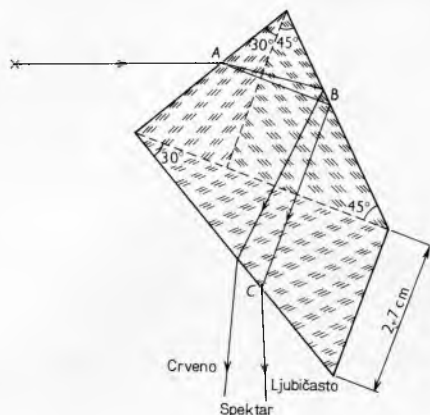


upada na disperzijsku prizmu, a pri izlazu iz nje leća L_3 fokusira snop na pukotinu P_2 , koja je smještena na ulazu kućišta K poravnjenog s nutarnje strane. Lećom L_4 stvara se povećana slika pukotine P_2 na katodi fotočelije C . Neutralno-sivi filter F apsorбира raspršeno svjetlo, a koso je položen da ne dode do višestruke refleksije.

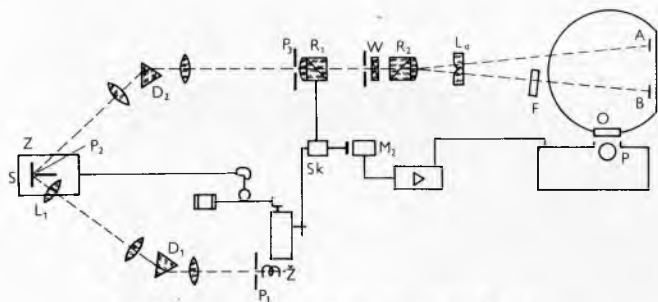


Sl. 45. Prikaz prelaza svjetla kroz prizmu konstantne devijacije

Ako se ne uspoređuju dva svjetlila nego se želi odrediti faktor transmisije nekog filtra ili otopine, stavlja se na mjesto T plan-paralelna kivieta, odnosno filter.

U novije se vrijeme sve više upotrebljavaju registracijski spektrofotometri kod kojih se s pomoću motora cijeli spektar automatski prevodi preko izlazne pukotine monokromatora, a posebnim se uređajem vodi pisaljka po izvodnici valjka koji se jednoliko okreće. Na plaštu valjka pričvršćena je papirna traka s ucrtanom mrežom. Na vremenskoj osi ubilježene su duljine vala a na ordinatnoj osi ubilježena je skala mjerene veličine.

Jedan od osobito dobro razrađenih takvih uređaja jest registracijski spektrofotometar po Hardyju, shematski prikazan na sl. 46. Tri su bitna dijela tog uređaja: dvostruki monokromator s dvije prizme po 60° , fotoelektrični fotometar s integracijskom kuglom i registracijski uređaj.



Sl. 46. Registracijski spektrofotometar po Hardyju

Žaruljom Z preko kondenzora osvjetljuje se ulazna pukotina P_1 monokromatora. Snop svjetla prolazi zatim kroz disperzijski sustav D_1 i pomoćnom lećom L_1 načini se oštra slika pukotine P_1 na zrcalu Z . Okomito na zrcalo pomiče se oštrica jedne strane pukotine P_2 , kojom se izdvaja uski dio spektralnog snopa, a taj se onda dovodi u drugi disperzijski sustav D_2 . Konačno se na izlaznoj pukotini P_3 monokromatora dobiva čista vrpca spektra od svega 10 nm širine. Pomicanjem cijelog stalka S sa zrcalom po pravcu okomitom na ravninu zrcala dovode se različiti dijelovi spektra na pukotinu P_2 .

Svjetlo iz pukotine P_3 ulazi u polarizacijsku prizmu R_1 i izlazi linearno polarizirano. Takvo svjetlo prolazi Wollastonovom polarizacijskom prizmom W , u kojoj se snop svjetla razdvaja u dva snopa međusobno okomito polarizirana, koji zatim prolaze kroz analizator R_2 i zatim se dvoćelom L_4 stvaraju povećane slike pukotine P_3 na standardnoj bijeloj površini A i na mjernoj površini B unutar integracijske kugle. Na njoj je prozorčić od opalnog

stakla O , kojemu se svjetlivosć mjeri fotočelijom P . Zakretanjem polarizatora R_1 podešava se odnos osvjettljenja na plohama A i B . Analizator R_2 smješten je u supljop osovini sinhronog motora (nije naznačen), te tako naizmjenice slabi i jača osvjettljenje na A i B . Ako se na plohi B nalazi uzorak koji selektivno apsorбира, razlikovat će se svjetljivosti A i B , pa će struja fotočelije biti naizmjenice jača i slabija, i to frekvencijom sinhronog motora. Pojačalom i preko tiratrona izmjenična komponenta struje dovodi se do balansnog motora M_2 , koji onda zakreće polarizator R_1 za određeni kut α dok se svjetljivosti površina na plohama A i B ne izjednače. Zakretanje polarizatora R_1 može se očitavati na bubnju sa skalom Sk , čije se zakretanje prenosi na pisac. Kutni zakret polarizatora uz koji nastaje izjednačenje svjetljivosti jest mjera za relativnu reflektanciju mjerene površine u odnosu na standardnu bijelu površinu. Graf registracije prikazuje onda krivulju rasporeda relativne reflektancije. U koliko se, pak, radi o određivanju krivulje rasporeda relativne transmitancije τ , stavlja se na obje plohe A i B standardna bijela površina, a u jedan snop se stavlja filter F za koji se određuje krivulja.

Suvremena nastojanja u fotometriji idu za tim da se što bolje razviju objektivne metode i da se poveća točnost mjerenja. Izrađuju se mnogostruko primjenljivi prijenosni uređaji, vrlo razrađeni spektralni fotometri ili, bolje rečeno, radiometri, jer služe i za mjerenja u ultraljubičastom i infracrvenom području zračenja.

U programu Generalne konferencije za mjere i utege za godinu 1975, Savjetodavni odbor za fotometriju postavio je i problem eventualne redefinicije jedinice «kandela» konvencionalnim fiksiranjem veličine K_m (maksimalne svjetlosne učinkovitosti).

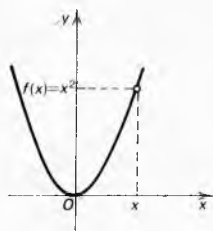
LIT.: R. Sewig, Handbuch der Lichttechnik, Berlin 1938. — W. Arndt, Praktische Lichttechnik, Berlin 1938. — A. Richter, Beleuchtungstechnik, Leipzig 1943. — Б. Ф. Федоров, Общий курс светотехники, Москва 1944. — J. O. Kraehenbuehl, Electric illumination, London 1951. — W. E. Barrows, Light, photometry, and illuminating engineering, New York 1951. — R. G. Weigl, Grundzüge der Lichttechnik, Essen 1952. — W. B. Boast, Illumination engineering, New York 1953. — B. B. Meukow, Основы светотехники, Ч. 1., Москва 1957. — J. W. T. Walsh, Photometry, London 1959. — H. Cotton, Principles of illumination, London 1960. — П. М. Тухолеев, Световые измерения в светотехнике (фотометрия), Москва 1962. — А. А. Волькенштейн, Визуальная фотометрия малых яркостей, Ленинград 1965. — H. A. E. Heitz, Lichtberechnungen und Lichtmessungen, Eindhoven 1967. — Р. А. Сапожников, Теоретическая фотометрия, Ленинград 1967. — М. М. Гуревич, Введение в фотометрию, Ленинград 1968. — М. Brezinčák, Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti, Zagreb 1971.

K. Kempni

FUNKCIJE su u modernoj matematici vrlo općeniti pojmovi i podudaraju se s pojmom preslikavanja. Neka su zadana dva skupa (bilo kakvih elemenata) X i Y i neka je zadano neko pravilo f kojim se svakom elementu $x \in X$ (znak $\in$ čita se «element od») pridružuje jedan (i samo jedan) element $y \in Y$. Kaže se tada da je pravilom f zadano preslikavanje skupa X u skup Y . Element y koji odgovara elementu x označuje se sa $f(x)$, tj. piše se $y = f(x)$. Često se kaže da je y funkcija od x , premda, strogo uzevši, to nije točno, jer je y oznaka za element skupa Y , a nije funkcija u smislu preslikavanja (nego je f funkcija koja svakom elementu x pridružuje pripadni element y). Symbol x predstavlja bilo koji element skupa X i naziva se nezavisna varijabla (promjenljiva), a y je element skupa Y i naziva se zavisna varijabla. Skup X je područje definicije funkcije, ulazni skup ili domena. Skup Y je područje vrijednosti funkcije, izlazni skup ili kodomena. Svakom x iz skupa X pridružen je, dakle, jedan (i samo jedan) element od Y , no time ne moraju biti iscrpeni svi elementi od Y . Kaže se još da je funkcija uređena trojka (X, Y, f) . («Uređena» znači da je bitan poredaj u kojem su elementi X, Y, f te trojke napisani: prvi element X je područje definicije, drugi element Y je područje vrijednosti, treći element f je funkcija ili pravilo pridruživanja). Druga je uobičajena oznaka $f: X \rightarrow Y$ (tj. f je preslikavanje skupa X u skup Y) ili samo f , zatim $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, $f(x) \in Y$ (tj. elementu x je pridružen element $f(x)$, x je element od X , $f(x)$ je element od Y) ili samo $x \mapsto f(x)$, a u starijoj literaturi često se piše $y = f(x)$ ili samo $f(x)$. Element x se zove original, a pridružen element $f(x)$ je njegova slika. Ako je npr. područje definicije i područje vrijednosti skup realnih brojeva R , i ako se svakom realnom broju pridruži njegov kvadrat, onda se za tu funkciju piše $x \mapsto x^2$, $x \in R$, $x^2 \in R$, ili samo $x \mapsto x^2$ (kad je jasno o kojem

se području definicije i području vrijednosti radi). U starijoj oznaci pisalo bi se $y = x^2$ što je ujedno jednadžba grafa te funkcije ako se x i y interpretiraju kao pravokutne koordinate (sl. 1). Grafički prikaz, kraće graf, ove funkcije je parabola. Općenito se pod grafom funkcije razumijeva skup uređenih parova $(x, f(x))$, dakle skup $F = \{(x, f(x)) : x \in X, f(x) \in Y\}$. (Čitaj: F je skup parova $(x, f(x))$ gdje je x element od X , $f(x)$ element od Y .) Pri tom se više ne mora misliti na neku sliku u ravni kao što je to bilo u gornjem primjeru.

Da se izbjegne pojam »pravila« pri druženju (što je logički čistije), može se definicija funkcije nešto preudisati pomoću pojma kartezijskog produkta. $X \times Y$ dvaju skupova X i Y . Pod tim produktom razumijeva se skup uređenih parova (x, y) gdje je $x \in X, y \in Y$, tj. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Funkcija $f : X \rightarrow Y$ može se tada shvatiti kao podskup kartezijskog produkta $X \times Y$, dakle kao skup $F \subseteq X \times Y$ (znak $\subseteq$ znači »sadržan u«) sa svojstvom da za svaki $x \in X$ postoji jedan i samo jedan $y \in Y$, takav da je $(x, y) \in F$.



Sl. 1. Grafički prikaz funkcije $x \mapsto x^2$ u pravokutnom koordinatnom sustavu x, y je parabola

Jednakost funkcija. Dvije funkcije f_1 i f_2 smatraju se jednakim ako imaju isto područje definicije X i isto područje vrijednosti Y i ako za svaki $x \in X$ vrijedi $f_1(x) = f_2(x)$. Ako su X_1 i X_2 , odnosno Y_1 i Y_2 područja definicije, odnosno područja vrijednosti za funkcije f_1 i f_2 , te ako je $X_1 \subseteq X_2$ i $Y_1 \subseteq Y_2$, a za svaki $x \in X_1$ vrijedi $f_1(x) = f_2(x)$, onda se f_1 zove *restrikcija* (suženje) od f_2 , a f_2 je *ekstenzija* (proširenje) od f_1 . Ako je $Y_1 = Y_2$ (što je najvažniji slučaj), onda se restrikcija f_1 funkcije f_2 na uže područje definicije X_1 označuje sa $f_1 = f_2|_{X_1}$. Očito je uz zadani f_2 i zadani $X_1 \subseteq X_2$ restrikcija f_1 jednoznačno određena, dok obrat ne vrijedi.

Načini preslikavanja. Ako je X područje definicije preslikavanja (funkcije) $f : X \rightarrow Y$ i A podskup od X , tj. $A \subseteq X$, onda se pod slikom $f(A)$ skupa A razumijeva skup svih slika $f(x)$ za koje je $x \in A$. Inverzna slika ili original skupa $B \subseteq Y$ jest skup svih elemenata $x \in X$ za koje je $f(x) \in B$. Ta se inverzna slika označuje sa $f^{-1}(B)$. No pojedini elementi od Y mogu imati više originala pa stoga f^{-1} kao inverzno pridruženje elemenata ne bi bila funkcija jer nije jednoznačno. Time je općenito elementu $y \in Y$ pridružen podskup od X . Stoga, promatra li se partitivni skup skupa X , tj. skup podskupova od X , koji se označuje sa 2^X , onda se inverzno pridruženje f^{-1} može shvatiti kao funkcija $f^{-1} : Y \rightarrow 2^X$, pri čemu se onim elementima od Y koji nemaju originala u X (ako takvih ima) može pridružiti prazni skup $\emptyset$ (tj. skup bez elemenata) koji je također podskup od X , dakle element od 2^X .

Ako su pri preslikavanju skupa X u skup Y iscrpeni svi elementi od Y , tj. svaki element od Y ima (barem jedan) original, onda se kaže da je to *preslikavanje* skupa X na skup Y ili *surjekcija*. Ako u preslikavanju $f : X \rightarrow Y$ svaka slika $f(x) \in Y$ ima samo jedan original (ali svaki element od Y ne mora imati original), onda se govori o *(1,1)-preslikavanju* (čitaj: jedan-jedan preslikavanje) ili *injekcija*. Ako je preslikavanje i surjekcija i injekcija, tj. svaki element od Y ima original, i to samo jedan, onda se govori o *obostrano jednoznačnom preslikavanju* ili *bijekciji*. Ako za dva skupa X i Y postoji bijekcija, onda su oni *ekvipotentni*. Klasa međusobno ekvipotentnih skupova je njihova potencija ili *kardinalni broj*. Za neki skup X bilježi se njegov kardinalni broj sa $\text{kard } X$. Za konačne skupove je to broj njihovih elemenata. Ako je $f : X \rightarrow Y$ bijekcija, onda je inverzno pridruženje također funkcija, tj. $f^{-1} : Y \rightarrow X$ koja se naziva *inverznom funkcijom* od f . I onda ako je $f : X \rightarrow Y$ injekcija, postoji inverzna funkcija f^{-1} , ali ona tada nije definirana na cijelom skupu Y , već na slici $f(X)$ skupa X , tj. na skupu $\{f(x) : x \in X\}$, dakle na skupu svih slika $f(x)$ elemenata x od X .

Složena funkcija. Ako su $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ dva preslikavanja, a $h : X \rightarrow Z$ takvo preslikavanje da za svaki $x \in X$ vrijedi $h(x) = g[f(x)]$, onda se piše $h = g \circ f$ i govori se o *kom-*

poziciji preslikavanja ili o *složenoj funkciji*. Lako se vidi da za operaciju kompozicije vrijedi zakon asocijacije $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Porodice elemenata. Mnogi matematički objekti koji su funkcije u smislu prijašnje definicije poznati su pod posebnim nazivima. Npr. preslikavanje (funkcija) $x : N \rightarrow X$, gdje je N skup prirodnih brojeva, a X bilo kakav skup, zove se *niz na skupu* X . Funkcijska vrijednost $x(n)$ bilježi se obično kao x_n i naziva se *n-tim članom* niza. Niz se označuje sa $\{x_n\}$ ili, opširnije, sa $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Nezavisna varijabla n prima vrijednosti prirodnih brojeva i zove se *indeks*. Poopćenjem pojma niza može se smatrati *porodica* (familija) elemenata iz skupa X . Naime, to je preslikavanje $\lambda \rightarrow X$ gdje je λ skup indeksa. Svakom indeksu $\lambda \in \lambda$ pridružen je jedan (i samo jedan) element $x \in X$. Kao što se niz sastoji iz elemenata skupa X koji su numerirani, tj. imaju indekse koji su prirodni brojevi, tako se porodica elemenata iz skupa X sastoji iz elemenata toga skupa koji imaju indekse, a ti su indeksni elementi nekog »skupa indeksa« (i ne moraju biti prirodni brojevi).

Svojstva funkcija. Funkcija može imati svojstvo *monotonosti* ako su područje definicije i područje vrijednosti uređeni skupovi. Najpoznatije je uređenje realnih brojeva po veličini: ako su a i b realni brojevi, onda je ili $a \leq b$ ili $b \leq a$ (ili oboje, a tada je $a = b$). Znak $\leq$ čita se »manje ili jednako«, a mjesto $a \leq b$ može se pisati $b \geq a$ (b veće ili jednako a). Ako je $a \leq b$ i $a \neq b$ (znak $\neq$ čita se »različito«), onda se piše $a < b$ (a manje od b) ili $b > a$ (b veće od a). Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija gdje su X i Y skupovi realnih brojeva. (Tada je to realna funkcija realne varijable.) Ako $x \leq x'$ povlači $f(x) \leq f(x')$, funkcija je *uzlazna* (ili raste), ako $x \leq x'$ povlači $f(x) \geq f(x')$, funkcija je *silazna* (ili pada). U oba se slučaja ona naziva *monotona*. Ako $x < x'$ povlači $f(x) < f(x')$, funkcija je *striktno* (strogo) *uzlazna*, ako $x < x'$ povlači $f(x) > f(x')$, funkcija je *striktno* (strogo) *silazna*. U oba slučaja je ona *striktno* (strogo) *monotona*. Ako je funkcija striktno monotona, onda postoji inverzna funkcija koja je također striktno monotona. Obje su funkcije striktno uzlazne ili obje striktno silazne.

Ako su elementi područja definicije X uređeni parovi brojeva (x, y) , govori se o funkciji dviju varijabli $(x, y) \mapsto f(x, y)$; ako su ti elementi uređene trojke, četvorke itd., općenito n -torke, onda se radi o funkciji triju, četiriju, ..., n varijabli.

Operacije nad funkcijama. Za realne funkcije realne varijable (ili više realnih varijabli) kojima je područje vrijednosti skup realnih brojeva R , a imaju zajedničko područje definicije, mogu se definirati operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja. Ako su f i g dvije funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, onda su funkcije $f+g, f-g, f \cdot g$ definirane sa $x \mapsto f(x) + g(x), x \mapsto f(x) - g(x), x \mapsto f(x) \cdot g(x)$. Ako je $g(x) \neq 0$ za svaki x iz područja definicije, onda se definira i dijeljenje, tj. $\frac{f}{g}$ je definirano sa $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$. Dalje

se definira množenje funkcije s realnim brojem λ , dakle $\lambda \cdot f$, sa $x \mapsto \lambda f(x)$. Za operacije zbrajanja i množenja funkcija, te za množenje funkcije s brojevima, vrijede uobičajeni zakoni komutacije, asocijacije i distribucije. To znači da vrijedi: $f + g = g + f, f \cdot g = g \cdot f, (f + g) + h = f + (g + h); (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h; (\lambda + \eta) \cdot f = \lambda \cdot f + \eta \cdot f, \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g, (\lambda \eta) \cdot f = \lambda(\eta \cdot f), \lambda \cdot f = f \cdot \lambda$.

Slično vrijedi ako se radi o funkcijama s kompleksnim funkcionskim vrijednostima i o kompleksnim brojevima kojima se funkcije množe. Isto tako se može raditi i o funkcijama kompleksne varijable.

Vektorski prostor. Ako je skup funkcija S takav da za $f, g \in S$ i svaka linearna kombinacija $\lambda f + \eta g$ tih funkcija pripada skupu S , tj. $\lambda f + \eta g \in S$ za svaka dva realna, odnosno kompleksna broja λ, η , onda taj skup S tvori *vektorski prostor*. Funkcije se pri tom nazivaju *vektorima*, a realni, odnosno kompleksni koeficijenti su *skalari*.

Načini zadavanja i vrste funkcija. Ako je preslikavanje f zadano u obliku $y = f(x)$ gdje je $f(x)$ neki izraz koji uvrštavanjem pojedinih vrijednosti x prima pripadne vrijednosti y , govori se o *eksplicitnoj* (ili eksplicitno zadanoj) *funkciji*. Ako je preslikavanje

zadano u obliku $F(x, y) = 0$, dakle kao jednačba iz koje se uz zadani x određuje pripadni y , govori se o *implicitnoj* (ili implicitno zadanoj) *funkciji*. Takva jednačba često određuje višeznačno pridruženje jer uz zadani x ima više rješenja y . Takvo višeznačno pridruženje nije funkcija u prije definiranom smislu. No, u starijoj literaturi, a ponegdje i danas, upotrebljava se i za višeznačna pridruženja izraz »funkcija» pa se tako razlikuju *jednoznačne* (monodromne, uniformne) funkcije (a to su funkcije u prije definiranom smislu) i *višeznačne* (polidromne, pluriformne) funkcije koje predstavljaju višeznačna pridruženja. Napose algebarske jednačbe, tj. izjednačenja polinoma u x i y s nulom, općenito određuju višeznačno pridruženje. Ako se one promatraju u kompleksnom području, tj. dopuštaju li se kompleksne vrijednosti za x i y , onda se može takvo pridruženje »uniformizirati», tj. učiniti jednoznačnim, upotrebom tzv. *Riemannovih ploha* (v. dalje Funkcije kompleksne varijable). Takva se ploha sastoji od više primjeraka (listova) ravnine kompleksnih brojeva i ti su listovi na određen način među sobom povezani. Na temelju algebarske jednačbe može se tada uspostaviti jednoznačno pridruženje između točaka kompleksne ravnine (ili jednog njezinog dijela) kao područja definicije (pri čemu točke predstavljaju kompleksne brojeve kao vrijednosti nezavisne varijable) i točaka višelisne Riemannove plohe. Takvo pridruženje naziva se *algebarska funkcija*. Višeznačna pridruženja dobivaju se često i onda kada se promatra inverzno pridruženje koje pripada nekoj funkciji. Npr. ako je funkcija definirana sa $y = \sin x$, onda je inverzno pridruženje beskonačno mnogoznačno i piše se $x = \text{Arc sin } y$. Ograniči li se x na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dobiva se funkcija (jednoznačno pridruženje) i piše se $x = \arcsin y$ (v. dalje Elementarne funkcije).

