Najčešća su klizanja površinskog raspadnutog materijala, te klizanja u lutitskim sedimentima (gline, lapori, škriljavci). Nestabilnost čvrstih stijena pojavljuje se uzduž slojnih ploha, pukotina ili pri nepovoljno položenim slojevima s uološcima glina ili lapora.

Veliko značenje imaju inženjerskogeološki radovi u *gradnji naselja i većih industrijskih objekata.* Tu su važni prirodni uvjeti mjesta i reljef, inženjerskogeološke i hidrogeološke karakteristike tla, eventualna aktivnost fizičko-geoloških procesa. Područje s pogodnim prirodnim uvjetima ne zahtijeva velike pripremne radove. Nepovoljni prirodni uvjeti (klizišta, jaruge, brežuljkasti reljef, visoka razina podzemne vode, mogućnost plavljenja površinskim vodama) znatno otežavaju inženjersku pripremu terena za gradnju, a mogu je i potpuno onemogućiti.

Jugoslavija se ubraja u seizmički najaktivnija područja u Evropi, pa zato pri projektiranju objekata valja paziti na moguće djelovanje potresa. Na područjima istog predvidivog stupnja intenziteta potresa često postoje tla, koja se međusobno bitno razlikuju po svojim inženjerskogeološkim, hidrogeološkim, morfološkim i geomehaničkim svojstvima. Lokalne inženjerskogeološke, hidrogeološke i morfološke prilike mnogo utječu na veličinu seizmičkih opterećenja, pa su inženjersko-geološka istraživanja nužna u racionalnom projektiranju i građenju građevinskih objekata.

A. Magdalenić

LIT.: *D. P. Krynine, W. R. Judd,* Principles of engineering geology and geotechnics, McGraw-Hill Comp. Inc., New York-Toronto-London 1957. — *P. C. Badgley,* Structural methods for the exploration geologist, Harper & Brothers, Publishers, New York 1959. — *A. Holmes,* Principles of geology, Thomas Nelson, London 1965. — *S. V. Medvedev,* Inženjerska seizmologija (prijevod), Građevinska knjiga, Beograd 1965. — *P. N. Panjukov,* Inženjerska geologija, Građevinska knjiga, Beograd 1965. — *N. Milojević,* Hidrogeologija, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1968. — *T. W. Lambe, R. V. Whitman,* Soil mechanics, John Wiley Comp. Sons, New York-London-Sidney-Toronto 1969. — *M. Herak, V. T. Stringfield,* Karst, karst regions of the northern hemisphere, Elsevier Publishing Company, Amsterdam-London-New York 1972. — *M. Tajder, M. Herak,* Petrologija i geologija, Školska knjiga, Zagreb [4]1972. — *A. Cox,* Plate tectonics and geomagnetic reversals, W. T. Freeman Comp., San Francisco 1973. — *M. Herak,* Geologija, struktura, dinamika i razvoj Zemlje, Školska knjiga, Zagreb [2]1973. — *C. K. Seyfert, L. A. Sirkin,* Earth history and plate tectonics, Harper & Row Publishers, New York 1973. — *E. E. Wahlstrom,* Dams fundation and reservoir sites, Elsevier Publishing Company, Amsterdam--Oxford-New York 1974. — *A. Zaruba, V. Mencl,* Engineering geology, Elsevier Publishing Company, Amsterdam-New York 1976.

S. Bahun A. Magdalenić

GEOMETRIJA, dio matematike u kojem su prvobitno bila proučavana svojstva prostora i objekata u prostoru. Nastala je iz problema u praksi kao što su npr. mjerenje zemljišta i izračunavanje oplošja i obujma različitih tijela. U daljem razvitku, geometrija je obuhvatila mnogo šire područje problema, praktičnih i apstraktnih, koji mogu, ali ne moraju uvijek, imati praktičnu primjenu. Prvobitno se geometrija dijelila na planimetriju (geometriju ravnine) i stereometriju (geometriju prostora).

Najjednostavniji pojmovi i činjenice iz geometrije bili su poznati već u starom Egiptu i Babilonu oko ←2000. god. Te su činjenice bile formulirane u obliku pravila, čiji dokazi nisu dani. Od ←VII st. geometrija se razvija uglavnom u staroj Grčkoj. Različiti pojmovi i činjenice postepeno se povezuju u sustavnu cjelinu i počinje njihova sistematizacija. U to su vrijeme načinjeni i prvi, relativno strogi dokazi geometrijskih tvrdnji. Geometrija postaje znanost.

Euklid (←365? do ←300?) u djelu *Elementi* povezao je gotovo sve dotadašnje znanje iz geometrije u logičnu cjelinu i postavio znanstvene temelje razvitku geometrije. U tom je djelu geometrija zasnovana kao deduktivna znanost. Euklid je najprije opisao osnovne pojmove, definirao izvedene pojmove, formulirao osnovne pretpostavke (postulate i aksiome), a zatim redom dokazao tvrdnje (poučke), kojima se opisuju svojstva geometrijskih pojmova (pravac, poligon, kružnica, geometrijska tijela).

Rješavajući neke konstruktivne probleme, stari su Grci pronašli krivulje 2. stupnja (elipsa, parabola i hiperbola), čija je svojstva vrlo podrobno istražio Apolonije (←262? do ←190?), koristeći se pri tom i metodom koordinata, iz koje se kasnije razvila analitička geometrija. Arhimed (←287? do ←212) postavio je temelje infinitezimalnog računa. U radovima Grka nalaze se i počeci *trigonometrije.* Njihova je matematika došla u Evropu posredstvom arapskih srednjovjekovnih matematičara.

U XVII st. radovima R. Descartesa (1596—1650) i P. Fermata (1601—1665) nastaje *analitička geometrija* ravnine i prostora, a radovima L. Eulera (1707—1783), G. Mongea (1746—1818) i K. F. Gaussa (1777—1855) *diferencijalna geometrija.* U tim se granama geometrije svojstva geometrijskih objekata istražuju metodom koordinata i primjenom algebre, odnosno diferencijalnog računa.

G. Monge je postavio i temelje za *deskriptivnu geometriju,* u kojoj se svojstva geometrijskih objekata proučavaju metodama projiciranja i grafičkim metodama. Polazeći od metoda projiciranja, razvili su J. V. Poncelet (1788—1867), J. Steiner (1796—1863), a zatim i C. H. von Staudt (1798—1867), *projektivnu geometriju,* u kojoj se za razliku od tzv. metričkih svojstava proučavaju samo tzv. projektivna svojstva, služeći se pri tom i radovima G. Desarguesa (1593—1662) i B. Pascala (1623—1662).

