rubne slučajeve. Da bi se izbjegao veliki broj različitih jednadžbi koji bi se na taj način dobio (što bi u daljem postupku kompliciralo program proračuna), pogodno je jednadžbu (388) i sve rubne jednadžbe izraziti samo jednom jednadžbom oblika

$$A_0 = \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_0 h^2 F), \tag{415}$$

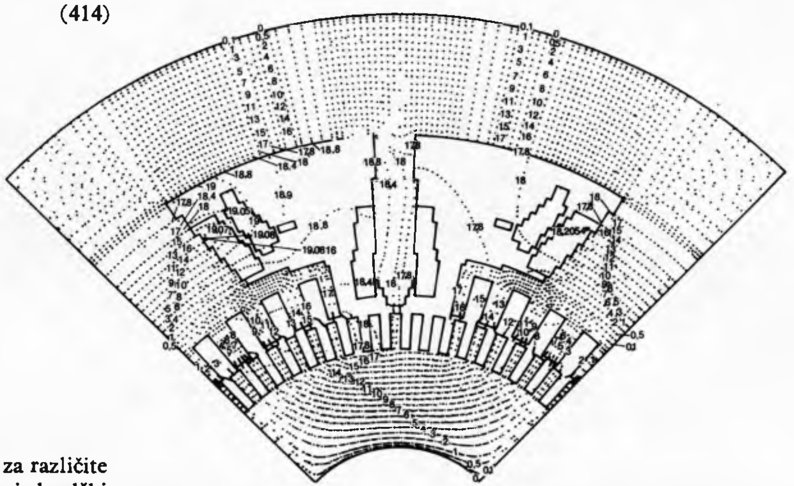


Sl. 134. Blok-dijagram iterativnog dijela programa za proračun vektorskog potencijala A

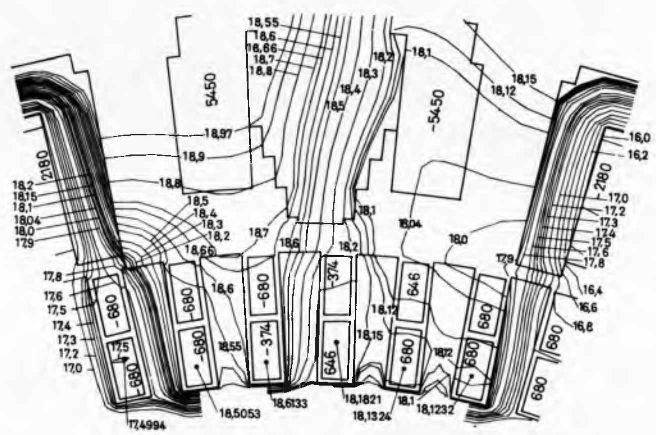
koja vrijedi za jednoliku pravokutnu mrežu. B_0 je koeficijent koji se pripisuje svakoj točki u polju i može poprimiti vrijednosti: u prostoru bez struje $B_0 = 0$, u prostoru sa strujom $B_0 = 1$, na ravnom rubu $B_0 = 0{,}5$, u vrhu pravokutnog ruba $B_0 = 0{,}25$.

Na rubu između zraka i željeza, za koje se pretpostavlja da ima $\mu_{Fe} = \infty$, može se preslikati točka u zraku do ruba u točku u željezu. Prema tome problem jednadžbi na granici sa $\mu = \infty$ može se riješiti proširenjem mreže za po jednu liniju, na kojoj se uzima da su vrijednosti potencijala A jednake potencijalima u simetrično smještenim točkama u polju. Opet se može upotrijebiti jednadžba (415). Isto vrijedi i za rub simetrije.

Na sl. 134 prikazan je blok-dijagram iterativnog dijela programa za slučaj kad je cijelo polje obuhvaćeno jednom jednadžbom (415). Dijagram je vrlo pojednostavnjen, pa nisu upisana nikakva ubrzanja procesa iteracije koja su normalno primijenjena.