Specijalni su slučaj algebarskih funkcija *racionalne funkcije* (koje se mogu definirati i u realnom području) i to cijele racionalne funkcije ako se vrijednosti zavisne varijable y određuju kao vrijednosti polinoma u x , tj.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi (odnosno kompleksni brojevi ako se funkcija definira u kompleksnom području), a razlomljene racionalne funkcije ako je y određen kao vrijednost koeficijenta dvaju polinoma u x , tj.

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

Prirodno područje definicije takvih funkcija je skup realnih, odnosno kompleksnih brojeva za koje je izraz na desnoj strani smislen. Za cijele racionalne funkcije to je skup svih realnih, odnosno kompleksnih brojeva. Za razlomljene racionalne funkcije izuzete su nultočke nazivnika.

Realne funkcije realne varijable i kompleksne funkcije kompleksne varijable koje nisu algebarske nazivaju se *transcendentne funkcije*. Napose su elementarne transcendentne funkcije: potencijal s iracionalnim eksponentom, zatim trigonometrijske (ili cirkularne) funkcije, hiperbolne funkcije i njihove inverzne ciklotometrijske ili arkus-funkcije i area-funkcije, zatim su transcendentne eksponencijalna funkcija i njezina inverzna, logaritamska funkcija (v. dalje Elementarne funkcije).

Realna funkcija realne varijable zove se *neprekinuta* (neprekidna, kontinuirana) u točki x_0 (pod »točkom» misli se točka na brojevnom pravcu koja odgovara broju x_0), ako za svaki (ma kako maleni) $\varepsilon > 0$ postoji broj $\eta > 0$, da za svaki x iz područja definicije funkcije f koji pripada okolini $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ točke x_0 (tj. skupu brojeva x za koje je $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$) vrijedi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Kraće: u blizini točke x_0 funkcijske vrijednosti moraju biti blizu funkcijskoj vrijednosti $f(x_0)$, kako to ilustrira sl. 2.

Realne funkcije realne varijable definirane na nekom intervalu mogu se razvrstati prema Baireovoj klasifikaciji (koja ipak ne obuhvaća sve takve funkcije). (R. L. Baire, 1874 — 1932.) Funkcije Baireove klase 0 jesu sve neprekinute funkcije (a te se mogu predočiti kao jednoliko konvergentni redovi polinoma). Općenito su funkcije Baireove klase n one koje su predočive kao konvergentni redovi funkcija klase $< n$, a da same nisu klase $< n$.

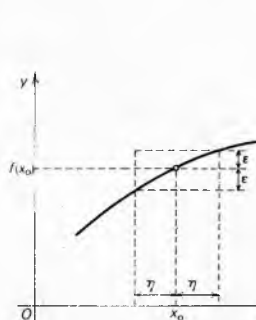
Funkcija realne varijable $x \mapsto f(x)$ derivabilna je (ili diferencijabilna) u točki x_0 , ako postoji konačan limes $f'(x_0)$ kvocijenta diferencija $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, kada h teži prema nuli (sl. 3). To znači: postoji broj $f'(x_0)$ sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\eta > 0$ takav da za $|h| < \eta$ vrijedi

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

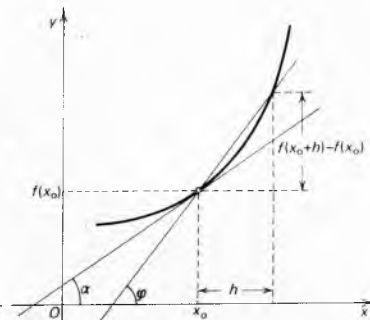
$f'(x_0)$ zove se *derivacija* funkcije f u točki x_0 . Geometrijski derivabilnost znači postojanje tangente u točki x_0 s koeficijentom smjera $f'(x_0)$. Ako je funkcija u svim točkama područja definicije derivabilna, ona se zove *glatka*.

Za funkcije kompleksne varijable definicija derivabilnosti (ili diferencijabilnosti) je analogna (v. dalje).

Među funkcijama realne, odnosno kompleksne varijable ima znatan broj onih koje su posebno važne, naročito u primjenama, i nazivaju se *specijalnim* funkcijama, npr. eliptičke, Besselove, kugline funkcije itd. (v. dalje Specijalne funkcije).



Sl. 2. Realna funkcija realne varijable je neprekinuta u točki x_0 ako su funkcijske vrijednosti u blizini x_0 blizu $f(x_0)$.



Sl. 3. Funkcija realne varijable je derivabilna u točki x_0 ako postoji konačan limes kvocijenta diferencija $f'(x_0)$, koji geometrijski ima smisao koeficijenta smjera tangente u toj točki.

Funkcionalni i operatori. Već je rečeno da se za neka preslikavanja upotrebljavaju umjesto riječi »funkcija» neki drugi nazivi (npr. »niz»). Napose se to čini kada je područje definicije skup elemenata koji su sami funkcije, npr. realne funkcije realne varijable. Ako se takvim funkcijama pridružuju (jednoznačno) brojevi, onda se to preslikavanje zove *funktional*. Npr. kada se računa duljina luka krivulje koja ima jednačbu $y = f(x)$, gdje je f derivabilna funkcija, npr. u intervalu $[0, 1]$, onda je duljina luka L dana sa

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Time je svakoj derivabilnoj funkciji definiranoj u intervalu $[0, 1]$ pridružen neki broj L i takvo preslikavanje predstavlja funkcional.

Ako je i područje vrijednosti skup funkcija (npr. kompleksne varijable), onda se preslikavanje naziva *operator*. Npr. Laplaceovom transformacijom

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$$

pridružuje se funkciji F realne varijable funkcija f kompleksne varijable. Piše li se za to

$$f = \mathcal{L}\{F\},$$

onda je $\mathcal{L}$ simbol za takav operator. No, i simbol $\frac{d}{dx}$ je operator

jer funkciji f pridružuje njezinu derivaciju f' . Općenita definicija operatora ne sadrži uvjet da su elementi područja definicije i područja vrijednosti funkcije, nego se potpuno poklapa s definicijom funkcije, odnosno preslikavanja. No, redovno se izraz operator primjenjuje kada se radi o pridruživanju funkcija funkcijama. Posebnu važnost imaju linearni operatori. Označi li se operator sa T , onda je operator linearan ako za ma koja dva broja λ i η vrijedi

$$T\{\lambda f_1 + \eta f_2\} = \lambda T\{f_1\} + \eta T\{f_2\},$$

gdje su f_1 i f_2 ma koja dva elementa iz područja definicije operatora T . Pri tom je dakako bitno da sa f_1 i f_2 i svaka linearna kombinacija $\lambda f_1 + \eta f_2$ pripada području definicije operatora, tj. da dotični skup funkcija tvori vektorski prostor.

D. Blanuša

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Pod pojmom elementarnih funkcija uobičajeno je shvaćati skup E realnih funkcija realne varijable koji sadrži slijedeće osnovne elementarne funkcije: polinome i racionalne funkcije, opće eksponencijalne funkcije, logaritamске funkcije baze a , opće potencije, trigonometrijske funkcije i inverzne funkcije koje su u vezi s trigonometrijskim funkcijama. Zatim skup E sadrži: a funkcije koje se dobiju pomoću četiriju osnovnih aritmetičkih operacija (zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja) s osnovnim elementarnim funkcijama, b funkcije koje su kompozicije od konačno mnogo osnovnih elementarnih funkcija.

Primjeri elementarnih funkcija jesu:

$$x \mapsto 3x^2 - 0,9x + 2; \quad x \mapsto \frac{5x^6 + 4x^3 + 3x - 7}{x^{14} - 2x^8 + 17x^4 - 12};$$

$$x \mapsto e^x; \quad x \mapsto 10^x; \quad x \mapsto \log x; \quad x \mapsto \ln x;$$

$$x \mapsto x^{0,13}; \quad x \mapsto \sin x; \quad x \mapsto \tan x; \quad x \mapsto \arcsin x.$$

Navedena definicija elementarnih funkcija obuhvaća i funkcije za koje se to ne bi očekivalo, npr. $x \mapsto |x|$ što se može pisati i $x \mapsto \sqrt{x^2}$.

Važan je podatak da su derivacije elementarnih funkcija elementarne funkcije, ali neodređeni integral elementarne funkcije nije nužno elementarna funkcija. Tako npr. nisu elementarne funkcije:

$$\int e^{-x^2} dx; \quad \int \cos(x^2) dx; \quad \int \sin(x^2) dx;$$

$$\text{Li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x} \quad (\text{integral-logaritam, } 0 < x \neq 1);$$

$$\text{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{integral-sinus});$$

$$\text{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (\text{integral-kosinus, } x \neq 0);$$

$$\int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = F(k, \varphi) \quad (\text{eliptički integral I vrste}).$$

Navedene funkcije su zbog važnih primjena, npr. u teoriji vjerojatnosti, vođenju topline, optici, elektrotehnici itd. dobro proučene i tabelirane.

Polinomi. Funkcija $f: R \rightarrow R$ naziva se polinom ako je za svaki $x \in R$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

gdje su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ neki odabrani realni brojevi. Ti se brojevi nazivaju *koficijenti polinoma*. Broj $a_n, a_n \neq 0$, naziva se *vodeći*, a broj a_0 *slobodni koficijent*. Ako je $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, onda se polinom f naziva *nul-polinom*. Ako je za svaki $x \in R$ $f(x) = a_0, a_0 \neq 0$, onda se polinom f naziva *konstantni* polinom i njegov je stupanj 0. Polinom je stupnja n ako je $a_n \neq 0$. Stupanj nul-polinoma se ne definira.

Neka su f i g polinomi stupnja n , odnosno m , i neka je za $x \in R$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k.$$

Polinom f jednak je polinomu g , $f = g$, onda i samo onda ako je $n = m$ i $a_k = b_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Polinomi se zbrajaju, oduzimaju i množe po pravilima elementarne algebre. Kvocijent polinoma f i g , f/g , ne mora biti polinom. Međutim, za svaka dva polinoma f i g sa $n \geq m$ jednoznačno su određeni polinomi q i r takvi da je $f = gq + r$, i da je stupanj polinoma r manji od stu-

pnja polinoma g . Ako je $r = 0$, onda je f djeljiv sa g . Ako f i g nemaju zajedničkih djelitelja različitih od konstantnih polinoma, onda se kaže da su f i g *relativno prosti* polinomi.

Polinomi su neprekidne funkcije i imaju derivacije svih redova. Ako je f polinom i $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, onda je derivacija f' polinoma $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$. Za n -tu, odnosno $n+1$ derivaciju vrijedi $f^{(n)}(x) = a_n n!$ odnosno $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Funkcije kojih se vrijednosti lako računaju jesu polinomi i racionalne funkcije i zato se koriste prilikom aproksimiranja dane funkcije. U teoretskom pogledu tu je važan Weierstrassov poučak. Naime, ako je f neprekidna realna funkcija $f: [a, b] \rightarrow R$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom $p: R \rightarrow R$ sa svojstvom da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$. Općenitiji poučak o aproksimaciji izriče se s pomoću tzv. Bernsteinovih polinoma vezanih uz danu funkciju f . Neka je dana funkcija $f: [0, 1] \rightarrow R$. Polinom

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

jest stupnja n , i to je Bernsteinov polinom. $\binom{n}{k}$ su binomni koficijenti. Očito je $B_n(0) = f(0)$, $B_n(1) = f(1)$. Ako funkcija f ima m -tu neprekidnu derivaciju, onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |B_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Posljednjom tvrdnjom izriče se da polinomi B_n uniformno aproksimiraju f , a k -te derivacije $B_n^{(k)}$ uniformno aproksimiraju derivaciju $f^{(k)}$ na intervalu $[0, 1]$.

Ako se aproksimira funkcija $f: [a, b] \rightarrow R$, onda se pojavljuje slijedeći problem. Neka su poznate točke $(x_i, f(x_i))$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) grafa funkcije f . Traži se polinom stupnja n za koji će vrijediti $p(x_i) = f(x_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), tj. da se p podudara sa f u $(n+1)$ vrijednosti. Neka je

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

onda je moguće iz jednakosti

$$f(x_i) = p(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

odrediti koficijente a_k traženog polinoma (Lagrangeov interpolacijski polinom). U praksi je čest slučaj da brojevi x_i tvore aritmetički niz, tj. $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + (n+1)h$, ili da postoji neka druga zavisnost među njima. U takvim se slučajevima za aproksimaciju funkcije f dobivaju polinomi (tzv. interpolacijski polinomi) Newtona, Stirlinga i Bessela. Umjesto da se traži polinom n -tog stupnja p_n za koji je $p_n(x_i) = f(x_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), može se tražiti polinom, npr. stupnja m , koji prolazi što »bliže« točkama $(x_i, f(x_i))$. U takvim slučajevima najčešće se susreću slijedeće dvije vrste aproksimacije:

1. Promatraju se razlike $\Delta_i = f(x_i) - \sum_{k=0}^m a_k x_i^k$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). To su odstupanja polinoma p stupnja m na mjestu x_i od funkcije f na tom mjestu. Prirodno je zahtijevati od polinoma p da $\Delta = \sum_{i=0}^n \Delta_i^2$ ima najmanju vrijednost. Uz taj uvjet metodama analize određuju se koficijenti a_k , ($k = 0, 1, 2, \dots, m$). Za tako dobiveni polinom kaže se da aproksimira funkciju f u smislu metode najmanjih kvadrata ili kraće u smislu sredine. U takvoj vrsti aproksimacije važni su trigonometrijski polinomi.

2. Traži se takav polinom p stupnja m da $d = \max_x |f(x) - p(x)|$ bude najmanji. Takva vrsta aproksimacije je već spominjana kao jednolika ili uniformna. Znatne su matematičke po-

teškoće prilikom takve aproksimacije. U vezi s tom aproksimacijom spominju se:

a) Čebiševljevi polinomi. To su npr. polinomi:

$$1, \quad x, \quad 2x^2 - 1, \quad 4x^3 - 3x, \quad 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \text{itd.}$$

Općenito za Čebiševljev polinom stupnja n vrijedi: za $|x| \leq 1$ jest

$$T_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Osnovno je svojstvo Čebiševljeva polinoma ovo: neka je p_n skup svih polinoma stupnja n s vodećim koeficijentom 1. Neka je zadani polinom p_n , $d = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_n(x)|$. Vrijednost d ovisi o polinomu p_n . Može se pokazati da d poprima najmanju vrijednost za onaj polinom za koji je

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

gdje je T_n Čebiševljev polinom. Taj se rezultat može izreći ovako: Čebiševljev polinom najbolje aproksimira nul-funkciju na $[-1, 1]$.

b) Taylorovi polinomi. Neka je zadana funkcija $f: [a, a+x] \rightarrow \mathbb{R}$ koja je neprekidna i neka postoji f' u $(a, a+x)$. Tada vrijedi Lagrangeov poučak (poučak srednje vrijednosti) $f(a+x) = f(a) + x f(a+\theta x)$, gdje je θ broj i vrijedi $0 < \theta < 1$. Općenitije vrijedi

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta x)}{n!}x^n.$$

Dobiveni polinom je Taylorov polinom funkcije f . Taylorovim polinomom funkcije f najčešće se služimo za izračunavanje vrijednosti funkcije $f(x)$ ako su poznate vrijednosti $f^{(i)}(a)$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Na primjer

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{\theta x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x}, \quad r(x) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{k=0}^n b_k x^k} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{b_m (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_i)^{k_i} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (x^2+p_jx+q_j)^{s_j}} = \sum_{k=1}^{k_1} \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \dots + \sum_{k=1}^{k_i} \frac{B_k}{(x-x_i)^k} + \sum_{s=1}^{s_1} \frac{C_s x + D_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s} + \dots + \sum_{s=1}^{s_j} \frac{E_s x + F_s}{(x^2+p_jx+q_j)^s}.$$

Ako uzmemo $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}$, onda je npr. $e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ i pogreška je manja od $\frac{1}{12}$.

Od vrlo velikog su značenja homogene linearne diferencijalne jednačbe drugog reda, $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Kao rješenja takvih diferencijalnih jednačbi pojavljuju se vrlo važni polinomi kao što su npr.

$$c) \text{ Legendreovi polinomi, } p_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad p_0 = 1.$$

$$d) \text{ Hermiteovi polinomi, } H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right),$$

$$H_0 = 1$$

$$e) \text{ Laguerreovi polinomi, } L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x e^{-x}), \quad L_0 = 1.$$

(Detaljnije o tim polinomima i njihovim svojstvima vidi dalje Specijalne funkcije.)

Racionalne funkcije. Neka su f i g polinomi. Funkcija $r = \frac{f}{g}$ naziva se racionalna funkcija. Domena funkcije r jest skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $g(x) \neq 0$. Racionalna funkcija $r = \frac{f}{g}$ smatra se jednaka racionalnoj funkciji $r_1 = \frac{f_1}{g_1}$, onda i samo ako je $f g_1 = g f_1$.

Zbrajanje i množenje racionalnih funkcija definira se na uobičajen način, tj.

$$r + r_1 = \frac{f g_1 + g f_1}{g g_1}, \quad r r_1 = \frac{f f_1}{g g_1}.$$

Za zbrajanje, odnosno množenje racionalnih funkcija vrijede pravila analogna pravilima za zbrajanje, odnosno množenje racionalnih brojeva. Primjeri racionalnih funkcija jesu funkcije izražene sa:

$$\frac{1}{x-6}, \quad \frac{3x-7}{x^2+2x+4}, \quad \frac{1}{(x-5)^3},$$

$$\frac{x^5+3x^3-x^2-7x+4}{x^3+5x-1} = x^2-2 + \frac{3x+2}{x^3+5x-1}.$$

Racionalna funkcija $r = \frac{f}{g}$ naziva se *prava* racionalna funkcija ako je stupanj polinoma f manji od stupnja polinoma g (usporediti s nazivom pravi razlomak). Ako je stupanj polinoma f veći ili jednak stupnju polinoma g , onda se dijeljenjem polinoma f s po-

linomom g može r napisati tako da vrijedi jednakost $r = h + \frac{h_1}{g}$,

gdje su h i h_1 polinomi i $\frac{h_1}{g}$ je prava racionalna funkcija. Ako su poznati korijeni polinoma g , onda će za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijediti

$$g(x) = b_m (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_i)^{k_i} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (x^2+p_jx+q_j)^{s_j},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_i + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_j) = m,$$

gdje je m stupanj polinoma g . Realni korijeni polinoma g jesu $x_1, x_2, \dots, x_i$ s pripadnim višestrukostima $k_1, k_2, \dots, k_i$. Kompleksni korijeni polinoma g jesu korijeni jednačba $x^2 + p_t x + q_t = 0$, $p_t^2 - 4q_t < 0$, ($t = 1, 2, \dots, j$), s pripadnim višestrukostima $s_1, s_2, \dots, s_j$. Prava racionalna funkcija može se napisati tako da za svaki x iz domene vrijedi

Za racionalnu funkciju r kaže se da je prikazana pomoću parcijalnih razlomaka. Primjer: treba odrediti A, C, D tako da vrijedi

$$\frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Očito mora biti

$$3x^2+x-2 = A(x^2+1) + (Cx+D)(x-1) = (A+C)x^2 + (D-C)x + (A-D).$$

Dakle mora biti

$$A+C=3, \quad D-C=1, \quad A-D=-2,$$

$$\text{tj. } A=1, \quad C=2, \quad D=3.$$

Za funkciju

$$x \mapsto \frac{2x^2+4x-5}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x-1)^2}$$

rastavljanje u parcijalne razlomke bilo bi oblika

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+x-1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+x-1)^2}.$$

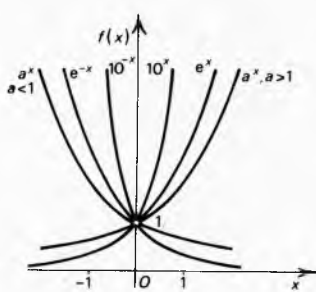
Racionalne funkcije su neprekidne funkcije. Derivacija racionalne funkcije je racionalna funkcija i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Neodređeni integral racionalne funkcije može se izraziti racionalnom funkcijom, logaritmom i funkcijom arkus-tangensa pa je stoga elementarna funkcija.

Opće eksponencijalne funkcije. Neka je dan pozitivan realan broj koji je različit od jedan, $a > 0$, $a \neq 1$. Svakim takvim brojem definirana je funkcija $f: R \rightarrow R$ za koju je $f(x) = a^x$. Takve funkcije nazivaju se opće eksponencijalne funkcije. Bitna svojstva funkcije f jesu:

1) za svaki $x \in R$, $f(x) > 0$, 2) za svaki $x, y \in R$ je $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, 3) ako je $a > 1$, onda je f strogo uzlazna funkcija, a ako je $a < 1$, onda je f strogo silazna funkcija, 4) za svaki $y_0 > 0$ postoji samo jedan x_0 takav da je $f(x_0) = y_0$. Opće eksponencijalne funkcije su neprekidne i derivabilne funkcije. Grafovi nekih općih eksponencijalnih funkcija prikazani su na sl. 4.



Sl. 4. Grafički prikazi nekih eksponencijalnih funkcija u pravokutnom koordinatnom sustavu x, y

Iznimnu važnost u matematičkoj analizi i njenim primjenama ima opća eksponencijalna funkcija kada je $a = e$, gdje je približno $e \approx 2,718\,281\,82$, ili preciznije $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Broj e je iracionalan broj, čak transcendentan broj. Ta funkcija naziva se eksponencijalna i u vezi su s tom funkcijom f i tzv. hiperbolne funkcije. To su:

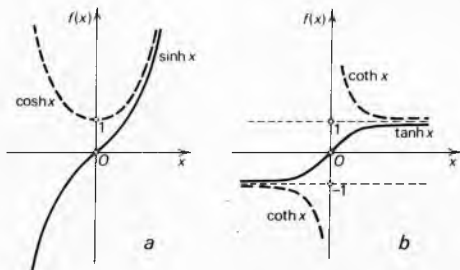
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{sinus hiperbolni}),$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{kosinus hiperbolni}),$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{tangens hiperbolni}),$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0, \quad (\text{kotangens hiperbolni}).$$

Nekada se, posebno u starijoj literaturi, hiperbolne funkcije obilježavaju sa sh, ch, th i cth. Grafovi hiperbolnih funkcija prikazani su na sl. 5.