Još od Euklida pokušavalo se njegov 5. postulat dokazati uz pomoć preostalih postulata i aksioma, jer se zbog složenosti 5. postulata opravdano očekivala mogućnost tog dokaza. Dovoljno je reći da je Euklidov 5. postulat u biti ekvivalentan s Hilbertovim aksiomom o postulatima. Međutim su, u prvoj polovini XIX st., N. I. Lobačevski (1792—1856), J. Bolyai (1802—1860) i K. F. Gauss pokazali da se 5. postulat ne može dokazati, jer se zamjenom tog postulata suprotnom tvrdnjom dobiva nova, tzv. *neeuklidska* ili *hiperbolička geometrija,* koja je isto tako neproturječna kao do tada jedina poznata *euklidska geometrija.* Ta spoznaja imala je veliki utjecaj na budući razvitak ne samo geometrije nego i cijele matematike, pa i fizike. Pokazalo se da pojam prostora nije aprioran, nego da su logički mogući različiti pojmovi prostora. Odgovor na pitanje, koja geometrija bolje predočuje svojstva fizikalnog prostora, ne može dati matematika, nego eventualno samo fizikalni pokus. H. Grassmann (1809—1877) i L. Schläfli (1814—1894) zasnivaju *višedimenzionalnu geometriju,* u kojoj se algebarske jednadžbe tumače kao predstavnici geometrijskih objekata u višedimenzionalnom prostoru, analogno kao što se to čini u analitičkoj geometriji ravnine i prostora. Grassmannov rad potiče razvitak *vektorskog računa,* za koji je zaslužan i W. R. Hamilton (1805—1865). B. Riemann (1826—1866) poopćuje ideje Gaussa, Lobačevskog i Grassmanna i izgrađuje pojam *n-dimenzionalnog analitičkog prostora,* kojem su do tada poznati prostori posebni slučajevi. B. Riemann pretpostavlja da je metrika fizikalnog prostora ovisna o rasporedu materije u njemu, pa je po tome preteča Einsteinove opće teorije relativnosti. Osim toga, Riemannov rad je potakao razvitak *tenzorskog računa* i tzv. *Riemannove* i mnogih drugih još općenitijih geometrija.

Radovi E. Beltramija (1835—1900), a osobito A. Cayleyja (1821—1895) i F. Kleina (1849—1925), pokazali su da se za hiperboličku geometriju mogu naći modeli unutar euklidske, odnosno projektivne geometrije. Osim toga su J. V. Poncelet, A. Cayley i F. Klein pokazali da se i euklidska i različite druge geometrije koje su se u to vrijeme razvile, kao što su afina, ekviformna, eliptička i druge, mogu izvesti kao posebni slučajevi projektivne geometrije. Polazeći od te činjenice, F. Klein je formulirao princip, *tzv. Erlangenski program,* po kojem se mogu razvrstati različite geometrije.

Pitanje potpunog aksiomatskog zasnivanja geometrije, a osobito euklidske geometrije, ostalo je otvoreno i nakon Euklidovih Elemenata. Pokazalo se, naime, da se i Euklid pri dokazivanju nekih poučaka služi činjenicama, koje smatra očiglednim, pa se na njih niti ne poziva. To su uglavnom činjenice koje se odnose na pojam poretka, neprekidnosti i sukladnosti. Tijekom XIX st. pojam neprekidnosti logički su zasnovali K. Weierstrass (1815—1897), J. R. W. Dedekind (1831—1916) i G. Cantor (1829—1920), a pojam poretka i sukladnosti M. Pasch (1843—1930). Napokon D. Hilbert (1862—1943) svojim djelom *Osnove geometrije* daje potpuno aksiomatski zasnivanu euklidsku i hiperboličku geometriju.

Tijekom XX st. razvile su se i druge nove grane geometrije, kao npr. *algebarska geometrija* kao nadgradnja analitičke geometrije, *integralna geometrija,* teorija *konveksnih tijela,* teorija *konačnih geometrija* i dr. Geometrija se tijesno preplića s drugim područjima matematike, a iz nje se izdvajaju samostalne discipline kao npr. *topologija.*

Novi pristup problemu zasnivanja različitih geometrija dao je H. Bachmann (1909—). On zasniva geometriju na osnovnom pojmu simetrije.

Na kraju treba navesti i najvažnije doprinose jugoslavenskih matematičara razvitku geometrije. V. Varićak (1865—1942) dao je znatne priloge hiperboličkoj geometriji, a D. Blanuša (1903—) priloge teoriji smještavanja različitih prostora određenih dimenzija u prostore viših dimenzija.

Aksiomatsko zasnivanje euklidske i hiperboličke geometrije. Već je na početku rečeno da je Euklid prvi pokušao dati aksiomatske temelje geometrije, ali mu to nije u potpunosti uspjelo. Prvo potpuno aksiomatsko zasnivanje geometrije dao je D. Hilbert. Na taj je način geometrija postala strogo deduktivna znanost, kod koje su jasno istaknute osnovne pretpostavke (aksiomi), a sve se ostale tvrdnje onda dokazuju kao stavci. Promatraju se tri vrste osnovnih elemenata: *točke, pravci* i *ravnine.* Uobičajeno je da se točke označavaju velikim, pravci malim latiničkim i ravnine malim grčkim slovima. Promatraju se tri osnovne relacije: pripadanje, biti između, sukladnost. Relacija *pripadanja* povezuje točke s pravcima i ravninama. Kaže se da točka A pripada pravcu a, odnosno ravnini α, a osim toga uobičajeno je reći da pravac a, odnosno ravnina α prolazi kroz točku A. Definira se i pojam pripadanja za pravce i ravnine. Kaže se da pravac a pripada ravnini α ili da ravnina α prolazi kroz pravac a, ako svaka točka koja pripada pravcu a, pripada i ravnini α. Relacija *biti između* povezuje po tri različite točke, koje pripadaju istom pravcu. Ako su točke A, B, C u toj relaciji, tada se kaže da je točka B između točaka A i C. Relacija *sukladnosti* povezuje izvedene pojmove, koji će biti kasnije definirani: po dvije dužine ili po dva kuta. Aksiomi se mogu u načelu izreći i za osnovne pojmove, ali je to prilično složeno. Prikladnije je uvesti aksiome postepeno (po skupinama), pa na temelju već izrečenih aksioma definirati neke nove pojmove, koji se zatim upotrebljavaju u daljim aksiomima. Prema Hilbertu uobičajeno je uzeti pet skupina aksioma.