Sl. 135. Raspodjela nelinearnog magnetskog polja pod jednim polnim korakom u istosmjernom električnom stroju, prikazana linijama A = konst



Sl. 136. Detalj raspodjele toka u komutacionoj zoni istosmjernog stroja pod punim teretom

Rezultati numeričkog proračuna nelinearnog magnetskog polja u poprečnom presjeku istosmjernog električnog stroja. pod jednim polnim korakom, prikazani su na slikama 135 i 136.

Z. Haznadar

LIT.: *J. C. Maxwell*, A treatise on electricity and magnetism I, II, New York 1891. — *M. I. T.*, Electric circuits, New York 1940. — *G. Mie*, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Stuttgart 1941. — *J. A. Stratton*, Electromagnetic theory, New York 1941. — *M. I. T.*, Magnetic circuits and transformers, New York 1943. — *M. Matanović*, Splošna elektrotehnika I, Ljubljana 1950. — *E. Weber*, Electromagnetic fields I, New York 1950. — *L. R. Nojman, P. L. Kalantarov*, Teoriski osnovi elektrotehnike I, II, III, Beograd 1951—52. — *F. Ollendorff*, Berechnung magnetischer Felder, Wien 1952. — *P. M. Morse, H. Feshbach*, Methods of theoretical physics I, II, New York 1953. — *E. Verč*, Zapiski iz predavanj V. A. Koželja Osnove elektrotehnike, Ljubljana 1955. — *K. Küpfmüller*, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Berlin 1955. — *J. Lončar*, Osnovi elektrotehnike 4. izd., Zagreb I 1956, II 1958. — *А. В. Нетушил, К. М. Поливанов*, Теория электромагнитного поля, Москва 1956. — *Б. А. Телешев*, Электротехника, Москва 1956. — *G. F. Corcoran, H. R. Reed*, Introductory electrical engineering, New York 1957. — *K. Küpfmüller*, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Berlin 1959. — *H. E. Duckworth*, Electricity and magnetism, New York 1960. — *J. M. Ham, G. R. Slemon*, Scientific basis of electrical engineering, New York 1961. — *R. F. Harrington*, Time — Harmonic electromagnetic fields, New York 1961. — *R. V. Langmuir*, Electromagnetic fields and waves, New York 1961. — *P. Moon, D. E. Spencer*, Field theory for engineers, New York 1961. — *G. Oberdorfer*, Lehrbuch der Elektrotechnik, München '1961. — *R. Plonsey, R. E. Collin*, Principles and applications of electromagnetics fields, New York 1961. — *D. R. Corson, P. Lorrain*, Introduction to electromagnetic fields and waves, San Francisco 1962. — *E. Hallen*, Electromagnetic theory (prijevod sa švedskog), London 1962. — *K. Lunze, E. Wagner*, Einführung in die Elektrotechnik, Berlin ²1962. — *K. J. Binns, P. J. Lawrenson*, Analysis and computation of electric and magnetic field problems, Oxford 1963. — *M. Javid, P. M. Brown*, Field analysis and electromagnetics, New York 1963. — *F. W. Sears*, Elektricitet i magnetizam (prevod s engleskog), Beograd 1963. — *N. Tralli*, Classical electromagnetic theory, New York 1963. — *J. van Bladel*, Electromagnetic fields, New York 1964. — *D. S. Jones*, The theory of electromagnetism, Oxford 1964. — *M. N. Ranojević*, Osnovi elektrotehnike, Beograd 1964. — *К. Шимони*, Теоретическая электротехника, Москва 1964. — *Б. И. Спасский*, История физики I, II, Москва 1964. — *W. L. Weeks*, Electromagnetic theory for engineering applications, New York 1964. — *S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer*, Fields and waves in communication electronics, New York 1965. — *J. Surutka*, Elektromagnetika, Beograd 1965. — *R. S. Elliott*, Elektromagnetics, New York 1966. — *Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян*, Теоретические основы электротехники, Москва 1966. — *H. A. Romanowitz*, Electrical fundamentals and circuit analysis, New York 1966. — *E. Phillipow*, Taschenbuch der Elektrotechnik I, II, Berlin 1968 i 1966. — *E. U. Condon, H. Odishaw*, Handbook of physics, New York 1967. — *A. Haug*, Grundzüge der Elektrotechnik, München 1967. — *J. D. Jackson*, Classical electrodynamics, New York 1967. — *F. Jelaković*, Uvod u elektrotehniku i elektroniku, Zagreb 1967. — *V. Bego*, Mjerenja u elektrotehnici, Zagreb 1968. — *P. Silvester*, Modern electromagnetic fields, New York 1968. — *W. R. Smythe*, Static and dynamic electricity, New York 1968. — *V. Pinter*, Osnove elektrotehnike I, Zagreb 1970. — *T. Bosanac*, Teoretska elektrotehnika I, Zagreb 1973.