Sl. 5. Grafički prikazi hiperbolnih funkcija

Neposredno iz definicije hiperbolnih funkcija slijede jednakosti: za svaki $x, y \in R$ vrijedi

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

Funkcije sinh, tanh, coth neparne su, a cosh je parna funkcija. Funkcije sinh i tanh su strogo uzlazne, dok je cosh strogo silazna na $(-\infty, 0)$ i strogo uzlazna na $(0, \infty)$. Funkcija coth je strogo silazna na $(-\infty, 0)$ a također i na $(0, \infty)$. Graf funkcije cosh naziva se *lančanica*. Naime, lanac učvršćen na krajevima zauzme položaj koji se prikazuje nekom cosh funkcijom.

Logaritamske funkcije baze a. To su inverzne funkcije općih eksponencijalnih funkcija. Takva funkcija zapisuje se tako da je $f(x) = \log_a x$. Neka je g pripadna opća eksponencijalna funkcija, $g(x) = a^x$. Prema tome za kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ vrijedi: za svaki $x \in R$ je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a a^x = x$, odnosno za svaki $x > 0$ je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{\log_a x} = x$. Domena funkcije $x \mapsto \log_a x$ jest skup $x \in R$, $x > 0$. Ta funkcija ima

ova svojstva: 1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ za svaki $x > 0$ i $y > 0$,

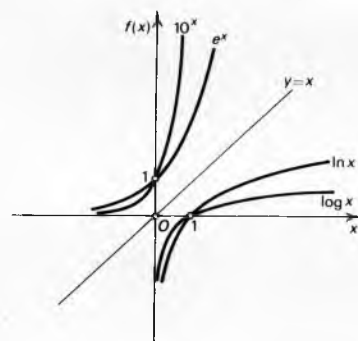
2) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, $x > 0$, 3) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, 4) $x \mapsto \log_a x$

jest strogo uzlazna funkcija za $a > 1$, a strogo silazna za $a < 1$. Od svih logaritamskih funkcija baze a najznačajnije su ove dvije: $x \mapsto \log_{10} x$ i $x \mapsto \log_e x$, tj. slučajevi $a = 10$, odnosno $a = e$. U prvom je slučaju uobičajeno pisati $\log x$ (umjesto $\log_{10} x$), a u drugom $\ln x$ (umjesto $\log_e x$). Za dani $x > 0$, $\log x$ naziva se dekadski logaritam, dok se $\ln x$ naziva prirodni logaritam. U izvjesnom smislu dovoljno je poznavati samo funkciju $x \mapsto \ln x$ jer vrijedi $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$ za svaki $x > 0$. Broj $\log_a e$ je modul logaritama baze a . Specijalno,

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x = M \cdot \ln x, \quad M = \frac{1}{\ln 10} = \log e = 0,434\,294\,481\,9,$$

$$\text{odnosno } \ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = \ln 10 = 2,302\,585\,509\,30.$$

Grafovi funkcija $x \mapsto \log x$ i $x \mapsto \ln x$ prikazani su na sl. 6.



Sl. 6. Grafički prikazi specijalnih eksponencijalnih funkcija $f(x) = 10^x$ i $f(x) = e^x$ i njihovih inverznih, logaritamskih funkcija $f(x) = \log x$ i $f(x) = \ln x$

Area funkcije. Funkcija sinh je bijekcija sa R na R . Prema tome postoji inverzna funkcija $\sinh^{-1}: R \rightarrow R$ koja se naziva area sinus hiperbolni i piše $\sinh^{-1} = \text{arsinh}$. Kako je za svaki $x \in R$ $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, odnosno $x = \sinh^{-1} y$, slijedi $2y = e^x - e^{-x}$. Množenjem sa e^x dobiva se $(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$, odnosno $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Kako je $e^x > 0$ i $y < \sqrt{y^2 + 1}$ slijedi da mora biti $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, odnosno $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Dakle, za svaki $y \in R$ je $\sinh^{-1} y = \text{arsinh } y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Analogno će biti za funkciju tanh: $R \rightarrow R$. Ta je funkcija bijekcija sa R na $(-1, 1)$, dakle, $\tanh^{-1}: (-1, 1) \rightarrow R$ i dobiva se $y = \tanh x$, $x = \tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \text{artanh } y$, tj. za svaki $y \in (-1, 1)$ vrijedi

$$\tanh^{-1} y = \text{artanh } y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Funkcija cosh je parna, dakle ona nije bijekcija i prema tome nema inverznu funkciju. Međutim, ako se promatra restrikcija te funkcije na skup svih $x, \geq 0, y \geq 1$ onda je to bijekcija na skup svih $y \geq 1$. Ta se restrikcija označava sa Cosh, a pripadna inverzna funkcija sa Cosh^{-1} . Dakle, za $y \geq 1$ vrijedi:

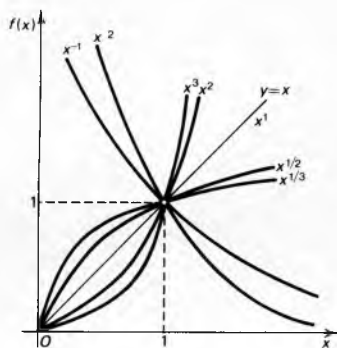
$$y = \text{Cosh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{odnosno } x = \text{Cosh}^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \text{arcosh } y.$$

Za svaki $x \neq 0$ je $y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ i $|y| > 1$. Dakle, $x = \coth^{-1} y$ za $|y| > 1$. Iz jednakosti $y = \coth x$, izlazi $e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$, odnosno $x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$, tj.

za svaki y , $|y| > 1$, vrijedi $\coth^{-1} y = \operatorname{arccoth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}$.

Funkcija $\coth^{-1}$ nije definirana jedino za $y \in [-1, 1]$.

Opća potencija. Za opću eksponencijalnu funkciju vrijedi $(a^x)^y = a^{xy}$ i za svaki $x > 0$ je $e^{\ln x} = x$. Polazeći od tih svojstava može se pomoću svakog realnog broja c definirati funkcija $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^c = e^{c \ln x}$, gdje je $\mathbb{R}^+$ skup svih $x > 0$. Funkcija f naziva se opća potencija. Osnovna svojstva takvih funkcija jesu: 1) $(xy)^c = e^{c \ln(xy)} = e^{c(\ln x + \ln y)} = e^{c \ln x} \cdot e^{c \ln y} = x^c y^c$; 2) $f(x) = x^c$ je strogo uzlazna za $c > 0$, odnosno strogo silazna za $c < 0$; 3) za svaki $y_0 > 0$ postoji samo jedan x_0 takav da je $x_0^c = y_0$. Primjeri takvih funkcija jesu: $x \mapsto x^2 = e^{2 \ln x}$; $x \mapsto x^{-0.17} = e^{-0.17 \ln x}$. Grafovi nekih općih potencija prikazani su na sl. 7. Te su funkcije neprekidne i derivabilne.



Sl. 7. Grafički prikazi nekih općih potencija

Trigonometrijske funkcije. U praksi je uobičajeno kutove izražavati stupnjevima. Tako npr. ispruženom kutu pripada 180° , pravom kutu 90° . U matematičkoj analizi za mjeru kutova upotrebljava se *radijan*. Ispruženom kutu pripada π radijana, pravom kutu $\frac{1}{2}\pi$ radijana, gdje je π približno 3,14159. Veza između tih dviju mjera dana je jednakosti $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha$ (radijana), α (radijana) = $\frac{\pi}{180} \alpha^\circ$. Tako se dobiva da vrijedi:

$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ radijana	$1'' \leftrightarrow 0,000\,005$ radijana
$180^\circ \leftrightarrow \pi$ „	$1' \leftrightarrow 0,000\,291$ „
$90^\circ \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi$ „	$1^\circ \leftrightarrow 0,017\,453$ „
$270^\circ \leftrightarrow \frac{3}{2}\pi$ „	$57^\circ 17' 44,8'' \leftrightarrow 1$ „

Neka je zadan desni pravokutni sustav $(X O Y)$, (vidi sl. 8 a) i neka je f rotacija ravnine za kut α (radijana) oko točke O (u pozitivnom smislu ako je α pozitivan). Točka $A(1, 0)$ s tom rotacijom neka se preslika u točku $A'(\alpha)$.

U odnosu na koordinatni sustav $(X O Y)$ koordinate točke $A'(\alpha)$ neka su $(\sin \alpha, \cos \alpha)$. Pod djelovanjem skupa svih rotacija oko

točke O , točka A opisuje jediničnu kružnicu sa središtem u točki O . Na taj način zapravo su definirane dvije funkcije koje nazivamo sinus, odnosno kosinus i vrijedi:

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ za svaki } \alpha \in \mathbb{R}, \sin \alpha = \text{ordinata točke } A'(\alpha),$$

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ za svaki } \alpha \in \mathbb{R}, \cos \alpha = \text{apscisa točke } A'(\alpha).$$

Nadalje se definiraju funkcije tangens i kotangens

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi.$$

Funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens nazivaju se *trigonometrijske funkcije*. To su neprekidne i derivabilne funkcije. Grafovi tih funkcija prikazani su na sl. 8 b i c.

Neposredno iz definicije funkcija $\sin$ i $\cos$ izlazi: za svaki

$$x \in \mathbb{R} \text{ vrijedi } \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \text{ Dalje je } \sin 0 = 0; \sin \frac{\pi}{2} = 1; \sin \pi = 0; \sin \frac{3\pi}{2} = -1; \sin 2\pi = 0; \cos 0 = 1; \cos \frac{\pi}{2} = 0; \cos \pi = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \cos 2\pi = 1.$$

Funkcije $\sin$ i $\cos$ su periodične funkcije, tj. vrijedi: za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Funkcije $\tan$ i $\cot$ periodične su funkcije s osnovnim periodom π , tj. $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, onda vrijede tzv. adicijski poučci:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Uvažavajući da je $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, odnosno $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, i spo-

menute adicijske poučke za $\sin$ i $\cos$ dobiva se

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}.$$

Neki odnosi za funkcije $\sin$ i $\cos$ koji se često upotrebljavaju jesu: za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

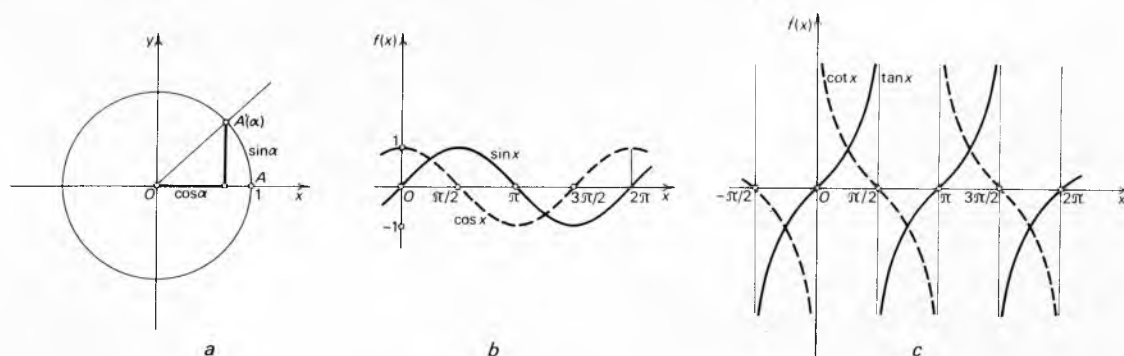
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$

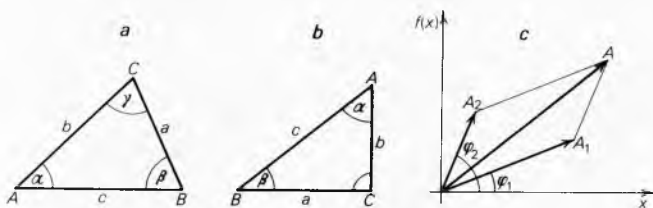
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

Iz adicijskih poučaka izlazi: za svaki $x \in \mathbb{R}$ jest $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$



Sl. 8. Trigonometrijske funkcije. a) Definiciranje funkcija sinus i kosinus na jediničnoj kružnici u pravokutnom koordinatnom sustavu, b) grafički prikaz funkcija $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$, c) grafički prikaz funkcija $f(x) = \tan x$ i $f(x) = \cot x$

$= \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. U trigonometriji trigonometrijske funkcije često služe u vezi sa stranicama i kutovima danog trokuta. Važni su sljedeći poučci: tzv. *sinusov poučak*: $2r = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, gdje je r polumjer opisane kružnice trokutu čije su stranice a, b, c , i kutovi α, β, γ ; tzv. *kosinusov poučak*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (sl. 9 a). Za površinu trokuta P vrijedi: $2P = ac \sin \beta = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha$. Za pravokutan trokut vrijedi: $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}$, $\tan \alpha = \cot \beta = \frac{a}{b}$, $\cot \alpha = \tan \beta = \frac{b}{a}$ (sl. 9 b). Sličnu primjenu imaju trigonometrijske funkcije u sfernoj trigonometriji.



Sl. 9. Primjeri primjene trigonometrijskih funkcija. a i b Oznake u trokutu za kosinusov i sinusov poučak, c vektorsko prikazivanje i zbrajanje trigonometrijskih funkcija u pravokutnom koordinatnom sustavu

Brojni su prirodni zakoni i pojave koje se opisuju funkcijama $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$, gdje je $A > 0$ amplituda, $\omega > 0$ frekvencija i φ početna faza. Takve su funkcije *periodične* s periodom

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ jer je $A \cdot \sin\left[\omega\left(\frac{2\pi}{\omega} + x\right) + \varphi\right] = A \sin(\omega x + \varphi + 2\pi) = A \sin(\omega x + \varphi)$. Zbroj funkcija $x \mapsto A_1 \sin(\omega x + \varphi_1)$, $x \mapsto A_2 \sin(\omega x + \varphi_2)$ s istom frekvencijom jest funkcija $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$, gdje je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Ako se funkcija $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$ reprezentira radijvektorom kome je duljina A i zatvara sa osi x kut φ , onda se pri takvoj reprezentaciji zbrajanje funkcija svodi na uobičajeno zbrajanje vektora (sl. 9 c).

Funkcija $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$ može se pisati tako da je

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin \varphi \cos \omega x + A \cos \varphi \sin \omega x = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

gdje je $a = A \sin \varphi$, $b = A \cos \varphi$, $a^2 + b^2 = A^2$.

Ako su T_1 , odnosno T_2 periode periodičnih funkcija f , odnosno g , onda su funkcije $f \pm g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ periodične samo u slučaju da je $\frac{T_1}{T_2}$ racionalan broj. Ako $\frac{T_1}{T_2}$ nije racionalan broj, onda $f + g$ nije periodična funkcija nego tzv. *gotovo periodična funkcija*.

Trigonometrijski polinomi. Trigonometrijski je polinom S_n funkcija $S_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je za svaki $x \in \mathbb{R}$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x).$$

To je periodična funkcija s osnovnom periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Takvi se polinomi upotrebljavaju kada se želi aproksimirati neka pe-

riodična realna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periodom T . Aproksimira se u smislu sredine (metoda najmanjih kvadrata), tj. sa zahtjevom

da S_n bude takav da vrijednost integrala $\frac{1}{T} \int_0^T [f(x) - S_n(x)]^2 dx$

bude minimalna. Upravo taj zahtjev daje koeficijente za S_n :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x \cdot dx; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x \cdot dx.$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Tako određeni koeficijenti a_k i b_k nazivaju se *Fourierovi koeficijenti* zadane funkcije f . Za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji postoji $\lim S_n = S(x)$ definirana je funkcija $x \mapsto S(x)$ za koju se kaže da je Fourierov red zadane funkcije f . Za svaku ograđenu po odsječcima neprekidnu funkciju f na $(0, T)$ njezin Fourierov red konvergira u smislu

sredine, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [f(x) - S_n(x)]^2 \cdot dx = 0$. Ako za funkciju f vri-

jedi: 1) f je po odsječcima neprekidna na $(0, T)$, 2) na intervalu $(0, T)$ f ima konačan broj maksimuma i minimuma (Dirichletovi uvjeti), onda Fourierov red funkcije f tj. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega x +$

$+ b_k \sin k\omega x]$ konvergira k funkciji f za svaki $x \in (0, T)$ za koji je f neprekidna. Za svaki x iz $(0, T)$ gdje f ima prekid, taj red konvergira k vrijednosti

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Važan je još jedan Weierstrassov poučak o uniformnoj aproksimaciji neprekidne funkcije, ali ovaj put s trigonometrijskim polinomima. Ako je $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija sa svojstvom da je $f(0) = f(T)$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom S_n ,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x],$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, takav da je $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ za svaki $x \in (0, T)$.

Ortogonalnost trigonometrijskih i drugih funkcija. Niz funkcija $1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \dots$, ima

svojstvo $\int_a^{a+T} f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0$, gdje je T perioda i gdje su f_i i f_j

bilo koje dvije različite funkcije navedenog niza i a bilo koji realan broj. Za taj niz funkcija kaže se da je ortogonalan na intervalu $[0, T]$. Analogno svojstvo imaju i nizovi nekih drugih funkcija. Na primjer, može se pokazati da vrijedi:

– za polinome Čebiševa T_m i T_n je $\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$

za $m \neq n$, odnosno $\frac{\pi}{2}$ za $m = n \neq 0$, odnosno π za $m = n = 0$.

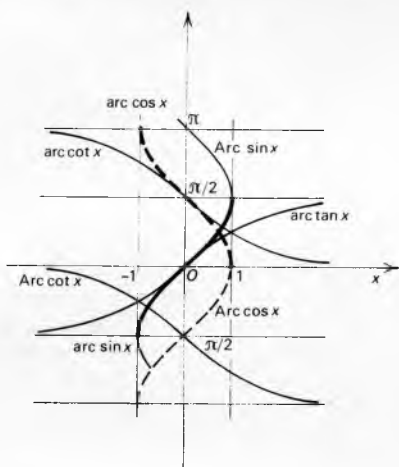
– za polinome Legendrea P_m i P_n je $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$, gdje je δ_{mn} nula ako je $m \neq n$, odnosno 1 ako je $m = n$.

– za polinome Laguerrea L_m i L_n je $\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn}$.

– za polinome Hermitea H_m i H_n je $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi} \cdot \delta_{mn}$.

(Opširnije v. dalje Specijalne funkcije.)

Arkus funkcije. Funkcija sinus je periodična funkcija. Prema tome za nju ne postoji inverzna funkcija. Ako se uzme restrikcija te funkcije na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onda je ta restrikcija monotona, striktno uzlazna neprekidna funkcija. S njom se uspostavlja bijekcija s intervala $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na interval $[-1, 1]$. Za tu restrikciju postoji inverzna funkcija koja se naziva arkus sinus i piše $\arcsin$: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, za koju vrijedi: za svaki $x \in [-1, 1]$ $\arcsin x = y$ ekvivalentno je sa $\sin y = x$. Analogno se definira funkcija arkus kosinus. Naime, restrikcija funkcije kosinus na $[0, \pi]$ je bijekcija sa $[0, \pi]$ na $[-1, 1]$. Prema tome postoji inverzna funkcija te restrikcije i to je $\arccos$ funkcija. Za svaki $x \in [-1, 1]$ $\arccos x = y$ ekvivalentno je sa $\cos y = x$. Restrikcija funkcije tangens na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je bijekcija sa $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ na $\mathbb{R}$. Dakle, za pripadnu inverznu funkciju arkus tangens vrijedi: za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $\arctan x = y$ ekvivalentno sa $\tan y = x$. Restrikcija funkcije kotangens na $(0, \pi)$ je bijekcija sa $(0, \pi)$ na $\mathbb{R}$. Pripadna inverzna funkcija je arkus kotangens i vrijedi: $\operatorname{arccot} x = y$ ekvivalentno je sa $\cot y = x$.



Sl. 10. Grafički prikaz arkus funkcija koje su inverzne trigonometrijskim funkcijama, višeznačne i označene sa Arc. Ako se ograniče unutar područja najbližeg ishodištu, gdje su jednoznačne, označavaju se sa arc (npr. $x = \sin y$ za bilo koji $x, y = \operatorname{Arc} \sin x$, ali za $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $y = \arcsin x$; itd.)

Tako će npr. biti: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos (-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$. Grafovi arkus funkcija prikazani su na sl. 10. P. Javor

FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE

Teorija funkcija kompleksne varijable proširuje diferencijalni i integralni račun sa skupa realnih brojeva (brojnog pravca) $\mathbb{R}$ na skup kompleksnih brojeva (kompleksnu ravninu) $\mathbb{C}$. Osnovni pojmovi (funkcija, limes, neprekidnost, derivacija, integral) ostaju formalno nepromijenjeni, ali se njihov sadržaj bitno mijenja. Osobito diferenciranje i integriranje dobivaju novo značenje i dubinu; u isto vrijeme funkcionalni prostor primjene ovih operacija postaje vrlo sužen. Naime, samo *analitičke funkcije*, koje tvore usku, ali centralnu klasu kompleksnih funkcija, mogu se slobodno diferencirati i integrirati.

U širem smislu, teorija funkcija kompleksne varijable je vrlo opsežan i složen dio matematičke analize. Ona obuhvaća, osim klasične teorije, koja je krajem prošlog stoljeća primila konačni oblik, brojna zasebna područja (teoriju cijelih, meromorfni, univalentnih i pseudoanalitičkih funkcija; teoriju normalnih familija, rubnih vrijednosti i rubnih problema; teoriju aproksimacije

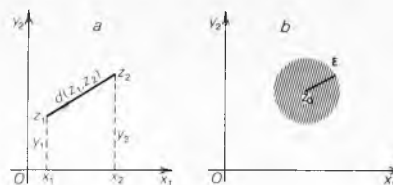
i interpolacije; probleme ekstrema; analitičke funkcije na Riemannovim ploham, analitičke funkcije s više varijabli).