Prva je skupina aksioma (8 *aksioma pripadanja*): 1. Za bilo koje dvije različite točke A, B postoji jedan i samo jedan pravac, koji prolazi kroz svaku od tih točaka. 2. Svaki pravac prolazi kroz bar dvije različite točke. 3. Postoje bar tri točke, koje ne pripadaju istom pravcu. 4. Za bilo koje tri točke A, B, C, koje ne pripadaju istom pravcu, postoji jedna i samo jedna ravnina, koja prolazi kroz svaku od tih točaka. 5. Svaka ravnina prolazi bar kroz jednu točku. 6. Ako dvije različite točke pripadaju i pravcu a i ravnini α, tada pravac a pripada ravnini α. 7. Ako postoji točka A, koja pripada ravninama α, β, tada postoji bar još jedna točka B, različita od A, koja pripada ravninama α, β. 8. Postoje bar četiri točke koje ne pripadaju istoj ravnini.

Pravac iz 1. aksioma zove se *spojnica* točaka A, B i označava se sa AB. Ravnina iz 4. aksioma zove se *spojna ravnina* točaka A, B, C i označava se sa ABC. Na temelju prve skupine aksioma mogu se dokazati neke jednostavne tvrdnje. Za dva različita pravca a, b, koji pripadaju istoj ravnini, ili postoji jedna i samo jedna točka C, koja pripada tim pravcima, ili ne postoji ni jedna takva točka. U prvom slučaju kaže se da se pravci a, b *sijeku* u točki C ili da je C *sjecište* pravaca a, b i piše se $C = a \cap b$, a u drugom slučaju kaže se da su pravci a, b *paralelni* i piše se $a \parallel b$. Za dvije različite ravnine α, β ili postoji jedan i samo jedan pravac c, koji pripada tim ravninama, ali tada ne postoji ni jedna točka koja bi pripadala ravninama α, β, a da ne bi pripadala pravcu c, ili ne postoji ni jedna točka koja pripada ravninama α, β. U prvom slučaju kaže se da se ravnine α, β *sijeku* po pravcu c ili da je c *presječnica* ravnina α, β i piše se $c = \alpha \cap \beta$, a u drugom slučaju kaže se da su ravnine α, β *paralelne* i piše se $\alpha \parallel \beta$. Za ravninu α i pravac b, koji ne pripada toj ravnini, ili postoji jedna i samo jedna točka C, koja pripada ravnini α i pravcu b, ili ne postoji ni jedna takva točka. U prvom slučaju kaže se da se ravnina α i pravac b *probadaju* u točki C ili da je C *probodište* ravnine α i pravca b i piše se $C = \alpha \cap b$ ili $C = b \cap \alpha$, a u drugom slučaju kaže se da su ravnina α i pravac b *paralelni* i piše se $\alpha \parallel b$ ili $b \parallel \alpha$. Kroz pravac a i točku B, koja ne pripada tom pravcu, prolazi jedna i samo jedna ravnina, koja se zove spojna ravnina pravca a i točke B i označava se sa aB ili Ba. Kroz dva različita pravca a, b, koji prolaze kroz istu točku, prolazi jedna i samo jedna ravnina, koja se zove spojna ravnina tih pravaca i označava se sa ab. Svaka ravnina prolazi bar kroz tri točke koje ne pripadaju istom pravcu.

Druga je skupina aksioma (4 *aksioma poretka*): 1. Ako je točka B između točaka A i C, tada je točka B i između točaka C i A. 2. Ako su A, B različite točke, tada postoji točka C, koja pripada pravcu AB, takva da je točka B između točaka A i C. 3. Od tri različite točke, koje pripadaju istom pravcu, najviše je jedna između preostale dvije.

Četvrti aksiom poretka slijedi kasnije. Par točaka A, B zove se *dužina* s krajevima A, B i označava se sa $\overline{AB}$. Ako je točka C između točaka A i B, tada se kaže da je C *unutrašnja točka* dužine $\overline{AB}$. Kaže se da pravac c, odnosno ravnina γ *siječe* dužinu $\overline{AB}$ ako postoji unutrašnja točka dužine $\overline{AB}$, koja pripada pravcu c, odnosno ravnini γ.

Dakle 4. aksiom, tzv. Paschov aksiom, glasi: Neka su A, B, C točke, koje ne pripadaju istom pravcu, i p pravac, koji pripada ravnini ABC, a ne prolazi ni kroz jednu od točaka A, B, C. Ako pravac p siječe dužinu $\overline{AB}$, tada on siječe ili dužinu $\overline{AC}$ ili dužinu $\overline{BC}$.

Pomoću prve dvije skupine aksioma mogu se dokazati različite tvrdnje, od kojih će biti navedene samo najvažnije. Svaka dužina ima beskonačno mnogo unutrašnjih točaka. Ako je O točka koja pripada pravcu a, tada se sve preostale točke, koje pripadaju tom pravcu, mogu podijeliti u dva skupa, koji se zovu *polupravci* pravca a s početkom O, sa svojstvima: ako su A, B dvije točke iz istog polupravca, tada točka O nije između točaka A i B, a ako su A, B točke iz različitih polupravaca, tada je točka O između točaka A i B. Ako je o pravac koji pripada ravnini α, tada se sve točke, koje pripadaju ravnini α, a ne pripadaju pravcu o, mogu podijeliti u dva skupa, koji se zovu *poluravnine* ravnine α s rubom o, sa svojstvima: ako su A, B dvije točke iz iste poluravnine, tada pravac o ne siječe dužinu $\overline{AB}$, a ako su A, B točke iz različitih poluravnina, tada pravac o siječe dužinu $\overline{AB}$. Ako je ω bilo koja ravnina, tada se sve točke, koje ne pripadaju ravnini ω, mogu podijeliti u dva skupa, koji se zovu *poluprostori* s rubom ω i sa svojstvima: ako su A, B dvije točke iz istog poluprostora, tada ravnina ω ne siječe dužinu $\overline{AB}$, a ako su A, B točke iz različitih poluprostora, tada ravnina ω siječe dužinu $\overline{AB}$. Za dva polupravca istog pravca kaže se da su jednako orijentirani ako jedan od njih sadrži drugi. Svi polupravci pravca o mogu se podijeliti u dva skupa, koji se zovu *orijentacije* pravca o, sa svojstvom da su bilo koja dva polupravca iz istog skupa jednako orijentirana. Neka je na pravcu o odabrana jedna orijentacija. Za točke A, B, koje pripadaju pravcu o, kaže se da je točka A *ispred* točke B ili da je točka B *iza* točke A, ako polupravac pravca o s početkom A, koji pripada odabranoj orijentaciji, sadrži točku B. Par polupravaca h, k s istim početkom O zove se *kut* i označava se sa $\sphericalangle(h,k)$ ili sa $\sphericalangle AOB$, gdje su A, B bilo koje točke polupravaca h, k.