Z. Haznadar V. Pinter

ELEKTROTERMIJA, grana nauke i tehnike koja obrađuje probleme pretvaranja električne energije u toplotu. Proučava principe, procese, načine i postupke zagrevanja te se bavi konstrukcijom i primenom električnih grejala (peći) i drugih pomoćnih i pratećih uređaja. Električno zagrevanje se primenjuje u industriji, građevinarstvu, brodarstvu (v. *Brodska elektrotehnika*, TE 2, str. 521), poljoprivredi, medicini (terapeutska i kirurška dijatermija, v. *Medicinski aparati*) i domaćinstvu (v. *Električni kućanski strojevi*, TE 4, str. 100).

U ovom članku promatrat će se uglavnom elektrotermija u užem smislu, primenjena u metalurgiji.

Za početak razvoja elektrotermije može se uzeti 1843 godina, kada je Joule pronašao zakon pretvaranja električne energije u toplotu. Prvi patent za električno grejanje dobio je J. Y. Simpson 1859. Proučavajući vrtložne struje J. B. L. Foucault je samo godinu dana docnije (1860) učinio daljnje za elektrotermiju važno otkriće konstatujući da elektromotorne sile indukovane u provodnicima uzrokuju njihovo zagrevanje. Razumevanju tih pojava mnogo je doprinela teorija elektromagnetne indukcije (J. Cl. Maxwell 1870). Sledeći krupni koraci u razvoju elektrotermije bili su prva uspela izvedba elektrolučne peći (W. Siemens 1879) i pronalazak indukcione peći (Kjellin 1899). Najnoviji elektrotermički postupci, zagrevanje dielektričnim gubicima i mlazom elektrona, počeli su se primenjivati u praksi tek posle drugog svetskog rata.

Privredni značaj elektrotermije. U preimućstva elektrotermičkog grejanja ubraja se to što se za to potrebna električna energija vrlo ekonomičnim prenošenjem može srazmerno lako dostaviti na svako mesto i u svakom trenutku, za svaku snagu postrojenja, aparata ili uređaja, pomoću srazmerno jednostavnih sistema za napajanje, te se lako pretvara u toplotu. Utrošak električne energije lako se meri, izbor postupaka elektrotermičkog grejanja je srazmerno širok, elektrotermička postrojenja, aparati i uređaji srazmerno su jednostavni, zauzimaju malo prostora, lako se instališu i omogućavaju zagrevanje tačno određenih zona. Nadalje, tim se procesom grejanja može lako upravljati, automatizovati ga, regulisati njegov toplotni režim i pri tome postići velike toplotne stepene korisnog dejstva, faktore snage i faktore opterećenosti pogona. Takvo grejanje ne menja atmosferu u sistemima u kojima se upotrebljava, pa ni vakuum, osigurava dobre uslove rada i malo ili nikako ne deluje na atmosferu prostorija ni na okoliš.

Zbog toga, usprkos nedostacima kao što su ponekad veliki investicioni troškovi i visoka cena električne energije, elektrotermički postupci uopšte su veoma značajni za grejanje, posebno u industriji. Važnost elektrotermije u industriji može se oceniti na osnovu podataka iz tabl. 1.

Ti podaci dokazuju da su elektrotermička postrojenja vrlo krupni, a ponegde i najveći potrošači električne energije u industriji razvijenih zemalja. Zbog toga, i ne računajući sa potrošnjom domaćinskih elektrotermičkih aparata, potrošnja električne energije u elektrotermičke svrhe predstavlja uopšte najznačajniju stavku ukupne svetske potrošnje električne energije.