Teorija funkcija kompleksne varijable usko je povezana s drugim matematičkim disciplinama. Osobito veza s funkcionalnom analizom dovela je do plodnih i važnih sinteza (npr. prostori i algebre analitičkih funkcija; rubne vrijednosti analitičkih funkcija i distribucije).

U toku prošlog stoljeća teorija funkcija kompleksne varijable bila je u središtu matematičke analize. Osnivači teorije su A. Cauchy (1789—1857), K. Weierstrass (1815—1897) i B. Riemann (1826—1866). Njihove četiri metode dominiraju: metoda kompleksnog integrala (Cauchy) i redova potencija (Weierstrass), te harmonijskih funkcija i preslikavanja (Riemann).

Povezani i čisti rezultati, široka primjena i stalna prisutnost u razvoju matematičke analize — karakteristične su crte teorije funkcija kompleksne varijable.

Skupovi točaka u ravnini. Skup C kompleksnih brojeva $z = x + iy$ koji se mogu pisati i $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ili $z = re^{i\varphi}$ identificira se sa skupom $\mathbb{R}^2$ točaka (x, y) i pomoću metrike $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ (sl. 11 a) definira izvjesne skupove specijalne strukture od vitalnog značenja za teoriju analitičkih



Sl. 11. Kompleksni broj z_1 je u pravokutnom koordinatnom sustavu jednoznačno prikazan točkom s koordinatama (x_1, y_1) . a Udaljenost između dvije točke

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

b okolina točke z_0 prikazana je u ravnini krugom polumjera ε sa središtem u z_0

funkcija (o operacijama među skupovima v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288).

Pojam okoline je fundamentalan. Skup točaka $\Delta(z_0, \varepsilon) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$ zove se ε -okolina točke z_0 (sl. 11 b). Geometrijski, to je skup svih točaka koje leže u unutrašnjosti kruga središta z_0 i polumjera ε .

Skup $E \subset C$ je *omeđen* (ograničen) ako se sve njegove točke nalaze u nekom krugu $|z| < r$. Točka z_0 je *točka gomilanja* skupa E ako se u svakoj njenoj okolini nalazi bar jedna točka iz E različita od z_0 , dakle beskonačno mnogo točaka iz E . Točka skupa E , koja nije njegova točka gomilanja, *izolirana* je točka. Točka gomilanja z_0 može, ali ne mora pripadati skupu E . Skup E je *zatvoren* ako sadrži svaku svoju točku gomilanja. Svaki beskonačan i omeđen skup točaka iz C ima bar jednu točku gomilanja (*Bolzano-Weierstrassov poučak*). Omeđen i zatvoren skup iz C zove se *kompaktan* skup.

Točka z_0 je *unutarnja točka* skupa E ako, i samo ako, postoji bar jedna njena ε -okolina sadržana u skupu E , tj. $\Delta(z_0, \varepsilon) \subset E$. Skup E je *otvoren*, ako je svaka njegova točka unutarnja točka. Skup E je *povezan* ako se proizvoljne dvije njegove točke mogu spojiti poligonalnom neprekidnom krivuljom koja se sastoji iz točaka skupa E . Skup iz C je *povezan* ako se sastoji iz jednog komada.

Otvoren i povezan skup zove se *područje* (oblast). Točka z_0 je *rubna* (granična) točka područja ako se u svakoj njenoj ε -okolini nalaze točke koje pripadaju i koje ne pripadaju području. *Rub* (graniča) područja je skup svih njegovih rubnih točaka. Područje D kome je pridružen njegov rub postaje *zatvoreno* područje (u oznaci $\bar{D}$). Omeđeno i zatvoreno područje je *kompaktan* skup.

Studij kompleksnih funkcija proširuje se na neomeđena područja kompleksne ravnine. Označi li se sa K kugla kojoj južni pol dira ravninu C u točki $z = 0$, može se pokazati da između

točaka kugle K s isključenim sjevernim polom i točaka ravnine C postoji obostrano jednoznačno preslikavanje. Ono se može produljiti na cijelu kuglu K , uvede li se beskonačno daleka točka ∞ ravnine kao slika njenog sjevernog pola. Otvorena (konačna) ravnina C kojoj je dodana točka $z = \infty$ postaje zatvorena (proširena). Dakle, $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$. Očigledno, postoji samo jedna beskonačno daleka točka. Kugla K , identificirana s ravninom $\bar{C}$ naziva se *Riemannova kugla*, a navedeno preslikavanje *stereografsko preslikavanje*.

Pod okolinom točke $z = \infty$ podrazumijeva se skup točaka koje zadovoljavaju neku nejednakost $|z| > r$, tj. skup točaka izvan nekog kruga, središta $z = 0$ i polumjera r .

Niz (z_n) konvergira prema točki $z = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, ako za svako $M > 0$ postoji prirodan broj n_0 , takav da $n \geq n_0$ povlači $|z_n| > M$. (Niz (z_n) teži prema točki $z = \infty$ nezavisno od načina na koji se njegovi članovi udaljavaju u beskonačnost.)

Funkcija. Neka su D i D^* dva područja iz C . Neko pravilo koje svakom elementu $z \in D$ pridružuje jedan i samo jedan element $w \in D^*$ naziva se *funkcija definirana u području D s vrijednostima u području D^** . Ako je funkcija označena sa f , pišemo $w = f(z)$ ili $z \mapsto f(z)$. Element $z \in D$ je *varijabla* (*argument*), a element $w \in D^*$ je *vrijednost* (*slika*) funkcije f u točki z . Skup D naziva se *područje definicije*, a skup D^* *područje vrijednosti* funkcije f .

Umjesto termina «funkcija» (iz D u D^*) u upotrebi je termin «preslikavanje» (skupa D u skup D^*) koje se označava sa $f: D \rightarrow D^*$. Obično se skup D^* ne precizira nego se jednostavno piše $f: D \rightarrow C$.

Svaka funkcija $f: D \rightarrow C$ može se prikazati u obliku $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, gdje su u i v realne funkcije, definirane u tom području ($z = x + i y$). Obrnuto, umjesto funkcija $(x, y) \mapsto u(x, y)$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$, definiranih u području D , može se promatrati funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Funkcija u je *realni dio* od f , $u = \operatorname{Re}(f)$, a funkcija v *imaginarni dio*, $v = \operatorname{Im}(f)$.

Za razliku od realnog slučaja, geometrijski nije moguće potpuno predočiti funkciju $w = f(z)$ niti nacrtati njen graf, jer je za to potreban prostor R^4 (vrijednosti varijabli z i w predočuju točke u dvodimenzionalnom realnom prostoru). Zbog toga za to služe dvije kompleksne ravnine. U ravnini $C = C_z$ (s koordinatnim sustavom Oxy) zadaje se područje definicije funkcije i njena svojstva. U ravnini $C = C_w$ (s koordinatnim sustavom Ouv) promatra se područje njenih vrijednosti kao rezultat preslikavanja (radi jednostavnosti stavlja se $w = u + i v$).

Limes funkcije. Neka je funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ definirana u području D (osim možda u točki $z_0 \in D$). Funkcija f teži (*konvergira*) *limesu* (*graničnoj vrijednosti*) $w_0 \in C$ kad z teži prema z_0 , ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takvo da vrijedi $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ za sve točke $z \in D$ koje zadovoljavaju uvjet $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. To se označava $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ili $f(z) \rightarrow w_0$ ($z \rightarrow z_0$).

Neka je $z_0 = x_0 + i y_0$, $w_0 = u_0 + i v_0$. Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- 1) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$;
- 2) za svaki niz (z_n) iz D koji konvergira prema z_0 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0$.

Prema definiciji, $f(z)$ teži prema w_0 *nezavisno* od načina na koji točka z teži prema z_0 . Svojstva limesa realnih funkcija (zbroj, razlika, umnožak, kvocijent) prenose se direktno i na funkcije kompleksne varijable.

U prethodnoj definiciji točke z_0 i w_0 nalaze se u konačnosti. Odgovarajuća definicija za $z_0 = \infty$ i $w_0 \in C$ formulira se na slijedeći način: neka je funkcija $z \mapsto f(z)$ definirana u nekoj okolini točke $z_0 = \infty$ (osim možda u točki $z_0 = \infty$). Funkcija f teži limesu $w_0 \in C$ kad z teži prema ∞ , ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M(\varepsilon) > 0$ takav da $|z| > M(\varepsilon)$ povlači $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Slično se definira limes funkcije u slučaju $z_0 \in C$, $w_0 = \infty$, te $z_0 = \infty$, $w_0 = \infty$.

Neprekidnost funkcije. Funkcija $f: D \rightarrow C$ je *neprekidna* u točki $z_0 \in D$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takvo da vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ za sve točke $z \in D$ koje zadovoljavaju nejednakost $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Drugim riječima, za svaku ε -okolinu $\Delta(w_0, \varepsilon)$ točke $w_0 = f(z_0)$ u ravnini C_w , postoji neka δ -okolina $\Delta(z_0, \delta)$ koju f preslikava u ε -okolinu.

Iz ove definicije slijedi ekvivalentna definicija: funkcija $f: D \rightarrow C$ je *neprekidna* u točki $z_0 \in D$ ako je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Ako

ova jednakost vrijedi za sve točke $z_0 \in D$, funkcija f je *neprekidna u području D* . Također, funkcija f je *neprekidna* u području D i na njegovom rubu L ako $f(z) \rightarrow f(z_0)$ kad $z \rightarrow z_0$ preko vrijednosti iz $\bar{D} = D \cup L$.

Polinom kompleksne varijable je *neprekidna funkcija* u ravnini C . Racionalna funkcija $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$, gdje su p i q polinomi, *neprekidna* je funkcija u svakoj točki $z_0 \in C$ u kojoj je $q(z_0) \neq 0$.

Skup svih neprekidnih funkcija $f: D \rightarrow C$, označi se sa $C[D]$. Ako je $f_1 \in C[D]$, $f_2 \in C[D]$, tada je $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in C[D]$, $(f_1 f_2) \in C[D]$ za svako $\alpha, \beta \in C$. Skup koji sadrži zbroj i umnožak svojih elemenata kao i njihov umnožak s elementima iz C , zove se *algebra*. Prema tome, skup neprekidnih funkcija kompleksne varijable, definiranih na bilo kojem području $D \subset C$, jest *algebra*.

Pojam analitičke funkcije. Neka je D područje iz C . Funkcija $f: D \rightarrow C$ je *diferencijabilna* u točki $z_0 \in D$ ako

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

postoji (nezavisno od načina na koji kompleksni prirast Δz teži prema nuli). Granična vrijednost tog izraza zove se *derivacija funkcije f* u točki z_0 i označava se sa $f'(z_0)$. Funkcija f je *diferencijabilna* u području D ako je diferencijabilna u svakoj točki $z_0 \in D$. U tom slučaju pridruženje $z_0 \mapsto f'(z_0)$ definira novu funkciju $f': D \rightarrow C$. Diferencijabilna funkcija je *neprekidna*.

Funkcija $f: D \rightarrow C$ je *analitička* (*holomorfná*) u području $D \subset C$, ako je diferencijabilna u svakoj točki tog područja. Funkcija f je *analitička* u točki $z_0 \in D$ ako je diferencijabilna u nekoj okolini točke z_0 . Općenito, funkcija je *analitička* na nekom proizvoljnom skupu $E \subset C$ ako je *analitička* u nekom području D koje sadrži skup E .

Za funkciju $z \mapsto f(z)$ kaže se da je *analitička* u točki $z = \infty$, ako je funkcija $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ *analitička* u točki $z = 0$.

Analitička funkcija definira se često pomoću reda potencija. Funkcija $f: D \rightarrow C$ je *analitička* u području D ako za svaku točku $z_0 \in D$ postoji neka okolina $\Delta(z_0, r)$ u kojoj se funkcija f može predočiti konvergentnim redom potencija, tj. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $z \in \Delta(z_0, r)$. U tom slučaju kaže se da je z_0 *obična* (*regularna*) točka funkcije f . Točka z_0 je *singularna* (*osobita*) ako f nije *analitička* ni u jednoj okolini $\Delta(z_0, r)$.

Primjer 1. Funkcije $z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, e^z, \sin z, \cos z$ su *analitičke* u ravnini C , ali nisu *analitičke* u ravnini $\bar{C}$.

Funkcija $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$, gdje stupanj polinoma p nije viši od stupnja polinoma q , *analitička* je svuda u ravnini $\bar{C}$, osim u točkama z_0 u kojima je $q(z_0) = 0$.

Primjer 2. Svaka grana pridruženja («višeznačne funkcije») $z \mapsto \ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $z \neq 0$, *analitička* je funkcija u ravnini C , prerezanoj duž negativne realne osi, tj. u području $D = C - \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ i vrijedi $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Također,

svaka takva grana je *analitička funkcija* u bilo kojem jednostruko povezanom području koje ne sadrži točku $z = 0$ (prije svega, grana je funkcija, jer se vraća na početnu vrijednost kad varijabla z opiše bilo koju jednostavnu zatvorenu krivulju u takvom području). Općenito, ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ *analitička* u jednostruko povezanom području i $f(z) \neq 0$, onda je svaka grana pridruženja $z \mapsto \ln f(z) = \ln |f(z)| + i(\arg f(z) + 2k\pi)$ *analitička funkcija*

u tom području ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Sve što je rečeno za grane pridruženja $z \mapsto \ln z$ vrijedi za grane pridruženja $z \mapsto \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, $n > 1$.

Pravila diferenciranja (v. *Diferencijalni račun*) realnih funkcija vrijede očigledno i za analitičke funkcije.

Zbroj, razlika i umnožak analitičkih funkcija u području D je analitička funkcija u tom području. Općenito, skup analitičkih funkcija u području D je *algebra*. Kvocijent analitičkih funkcija je analitička funkcija u svim točkama iz D u kojima se nazivnik ne poništava.

Cauchy-Riemannove jednadžbe pripadaju grupi fundamentalnih rezultata teorije analitičkih funkcija i osobito su važne u njenim primjenama (teorija potencijala, mehanika fluida).

Egzistencija derivacije funkcije kompleksne varijable zavisi od diferencijabilnosti njenog realnog i imaginarnog dijela kao funkcija iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$.

Ako je funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ diferencijabilna u točki $z = x + i y$, parcijalne derivacije funkcija u i v postoje u točki (x, y) i zadovoljavaju uvjete

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Te se jednadžbe zovu *Cauchy-Riemannove jednadžbe*. Dobivaju se neposredno iz definicije derivacije. Stavljajući $\Delta z = \Delta x + i \Delta y = i \Delta y$ slijedi respektivno $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, $f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

Uspoređivanjem izlaze Cauchy-Riemannove jednadžbe. One su nužni uvjeti za diferencijabilnost funkcije f . Oni su i dovoljni ako su parcijalne derivacije (prvog reda) funkcija u i v neprekidne. Dakle, da bi funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ bila analitička u području $D \subset \mathbb{C}$, nužno je i dovoljno da funkcije u i v imaju u tom području neprekidne parcijalne derivacije i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednadžbe. Cauchy-Riemannove jednadžbe usko su vezane s harmonijskim funkcijama.

Neka je D područje iz $\mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto P(x, y)$ realna funkcija iz D u $\mathbb{R}$. Kaže se da je funkcija P *harmonijska* u području D , ako ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda u tom području i zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Ako je funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ analitička u području D , onda su u i v harmonijske funkcije u tom području. Obrnuto, zadanoj harmonijskoj funkciji $(x, y) \mapsto u(x, y)$ u jednostruko povezanom području može se uvijek pridružiti harmonijska funkcija $(x, y) \mapsto v(x, y)$ takva da funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ bude analitička u tom području.

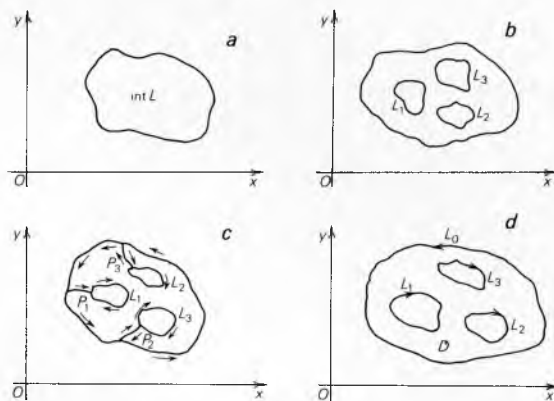
Između vektorskih polja i analitičkih funkcija postoji duboka i jednostavna veza. Neka je zadano vektorsko polje $\vec{A} = \{A_x, A_y\}$ u jednostruko povezanom području $D \subset \mathbb{C}$. Pretpostavlja se da su komponente polja i njihove parcijalne derivacije neprekidne funkcije iz D u $\mathbb{R}$. Ako je polje harmonijsko ($\text{div } \vec{A} = 0$, $\text{rot } \vec{A} = 0$), onda postoji analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ sa svojstvom $F'(z) = A_x - i A_y$. Obrnuto, ako je zadana analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, onda u području D postoji harmonijsko polje $\vec{A} = \{A_x, A_y\}$ sa svojstvom $A_x - i A_y = F'(z)$, $z \in D$.

Funkcija $z \mapsto F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ koja se naziva *kompleksni potencijal* vektorskog polja, najvažnija je u njegovoj karakterizaciji (odgovarajući termini za funkcije U i V zavise od prirode polja).

Integracija u kompleksnom području. Prije definicije kompleksnog integrala treba definirati neke klase krivulja i klasificirati područja.

Neka su $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ neprekidne funkcije parametra t na konačnom intervalu $a \leq t \leq b$. *Neprekidna krivulja* u ravnini $\mathbb{C}$ je skup uredjenih točaka $z = x + i y$ određenih jednadžbom $z = z(t) = x(t) + i y(t)$ kad t raste od a do b . *Neprekidna krivulja* je *jednostavna* ili *Jordanova* krivulja, ako različitim vrijednostima parametra t (osim možda za $t = a$ i $t = b$) odgovaraju različite vrijednosti $z(t)$. Jordanova krivulja je zatvorena ako je $z(a) = z(b)$.

Poučak (C. Jordan, 1838–1922). Svaka zatvorena Jordanova krivulja L dijeli ravninu $\mathbb{C}$ na dva područja kojima je ona zajednički rub (sl. 12 a). Jedno područje je unutarnje i omeđeno (u oznaci $\text{int}(L)$), a drugo je vanjsko i neomeđeno (u oznaci $\text{ext}(L)$), tj. $\mathbb{C} = L \cup \text{int}(L) \cup \text{ext}(L)$.



Sl. 12. Prikazivanje područja kompleksnih brojeva u ravnini. a Zatvorena Jordanova krivulja L dijeli ravninu $\mathbb{C}$ na dva područja kojima je ona zajednički rub, b višestruko povezano područje, c pretvaranje višestruko povezanog područja pomoću prereza γ_1 u jednostruko povezano područje, d odabiranje prikladnih krivulja za izračunavanje integrala analitičke funkcije u pretvaranjem višestruko povezanog područja u jednostruko

Jordanova krivulja je *glatka* ako su derivacije $t \mapsto x'(t)$, $t \mapsto y'(t)$ neprekidne i $|x'(t)| + |y'(t)| \neq 0$ u intervalu $[a, b]$. Ona je *dio po dio glatka* ako se sastoji od konačnog broja glatkih krivulja.

Radi kratkoće, termin *zatvorena* (otvorena) *krivulja* označavat će ubuduće jednostavnu dio po dio glatku zatvorenu (otvorenu) krivulju, ponekad nazivanu zatvorena (otvorena) kontura.

Ako pri obilaženju zatvorene krivulje L područje $\text{int}(L)$ ostaje uvijek s lijeve strane, krivulja L je pozitivno orijentirana (u oznaci L ili L^+). Otvorena krivulja orijentirana je pozitivno parametризacijom, tj. u smislu koji odgovara rastućim vrijednostima parametra t .

Područje $D \subset \mathbb{C}$ je *jednostruko povezano* ako je omeđeno jednom zatvorenom krivuljom; ono ima svojstvo da svaka zatvorena krivulja Γ u njegovoj unutrašnjosti omeđuje jedan njegov dio, tj. $\text{int}(\Gamma) \subset D$. Na primjer, takvo je područje dio ravnine omeđen kružnicom ili trokutom. Područje je *višestruko povezano* ako je omeđeno s više zatvorenih krivulja $L_1, L_2, \dots$ bez zajedničkih točaka koje leže u unutrašnjosti zatvorene krivulje L_0 (sl. 12 b). Ako je broj unutarnjih krivulja n kaže se da je područje $(n+1)$ -struko povezano. Takvo područje ima n „šupljina“. Na primjer, kružni vijenac je dvostruko povezano područje.

Pomoću *prereza* dvostruko povezano područje može se pretvoriti u jednostruko povezano: ako se proizvoljna točka unutarnje krivulje L_1 spoji ravnom crtom s nekom točkom vanjske krivulje L_0 i uzme u obzir dva ruba prereza (sl. 12 c), dobiva se jednostruko povezano područje, jer se njegov rub može obići po jednoj zatvorenoj krivulji (područje n -struko povezano postaje jednostruko povezano pomoću $n-1$ prereza).

Pojam reda povezanosti prenosi se lako i na neomeđena područja kad se ima u vidu stereografsko preslikavanje. Na primjer, okolina točke $z = \infty$, uključujući ovu točku, jest jednostruko povezano područje; ista okolina s isključenom točkom $z = \infty$ jest dvostruko povezano područje.

Neka je funkcija $z \mapsto f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ definirana u području D . Neka je $L \subset D$ krivulja s početnom točkom α i krajnjom točkom β . *Podjela* krivulje L je bilo koji konačan uredjen skup točaka $\pi = \{\alpha = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = \beta\}$, pri čemu su točke poredane u smislu porasta parametra t . *Norma* podjele π je pozitivan broj

$$\|\pi\| = \max |z_k - z_{k-1}| = \max |\Delta z_k|, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Geometrijski, norma podjele je najveća stranica upisanog poligona krivulji L . Na svakom parcijalnom luku $L_k = [z_{k-1}, z_k]$ odabere se proizvoljna točka $\zeta_k \in L_k$. Skup svih takvih točaka, pridruženih podjeli π , označi se sa $\sigma = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$. Sada,

za svaku podjelu π i svaki pridruženi skup σ , formira se Riemannov integralni zbroj funkcije f :

$$S(\pi, \sigma; f) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k.$$

Ako ti integralni zbrojevi teže konačnoj graničnoj vrijednosti $J \in \mathbb{C}$ kad $\|\pi\| \rightarrow 0$ nezavisno od podjele π i pridruženog skupa σ , kompleksni broj J zove se *integral funkcije f duž krivulje L* i obilježava $\int_L f(z) dz$. Drugim riječima, broj J je integral funkcije f ako za

svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta(\varepsilon) > 0$ takav da za sve podjele π sa svojstvom $\|\pi\| < \delta(\varepsilon)$ i sve pridružene skupove σ vrijedi $|J - S(\pi, \sigma; f)| < \varepsilon$.