Treća je skupina aksioma (6 *aksioma sukladnosti*): 1. Ako je $\overline{AB}$ bilo koja dužina i h' bilo koji polupravac s početkom A', tada postoji bar jedna točka B' polupravca h' tako da je dužina $\overline{AB}$ sukladna dužini $\overline{A'B'}$. 2. Ako je svaka od dviju dužina sukladna s trećom dužinom, tada su i te dvije dužine sukladne. 3. Ako je točka B između točaka A i C, a točka B' između točaka A' i C' i ako je dužina $\overline{AB}$ sukladna s dužinom $\overline{A'B'}$, a dužina $\overline{BC}$ s dužinom $\overline{B'C'}$, tada je dužina $\overline{AC}$ sukladna s dužinom $\overline{A'C'}$. 4. Ako je $\sphericalangle(h,k)$ bilo koji kut, π' bilo koja poluravnina s rubom a', O' bilo koja točka, koja pripada pravcu a', i h' bilo koji od polupravaca pravca a' s početkom O', tada postoji jedan i samo jedan polupravac k' s početkom O', koji je sadržan u poluravnini π', tako da je kut $\sphericalangle(h,k)$ sukladan s kutom $\sphericalangle(h',k')$. 5. Svaki kut sukladan je sam sa sobom. 6. Ako su A, B, C, odnosno A', B', C' po tri točke, koje ne pripadaju jednom pravcu, tako da je dužina $\overline{AB}$ sukladna s dužinom $\overline{A'B'}$, dužina $\overline{AC}$ s dužinom $\overline{A'C'}$, a kut $\sphericalangle BAC$ s kutom $\sphericalangle B'A'C'$, tada je kut $\sphericalangle ABC$ sukladan s kutom $\sphericalangle A'B'C'$.

Već na temelju prvih triju skupina aksioma može se dokazati veliki dio tvrdnji geometrije. Dokazuju se poučci (teoremi) o sukladnosti trokuta, poučak o vanjskom kutu trokuta, definira se pravi kut, dokazuje se da su svi pravi kutovi sukladni, definiraju se jednakokračni trokuti i dokazuju temeljni poučci o njima, dokazuju se različiti poučci o promjerima, tetivama, centralnim kutovima i tangentama kružnice. Može se dokazati da za svaki pravac a i svaku točku B, koja ne pripada tom pravcu, postoji pravac c, koji prolazi kroz točku B i paralelan je s pravcem a. Za dvije dužine $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, koje nisu sukladne, može se definirati što znači odnos $AB > CD$, a sličan se odnos definira i za dva kuta koji nisu sukladni.

Četvrta skupina aksioma jest ***Dedekindov aksiom***, koji glasi: Ako su sve točke, koje pripadaju istom pravcu, podijeljene u dva skupa tako da je pri odabranoj orijentaciji tog pravca svaka točka prvog skupa ispred svake točke drugog skupa, tada ili postoji točka u prvom skupu, koja je iza svake druge točke tog skupa, ili postoji točka u drugom skupu, koja je ispred svake druge točke tog skupa.

Na temelju prvih četiriju skupina aksioma mogu se dokazati novi poučci. Ako pravac prolazi kroz unutrašnju točku kružnice, tada postoje dvije točke koje pripadaju i pravcu i kružnici. Ako jedna kružnica sadrži jednu unutrašnju i jednu vanjsku točku druge kružnice, tada te kružnice imaju dvije zajedničke točke. Može se zasnovati teorija mjerenja dužina (odnosno kutova), tj. svakoj dužini $\overline{AB}$ može se pridružiti njezina *duljina* $d(A,B)$, tako da vrijedi: *a*) duljina je pozitivan realan broj; *b*) ako su dužine $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sukladne, tada je $d(A,B) = d(A',B')$;

c) ako je točka B između točaka A i C, tada je $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$; *d*) za jednu unaprijed odabranu dužinu (jediničnu dužinu) $\overline{OE}$ jest $d(O,E) = 1$. Zatim se može uvesti pojam koordinatnog sustava na pravcu: ako je o dani pravac i O, E odabrane točke koje mu pripadaju, tada se svakoj točki X, koja pripada pravcu o, može pridružiti jedan i samo jedan realan broj x, koji se zove *koordinata* točke X, i obrnuto, svakom realnom broju x može se pridružiti jedna i samo jedna točka X, koja pripada pravcu o, tako da točke O i E imaju koordinate nula i 1 i da za svake dvije točke A, B, koje pripadaju pravcu o, vrijedi $d(A,B) = x_B - x_A$, gdje su x_A, x_B koordinate točaka A, B.

Peta skupina aksioma jest *aksiom paralelnosti* koji glasi: Ako točka A ne pripada pravcu b, tada postoji jedan i samo jedan pravac, koji prolazi kroz točku A i paralelan je s pravcem b.

Na temelju svih pet skupina aksioma može se zasnovati sva euklidska geometrija prostora. Ako se izostave aksiomi od 4. do 8. prve skupine, dobiva se euklidska planimetrija. Izostavljanjem treće skupine aksioma gube se tzv. metrička svojstva i dobiva se tzv. *afina geometrija*, općenitija od euklidske geometrije. Izostavi li se aksiom pete skupine, dobiva se tzv. *apsolutna geometrija*.

Umjesto aksioma pete skupine može se promatrati i njemu suprotna tvrdnja, tzv. aksiom o paralelnosti Lobačevskog: ako točka A ne pripada pravcu b, tada postoje bar dva različita pravca, koji pripadaju ravnini Ab, prolaze kroz točku A i ne sijeku pravac b. Na temelju tog aksioma i prvih četiriju skupina aksioma dobiva se hiperbolička geometrija (neeuklidska geometrija Lobačevskog).