PROCESI PRETVARANJA ELEKTRIČNE ENERGIJE U TOPLOTU

Pretvaranje električne energije u toplotu događa se tokom četiri osnovna procesa:

1. Kretanjem električnih naboja u bilo kojem sredstvu dio kinetičke energije pretvara se sudarima sa česticama sredstva u toplotu (v. Toplinski učinak električne struje, str. 113 i 118). To je u stvari suština pojma »električni otpor materijala«, pa se on za razliku od drugih električnih otpora naziva delatni (radni, realni, »omski«) otpor. Pri tome je potpuno svejedno da li je sredstvo — trošilo — direktno uključeno u strujni krug (*zagrevanje električnim otporom*), ili promenljivo magnetno polje u njemu uslovljava pojavu električnog polja koje uzrokuje struju (tzv. *zagrevanje indukcijom*).

2. U naizmeničnom magnetskom polju sredstvo je ovisno o magnetskim svojstvima, izloženo uzastopnoj promeni magnetizovanja pa se zbog unutarnjeg deformisanja dio energije pretvara u toplotu. To je tzv. *zagrevanje magnetizovanjem.* Ako sredstvo pokazuje i magnetostrikcijska svojstva (v. Magnetostrikcija, *Elektrotehnički materijali*, str. 56) i usled titranja molekula deo se energije pretvara u toplotu. U provodljivim sredstvima dolazi do indukcije, te stvaranja toplote kao u prvom procesu.

3. U naizmeničnom električnom polju uzastopnom promenom polarizacije dielektrika deo energije pretvara se u toplotu (v. *Elektrotehnički materijali*, str. 73 i 74). To je tzv. *zagrevanje usled dielektričnih gubitaka.*

4. Naelektrisane mikro-čestice (elektroni, joni) mogu se ubrzavati električnim poljem, te usmeravati električnim ili magnetnim poljima prema nekom objektu. Sudarom će čestice većinu energije predavati objektu u obliku toplote. To je tzv. *zagrevanje mlazom čestica.*

Ovi se procesi mogu u istom postupku i međusobno ispreplitati.

Načini zagrevanja. Objekt se može zagrevati na dva načina, direktno i indirektno. Direktno se zagreva izazivanjem jednog od navedenih procesa na objektu. U tom slučaju on mora imati neka određena svojstva potrebna za proces: provodljivost, magnetna ili dielektrična svojstva itd., sve u onom području temperatura na kojima će se nalaziti.

Indirektno se zagreva objekt primanjem toplote od grejača (v. *Elektrotehnički materijali*, str. 68). Toplota se sa grejača može prenositi na tri osnovna načina (v. *Prenos topline*): 1. provođenjem (kondukcijom), tj. direktnim dodirom objekta i grejača ili preko fiksnog posrednika dobre toplotne provodljivosti, 2. prenošenjem (konvekcijom) preko posrednika u kome može doći do strujanja (i to makrostrujanja) tečnosti ili gasa, te 3. zračenjem (radijacijom) elektromagnetskih talasa u tzv. infracrvenom (IC) području (v. *Infracrvena tehnika*).

I ovi se načini prenosa toplote u praksi isprepliću, pa se nekada koristi mešovito prenošenje na dva ili sva tri načina.

Tablica 1

INDUSTRIJSKA POTROŠNJA ELEKTRIČNE ENERGIJE ZA ELEKTROTERMIJU U NEKIM ZEMLJAMA

Zemlja *Godina*		*Austrija* *1969*	*Francuska* *1969*	*Italija* *1969*	*Japan* *1962*	*Norveška* *1962*	*Jugoslavija* *1969*
Ukupna potrošnja električne energije u industrijske svrhe	GWh	9 975	69 048	63 168	63 755	16 000	11 345
Potrošnja električne energije u industrijskim elektrotermičkim postrojenjima	GWh	2 615	15 025	11 442	22 210	10 000	4 231
Potrošnja u industrijskim elektrotermičkim postrojenjima prema ukupnoj potrošnji u industrijske svrhe	%	26,2	21,7	18,1	34,5	62,5	37,2