Ako je funkcija $f: L \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidna, tada je integrabilna duž krivulje L , tj. $\int_L f(z) dz$ postoji.

Tvrdnja neposredno slijedi iz jednakosti

$$\int_L f(z) dz = \int_L [u(x, y) + i v(x, y)] (dx + i dy) = \int_L [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_L [v(x, y) dx + u(x, y) dy],$$

jer su funkcije u i v neprekidne na krivulji L (v. *Integralni račun*).

Integral neprekidne funkcije $z \mapsto f(z)$ duž krivulje L definira se često pomoću jednakosti $\int_L f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$, gdje je $t \mapsto z(t)$ parametarska reprezentacija krivulje L ($a \leq t \leq b$). Integral na desnoj strani postoji, jer su, prema pretpostavci, funkcije $t \mapsto z(t)$, $z \mapsto f(z)$ neprekidne na L .

Iz definicije kompleksnog integrala slijede neka njegova svojstva koja su slična svojstvima realnog Riemannovog integrala.

1) Integral je linearan, tj. ako su funkcije $z \mapsto f_1(z)$, $z \mapsto f_2(z)$ neprekidne na L , onda je

$$\int_L [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)] dz = \alpha \int_L f_1(z) dz + \beta \int_L f_2(z) dz; \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2) Integral je aditivan u odnosu na put integracije, tj.

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

3) Promjena orijentacije na putu integracije povlači negativan predznak integrala: $\int_{L^-} f(z) dz = - \int_L f(z) dz$.

4) Procjena apsolutne vrijednosti integrala određena je relacijom $|\int_L f(z) dz| \leq \int_L |f(z)| |dz|$. Ako je s duljina krivulje L i $|f(z)| \leq M$ na L , onda je $|\int_L f(z) dz| \leq Ms$.

Cauchyjev poučak. Vrijednost kompleksnog integrala općenito zavisi od funkcije i krivulje integracije. Međutim, postoje uvjeti pod kojima on ima uvijek istu vrijednost.

Poučak 1 (Cauchy). Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u jednostruko povezanom području D , tada je integral te funkcije duž bilo koje zatvorene krivulje Γ iz D jednak nuli, tj. $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

U Cauchyjevom izvornom dokazu bitna je pretpostavka o neprekidnosti derivacije $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ (prema definiciji, analitičnost funkcije f osigurava samo egzistenciju derivacije f'). U tom slučaju dovoljno je primijeniti Greenovu formulu i Cauchy-Riemannove jednadžbe. Međutim, É. Goursat (1858—1936) otkrio je da je navedena pretpostavka suvišna.

U mnogim situacijama važnija je općenitija formulacija (druga verzija) poučka 1:

Poučak 2 (Cauchy). Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u jednostruko povezanom području D omeđenom krivuljom L i neprekidna u području $\bar{D}$, tada je $\int_L f(z) dz = 0$.

Cauchyjev poučak je fundamentalan u teoriji analitičkih funkcija, jer ima dalekosežne posljedice. Gotovo svi rezultati teorije (čak i oni vezani za diferenciranje) na neki način zavise od njega.

Neke njegove neposredne posljedice jesu (pretpostavlja se da uvjeti poučka 2 ostaju isti):

1) Integral $\int_{z_0}^z f(z) dz$ ne zavisi od krivulje integracije koja

leži u području D , a spaja točke $z_0, z \in D$.

2) Ako su z_0, z bilo koje točke iz D i $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, tada

je F analitička funkcija u području D . Osim toga, $F'(z) = f(z)$, tj. F je primitivna funkcija od f . Za svaki par točaka $z_1, z_2 \in D$

vrijedi $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$, pod uvjetom da put integracije leži u području D .

Ako je funkcija analitička u višestruko povezanom području, onda se ne može zaključiti da je njen integral duž svake zatvorene krivulje u tom području jednak nuli. Međutim, vrijedi ovaj rezultat: ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u *višestruko povezanom* području D , omeđenom izvana krivuljom L_0 , a iznutra krivuljama L_k ($k = 1, 2, \dots, n$) (sl. 12 d), te ako je neprekidna u zatvorenom području $\bar{D}$, tada je $\int_L f(z) dz = 0$. Ovdje je krivulja L *orijentiran*

rub područja D , tj. $L = L_0 \cup L_1^- \cup L_2^- \cup \dots \cup L_n^-$. Alternativna formula

glasi $\int_{L_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{L_k} f(z) dz$. U dokazu pretvori se područje D odgovarajućim prerezima u jednostruko povezano, a zatim primijeni poučak 2. Specijalno, ako je $n = 1$, onda je: $\int_{L_0} f(z) dz = - \int_{L_1} f(z) dz$. Na temelju ove jednakosti, kod izračunavanja integrala, može se odabrati prikladnija krivulja (obično kružnica), a da se vrijednost integrala ne promijeni.

Cauchyjeva formula. Vrijednosti analitičke funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ zadane su na rubu L područja D . Treba odrediti njene vrijednosti u području D .

Poučak 1 (Cauchy). Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u jednostruko povezanom području D , i ako je Γ proizvoljna zatvorena krivulja u tom području, tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

za svako $z \in \text{int}(\Gamma)$.

Ta se formula može poopćiti tako da se integrira duž ruba područja D :

Poučak 2 (Cauchy). Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u jednostruko povezanom području D omeđenom krivuljom L i neprekidna u području $\bar{D}$, tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

za svako $z \in D$.

Ova verzija Cauchyjeve formule prikladnija je za primjenu od prve (poučak 1). Ona se interpretira kao *reprezentacija analitičke funkcije pomoću krivuljnog integrala* pa se naziva i *Cauchyjev integral*. Njeno značenje je u tome što određuje vrijednosti funkcije f u području analitičnosti ako su te poznate samo na rubu

područja. Ova činjenica može se kratko izraziti: Cauchyjeva formula rješava rubni problem analitičkih funkcija.

Cauchyjev integral jednak je nuli za sve točke $z \in \text{ext}(L)$, jer je tada funkcija $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ analitička u području D . Za primjenu interesantan je slučaj kad se točka $z = t$ nalazi na krivulji L . Očividno, tada Cauchyjev integral nije definiran, ali se može interpretirati na različite načine kao specijalna granična vrijednost. Tako npr. u značenju tzv. *Cauchyjeve glavne vrijednosti*, vrijednost integrala je $\frac{f(t)}{2}$.

Poučak 2 vrijedi u slučaju kad je područje D višestruko povezano, a njegov rub L orijentiran.

Sa stanovišta primjene analitičkih funkcija na rješavanje rubnih problema matematičke fizike i tehnike vrlo je važan integral Cauchyjevog tipa

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

gdje je $\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}$ proizvoljna neprekidna funkcija. Ako je funkcija φ neprekidna u Hölderovom smislu, granične vrijednosti lokalno analitičke funkcije Φ kad $z \rightarrow t \in L$ postoje i određene su Plemeljovim formulama (Josip Plemelj, 1873–1963).

Pomoću poučka 2 izvode se Cauchyjevi integrali za derivacije funkcije f . Funkcija $z \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ je analitička u području D , jer je $\zeta \in L$. Funkcija $(z, \zeta) \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ je neprekidna za $z \in D$, $\zeta \in L$. Radi toga, može se Cauchyjeva formula diferencirati po z pod znakom integrala. Operacija se može neograničeno ponavljati, jer se uvjeti o analitičnosti i neprekidnosti integrala ne mijenjaju. Dakle, ako vrijede uvjeti poučka 2, onda je

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Prema tome, funkcija koja je analitička u području D , ima u njemu derivacije svakog reda, koje su analitičke funkcije u istom području. Zanimljivo je primijetiti da realne funkcije realne varijable nemaju takvu zakonitost u gradi.

Taylorov red. Među najjednostavnije i najvažnije redove funkcija spadaju redovi potencija. To su redovi oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots; \quad z \in C,$$

gdje su kompleksan broj a i niz kompleksnih brojeva c_n zadani. Brojevi niza zovu se *koficijenti reda* koji se promatra u nekoj okolini točke (središta) a .

Konvergenција reda takvog oblika ispituje se pomoću formule

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}}.$$

Ako je $|z-a| < R$, red konvergira apsolutno; ako je $|z-a| > R$, red divergira; za $0 < r < R$, red konvergira uniformno u krugu $\Delta(a, r) = \{z: |z-a| \leq r\}$. Broj R , koji jedini ima navedena prva dva svojstva, zove se *polumjer konvergenije reda*, $0 \leq R \leq \infty$.

Iz Cauchyjeve formule izlazi jedna izuzetno važna posljedica: reprezentacija analitičkih funkcija pomoću redova potencija.

Neka je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u krugu $\Delta(a, R) = \{z: |z-a| < R\}$. Bilo koju kružnicu $\{\zeta: |\zeta-a| = r\}$, $r < R$ označi se sa L . Prema Cauchyjevoj formuli, za $z \in \text{int}(L)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

gdje se Cauchyjeva jezgra može napisati u obliku

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}.$$

Kako je $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$, bit će

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n + \dots \right].$$

Ta se jednakost može integrirati, jer je beskonačni red uniformno konvergentan na L . Vodeći računa o formuli za derivacije analitičke funkcije, dobije se

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Slično kao u realnom području taj se red potencija zove Taylorov red funkcije $z \mapsto f(z)$ u okolini točke $z = a$; u okolini točke $z = 0$ izlazi *Mac-Laurinov red*. Dakle, ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u krugu $\Delta(a, R)$, onda se ona može (jednoznačno) u tom krugu razviti u Taylorov red koji konvergira uniformno na kompaktnima iz $\Delta(a, R)$. Za taj se red potencija kaže da predoduje funkciju f u krugu $\Delta(a, R)$.

Prema tome, analitička funkcija može se razviti u okolini svake točke $z = a$ u području analitičnosti D u Taylorov red koji konvergira bar u nekom krugu iz D . Polumjer kruga konvergenije jednak je udaljenosti središta a do najbliže singularne točke funkcije. Na rubu kruga konvergenije leži bar jedna singularna točka funkcije.

Obrnuto, postavlja se pitanje: da li je zbroj konvergentnog reda potencija analitička funkcija? Odgovor je pozitivan: zbroj svakog reda potencija u njegovom krugu konvergenije je analitička funkcija. Svaki takav red je Taylorov red svoga zbroja.

Prema navedenom slijedi zaključak: pojam analitičke funkcije kao diferencijabilne funkcije u svakoj točki područja definicije, ekvivalentan je s pojmom analitičke funkcije kao funkcije koja se može razviti u okolini svake takve točke u red potencija. To svojstvo nema samo veliko značenje za izgradnju teorije analitičkih funkcija, već ima široku primjenu kod rješavanja različitih praktičnih problema. Također, ono pokazuje veliku unutarnju pravilnost kompleksnih funkcija za razliku od realnih funkcija (realne varijable) kojima razvoj u red potencija nije nikako jednostavan (v. *Diferencijalni račun*).

Razvoj funkcija $z \mapsto e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\text{sh } z$, $\text{ch } z$ u Taylorov red (u okolini ishodišta) formalno je isti kao u realnom slučaju. Umjesto realne varijable x dolazi varijabla $z \in \mathbb{C}$, a dobiveni redovi konvergiraju u krugu polumjera $R = \infty$.

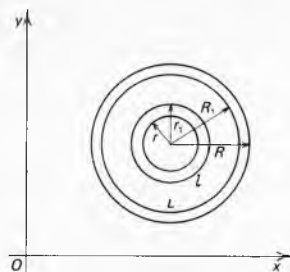
Neka je $z \mapsto f(z)$ analitička funkcija u točki a s razvojem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Kaže se da funkcija f ima *nultočku* m -tog reda

u točki a ako i samo ako je $c_n = 0$ za $n < m$, $c_m \neq 0$. To znači da se $f(z)$ može izraziti u obliku $f(z) = (z-a)^m g(z)$, gdje je g analitička funkcija u točki a i $g(a) \neq 0$. Nultočka analitičke funkcije je izolirana, tj. oko nje postoji dovoljno mali krug u kome se funkcija više ne poništava. Analitička funkcija u području D , koja se poništava u beskonačno mnogo različitih točaka s limesom u unutrašnjosti područja D , identički je jednaka nuli u tom području.

Analitička funkcija, koja nije identički jednaka nuli u području D , ima samo konačan broj nultočaka na svakom kompaktnu iz D . Posebno je važan ovaj rezultat: ako funkcije f i g , analitičke u području D , primaju iste vrijednosti u beskonačno mnogo različitih točaka koje konvergiraju u unutrašnjosti područja D , onda su one identički jednake u tom području, tj. $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$ (*poučak identičnosti*).

Laurentov red. Taylorov

red je prikladno sredstvo za predodučivanje analitičkih funkcija u krugu. Međutim, od velikog je značenja mogućnost takvog predodučivanja u područjima drugačijeg oblika, na primjer u kružnom vijencu (sl. 13). Polazi se od pretpostavke da je funkcija



Sl. 13. Predodučivanje analitičkih funkcija u području koje ima oblik kružnog vijenca

$z \mapsto f(z)$ analitička u kružnom vijencu $K = \{z : r < |z - a| < R\}$, te se opišu kružnice $L = \{\zeta : |\zeta - a| = R_1\}$, $I = \{\zeta : |\zeta - a| = r_1\}$ tako da bude $r < r_1 < R_1 < R$. Neka je z proizvoljna čvrsta točka iz kružnog vijenca $K_1 = \{z : r_1 < |z - a| < R_1\}$. Prema Cauchyjevoj formuli za višestruko područje, bit će

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Slično postupku za razvoj u Taylorov red slijedi:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a) + \dots,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Također, razvijajući jezgru $\frac{1}{\zeta - z}$ u geometrijski red kvocijenta

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1, \text{ slijedi:}$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \dots,$$

s koeficijentima

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - a^{-n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Na taj se način dobije razvoj

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

Na temelju Cauchyjevog poučka, formule za koeficijente mogu se prikazati samo jednom:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots),$$

gdje je Γ bilo koja kružnica sa središtem u točki $z = a$ i polumjera ϱ , $r < \varrho < R$.

Taj se razvoj zove *Laurentov razvoj funkcije* $z \mapsto f(z)$ sa središtem u točki $z = a$. Red za $f_1(z)$ je *regularni dio*, a red za $f_2(z)$ *glavni dio* razvoja. Očividno, Taylorov razvoj je specijalan slučaj Laurentovog razvoja.

Poučak (P. Laurent, 1813–1854). Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u kružnom vijencu $K = \{z : r < |z - a| < R\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$, tada se ona može razviti (jednoznačno) u Laurentov red koji uniformno konvergira na kompaktnu iz K . Koeficijenti reda određeni su navedenom formulom.

Obrnuto, ako Laurentov red konvergira u kružnom vijencu K , onda je njegov zbroj analitička funkcija u tom vijencu. Svaki takav red je Laurentov red svoga zbroja.

Laurentov razvoj je osnovno sredstvo za proučavanje svojstava analitičkih funkcija u okolini nekih točaka u kojima se analitičnost narušava.

Singulariteti. Točka $a \in C$ je *izolirana singularna točka* funkcije $z \mapsto f(z)$ ako je funkcija f analitička u okolini $\Delta'(a, r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ ove točke za neko $r > 0$ (točka a ne pripada okolini $\Delta'(a, r)$). Postoje tri tipa izoliranih singularnih točaka analitičkih funkcija.

1) Točka a je *uklonjiva (prividna) singularna točka* funkcije f ako postoji konačna granična vrijednost $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Funkcija f

može se tada analitički produljiti u točku a , tj. definirati njena vrijednost u toj točki pomoću limesa. Na primjer, funkcija $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ($z \neq 0$) ima uklonjivi singularitet u točki $z = 0$; $f(0) = 1$.

2) Točka a je *pol* funkcije f ako je $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ i $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$. Funkcija $\frac{1}{f}$ može se analitički produljiti u točku a pridružujući joj vrijednost nulu. Na primjer, točka $z = 1$ je pol funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z-1)^2}$ ($z \neq 1$).

3) Točka a je *bitna singularna točka* funkcije f ako $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ ne postoji. Na primjer, točka $z = 0$ je bitni singularitet funkcije $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ ($z \neq 0$). Točka $z = i$ je bitni singularitet funkcije $z \mapsto \sin \frac{1}{z-i}$ ($z \neq i$).

Ako je $a \in C$ izolirana singularna točka funkcije $z \mapsto f(z)$, onda se ona može razviti u Laurentov red u kružnom vijencu $\Delta'(a, r)$. Oblik ovog razvoja zavisi od naravi singularne točke a .

Točka a je *uklonjiva singularna točka* funkcije $z \mapsto f(z)$, ako i samo ako Laurentov razvoj funkcije f ne sadrži glavni dio. U tom je slučaju $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, te je $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$.

Točka a je pol funkcije $z \mapsto f(z)$, ako i samo ako glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f sadrži samo konačan broj članova:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k.$$

Tu je točka a pol n -tog reda ($c_{-n} \neq 0$). Funkcija $z \mapsto (z - a)^n f(z)$ ima uklonjivi singularitet u točki a , $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z) = c_{-n}$.

Točka a je *bitna singularna točka* funkcije $z \mapsto f(z)$, ako i samo ako glavni dio Laurentovog razvoja funkcije f sadrži beskonačno mnogo članova. Vlanjanje analitičke funkcije u blizini bitne singularne točke precizira *Weierstrassov poučak*: ako je a bitna singularna točka funkcije $z \mapsto f(z)$, onda za svaki unaprijed zadani broj $A \in C$ postoji niz $z_n \rightarrow a$ takav da $f(z_n) \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$). Drugim riječima, za svaki $A \in C$ i $\varepsilon > 0$ postoji $z \in \Delta'(a, r)$ takav da vrijedi $|f(z_n) - A| < \varepsilon$. É. Picard (1859–1941) dokazao je precizniji i dublji rezultat: u svakoj okolini bitne singularne točke a , analitička funkcija *prima* svaku vrijednost beskonačno mnogo puta, osim možda jedne. Na primjer, funkcija $z \mapsto e^{1/z}$ ($z \neq 0$) prima svaku vrijednost beskonačno mnogo puta osim vrijednosti $A = 0$.

Pojam izolirane singularne točke proširuje se i na beskonačno daleku točku.

Točka $z = \infty$ je izolirana singularna točka funkcije $z \mapsto f(z)$ ako je f analitička funkcija u nekom kružnom vijencu $r < |z| < \infty$. Pri tome, ako je $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ konačan, beskonačan ili ne postoji,

točka $z = \infty$ je (respektivno) uklonjivi singularitet, pol ili bitni singularitet. Laurentov razvoj funkcije f u okolini točke $z = \infty$ dobiva se iz Laurentovog razvoja funkcije $\zeta \mapsto F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ u okolini točke $\zeta = 0$.

Prema prirodi singularnih točaka definiraju se dvije jednostavne klase analitičkih funkcija.

Funkcija $f : C \rightarrow C$ je *cijela funkcija*, ako i samo ako je analitička u otvorenoj ravnini C . Dakle, cijele funkcije nemaju singularnih točaka u ravnini C . Na primjer, polinomi kompleksne varijable, funkcije $z \mapsto e^z$, $\sin z$, $\cos z$, te njihove kombinacije su cijele funkcije. Cijela funkcija, omeđena u ravnini C , svodi se na konstantu (*Liouvilleov poučak*). U proširenoj ravnini $\bar{C}$, svaka cijela funkcija različita od konstante ima u točki $z = \infty$ izolirani singularitet. Za polinom n -tog stupnja točka $z = \infty$ je pol n -tog reda. Za cijelu funkciju, koja nije polinom, točka $z = \infty$ je bitna singularna točka (takve cijele funkcije neki autori nazivaju *cijela transcendentna funkcija*). Svaka cijela transcendentna

funkcija može se razviti u red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ s beskonačno velikim polumjerom konvergencije. Obrnuto, svaki red potencija koji konvergira u ravnini C , definira cijelu transcendentnu funkciju.

Cijela funkcija koja ne prima dvije vrijednosti iz skupa C je konstanta. Odatle slijedi da cijela funkcija, različita od konstante, prima svaku konačnu vrijednost osim možda najviše jedne (*Picardov prvi poučak*). Važne priloge teoriji cijelih transcendentnih funkcija dao je Mihailo Petrović (1868—1943).

Za funkciju $f: D \rightarrow C$ kažemo da je *meromorfna* u području D , ako i samo ako je analitička svuda u tom području osim u točkama koje su joj polovi. Na svakom kompaktu iz D ona može imati samo konačan broj polova. Neka je $M[D]$ skup svih meromorfni funkcija u području D . Ako su funkcije f i g elementi tog skupa, onda su njegovi elementi i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, λf , f/g ($\lambda \in C$). Također $\frac{f}{g} \in M[D]$ uz uvjet $g(z) \neq 0$, $z \in D$. Svaka funkcija $f \in M[C]$ može se predočiti kao kvocijent dviju cijelih funkcija (bez zajedničkih nultočaka). Takva funkcija može imati bitni singularitet u točki $z = \infty$. Svaka funkcija $f \in M[\bar{C}]$ je racionalna funkcija.

Residuumi. Neka je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička svuda u omeđenom području $D \subset C$ osim u izoliranoj singularnoj točki $a \in D$. Neka je $L \subset D$ bilo koja zatvorena krivulja sa svojstvom $a \in \text{int}(L)$. *Residuum (ostatak) funkcije f u točki a* je broj

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz.$$

Kad se razvija funkcija f u okolini točke a u Laurentov red i integrira duž L , izlazi $\text{Res}[f(z), a] = c_{-1}$. Dakle, residuum analitičke funkcije f u izoliranoj singularnoj točki a je koeficijent člana $\frac{1}{z-a}$ u njenom Laurentovom razvoju. Od integriranog reda preostao je samo koeficijent c_{-1} , čime se tumači naziv residuum.