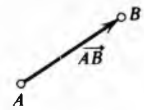
Erlangenski program je princip kojim je F. Klein dao mogućnost sistematizacije i klasifikacije različitih područja geometrije. Promatra se bilo koji skup X koji se zove *prostor*, a njegovi elementi *točke* tog prostora. Podskupovi skupa X zovu se *figure*. *Transformacijom* prostora X zove se svako obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa X na sebe, tj. za svaku točku A postoji jedna i samo jedna točka A' i obrnuto, za svaku točku A' postoji jedna i samo jedna točka A, tako da je $f(A) = A'$. Za dvije transformacije f, g kaže se da su jednake i piše se $f = g$, ako za svaku točku A vrijedi $f(A) = g(A)$. Ako su f, g dvije transformacije, tada se definira *kompozicija* fg transformacijâ f, g kao transformacija dana formulom $(fg)(A) = f(g(A))$, gdje je A bilo koja točka. Za svaku transformaciju f postoji tzv. *inverzna* transformacija f^{-1} sa svojstvom da su za svaki par točaka A, A' jednakosti $f(A) = A'$, $f^{-1}(A') = A$ ekvivalentne. Transformacija i, koja ima svojstvo da za svaku točku A vrijedi $i(A) = A$, zove se *identitet*. Ako je f bilo koja transformacija, tada vrijedi $if = fi = f$, a osim toga je $ff^{-1} = f^{-1}f = i$. Za bilo koje tri transformacije f, g, h vrijedi $f(gh) = (fg)h$. Ako je F bilo koja figura i f bilo koja transformacija, tada se sa $f(F)$ označava figura, čiji su elementi sve točke oblika $f(A)$, gdje je A bilo koja točka figure F.

Grupom transformacija prostora X zove se bilo koji skup G transformacijâ prostora X sa ova tri svojstva: 1. Ako transformacije f, g pripadaju skupu G, tada i transformacija fg pripada skupu G. 2. Identitet i pripada skupu G. (To svojstvo je zapravo posljedica ostalih svojstava.) 3. Ako transformacija f pripada skupu G, tada i inverzna transformacija f^{-1} pripada skupu G. *Podgrupom* grupe transformacija G prostora X zove se svaki podskup skupa G, koji je sam za sebe također grupa transformacija prostora X.

Neka je sada X neki prostor i G neka grupa transformacija tog prostora. Za dvije figure F, F' prostora X kaže se da su *ekvivalentne* s obzirom na grupu transformacija G i piše se $F \sim F'$, ako u skupu G postoji transformacija f takva da je $f(F) = F'$. Pokazuje se da vrijedi: 1. Za svaku figuru F je $F \sim F$. 2. Iz $F \sim F'$ proizlazi $F' \sim F$. Iz $F \sim F'$ i $F' \sim F''$ proizlazi $F \sim F''$. Skup svih figura prostora X raspada se u klase međusobno ekvivalentnih figura.

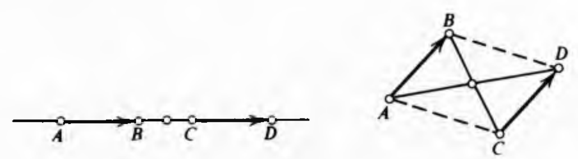
Prema F. Kleinu, geometrijskim pojmovima i svojstvima prostora X s obzirom na grupu transformacija G tog prostora zovu se pojmovi i svojstva, koji su invarijantni s obzirom na grupu transformacija G, tj. oni pojmovi i svojstva koji se pojavljuju istodobno kod svih međusobno ekvivalentnih figura prostora X s obzirom na G. Svi takvi pojmovi i svojstva tvore tada *geometriju* (X,G) grupe transformacija G prostora X. Ta Kleinova ideja, iznesena u njegovoj habilitacijskoj radnji iz 1878. godine, poznatoj pod nazivom *Erlangenski program*, omogućila je da se razjasne međusobne veze različitih geometrija. Naime, ako je H podgrupa grupe transformacija G prostora X, tada je svaki pojam, odnosno svojstvo geometrije (X,G) ujedno i pojam, odnosno svojstvo geometrije (X,H). Prema tome, geometrija (X,G) jest općenitija od geometrije (X,H), ali je zato geometrija (X,H) bogatija pojmovima i svojstvima od geometrije (X,G).

Vektorska algebra. Uređeni par točaka euklidskog prostora zove se *orijentirana dužina*. Prva točka para je *početak*, a druga *kraj* te orijentirane dužine. Orijentirana dužina s početkom A i krajem B označava se sa $\overrightarrow{AB}$, a na crtežu se predočuje tako da se uz točku B stavlja strelica (sl. 1). Kaže se da

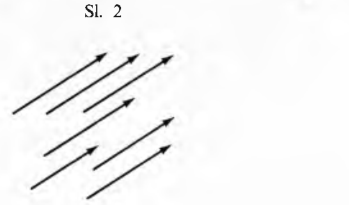


Sl. 1

je orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ *ekvivalentna* s orijentiranom dužinom $\overrightarrow{CD}$ i piše se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ako dužine $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište (sl. 2). U slučaju da točke A, B, C, D ne pripadaju istom pravcu, znači da je $ABDC$ paralelogram. Može se pokazati da vrijede ova tri svojstva: 1. Za svaku orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. 2. Iz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ slijedi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. 3. Iz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ proizlazi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Posljedica tih svojstava jest da se skup svih orijentiranih dužina raspada na klase međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Svaka od tih klasa zove se *vektor*. Vektori se označavaju znakovima $\vec{a}$, $\vec{b}$ .... Ako je $\overrightarrow{AB}$ orijentirana dužina, koja pripada vektoru $\vec{a}$, tj. jedan predstavnik tog vektora, tada se piše $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i kaže se da je vektor $\vec{a}$ nanesen od točke A. Na sl. 3 predočeno je nekoliko predstavnika istog vektora.

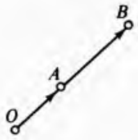


Sl. 2

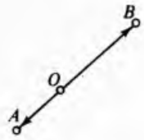


Sl. 3

Sve orijentirane dužine oblika $\overrightarrow{AA}$ tvore jedan vektor, tzv. *nulvektor*, koji se označava sa $\vec{0}$. Ako se svim orijentiranim dužinama nekog vektora $\vec{a}$ zamijeni uloga početka i kraja, dobivaju se orijentirane dužine, koje opet pripadaju jednom vektoru, a taj se označava sa $-\vec{a}$ i zove se *suprotni vektor* vektora $\vec{a}$. Očito vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Ako su $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bilo koji predstavnici istog vektora $\vec{a}$, tada pravci AB, CD imaju isti smjer, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ jednake duljine. Zato imaju smisla ove definicije: Ako je $\overrightarrow{AB}$ bilo koji predstavnik vektora $\vec{a}$, tada se smjer pravca AB zove *smjer* vektora $\vec{a}$, a duljina $d(A,B)$ se zove *duljina* vektora $\vec{a}$ i označava se sa $|\vec{a}|$. Za dva ili više vektora, koji imaju isti smjer, kaže se da su *linearno zavisni*. Za dva vektora se kaže da su *linearno nezavisni*, ako nemaju isti smjer. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ linearno zavisni vektori i neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tada točke O, A, B pripadaju istom pravcu. Kaže se da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ *imaju istu orijentaciju* ako točka O nije između točaka A i B (sl. 4), a *suprotne orijentacije* ako je točka O između točaka A i B (sl. 5). Ta definicija ne ovisi o izboru točke O. Nulvektor je jedini vektor, koji ima duljinu nula, a smjer mu nije određen, pa se po dogovoru smatra da su nulvektor i bilo koji drugi vektor linearno zavisni. Suprotni vektori imaju jednake duljine, isti smjer i suprotne orijentacije. Vektor je jednoznačno određen smjerom, orijentacijom i duljinom. Vektori duljine 1 zovu se *jedinični vektori*.