Očigledno, residuum u uklonjivoj singularnoj točki jednak je nuli. Ako je točka a pol reda n , jednostavnim postupkom dobije se iz Laurentovog razvoja formula

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

Za pol a prvog reda ta formula ima jednostavan oblik:

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} \{(z-a)f(z)\},$$

gdje je izračunavanje krivuljnog integrala analitičke funkcije zamijenjeno s izračunavanjem njenih derivacija.

U teoretskim istraživanjima i praktičnim primjenama bitan je *poučak o residuumima*: ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ neprekidna u području $\bar{D}$ i analitička svuda u području D osim u konačnom broju singularnih točaka $a_k \in D$ ($k = 1, 2, \dots, n$), tada je

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k],$$

gdje je L orijentirani rub područja D .

Lokalna distribucija nultočaka i polova analitičke funkcije vezana je uz pojam logaritamskog residuuma. Neka je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička svuda u zatvorenom području $\bar{D} = D \cup L$ osim u konačnom broju polova koji leže u njegovoj unutrašnjosti. Pretpostavlja se da je $f(z) \neq 0$ na orijentiranom rubu L . Ako je P broj polova, a N broj nultočaka funkcije f u unutrašnjosti područja, tada je

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Taj se integral zove *logaritamski residuum funkcije f* (svaka se nultočka i svaki pol broje toliko puta koliki je njihov red).

Neka je točka $z = \infty$ izolirani singularitet analitičke funkcije $z \mapsto f(z)$. Residuum funkcije f u točki $z = \infty$ je broj

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} f(z) dz,$$

gdje je L^- proizvoljna kružnica $|z| = r$, orijentirana u negativnom smislu, izvan koje je funkcija f analitička svuda osim u točki $z = \infty$. Iz definicije slijedi da je ostatak funkcije f u točki ∞ jednak koeficijentu člana $1/z$ s negativnim predznakom u njenom Laurentovom razvoju u okolini točke ∞ .

Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička svuda u proširenoj ravlini $\bar{C}$ osim u konačnom broju izoliranih singularnih točaka a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) uključujući i točku $a_n = \infty$, zbroj svih njenih residuuma jednak je nuli: $\sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k] = 0$.

Teorija residuuma ima vrlo korisnu i efektivnu primjenu kod izračunavanja nekih realnih integrala koji se ne mogu elementarno integrirati. Bit metode sastoji se u tome da se vrijednost realnog integrala odredi pomoću prikladno odabranog kompleksnog integrala na koji se može primijeniti poučak o residuumima. U jednostavnom slučaju, podintegralna funkcija kompleksnog integrala je analitičko produljenje u kompleksnu ravninu zadane realne funkcije. Međutim, opće pravilo za definiranje takvog kompleksnog integrala ne postoji. Kako će se odabrati podintegralna funkcija i krivulja integracije zavisi od svakog pojedinog slučaja. Budući da se obično radi o nepravim realnim integralima, mora se još pokazati da oni zaista postoje (konvergiraju).

Neki integrali oblika $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ izračunavaju se na temelju

ovog kriterija: ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička svuda u području $\{z: \text{Im}(z) \geq 0\}$ osim u konačnom broju izoliranih singularnih točaka a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) koje leže u unutrašnjosti tog područja, te ako je $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ za dovoljno velike $|z|$ i $p > 1$, $M > 0$, tada je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k].$$

Tu se krivulja integracije L sastoji iz segmenta $[-r, r]$ kružnice L_r središta $z = 0$ i polumjera r , u čijoj se unutrašnjosti nalaze sve točke a_k . Kad $r \rightarrow \infty$, $\int_{L_r} f(z) dz \rightarrow 0$.

Za $\lambda > 0$ i $p = 1$, pod istim pretpostavkama (uz modificirani dokaz) vrijedi formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{i\lambda x} f(z), a_k].$$

Kako je $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$, izlaze vrijednosti Fourierovih integrala

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx$. Na primjer, za $a > 0$, $\lambda > 0$, slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-\lambda a}.$$

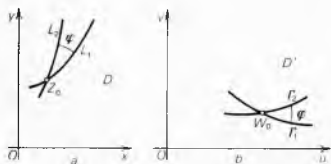
Potpuna analitička funkcija. Pojam analitičnosti, kako se vidi iz izlaganja, odnosi se isključivo na »jednoznačne (uniformne) funkcije« u zadanom području. Pri tome, nije se postavljalo pitanje o njihovoj prirodi izvan područja (lokalna kompleksna analiza). Međutim, u izvjesnom smislu, pojam analitičnosti obuhvaća i »više značne (multiformne) funkcije«. One se javljaju kod proširenja područja definicije analitičkih funkcija.

Analitička funkcija f sa svojim područjem definicije D zove se *analitički funkcijski element* i označava sa (f, D) . Za funkcijski element (f_2, D_2) kaže se da je *direktno analitičko produljenje* elementa (f_1, D_1) , ako skup $D_1 \cap D_2$ nije prazan, te ako je $f_1(z) = f_2(z)$ u području $D_1 \cap D_2$. Ako postoji lanac $(f_1, D_1), (f_2, D_2), \dots, (f_n, D_n)$ elemenata, gdje je (f_k, D_k) direktno analitičko produljenje elementa (f_{k-1}, D_{k-1}) , onda je element (f_n, D_n) *analitičko produljenje* elementa (f_1, D_1) .

Potpuna analitička funkcija F je skup koji se sastoji od zadanog funkcijskog elementa i svih mogućih njegovih analitičkih produženja. Analitičke funkcije komponente zovu se *grane* funkcije F . Unija svih područja u procesu analitičkog produženja je područje definicije funkcije F . Ako pri tome postoje različite grane u nekom području, funkcija F je *višeznačna*. Na primjer, $F(z) = \ln z$, $z \neq 0$; $F(z) = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Naprotiv, funkcija $F(z) = \frac{1}{z-1}$ je jednoznačna u području $\mathbb{C} - \{1\}$. Konstrukcija potpune analitičke višeznačne funkcije vodi do njene *Riemannove plohe* na kojoj postaje jednoznačna (globalna kompleksna analiza).

Konformno preslikavanje je bitni dio geometrijske teorije analitičkih funkcija. Metoda konformnog preslikavanja primjenjuje se na praktične probleme mehanike fluida, teorije elastičnosti, elektrostatičke i drugih područja tehničkih znanosti.

Opća svojstva. U području $D \subset \mathbb{C}_z$, u kojem je funkcija $w = f(z)$ analitička, odabere se proizvoljna točka z_0 . Neka su L_1, L_2 bilo koje dvije krivulje u tom području kojima je sjecište točka $z_0 \in D$ (sl. 14 a). Kako analitička funkcija f preslikava područje D na neko područje $D^* \subset \mathbb{C}_w$, točka z_0 preslikava se na točku w_0 , a krivulje L_1, L_2 na krivulje Γ_1, Γ_2 sa sjecištem u točki w_0 (sl. 14 b). Ako je $f'(z_0) \neq 0$, može se dokazati da je kut između krivulja L_1, L_2 s vrhom u točki z_0 , jednak po veličini i smislu kutu između krivulja Γ_1, Γ_2 s vrhom u točki w_0 (*svojstvo održanja kutova*). Osim toga, svi elementi lukova ds koji izlaze iz točke z_0 preslikavaju se na elemente lukova $dS = \lambda ds$, gdje je $\lambda = |f'(z_0)|$. Prema tome, oni su svi umanjeni ($\lambda < 1$) ili uvećani ($\lambda > 1$) u istom omjeru λ koji zavisi samo od točke $z_0 \in D$.



Sl. 14. Prilikom preslikavanja područja D u D^* analitičkom funkcijom zadržavaju se kutovi između odgovarajućih krivulja

Za preslikavanje $z \mapsto f(z)$ kažemo da je *konformno u točki* z_0 ako ima svojstvo održanja kutova u toj točki. Preslikavanje f je *konformno u području*, ako je konformno u svakoj točki područja.

Iz navedenog izlaganja slijedi zaključak: ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u točki z_0 i $f'(z_0) \neq 0$, onda je preslikavanje f konformno u točki z_0 . Ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u području D i $f'(z_0) \neq 0$ u svakoj točki $z_0 \in D$, preslikavanje f je konformno u području D .

Dakle, funkcija f preslikava male trokute s vrhom u točki z_0 na male slične trokute s vrhom u točki w_0 . Općenito, mali likovi iz okoline točke z_0 preslikavaju se na slične male likove iz okoline točke w_0 .

Kako je $f'(z) \neq 0$ u dovoljno maloj okolini točke z_0 , postoji okolina točke w_0 u kojoj je definirana inverzna analitička funkcija $z = f^{-1}(w)$. Prema tome, između okolina točaka z_0 i w_0 postoji obostrano jednoznačno preslikavanje određeno funkcijom $w = f(z)$.

Preslikavanje f područja $D \subset \mathbb{C}_z$ na neko područje $D^* \subset \mathbb{C}_w$ je konformno ako je obostrano jednoznačno i konformno u svakoj točki iz D . Ta vrsta preslikavanja je bitno svojstvo analitičkih funkcija koje su univalentne, tj. koje u različitim točkama područja primaju različite vrijednosti.

Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ preslikava područje D konformno, ako i samo ako je u tom području: 1) univalentna; 2) analitička i 3) $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in D$. Uvjet 3 može se isključiti, jer je posljedica uvjeta 1 i 2.

Osnovni problem. Zadana su dva područja D i D^* . Treba odrediti analitičku funkciju koja jedno od tih područja preslikava konformno na drugo. Taj problem u općem slučaju nije rješiv niti postoje dovoljno jednostavni algoritmi za njegovo rješenje. Na primjer, višestruko povezano područje ne može se konformno

preslikati na jednostruko. Također, nije moguće konformno preslikati ravninu $\mathbb{C}_z$ ili $\overline{\mathbb{C}_z}$ na neko omeđeno područje iz $\mathbb{C}_w$. Pokušaj da se takva analitička funkcija odredi, vodi do kontradikcije. Riemannov poučak rješava u općem obliku problem konformnog preslikavanja jednostruko povezanih područja, tj. dokazuje egzistenciju analitičkih funkcija koje tako preslikavaju: svako jednostruko povezano područje D u ravnini $\mathbb{C}$, kome se rub ne sastoji samo od jedne točke, može se konformno preslikati na nutrinu kruga $|w| < 1$. Ako funkcija $w = f(z)$ preslikava uz uvjet $f(z_0) = 0$ i $\arg f'(z_0) = \alpha$, ona je jednoznačno određena ($z_0 \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zadani brojevi). Riemannov poučak ne pokazuje kako se konstruira funkcija f .

Opći principi. U Riemannovom poučku radi se o preslikavanju unutrašnjosti područja D na unutrašnjost jediničnog kruga (područja $D^* \subset \mathbb{C}_w$). Postavlja se pitanje o prirodi pridruženja njihovih rubova.

Neka su D i D^* jednostruko povezana područja s omeđenim rubovima L i L^* . Ako funkcija $z \mapsto f(z)$ preslikava konformno D na D^* , onda preslikava L na L^* obostrano jednoznačno i neprekidno uz održanje orijentacije na L . Drugim riječima, funkcija f je neprekidna i univalentna na L .

Veliko značenje za praksu konformnog preslikavanja ima obrat već navedenog principa: neka su D i D^* jednostruko povezana područja s rubovima L i L^* , gdje je L omeđen. Ako je funkcija $z \mapsto f(z)$ analitička u području D , neprekidna na $\bar{D} = D \cup L$ i preslikava obostrano jednoznačno L na L^* uz održanje orijentacije, onda ona preslikava konformno područje D na D^* .

Primjeri. U operacijama s konformnim preslikavanjem važna je bilinearna (Möbiusova, homografska, razlomljena linearna)

funkcija $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, gdje su a, b, c, d zadani kompleksni brojevi, $ad - bc \neq 0$. Bilinearna funkcija ima ova osnovna svojstva:

1) Preslikava konformno ravninu $\overline{\mathbb{C}_z}$ na $\overline{\mathbb{C}_w}$; 2) preslikava kružnice na kružnice (shvaćajući pravac u proširenoj kompleksnoj ravnini kao kružnicu koja prolazi beskonačno dalekom točkom); 3) ako je neka funkcija univalentna i analitička u ravnini $\mathbb{C}_z$ osim u jednoj točki, onda je ona bilinearna.

Uloga bilinearne funkcije dolazi naročito do izražaja kod ovih preslikavanja: svako konformno preslikavanje kruga $|z| < 1$ na

krug $|w| < 1$ predočeno je formulom $f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$, gdje

je a neka točka iz kruga $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Svako konformno preslikavanje poluravnine $\text{Im}(z) > 0$ na krug $|w| < 1$ ima oblik $f(z) =$

$= e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}$, gdje je $\text{Im}(a) > 0$, $a \in \mathbb{C}$. Svako konformno preslikavanje poluravnine $\text{Im}(z) > 0$ na poluravninu $\text{Im}(w) > 0$ ima

oblik $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, gdje su a, b, c, d realni brojevi, $ad - bc > 0$.

Također, može se odrediti funkcija koja preslikava konformno poluravninu $\text{Im}(z) > 0$ na unutrašnjost poligona (Schwarz-Christoffelov integral).

Osim bilinearne funkcije, naročito je važna funkcija Žukovskog

$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Ona ima široku primjenu kod rješavanja

konkretnih problema konformnog preslikavanja vezanih za hidrodinamička istraživanja.

D. Mitrović

SPECIJALNE FUNKCIJE

Rješenja mnogih diferencijalnih jednadžbi, koje se pojavljuju prilikom rješavanja problema u matematici, fizici i tehnici, jesu vrlo složene funkcije. Te su funkcije posebno proučene i nazivaju se specijalne funkcije. Neke se od njih mogu svrstati u elementarne funkcije, dok su druge transcendentne. Najčešće se nazivaju po matematičarima koji su ih proučavali i dali rješenja.

U ovom su članku dane najvažnije specijalne funkcije, a potreba za njihovim uvođenjem pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi bit će prikazana u nekoliko slijedećih primjera (v. *Diferencijalne jednadžbe*, TE 3, str. 265).

Titranje pravokutne membrane.

Membrana sa stranicama a i b učvršćena je na rubu. Kartezijev koordinatni sustav stavlja se s ishodištem u jednom vrhu membrane, a susjedne stranice leže na osima (sl. 15). Pomak točke na membrani s koordinatama x, y u času t označen je sa $u(x, y, t)$. Uz pretpostavku o homogenosti i jednolikoj napetosti membrane i ako su pomaci dovoljno maleni u odnosu na dimenzije membrane, funkcija u zadovoljava valnu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

pri tome je $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$, P je napetost, a ρ gustoća membrane. Učvršćenost membrane na rubovima izražena je rubnim uvjetima

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0.$$

Nadalje, pretpostavlja se poznatim položaj i brzina svakog djelića membrane u početnom času ($t = 0$), tzv. početni uvjeti:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Pokuša li se riješiti valna jednadžba uz početne uvjete i postavku $u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t)$, dobije se jednadžba

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}$$

i uvjeti $X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$. Budući da lijeva strana jednadžbe ne ovisi o t i y , a desna ne ovisi o x , to su one jednake konstanti. Označi li se ta konstanta s $-\alpha^2$ dobiva se

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{Y''}{Y} = \alpha^2 + \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}.$$

Jednakim postupkom s drugom od tih jednadžbi dolazi se do druge konstante $-\beta^2$, te valna jednadžba prelazi u sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0, & X(0) &= X(a) = 0, \\ Y'' + \beta^2 Y &= 0, & Y(0) &= Y(b) = 0, \\ T'' + v^2(\alpha^2 + \beta^2) T &= 0. \end{aligned}$$

Prva i druga jednadžba ovog sustava imaju rješenja samo ako

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots,$$

i tada je (do na konstantni faktor):

$$X(x) = X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad Y(y) = Y_m(y) = \sin \frac{m\pi}{b} y.$$

Tada je rješenje treće jednadžbe:

$$T(t) = T_{nm}(t) = c_{nm} \cos \omega_{nm} t + d_{nm} \sin \omega_{nm} t,$$

$$\omega_{nm} = \pi v \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2};$$

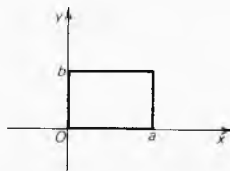
pri tome su c_{nm} i d_{nm} proizvoljne konstante. Budući da je valna jednadžba linearna i homogena, pored $X_n(x) Y_m(y) T_{nm}(t)$ bit će njeno rješenje i svaki zbroj od konačnog broja tih rješenja, a uz dovoljno dobru konvergenciju, i beskonačan red

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y (c_{nm} \cos \omega_{nm} t + d_{nm} \sin \omega_{nm} t).$$

Pokušaju li se zadovoljiti početni uvjeti rješenjem u obliku beskonačnog reda, dobivaju se ove relacije:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{nm} d_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y.$$



Sl. 15. Pravokutna membrana

Zbog svojstava ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija:

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \frac{1}{2} a & n = k, \end{cases}$$

konstante c_{nm} i d_{nm} jesu:

$$c_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy \varphi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$d_{nm} = \frac{4}{ab \omega_{nm}} \int_0^a dx \int_0^b dy \psi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y.$$

Teorija Fourierovih redova sada omogućuje da se, uz izvjesne pretpostavke o funkcijama φ i ψ , dokaže da beskonačni red s konstantama c_{nm} i d_{nm} stvarno konvergira i predstavlja funkciju $u(x, y, t)$ koja je rješenje valne jednadžbe uz postavljene rubne i početne uvjete.

Titranje kružne membrane. Kružna membrana radijusa r učvršćena je na rubu (v. i TE 3, str. 285).

Ravninski polarni sustav ρ, φ ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) stavlja se s ishodištem u središte membrane. Tada jednadžba titranja ima oblik:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Rubni uvjet jest

$$u(r, \varphi, t) = 0,$$

a početni

$$u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, 0) = g(\rho, \varphi),$$

gdje su f i g zadane funkcije. Postavkom $u(\rho, \varphi, t) = R(\rho) \Phi(\varphi) T(t)$, slično kao kod pravokutne membrane dobiva se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$T'' + \omega^2 v^2 T = 0$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad R(r) = 0;$$

ω i n su konstante, ω realno, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Rješenja prve i druge jednadžbe ovog sustava su sinusi i kosinusi; međutim, treća jednadžba ne može se riješiti s pomoću elementarnih funkcija. Da bi se problem riješio metodom analognom kao kod pravokutne membrane, potrebno je posebno proučiti (i po mogućnosti tabelirati) rješenja ove jednadžbe. Zatim treba naći odgovarajuća svojstva ortogonalnosti tih rješenja, kako bi se mogli odrediti koeficijenti u beskonačnom redu umnožaka rješenja svih triju jednadžbi a da bi taj red zadovoljio početne uvjete.

Laplaceova jednadžba. Traže se rješenja Laplaceove jednadžbe u kugli radijusa ρ sa zadanim rubnim uvjetom (v. i TE 3, str. 277).

U prostornom polarnom sustavu r, θ, φ ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$), s ishodištem u središtu kugle, Laplaceova jednadžba glasi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0;$$

rubni uvjet jest:

$$u(\rho, \theta, \varphi) = F(\theta, \varphi).$$

Postavkom $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ dobiva se sustav jednadžbi:

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0,$$

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{\lambda}{r^2} R = 0,$$

$$\Theta'' + \text{ctg } \theta \Theta' + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0.$$

I sada rješenja treće jednadžbe nisu elementarne funkcije.

Zajednička je ovoj jednadžbi i trećoj jednadžbi sustava koji opisuje titranje kružne membrane, te čitavom nizu drugih jed-

nadžbi koje se pojavljuju u sličnim problemima, da imaju oblik

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Pri tome se funkcije p i q mogu shvatiti kao funkcije kompleksne varijable, koje su analitičke u kompleksnoj ravnini ili u njenom dijelu. Zbog toga se za proučavanje rješenja takvih jednadžbi može iskoristiti teorija analitičkih funkcija.

Dobro proučena rješenja takvih jednadžbi jesu ona što se obično naziva *specijalne funkcije*. Pored toga, pod imenom specijalnih funkcija pojavljuju se i neke druge (takoder dobro proučene i tabelirane) funkcije, koje nisu rješenja jednadžbi navedenog oblika, ali se često susreću u različitim problemima fizike i tehnike (npr. gama- i beta-funkcija te Jacobijeve eliptičke funkcije).

U ovom će se prikazu upotrebljavati ove oznake:

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(-1)!! = 1, \quad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

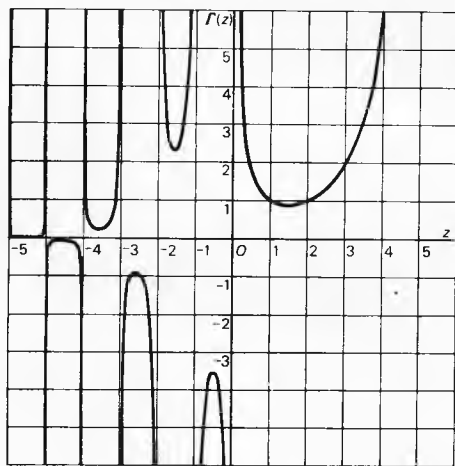
$[a]$ = najveći cijeli broj manji ili jednak a .

Eulerovi integrali. Funkcije definirane Eulerovim integralima često se upotrebljavaju u matematici, fizici, tehnici a posebno u statistici i teoriji vjerojatnosti. To su tzv. gama-funkcija i beta-funkcija.

Gama-funkcija definirana je tzv. Eulerovim integralom druge vrste:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

To je nepravni integral na gornjoj i na donjoj granici, koji konvergira za svaki kompleksni broj $z = x + iy$ u desnoj poluravnini, tj. ako je $\operatorname{Re} z = x > 0$. Nadalje, $\Gamma(z)$ je u cijelom tom području analitička funkcija. Grafički je gama-funkcija prikazana na sl. 16.