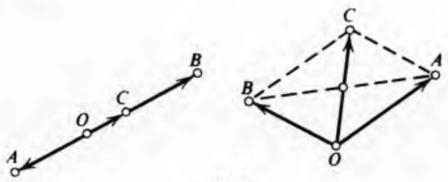


Sl. 4



Sl. 5

Kaže se da je vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ *zbroj* vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i piše se $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, ako je C točka takva da dužine $\overline{AB}$, $\overline{OC}$ imaju zajedničko polovište (sl. 6). U slučaju da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu linearno zavisni, to znači da je $OACB$ paralelogram. Ta definicija zbroja vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ ne ovisi o izboru točke O, a izražava tzv. *pravilo paralelograma* za zbrajanje dvaju vektora. Na sl. 6 predočeno je tzv. *pravilo trokuta* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, tj. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, jer je $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Za bilo koje vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vrijedi: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Oduzimanje vektorâ $\vec{a}$, $\vec{b}$ definira se jednakošću $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Za bilo koje točke O, A, B vrijedi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



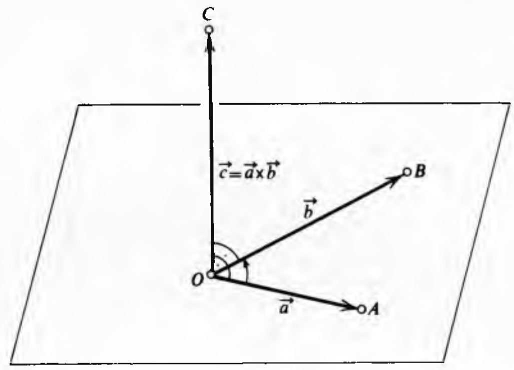
Sl. 6

Produkt realnog broja $\lambda \neq 0$ i vektora $\vec{a}$ jest takav vektor (označava se sa $\lambda\vec{a}$) da su vektori $\vec{a}$, $\lambda\vec{a}$ linearno zavisni, iste ili suprotnih orijentacija, već prema tome da li je $\lambda > 0$ ili $\lambda < 0$, a duljina vektora $\lambda\vec{a}$ jednaka je $|\lambda||\vec{a}|$. Ako je $\lambda = 0$, tada se produktom $\lambda\vec{a}$ smatra vektor $\vec{0}$. Očito za svaki realan broj λ vrijedi $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Obrnuto, iz $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ proizlazi ili $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$. Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ linearno zavisni i $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada postoji jedan i samo jedan realan broj λ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Za svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ postoji jedan i samo jedan jedinični vektor $\vec{a}_0$ takav da je $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$. Za bilo koje vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i bilo koje realne brojeve λ, μ vrijedi: $1\vec{a} = \vec{a}$, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a})$.

Kaže se da je vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *paralelan* s pravcem p, odnosno s ravninom π, ako je pravac AB paralelan s pravcem p, odnosno s ravninom π. Za tri ili više vektora paralelnih s istom ravninom kaže se da su *linearno zavisni*. Za tri se vektora kaže da su *linearno nezavisni* ako ne postoji ravnina paralelna sa svakim od tih vektora. Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno zavisni vektori, a vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ linearno nezavisni, tada postoji jedan jedini par realnih brojeva α, β tako da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno nezavisni vektori, a $\vec{d}$ bilo koji vektor, tada postoji jedna jedina trojka realnih brojeva α, β, γ tako da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektori različiti od $\vec{0}$ i $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tada se kut $\sphericalangle AOB$ zove *kut* vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i označava se sa $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Ta definicija ne ovisi o izboru točke O. Ako je kut $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ pravi, tada se kaže da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ *okomiti* i piše se $\vec{a} \perp \vec{b}$. *Skalarni produkt* dvaju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, različitih od $\vec{0}$, jest realni broj $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i označava se sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Za skalarni produkt dvaju vektora, od kojih je bar jedan jednak $\vec{0}$, uzima se broj 0. Iz $\vec{a} \perp \vec{b}$ proizlazi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, a obrnuto iz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ proizlazi $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \perp \vec{b}$. Za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Produkt $\vec{a} \cdot \vec{a}$ zove se *skalarni kvadrat* vektora $\vec{a}$ i označava se sa $\vec{a}^2$. Za bilo koje vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i bilo koji realan broj λ vrijedi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Vektorski produkt dvaju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, različitih od $\vec{0}$, jest vektor koji se označava sa $\vec{a} \times \vec{b}$, okomit je na oba vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i ima duljinu $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Orijentacija mu je takva da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ u tom poretku tvore tzv. *desnu trojku vektora*, tj. ako je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{OC}$, tada pri promatranju iz točke C smjer i orijentacija vektora $\overrightarrow{OA}$ rotacijom za kut manji (ili jednak) od 180°, u smislu obrnutom smislu kretanja kazaljke na satu, prelazi u smjer i orijentaciju vektora $\overrightarrow{OB}$ (sl. 7). Kaže se da se vektori vektorski množe po *pravilu desnog vijka*. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tada se smatra da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Jednakost $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ vrijedi ako i samo ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ linearno zavisni. Posebice, uvijek je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu linearno zavisni i ako je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tada je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednako površini paralelograma $OACB$ (gdje je C četvrti vrh paralelograma). Za bilo koje vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i bilo koji realan broj λ vrijedi: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$, $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.