Sl. 16. Gama-funkcija

Primjenom parcijalne integracije nalazi se:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Umnožak $e^{-t} t^z$ teži k nuli, kada t teži prema nuli ili prema neizmjerljivo. Slijedi važna funkcionalna jednadžba:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

ili općenitije:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \dots z\Gamma(z),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Budući da je

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

to je za svaki $n = 0, 1, 2, \dots$: $\Gamma(n+1) = n!$

Dakle, gama-funkcija može se shvatiti kao proširenje pojma faktorijske na kompleksne brojeve.

Područje definicije gama-funkcije može se proširiti tako da ona postane funkcija analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini izuzev točaka $0, -1, -2, -3, \dots$, gdje ima polove. Naime, ako se napiše: $\Gamma(z) = \varphi(z) + \omega(z)$, gdje je

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \omega(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

onda drugi integral konvergira za svaki kompleksan broj z i definira funkciju ω koja je analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini. Za $\operatorname{Re} z > 0$ dobije se:

$$\varphi(z) = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right] t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Međutim, ovaj red konvergira ne samo za $\operatorname{Re} z > 0$ nego i za svaki kompleksan broj z različit od $0, -1, -2, \dots$, i u tom području predstavlja analitičku funkciju.

Dakle, proširena gama-funkcija može se definirati sa:

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Funkcionalna jednadžba vrijedi i za tu proširenu gama-funkciju. Nadalje, slijedi $\lim_{z \rightarrow -n} [(z+n)\Gamma(z)] = \frac{(-1)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

dakle sve su točke $0, -1, -2, \dots$ polovi prvog reda gama-funkcije s residuumima:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Neki identiteti koji uključuju gama-funkciju jesu:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) = \Gamma(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right]$$

($C = 0,577\,215\,7\dots$ je *Eulerova konstanta*)

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2 - z^2} \right)$$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \psi(x), \quad x > 0,$$

gdje je

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \frac{P(y) dy}{x+y}, \quad P(y) = [y] - y + \frac{1}{2}.$$

Posljednji oblik gama-funkcije zove se *Stirlingova formula*, a njena je važnost u tome što opisuje asimptotsko ponašanje gama-

-funkcije za velike vrijednosti x . Naime, funkcija ψ ima svojstvo

$$0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{8x}, \quad x > 0, \quad \text{pa je: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x} \left(\frac{e}{x} \right)^x \Gamma(x) \right] = \sqrt{2\pi},$$

odnosno: $\Gamma(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e} \right)^x$ za velike x .

Ta relacija omogućuje i približno računanje faktoriijela.

Beta-funkcija definirana je Eulerovim integralom prve vrste:

$$B(p, q) = \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} q > 0.$$

Beta-funkcija može se prikazati s pomoću gama-funkcija:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

a time se i područje definicije beta-funkcije proširuje na sve vrijednosti p i q različite od $0, -1, -2, \dots$. Iz takvog prikaza beta-funkcije te već navedene vrijednosti gama-funkcije $\Gamma(n+1) = n!$ slijedi:

$$\frac{1}{B(n, m)} = n \binom{n+m-1}{m-1}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

Besselove funkcije. Laplaceova jednačba prikazana u cilindričnom polarnom koordinatnom sustavu dovodi do tzv. Besselove jednačbe.

Besselova (ili cilindrična) funkcija prve vrste ν -tog reda definirana je redom:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

Ako je ν prirodan broj ili nula, J_ν je funkcija analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini. Općenito je to višeznačna funkcija s razgraničenjem u nuli (višeznačnost dolazi od faktora x^ν).

Za $\nu = -1, -2, -3, \dots$ u redu kojim se definira funkcija $J_\nu(x)$ pojavljuju se članovi koji u nazivniku imaju vrijednosti gama-funkcije u polovima. Podrazumijeva se da je $\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0$, zato što je

$$\lim_{z \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad \text{tada slijedi:}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

J_ν je rješenje Besselove diferencijalne jednačbe:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0.$$

Budući da se u toj jednačbi ν pojavljuje samo u kvadratu, J_ν i $J_{-\nu}$ su rješenja iste jednačbe pa opće rješenje, ako ν nije cijeli broj, ima oblik

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

(c_1 i c_2 su proizvoljne konstante).

Iz reda kojim se definira Besselova funkcija dokazuju se rekurentne relacije

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{x} \nu J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$J_{\nu+1}(x) = J_{\nu-1}(x) - 2J'_\nu(x);$$

odatle je

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x).$$

Iz posljednjih dviju jednačbi slijede relacije:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^\nu} J_\nu(x) \right) = -\frac{1}{x^{\nu+1}} J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x).$$

Uzastopnom primjenom ovih relacija dobiva se:

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left(\frac{1}{x^\nu} J_\nu(x) \right) = (-1)^m \frac{1}{x^{\nu+m}} J_{\nu+m}(x),$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m (x^\nu J_\nu(x)) = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x); \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Te relacije omogućuju da se iz poznavanja funkcije J_ν za neko ν odredi $J_{\nu+m}$ za bilo koji cijeli broj m .

Kao što će se vidjeti na primjeru titranja kružne membrane, važno je odrediti nul-točke Besselovih funkcija, tj. rješenja jednačbe $J_\nu(x) = 0$. U vezi s tim, ako je $\nu \geq 0$, vrijede slijedeće tvrdnje:

1) sve su nul-točke Besselove funkcije J_ν realne i ima ih prebrojivo mnogo;

2) ako je x_0 nul-točka od J_ν , tada je i $-x_0$ nul-točka od J_ν ;

3) svaka nul-točka $x_0 \neq 0$ od J_ν je jednostruka (tj. $J'_\nu(x_0) \neq 0$);

4) između dvije uzastopne pozitivne nul-točke funkcije J_ν nalazi se točno jedna nul-točka funkcije $J_{\nu+1}$ i točno jedna nul-točka funkcije $J_{\nu-1}$.

Besselovom diferencijalnom jednačbom izvodi se slijedeće svojstvo ortogonalnosti Besselovih funkcija: neka su ω_1 i ω_2 dvije pozitivne nul-točke funkcije J_ν , $\nu \geq 0$. Tada je

$$\int_0^1 x J_\nu(\omega_1 x) J_\nu(\omega_2 x) dx = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \frac{1}{2} J'_\nu(\omega) & \text{ako je } \omega_1 = \omega_2 = \omega. \end{cases}$$

Za Besselove funkcije cijelog indeksa jest:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

Iz tog reda i izraza za $J_{-n}(x)$ dokazuje se identitet:

$$e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.$$

Dakle, Besselove funkcije cijelog indeksa pojavljuju se kao koeficijenti u Laurentovom razvoju funkcije

$e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}$ kompleksne varijable z oko bitnog singulariteta $z = 0$. Funkcija $e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}$ zbog navedenog identiteta naziva se funkcija izvodnica Besselovih funkcija cijelog indeksa. Navedeni red konvergira za svako x i svako $z \neq 0$.

Metodama se teorije analitičkih funkcija iz funkcije izvodnice izvodi integralni prikaz Besselovih funkcija:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - x \sin \varphi)} d\varphi,$$

a odatle za realne x slijedi

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi.$$

Posljedica te relacije jest:

$$|J_n(x)| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, x \text{ realno.}$$

Besselove funkcije druge vrste ili Neumannove funkcije definirane su sa

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu},$$

ako ν nije cijeli broj, odnosno sa

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu},$$

ako je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Te su funkcije također rješenja Besselove jednačbe i s pomoću njih se može opće rješenje napisati kao

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x),$$

bez obzira da li je ν cijeli broj ili nije. Neumannove funkcije također zadovoljavaju jednakost

$$N_{-\nu}(x) = (-1)^\nu N_\nu(x); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

te rekurentne relacije Besselovih funkcija.

U upotrebi su i tzv. Besselove funkcije treće vrste:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x).$$

$H_\nu^{(1)}$ naziva se i *prva Hankelova funkcija*, a $H_\nu^{(2)}$ *druga Hankelova funkcija*.

Pri rješavanju problema titranja kružne membrane dobiven je sustav jednačbi u kojem treća jednačba nije elementarno rješiva. Ona se supstitucijom $R(\varrho) = y(\omega \varrho)$, $x = \omega \varrho$ svodi na Besselovu diferencijalnu jednačbu sa $\nu = n$. Opće je rješenje te jednačbe $c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x)$. Međutim, funkcija N_n nije neprekidna u ishodištu pa je kao rješenje prihvatljiva samo $J_n(x)$. Rubni uvjet daje

$$J_n(\omega r) = 0.$$

Ova jednačba ima prebrojivo mnogo pozitivnih rješenja, koja se numeriraju tako da je $0 < \omega_1^{(n)} < \omega_2^{(n)} < \omega_3^{(n)} \dots$. Slično kao pri titranju kružne membrane rješenje problema, uz zadane početne uvjete, traži se u obliku $u(\varrho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{nk} \cos \omega_k^{(n)} t \cos n\varphi + b_{nk} \sin \omega_k^{(n)} t \cos n\varphi + c_{nk} \cos \omega_k^{(n)} t \sin n\varphi + d_{nk} \sin \omega_k^{(n)} t \sin n\varphi] J_n(\omega_k^{(n)} \varrho)$. Početni su uvjeti

$$f(\varrho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} \cos n\varphi + c_{nk} \sin n\varphi) J_n(\omega_k^{(n)} \varrho)$$

$$g(\varrho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^{(n)} (b_{nk} \cos n\varphi + d_{nk} \sin n\varphi) J_n(\omega_k^{(n)} \varrho).$$

Relacije ortogonalnosti Besselovih funkcija omogućuju da se izračunaju koeficijenti:

$$a_{0k} = \frac{4}{\pi r^2 [J_0'(\omega_k^{(0)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varrho, \varphi) J_0(\omega_k^{(0)} \varrho)$$

$$b_{0k} = \frac{4}{\pi r^2 \omega_k^{(0)} [J_3'(\omega_k^{(0)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varrho, \varphi) J_0(\omega_k^{(0)} \varrho)$$

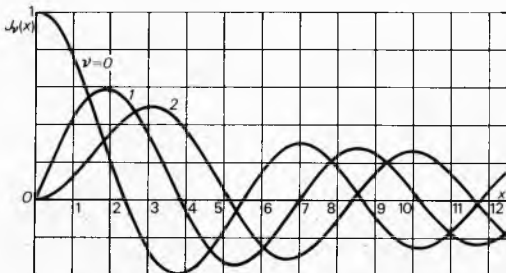
$$a_{nk} = \frac{2}{\pi r^2 [J_n'(\omega_k^{(n)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varrho, \varphi) \cos n\varphi J_n(\omega_k^{(n)} \varrho)$$

$$b_{nk} = \frac{2}{\pi r^2 \omega_k^{(n)} [J_n'(\omega_k^{(n)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varrho, \varphi) \cos n\varphi J_n(\omega_k^{(n)} \varrho)$$

$$c_{nk} = \frac{2}{\pi r^2 [J_n'(\omega_k^{(n)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi f(\varrho, \varphi) \sin n\varphi J_n(\omega_k^{(n)} \varrho)$$

$$d_{nk} = \frac{2}{\pi r^2 \omega_k^{(n)} [J_n'(\omega_k^{(n)} r)]^2} \int_0^r \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varrho, \varphi) \sin n\varphi J_n(\omega_k^{(n)} \varrho).$$

$$n, k = 1, 2, 3, \dots$$



Sl. 17. Besselove funkcije $J_0(x)$, $J_1(x)$ i $J_2(x)$

Uz dovoljno dobra svojstva funkcija f i g , red $u(\varrho, \varphi, t)$ s koeficijentima danim prethodnim relacijama konvergira i predstavlja funkciju koja zadovoljava jednačbu i rubne i početne uvjete.

Vrijednosti Besselovih funkcija, kao i njihove nul-točke, vrlo su detaljno tabelirane.

Grafički su Besselove funkcije J_0 , J_1 i J_2 prikazane na sl. 17.

Besselove funkcije polucijelog indeksa ($J_{n+\frac{1}{2}}$, n cijeli broj) pojavljuju se pri rješavanju valne jednačbe u prostornim polarnim koordinatama, pa su u vezi sa sfernim valovima. Zbog toga se često nazivaju *sferne Besselove funkcije*.

Upotrijebivši red koji definira Besselovu funkciju $J_\nu(x)$ za $\nu = \frac{1}{2}$ i vrijednost gama-funkcije $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ dobiva se

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \pi x$$

Slično je

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Odatle, i iz rekurentnih relacija za Besselove funkcije slijedi:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right),$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tako je npr.

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right),$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left(\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Modificirane Besselove funkcije definirane su sa

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

One zadovoljavaju jednačbu

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0,$$

i rekurentne relacije

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m (x^\nu I_\nu(x)) = x^{\nu-m} I_{\nu-m}(x),$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left(\frac{1}{x^\nu} I_\nu(x) \right) = \frac{1}{x^{\nu+m}} I_{\nu+m}(x).$$

Drugo linearno nezavisno rješenje navedene jednačbe koju zadovoljavaju modificirane Besselove funkcije jesu *Macdonaldove funkcije*:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi \nu} \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hipergeometrijska funkcija. Diferencijalna jednačba

$$x(x-1)y''(x) + [(a+\beta+1)x - \gamma]y'(x) + \alpha\beta y(x) = 0$$

naziva se *Gaussova* ili *hipergeometrijska jednačba*. Primjenjuje se u mnogim područjima fizike i tehnike, posebno pri rješavanju problema u fluidima. Ta je jednačba veoma važna zbog činjenice da se mnoge jednačbe drugog reda na nju svode supstitucijom. Vrijedi slijedeće tvrdnje:

I) Pretpostavi li se da funkcije p i q u jednačbi

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

zadovoljavaju slijedeća tri uvjeta:

a) p i q su analitičke funkcije u kompleksnoj ravni s ukupno najviše tri singulariteta x_1, x_2, x_3 ;

b) $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)p(x)$ i $(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2q(x)$ su funkcije analitičke u cijeloj kompleksnoj ravni; drugim riječima, x_1, x_2, x_3 su polovi najviše prvog reda za p i najviše drugog reda za q ;

c) funkcije $P(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} p\left(\frac{1}{x}\right)$ i $Q(x) = \frac{1}{x^4} q\left(\frac{1}{x}\right)$ su analitičke u ishodištu.

Tada se jednadžba svodi na hipergeometrijsku supstitucijom oblika

$$z = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad w(z) = z^r(z - 1)^s y\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right),$$

a, b, c, d, r, s su kompleksni brojevi; $ad - bc = 1$.

2) Neka funkcije p i q zadovoljavaju slijedeće uvjete:

a) p i q su analitičke u kompleksnoj ravni s ukupno najviše dva singulariteta x_1, x_2 ;

b) $(x - x_1)(x - x_2)p(x)$ i $(x - x_1)^2(x - x_2)^2q(x)$ su analitičke u cijeloj kompleksnoj ravni;

c) $P(x) = \frac{1}{x} p\left(\frac{1}{x}\right)$ i $Q(x) = \frac{1}{x^2} q\left(\frac{1}{x}\right)$ su analitičke u ishodištu.

Tada se ova poopcena jednadžba svodi na hipergeometrijsku supstitucijom oblika $z = ax + b$, $w(z) = z(z - 1)^s y\left(\frac{z - b}{a}\right)$,

a, b, r, s su kompleksni brojevi, $a \neq 0$.

Jedno je rješenje Gaussove jednadžbe, ako je $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ hipergeometrijska funkcija $F(a, \beta, \gamma; x)$. Ona je definirana tzv. hipergeometrijskim redom

$$F(a, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(a+n)\Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)} x^n.$$

Ako je $a = \beta = \gamma = 1$, to je običan geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Red

kojim je definirana hipergeometrijska funkcija konvergira za svaki kompleksan broj x s apsolutnom vrijednošću $|x| < 1$. Prema tome, hipergeometrijska funkcija analitička je u krugu $|x| < 1$. Ona se produljuje do višeznačne analitičke funkcije u cijeloj ravni s razgraništima u 1 i ∞ . Jedna je od formula za analitičko produženje te funkcije [za $\text{Re } \beta > 0$ i $\text{Re } (\gamma - \beta) > 0$]

$$F(a, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-a} dt.$$

Opće je rješenje jednadžbe u krugu $|x| < 1$

$$y(x) = c_1 F(a, \beta, \gamma; x) + c_2 x^{1-\gamma} F(a+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x)$$

$$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

U krugu $|x - 1| < 1$ opće je rješenje dano sa

$$y(x) = c_1 F(a, \beta, 1 + a + \beta - \gamma; 1 - x) + c_2 (1 - x)^{\gamma-a-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - a, 1 + \gamma - a - \beta; 1 - x);$$

$$a + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Napokon, u području $|x| > 1$ opće je rješenje

$$y(x) = c_1 x^{-a} F\left(a, 1 + a - \gamma, 1 + a - \beta; \frac{1}{x}\right) + c_2 x^{-\beta} F\left(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - a; \frac{1}{x}\right);$$

$$a - \beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Za izuzete vrijednosti parametara a, β, γ jedno od rješenja nije definirano ili su oba međusobno proporcionalna, pa se drugo linearno nezavisno rješenje mora posebno odrediti.

Jacobijevi polinomi. Ako je parametar β u hipergeometrijskoj funkciji negativan cijeli broj ili nula, iščezavaju svi koeficijenti u redu $F(a, \beta, \gamma; x)$ osim konačno mnogo njih:

$$F(a, -n, \gamma; x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(\gamma+k)} x^k,$$

tj. hipergeometrijska funkcija je u tom slučaju polinom. U vezi s tim definiraju se Jacobijevi polinomi $P_n^{(p,q)}$:

$$P_n^{(p,q)}(x) = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n!}.$$

$$\cdot F\left(p+q+n+1, -n, p+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Tu je $n = 0, 1, 2, \dots$, a p i q su kompleksni brojevi različiti od $-1, -2, -3, \dots$. $P_n^{(p,q)}$ je polinom n -tog stupnja. Iz definicije Jacobijevog polinoma i Gaussove jednadžbe slijedi da je $P_n^{(p,q)}$ rješenje jednadžbe

$$(1-x^2)y''(x) + [q-p-(p+q+2)x]y'(x) + n(p+q+n+1)y(x) = 0.$$

Štoviše, $P_n^{(p,q)}(x)$ je do na konstantni faktor jedino rješenje ove jednadžbe ograničeno za $x = 1$ i $x = -1$.

Budući da je $P_n^{(p,q)}$ polinom točno n -tog stupnja, lako se vidi da se svaki polinom Q m -tog stupnja može prikazati u obliku:

$$Q(x) = c_0 P_0^{(p,q)}(x) + c_1 P_1^{(p,q)}(x) + \dots + c_m P_m^{(p,q)}(x).$$

Takav je prikaz moguć za bilo koje čvrste vrijednosti za $p, q \neq -1, -2, \dots$. Koeficijenti $c_0, c_1, \dots, c_m$ su jednoznačno određeni sa Q (no, naravno, ovisno o izboru p i q).

Rodriguesova formula

$$P_n^{(p,q)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-p} (1+x)^{-q} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{p+n} (1+x)^{q+n}],$$

vrlo korisno prikazuje Jacobijeve polinome. Odatle se, ako je $p > -1$, $q > -1$, može izvesti slijedeće svojstvo ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p,q)}(x) P_m^{(p,q)}(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2^{p+q+1} \Gamma(p+n+1) \Gamma(q+n+1)}{n! (p+q+2n+1) \Gamma(p+q+n+1)} & m = n. \end{cases}$$

Svojstva Jacobijevih polinoma jesu još:

$$P_n^{(p,q)}(-x) = (-1)^n P_n^{(q,p)}(x)$$

$$(2n+p+q)(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^{(p,q)}(x) =$$

$$= 2(n+p)(n+q)P_n^{(p,q)}(x) + n[p-q-(2n+p+q)x]P_n^{(p,q)}(x) \\ (2n+p+q+1)[(2n+p+q)(2n+p+q+2)x+p^2-q^2]P_n^{(p,q)}(x) = \\ = 2(n+1)(n+p+q+1)(2n+p+q)P_{n+1}^{(p,q)}(x) + \\ + 2(n+p)(n+q)(2n+p+q+2)P_{n-1}^{(p,q)}(x)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n^{(p,q)}(x) = \frac{1}{2^m} \frac{\Gamma(n+m+p+q+1)}{\Gamma(n+p+q+1)} P_{n-m}^{(p+m, q+m)}(x)$$

$$(1-x)P_{n+1}^{(p+1, q)}(x) + (1+x)P_{n+1}^{(p+q+1, q)}(x) = 2P_n^{(p,q)}(x)$$

$$P_n^{(p,q)}(1) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{n! \Gamma(p+1)}; \quad P_n^{(p,q)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(q+n+1)}{n! \Gamma(q+1)}.$$

Funkcija izvodnica Jacobijevih polinoma jest

$$\frac{2^{p+q}}{R} (1-t+R)^{-p} (1+t+R)^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(p,q)}(x) t^n,$$

$$R = R(x, t) = \sqrt{1 - 2xt + t^2}.$$

Red konvergira za $|t| < 1$ i $-1 \leq x \leq 1$.

Legendreovi polinomi. Jacobijevi polinomi za $p = q = 0$ nazivaju se Legendreovi polinomi:

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Oni su rješenja Legendreove diferencijalne jednadžbe

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0.$$

Štoviše, vrijedi slijedeća tvrdnja:

Neka je $y \neq 0$ rješenje jednadžbe

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$$

ograničeno u točkama $x = 1$ i $x = -1$. Tada je $\lambda = n(n+1)$ za neko $n = 0, 1, 2, \dots$ i y je proporcionalno Legendreovom polinomu P_n .

Formule za Jacobijeve polinome veoma se pojednostavnjuju ako je $p = q = 0$ (a mogu se tada i mnogo jednostavnije dokazati). Tako je Rodriguesova formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Svojstvo ortogonalnosti jest

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$$

Nadalje rekurzivne relacije jesu:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x);$$

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x).$$

Funkcija izvodnica jest

$$\frac{1}{\sqrt{1-tx+tx^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (|t| < 1, \quad -1 \leq x \leq 1).$$

Svojstva Legendreovih polinoma, koja se izvedu iz gornjih jednakosti, jesu:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

$$P_n(1) = (-1)^n P_n(-1) = 1,$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ neparno} \\ (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} & n \text{ parno,} \end{cases}$$

$$P_{2n}'(x) = \sum_{k=1}^n (4n-4k+3)P_{2n-2k+1}(x),$$

$$P_{2n-1}'(x) = \sum_{k=1}^n (4n-4k+1)P_{2n-2k}(x),$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m'(x) dx = \begin{cases} 0 & n-m \text{ neparno} \\ n(n+1) & n-m \text{ parno, } n \leq m. \end{cases}$$

Integralni prikazi Legendreovih polinoma. Ako je f funkcija analitička u kompleksnoj ravnini, tada se njene derivacije mogu prikazati s pomoću Cauchyjeve formule:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi,$$

gdje je C neka kružnica sa središtem u x . Uzme li se $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^n}$, dobiva se pomoću Rodriguesove formule:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi.$$

To je tzv. **Schlöflijeva formula**. Odabere li se za C kružnica oko x radijusa $\sqrt{1-x^2}$, ($-1 < x < 1$), varijabla integracije je tada $\xi = x + \sqrt{1-x^2} e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, i tom supstitucijom $P_n(x)$ prelazi u oblik:

$$P_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sqrt{1-x^2} \sin \varphi - ix]^n d\varphi.$$

Odatle posebno slijedi da je $|P_n(x)| \leq 1$ za $-1 \leq x \leq 1$.

Iz svojstava ortogonalnosti i iz činjenice da je svaki polinom linearna kombinacija Legendreovih polinoma, može se dokazati da se svaka funkcija f na segmentu $-1 \leq x \leq 1$, koja zadovoljava određenim uvjetima, može prikazati konvergentnim redom Legendreovih polinoma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Drugo linearno nezavisno rješenje Legendreove diferencijalne jednačbe jest

$$Q_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{1}{x^{n+1}} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}; \frac{1}{x^2}\right).$$

Postoje i slijedeći prikazi za funkciju Q_n :

$$Q_n(x) = \frac{1}{(2x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)!}{(2k)!} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + k + \frac{3}{2}\right)} x^{-2k} \quad (|x| > 1)$$

$$Q_n(x) = \int_0^{\infty} [x + \sqrt{x^2-1} \operatorname{ch} t]^{-n-1} dt,$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x-t} dt.$$

Nekoliko početnih Legendreovih polinoma jesu:

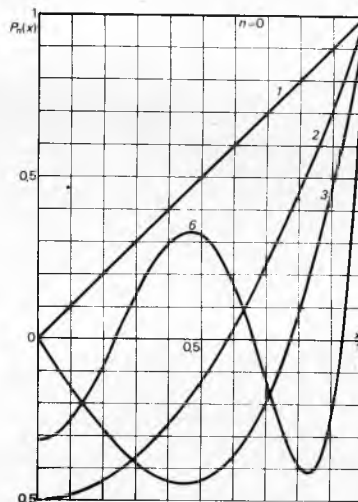
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Legendreovi polinomi P_0, P_1, P_2, P_3 i P_6 grafički su prikazani na sl. 18.



Sl. 18. Legendreovi polinomi $P_0(x)$, ..., $P_4(x)$ i $P_6(x)$

Čebiševljevi polinomi. Čebiševljevi polinomi prve vrste T_n do na faktor su specijalni slučaj Jacobijevih polinoma:

$$T_n(x) = \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

T_n je rješenje jednačbe

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0.$$

Supstitucijom $x = \cos t$ ta jednačba prelazi u

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Opće je rješenje te jednačbe funkcija $y(t) = A \cos nt + B \sin nt$. Prema tome izvorna jednačba ima za opće rješenje

$$y(x) = A \cos(n \arccos x) + B \sin(n \arccos x).$$

Moivreovom formulom $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$ može se dokazati da je

$$\cos(n \arccos x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n}{2(n-k)} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k},$$

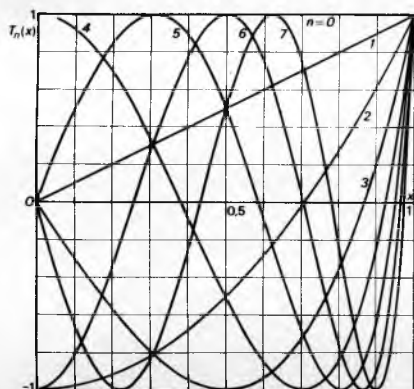
$$\sin(n \arccos x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k-1}$$

Budući da polinom $T_n(x)$ mora imati oblik općeg rješenja i jer je $\cos(n \arccos x)$ polinom, a $\sin(n \arccos x)$ nije, slijedi da je $T_n(x) = A_n \cos(n \arccos x)$. Međutim, $T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = 1$. Prema tome je $A_n = 1$.

Dakle, Čebiševljevi polinomi prve vrste mogu se prikazati

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Grafički su Čebiševljevi polinomi prve vrste $T_0, T_1, \dots, T_7$ prikazani na sl. 19.



Sl. 19. Čebiševljevi polinomi $T_0(x), \dots, T_7(x)$

Čebiševljevi polinomi druge vrste definirani su sa

$$U_n(x) = \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!} P_n^{(1/2, 1/2)}(x) = (n+1) F\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Oni zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0,$$

odakle se slično kao u prethodnom problemu izvodi

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

Iz svojstava Jacobijevih polinoma ili direktno iz konačnih izraza za $T_n(x)$ i $U_n(x)$ izvode se slijedeće relacije:

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}],$$

$$U_n(x) = \frac{(-2)^n (n+1)!}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+1/2}],$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x),$$

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x),$$

$$T_n(x) = U_n(x) - x U_{n-1}(x),$$

$$(1-x^2) U_{n-1}(x) = x T_n(x) - T_{n+1}(x),$$

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) t^k,$$

$$(|t| < 1, -1 \leq x \leq 1),$$

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k, \quad (|t| \leq 1, -1 \leq x \leq 1).$$

Relacije ortogonalnosti jesu:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \end{cases}$$

Iz relacija dobivenih s pomoću Moivreovih formula te iz konačnih izraza za $T_n(x)$ i $U_n(x)$ slijede još po dva eksplicitna prikaza Čebiševljevih polinoma:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n],$$

$$U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}},$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n}{2(n-k)} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k},$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k+1}{k} (2x)^{n-2k}.$$

Iz relacija ortogonalnosti slijedi da su u razvoju funkcije po Čebiševljevim polinomima

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n(x),$$

koefficienti dani sa

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x) f(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma jesu:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x, \quad U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.$$

Pridružene Legendreove i kugline funkcije. Pridružene Legendreove funkcije P_k^m definirane su relacijom

$$P_k^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}} [(x^2-1)^k]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Posebno je $P_k^0(x) = P_k(x)$. Veza s Jacobijevim polinomima je slijedeća:

$$P_k^m(x) = \frac{(k+m)!}{2^m k!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_{k-m}^{(m,m)}(x).$$

Odatle slijede relacije ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & n = k \end{cases}$$

Nadalje, uvrštavanjem izraza $P_n^m(x)$ u Jacobijevu jednadžbu dobije se da je pridružena Legendreova funkcija rješenje jednadžbe

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0.$$

Za $m=0$ ta se jednadžba svodi na Legendreovu jednadžbu.

Za pridružene Legendreove funkcije vrijede rekurzivne relacije:

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x),$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}P_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (n+1)xP_{n-1}^m(x).$$

Pomoću tih funkcija moguće je riješiti Laplaceovu jednadžbu danu u uvodu. Treća jednadžba iz sustava jednadžbi na koje je Laplaceova jednadžba rastavljena, supstitucijom $\cos \vartheta = x$, $y(\cos \vartheta) = \Theta(\vartheta)$, prelazi u

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0.$$

Isto kao i kod Legendreove jednadžbe vrijedi slijedeća tvrdnja:

Ako je $y \neq 0$ rješenje ove jednadžbe ograničeno u $x=1$ i $x=-1$, tada je $\lambda = n(n+1)$ za neko $n = m, m+1, m+2, \dots$ a y je proporcionalno pridruženoj Legendreovoj funkciji P_n^m .

Budući da je zahtjev ograničenosti sadržan u problemu, to je $\lambda = n(n+1)$.

Tada je opće rješenje druge jednadžbe u sustavu jednadžbi $R(r) = A r^n + B r^{-n-1}$. Zahtjev ograničenosti u ishodištu daje $B=0$, tj. R je proporcionalno sa r^n . Nadalje, opće rješenje prve jednadžbe jest linearna kombinacija funkcija $\sin m\varphi$ i $\cos m\varphi$, a može ga se pisati i kao $\Phi(\varphi) = C e^{im\varphi} + D e^{-im\varphi}$. Prema tome, rješenje Laplaceove jednadžbe uz postavljeni uvjet tražit će se u obliku

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} r^n Y_n^m(\vartheta, \varphi),$$

gdje su:

$$Y_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n, -n+1, \dots, n.$$

Supstitucijom $x = \cos \vartheta$ relacije ortogonalnosti pridruženih Legendreovih funkcija prelaze u

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_k^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2 & (n+m)! \\ 2n+1 & (n-m)! \end{cases}, \quad n = k$$

Nadalje vrijedi

$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{-il\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & l \neq m \\ 2\pi & l = m \end{cases}.$$

Iz posljednje dvije relacije slijede relacije ortogonalnosti za funkcije Y_n^m :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \sin \vartheta Y_n^m(\vartheta, \varphi) \overline{Y_k^l(\vartheta, \varphi)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq l \text{ ili } n \neq k \\ 4\pi (n+|m|)! & m = l; n = k \\ (2n+1)(n-|m|)! \end{cases}$$

(potez označava kompleksno konjugiranje).

Rubni uvjet zadan u problemu i relacije ortogonalnosti omogućuju da se izračunaju koeficijenti u redu koji je rješenje Laplaceove jednadžbe:

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \sin \vartheta F(\vartheta, \varphi) \overline{Y_n^m(\vartheta, \varphi)}.$$

Opet se, kao i u problemima titranja pravokutne i kružne membrane, može dokazati da, uz izvjesne uvjete na funkciju $F(\vartheta, \varphi)$, red konvergira prema funkciji koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu i zadani uvjet.

Homogeni polinom P n -tog stupnja u varijablama x, y, z naziva se *harmonijski polinom*, ako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Uvrste li se u P polarne koordinate r, ϑ, φ , zbog homogenosti dobiva se $P(x, y, z) = r^n Y(\vartheta, \varphi)$. Svaka tako dobivena funkcija Y zove se kuglina funkcija n -tog reda. Kugline funkcije n -tog reda sve su točno linearne kombinacije funkcija Y_n^m ($m = -n, -n+1, \dots, n$):

$$Y(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n c_m Y_n^m(\vartheta, \varphi).$$

Posebno, među kuglinim funkcijama n -tog reda ima točno $2n+1$ linearno nezavisnih.

Laguerreovi polinomi. Laguerreovi polinomi definirani su sa

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Iz definicije slijedi

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} x^k,$$

i vidi se da je L_n polinom n -tog stupnja. S pomoću tog izraza može se dokazati slijedeći razvoj:

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(x) t^n \quad (|t| < 1).$$

Nadalje vrijede rekurzivne relacije:

$$(n+1)L_n(x) = (n+1)L'_n(x) - L'_{n+1}(x),$$

$$(2n-x+1)L_n(x) = L_{n+1}(x) + n^2 L_{n-1}(x).$$

Kombinacijom tih relacija izvodi se da L_n zadovoljava jednadžbu

$$x y''(x) + (1-x)y'(x) + n y(x) = 0.$$

Iz navedenog razvoja slijedi:

$$\frac{1}{(1-t)(1-s)} e^{-x} e^{-\frac{tx}{1-t}} e^{-\frac{sx}{1-s}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n! m!} e^{-x} L_n(x) L_m(x).$$

Integrira li se lijeva stranu po x od 0 do ∞ , dobiva se rezultat:

$$\frac{1}{1-ts} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz $t^n s^m$ u tom redu i u redu koji se dobije integracijom desne strane, slijede relacije ortogonalnosti za Laguerreove polinome:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ (n!)^2 & n = m \end{cases},$$

Prema tome, u razvoju funkcije f po Laguerreovim polinomima:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$$

koeficijenti su dani sa

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_n(x) dx.$$

Kod izračunavanja integrala u ovoj relaciji, često se može upotrijebiti metoda analogna dokazu relacija ortogonalnosti.

U primjeni, posebno u kvantnoj fizici, susreću se i tzv. *pridruženi Laguerreovi polinomi*:

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

L_n^m je polinom $(n-m)$ -tog stupnja i rješenje je diferencijalne jednadžbe

$$x y''(x) + (m+1-x)y'(x) + (n-m)y(x) = 0.$$

Iz definicije pridruženih Laguerreovih polinoma i iz svojstava polinoma L_n izvode se relacije:

$$\frac{(-1)^m}{(1-t)^{m+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} L_{m+n}^m(x) t^n;$$

$$(n+1)L_n^m(x) = (n+1) \frac{d}{dx} L_n^m(x) - \frac{d}{dx} L_{n+1}^m(x),$$

$$(2n-m-x+1)L_n^m(x) = n^2 L_{n-1}^m(x) + \frac{n-m+1}{n+1} L_{n+1}^m(x).$$

Relacije ortogonalnosti slijede slično kao i za obične Laguerreove polinome:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} L_{m+n}^m(x) L_{m+k}^m(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \frac{[(m+n)!]^3}{n!} & k = n \end{cases}.$$

Hermiteovi polinomi. Definicija je Hermiteovih polinoma

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

H_n je rješenje Hermiteove diferencijalne jednadžbe:

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0.$$

Ta se jednadžba pojavljuje kod problema harmoničkog oscilatora u kvantnoj mehanici. Neka svojstva Hermiteovih polinoma jesu:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \end{cases}.$$

Jacobijeve eliptičke funkcije. Funkcija definirana integralom

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < k < 1,$$

naziva se *nepotpuni eliptički integral prve vrste*, a broj k zove se *modul* od F . Promatrana kao funkcija kompleksne varijable φ , $F(\varphi, k)$ je višeznačna (točnije ∞ -značna) analitička funkcija. Njoj inverzna funkcija označava se sa $\text{am}(u, k)$ ili, kraće, $\text{am}(u)$:

$$\varphi = \text{am}(u), \quad u = F(\varphi, k),$$

$\text{am}(u)$ zove se *amplituda* od u . To je opet ∞ -značna analitička funkcija s razgraništima:

$$u_{m,n} = 2mK + (2n+1)iK', \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

gdje je

$$K = K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

$$K' = K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + k^2 \sin^2 t}}.$$

$\text{am}(u)$ je i periodička funkcija s periodom $4iK'$:

$$\text{am}(u + 4iK') = \text{am}(u).$$

Dalja su joj svojstva

$$\text{am}(-u) = -\text{am}(u); \quad \text{am}(u + 2K) = \pi + \text{am}(u);$$

$$\text{am}(u + 2iK') = \pi - \text{am}(u).$$

Jacobijeve eliptičke funkcije definiraju se sa

$$\text{sn } u = \sin(\text{am}(u)); \quad \text{cn } u = \cos(\text{am}(u));$$

$$\text{dn } u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}.$$

Ako se želi istaći ovisnost o modulu k , piše se $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$ i $\text{dn}(u, k)$; sn se često naziva *eliptički sinus*, a cn *eliptički kosinus*; sn, cn i dn su (jednoznačne) analitičke funkcije s polovima u točkama u_{mn} . Nadalje, one su i dvostruko periodičke:

$$\text{sn}(u + 4K) = \text{sn}(u + 2iK') = \text{sn } u,$$

$$\text{cn}(u + 4K) = \text{cn}(u + 2K + 2iK') = \text{cn } u,$$

$$\text{dn}(u + 2K) = \text{dn}(u + 4iK') = \text{dn } u.$$

Funkcije sn, cn i dn pojavljuju se u nekim problemima mehanike, npr. kod gibanja asimetričnog zvrka, kome su sva tri momenta inercije međusobno različita.

Neke relacije za Jacobijeve eliptičke funkcije jesu:

$$\text{sn}(-u) = -\text{sn } u, \quad \text{cn}(-u) = \text{cn } u, \quad \text{dn}(-u) = \text{dn}(u);$$

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1;$$

$$\text{sn}^2 u = \frac{1 - \text{cn } 2u}{1 + \text{dn } 2u}, \quad \text{cn}^2 u = \frac{\text{cn } 2u + \text{dn } 2u}{1 + \text{dn } 2u},$$

$$\text{dn}^2 u = \frac{\text{dn } 2u + k^2 \text{cn } 2u + 1 - k^2}{1 + \text{dn } 2u};$$

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn } u \text{cn } v \text{dn } v + \text{sn } v \text{cn } u \text{dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v},$$

$$\text{cn}(u+v) = \frac{\text{cn } u \text{cn } v - \text{sn } u \text{sn } v \text{dn } u \text{dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v},$$

$$\text{dn}(u+v) = \frac{\text{dn } u \text{dn } v - k^2 \text{sn } u \text{sn } v \text{cn } u \text{cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v};$$

$$\frac{d}{du} \text{am}(u) = \text{dn } u, \quad \frac{d}{du} \text{sn } u = \text{cn } u \text{dn } u,$$

$$\frac{d}{du} \text{cn } u = -\text{sn } u \text{dn } u, \quad \frac{d}{du} \text{dn } u = -k^2 \text{sn } u \text{cn } u,$$

$$\left(\frac{d}{du} \text{sn } u\right)^2 = (1 - \text{sn}^2 u)(1 - k^2 \text{sn}^2 u),$$

$$\left(\frac{d}{du} \text{cn } u\right)^2 = (1 - \text{cn}^2 u)(1 - k^2 + k^2 \text{cn}^2 u),$$

$$\left(\frac{d}{du} \text{dn } u\right)^2 = (1 - \text{dn}^2 u)(\text{dn}^2 u + 1 - k^2).$$

Napokon je, za granične vrijednosti modula k :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \text{sn}(u, k) = \sin u, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \text{cn}(u, k) = \cos u, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \text{dn}(u, k) = 1;$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \text{sn}(u, k) = \text{th } u, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \text{cn}(u, k) = \lim_{k \rightarrow 1} \text{dn}(u, k) = \frac{1}{\text{ch } u}.$$

H. Kraljević

Tendencije razvoja funkcionalne analize. Dinamičan razvoj moderne matematike doveo je do stvaranja velikog broja vrlo apstraktnih pojmova koji su potrebni da se analizira logička struktura pojedinih matematičkih disciplina. Pri tom se pojavljuju strukturalne podudarnosti koje omogućuju dublje razumijevanje i međusobno obogaćivanje pojedinih dijelova matematike. U okviru toga dobio je i pojam funkcije svoj sadašnji apstraktni sadržaj kao preslikavanje jednog skupa u drugi. Time su, napose, obuhvaćeni i pojmovi operatora i funkcionala, koji su centralni u *funkcionalnoj analizi*, dalekosežno razvijenoj matematičkoj disciplini što se nadovezala na teoriju integralnih jednadžbi. Pored toga se uvelike istražuju svojstva specijalnih funkcija i ispituju nove takve funkcije koje se pojavljuju u sve kompliciranijim primjenama matematike, uz svestranu upotrebu elektoničkih računskih uređaja. Takav se razvoj i dalje nastavlja i

dovest će do sve dubljih i dalekosežnijih matematičkih saznanja i do sve opsežnijih i svestranijih mogućnosti primjene matematike u različitim područjima ljudskih djelatnosti, a osobito u tehničkim znanostima.

D. Blanuša

LIT.: *E. W. Hobson*, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge, I, 1927, II, 1926. — *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig-Berlin, I, 1928, II, 1929. — *E. W. Hobson*, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931. — *E. T. Whittaker, G. N. Watson*, A course of modern analysis, Cambridge 1935. — *E. Goursat*, Cours d'analyse mathématique, Paris 21942. — *И. И. Привалов*, Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва - Ленинград 1945. — *G. Valiron*, Théorie des fonctions, Paris 21948. — Isti, Equations fonctionnelles. Applications, Paris 1950. — *Ž. Marković*, Uvod u višu analizu, Zagreb, I-1949, II-1952. — *Z. Nehari*, Conformal mapping, New York 1952. — *H. Bateman*, Higher transcendental functions I, II, III, New York 1952-55. — *E. Hille*, Analytic function theory I, New York 1959. — *J. Favard*, Cours d'analyse de l'école polytechnique, Paris, I, 1960, II, 1960, III, 1962. — *Janke, Emde, Lösch*, Tafeln höherer Funktionen, Stuttgart 1960. — *H. Cartan*, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs

variables complexes, Paris 1961. — *A. Hurwitz, R. Courant*, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Berlin 1964. — *J. W. Dettman*, Applied complex variables, New York 1965. — *Д. С. Кузнецов*, Специальные функции, Москва 1965. — *D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković*, Specijalne funkcije, Beograd 1965. — *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представлений групп, Москва 1965. — *L. V. Ahlfors*, Complex analysis, New York 21966. — *J. Dugan*, The elements of Complex analysis, New York 1968. — *M. Heins*, Complex function theory, New York 1968. — *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, том III, часть II, Москва 1969. — *Б. В. Шабат*, Введение в комплексный анализ, Москва 1969. — *R. B. Ash*, Complex variables, New York 1971. — *Градиштейн-Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва 1971. — *F. P. Greenleaf*, Introduction to complex variables, Philadelphia 1972. — *M. Lavrentiev, B. Chabat*, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Moskva 1972. — *J. B. Conway*, Functions of one complex variable, New York 1973. — *D. S. Mitrinović*, Kompleksna analiza, Beograd 31973. — *D. Blanuša*, Viša matematika, Zagreb, I/1, 1970, I/2, 1965, II/1, 1969, II/2, 1974. — *P. Henrici*, Applied and computational complex analysis, New York 1974. — *S. Mardesić*, Matematička analiza u *n*-dimenzionalnom prostoru, I, Zagreb 1974. — *S. Kurepa*, Matematička analiza, Zagreb, I, 1970, II, 1971, III, 1975.

D. Blanuša P. Javor H. Kraljević D. Mitrović

KONAC V SVESKA

TISKANJE DOVRŠENO 31. V 1976.

•Prema mišljenju Sekretarijata za prosvjetu, kulturu i fizičku kulturu S.R.H. broj 3435/1972, od 2. 8. 1972. ovo izdanje ne podliježe plaćanju osnovnog poreza na promet proizvoda (čl. 36, stav 1, točka 7. Zakona).•