Sl. 7

Mješoviti produkt triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jest realan broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ koji se označava sa $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su linearno zavisni ako i samo ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Za bilo koje vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vrijedi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ i $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Izaberu li se tri linearno nezavisna vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ za tzv. *koordinatne vektore*, tada za svaki vektor $\vec{a}$ postoji jedna jedina trojka realnih brojeva α_x, α_y, α_z, takvih da je $\vec{a} = \alpha_x\vec{i} + \alpha_y\vec{j} + \alpha_z\vec{k}$. Ti se brojevi zovu *koordinate* vektora $\vec{a}$ i piše se $\vec{a} = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]$. Za bilo koje vektore $\vec{a} = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]$, $\vec{b} = [\beta_x, \beta_y, \beta_z]$ i bilo koji realan broj λ vrijedi: $-\vec{a} = [-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z]$, $\vec{a} + \vec{b} = [\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y, \alpha_z + \beta_z]$, $\lambda\vec{a} = [\lambda\alpha_x, \lambda\alpha_y, \lambda\alpha_z]$. Osim toga je $\vec{0} = [0, 0, 0]$. Ako su koordinatni vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični i međusobno okomiti, tada za bilo koje vektore $\vec{a} = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]$, $\vec{b} = [\beta_x, \beta_y, \beta_z]$, $\vec{c} = [\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]$ vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y + \alpha_z\beta_z$, $\vec{a} \times \vec{b} = [\alpha_y\beta_z - \alpha_z\beta_y, \alpha_z\beta_x - \alpha_x\beta_z, \alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x]$,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix}.$$

Izložena je vektorska algebra u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. S malim izmjenama dobiva se vektorska algebra u euklidskoj ravnini. U tom su slučaju svaka tri vektora linearno zavisna. Osim toga tada nema smisla vektorski i mješoviti produkt. Izaberu li se sada dva linearno nezavisna vektora

$\vec{i}$, $\vec{j}$ za koordinatne vektore, tada za svaki vektor $\vec{a}$ postoji jedan jedini par realnih brojeva α_x, α_y takvih da je $\vec{a} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}$. Ti se brojevi zovu koordinate vektora $\vec{a}$ i piše se $\vec{a} = [\alpha_x, \alpha_y]$. Za bilo koje vektore $\vec{a} = [\alpha_x, \alpha_y]$, $\vec{b} = [\beta_x, \beta_y]$ i bilo koji realan broj λ vrijedi $-\vec{a} = [-\alpha_x, -\alpha_y]$, $\vec{a} + \vec{b} = [\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y]$, $\lambda\vec{a} = [\lambda\alpha_x, \lambda\alpha_y]$, a osim toga je $\vec{0} = [0, 0]$. Ako su koordinatni vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ jedinični i međusobno okomiti, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y$.

Višedimenzionalna euklidska geometrija. Neka je n bilo koji prirodan broj. *Točkom n*-dimenzionalnog euklidskog prostora E^n smatra se uređena *n-torka* realnih brojeva $x_1, \ldots, x_n$, koji se zovu *koordinatama* te točke. Ako su $x_1, \ldots, x_n$ koordinate točke X, tada se piše $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Uređeni par točaka prostora E^n zove se orijentirana dužina. Prva točka para je početak, a druga kraj te orijentirane dužine. Orijentirana dužina s početkom A i krajem B označava se sa $\overrightarrow{AB}$. Neka je $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $C = (c_1, \ldots, c_n)$, $D = (d_1, \ldots, d_n)$. Kaže se da su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ekvivalentne i piše se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ako je $b_1 - a_1 = d_1 - c_1, \ldots, b_n - a_n = d_n - c_n$. Skup svih orijentiranih dužina raspada se u klase međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Te klase zovu se vektori i označavaju se sa $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$. Ako je $\overrightarrow{AB}$ predstavnik vektora $\vec{c}$ i ako je $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, tada se brojevi $c_1 = b_1 - a_1, \ldots, c_n = b_n - a_n$ zovu koordinate vektora $\vec{c}$ i piše se $\vec{c} = [c_1, \ldots, c_n]$. Vektor $[0, \ldots, 0]$ zove se nulvektor i označava se sa $\vec{0}$. Ako je $\vec{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ bilo koji vektor, tada se vektor $[-a_1, \ldots, -a_n]$ zove suprotni vektor vektora $\vec{a}$ i označava sa $-\vec{a}$. Očito je $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Vektor $[a_1, \ldots, a_n]$ zove se radijvektor točke $A = (a_1, \ldots, a_n)$ i označava se sa $\vec{r}_A$.

Zbroj dvaju vektora, produkt realnog broja i vektora te skalarni produkt dvaju vektora definiraju se formulama $[a_1, \ldots, a_n] + [b_1, \ldots, b_n] = [a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n]$, $k[a_1, \ldots, a_n] = [ka_1, \ldots, ka_n]$, $[a_1, \ldots, a_n] \cdot [b_1, \ldots, b_n] = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Te tri operacije imaju ista svojstva kao i operacije s vektorima u vektorskoj algebri euklidskog prostora. Duljinom vektora $\vec{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ zove se broj $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Za vektore $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ kaže se da su linearno zavisni, ako postoje realni brojevi $k_1, \ldots, k_m$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da vrijedi $k_1 \vec{a}_1 + \ldots + k_m \vec{a}_m = \vec{0}$. Za vektore, koji nisu linearno zavisni, kaže se da su linearno nezavisni. Skup linearno nezavisnih vektora može imati najviše n elemenata. Ako su $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, $\vec{b}$ linearno zavisni vektori, a vektori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ linearno nezavisni, tada postoji jedna jedina n-torka realnih brojeva $k_1, \ldots, k_m$ takvih da je $\vec{b} = k_1 \vec{a}_1 + \ldots + k_m \vec{a}_m$, tj. vektor $\vec{b}$ može se na jedan jedini način predočiti kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$.

Udaljenošću točaka $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ zove se broj $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ bilo koji vektori, tada vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$. Kut $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ vektora $\vec{a} = [a_1, \ldots, a_n]$, $\vec{b} = [b_1, \ldots, b_n]$ definira se formulom

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}. \quad (1)$$

Izometrija prostora E^n jest obostrano jednoznačno preslikavanje skupa E^n na sebe, koje čuva udaljenost, tj. ako je f izometrija i A, B bilo koje točke, tada je $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. Skup svih izometrija prostora E^n tvori jednu grupu transformacija, tzv. *grupu izometrija* prostora E^n. Za dva skupa točaka F, F' prostora E^n kaže se da su *sukladni* ako postoji izometrija f takva da je $f(F) = F'$

Pravcem, određenim točkom T_0 i vektorom $\vec{a}$, naziva se skup svih točaka T takvih da vrijedi $\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t\vec{a}$, gdje je t bilo koji realan broj. Općenitije, *m-dimenzionalnom ravninom* ili kraće *m*-ravninom ($1 \leqq m \leqq n$), određenom točkom T_0 i linearno nezavisnim vektorima $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, naziva se skup svih točaka T takvih da vrijedi $\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t_1 \vec{a}_1 + \ldots + t_m \vec{a}_m$, gdje su $t_1, \ldots, t_m$ bilo koji realni brojevi. Može se dokazati da je svaka m-ravnina jedan m-dimenzionalni euklidski prostor. Kroz svake dvije različite točke T_0, T_1 prolazi jedan jedini pravac, tako da su njegove točke T dane sa $\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t\,\overrightarrow{T_0 T_1}$. Općenitije, kroz svakih $m + 1$ točaka $T_0, T_1, \ldots, T_n$, koje ne pripadaju jednoj $(m-1)$-ravnini, prolazi jedna jedina m-ravnina, tako da su njezine točke T dane sa $\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t_1 \overrightarrow{T_0 T_1} + \ldots + t_m \overrightarrow{T_0 T_m}$. Prazan skup smatra se (-1)-ravninom, a skup, koji sadrži samo jednu točku, smatra se 0-ravninom, dok se $(n-1)$-ravnina zove još i hiperravnina. Ako su $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_n$ linearno nezavisni vektori, a $k_{m+1}, \ldots, k_n$ realni brojevi, tada je skup svih točaka T, takvih da vrijedi $\vec{a}_{m+1} \cdot \vec{r}_T + k_{m+1} = 0, \ldots, \vec{a}_n \cdot \vec{r}_T + k_n = 0$, jedna m-ravnina. Zajedničke točke jedne p-ravnine i jedne q-ravnine tvore jednu r-ravninu, gdje je $r \geqq -1$, $r \leqq p$, $r \leqq q$. Ako je s najmanji broj, takav da neka s-ravnina sadrži promatranu p-ravninu i promatranu q-ravninu, tada vrijedi $p + q = r + s$.

Hipersferom, odnosno *hiperkuglom* sa središtem O i polumjerom r naziva se skup svih točaka T takvih da je $d(O, T) = r$, odnosno $d(O, T) \leqq r$. Obujam V hiperkugle polumjera r jest za parno n

$$V = \frac{\sqrt{2^n \pi^n}}{2 \cdot 4 \ldots (n-2) \cdot n} r^n,$$

odnosno za neparno n

$$V = \frac{\sqrt{2^{n+1} \pi^{n-1}}}{1 \cdot 3 \ldots (n-2) \cdot n} r^n, \quad (2)$$

a ako je O oplošje pripadne hipersfere, tada vrijedi $V = \frac{O r}{n}$.

LIT.: *F. Klein*, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. — *P. H. Schoute*, Mehrdimensionale Geometrie, Göschen, Leipzig 1902. — *Н. В. Ефимов*, Высшая геометрия, Гос. изд. техн.-теор. лит., Москва 1945. — *В. И. Костин*, Основания геометрии, Учпедгиз, Москва 1946. — *T. P. Anđelić*, Teorija vektora, Naučna knjiga, Beograd 1949. — Euklidovi elementi I-XIII, prevod A. Bilimović, SAN i Naučna knjiga, Beograd 1949 – 1957. — *W. Lietzmann*, Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie, Oldenbourg, München 1952. — *G. B. Robinson*, The foundations of geometry, Univ. of Toronto Press, Toronto 1952. — *B. Kerékjártó*, Les fondaments de la géométrie I, Akadémiai Kiadó, Budapest 1955. — *D. Hilbert*, Osnovi geometrije (prijevod: SAN, Beograd 1957). — *D. M. Ivanović*, Vektorska analiza, Naučna knjiga, Beograd 1960. — *M. Radojević*, Elementarna geometrija, Naučna knjiga Beograd 1961. — *H. S. M. Coxeter*, Introduction to geometry, John Wiley & Sons, New York 1961. — *Я. Л. Трайнин*, Основания геометрии, Гос. учебно-педаг. издат., Москва 1961. — *D. Blanuša*, Viša matematika I-1, Tehnička knjiga, Zagreb 1963. — *H. Meschkowski*, Grundlagen der euklidischen Geometrie, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966. — Энциклопедия элементарной математики V, Наука, Москва 1966. — *H. Eves*, A survey of geometry, Allyn and Bacon, Boston 1970. — *Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн*, Линейная алгебра и многомерная геометрия, Наука, Москва 1970. — *S. Kurepa*, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb 1975.

V. Volenec

GERMANIJ (Germanium, Ge, at. br. 32, at. masa 72,59), kemijski element, treći po redu u IVa (ugljikovoj) skupini periodskog sustava elemenata.

Postojanje germanija naslutio je već 1864. J. A. R. Newlands, a predskazao ga je već D. I. Mendeljejev 1870. U svojoj drugoj tablici periodskog sustava, koju je objavio 1871. Mendeljejev ga je nazvao ekasilicijem (prema sanskrtskom *eka*, jedan, prvi), htijući time podvući njegovu srodnost sa silicijem. Mendeljejev je također predskazao i svojstva ekasilicija. Ime germanijum nadjenuo mu je, u čast Njemačke (Germanije), C. Winkler koji ga je prvi dobio 1886. Pokazalo se da se Mendeljejevljeva predskazivanja svojstava ekasilicija vrlo dobro podudaraju sa stvarno utvrđenim svojstvima germanija.

Germanij nije bio važan za tehniku sve do drugoga svjetskog rata, kad je postao zanimljiv kao poluvodič (v. *Elektronika, sastavni dijelovi*, TE4, str. 471; v. *Poluvodiči*). Tada se s razvojem radarske tehnike pojavila potreba proizvodnje intrinzičnih poluvodiča s reproducibilnim svojstvima. Kad su uskoro iza toga nove metode rafinacije omogućile proizvodnju germanija u izvanredno čistom stanju, u kakvom se drugi poluvodiči nisu mogli dobiti, germanij je ubrzo postao najvažnija i najtraženija tvar u proučavanju mehanizama vođenja električne struje poluvodičima i materijal za razvoj poluvodičke tehnike. Neko vrijeme germanij je bio vrlo važan materijal za proizvodnju ispravljača. U novije vrijeme silicijski ispravljači istisnuli su germanijske iz upotrebe u industriji. Ipak, germanij je i dalje ostao važan materijal u izradbi niza drugih proizvoda i za znanstvena istraživanja, pa njegova upotreba i dalje raste.