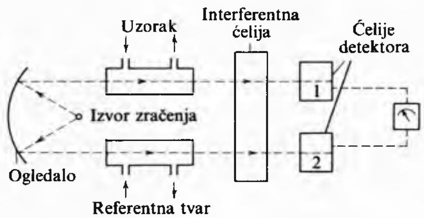
ugljik-dioksid, amonijak, klor, klorovodik i dr.), te tvari koje određuju kvalitetu vode (silicij, željezo, bakar, fosfati, kloridi, ozon i dr.). Procesni analizatori mogu se upotrijebiti za određivanje slijedećih svojstava ili fizičkih konstanti: turbiditeta, viskoznosti, gustoće, boje, tlaka pare, vodljivosti, toka destilacije, plamišta, krutišta, zamućenja, *p*H, oktanskog broja, kalorične vrijednosti itd. Za određivanje iste komponente mogu se upotrijebiti analizatori čije se djelovanje temelji na različitim principima. Tako se, npr., za određivanje kisika mogu mjeriti magnetska svojstva plinova (princip magnetskog vjetra ili direktno mjerenje paramagnetizma), toplina kemijske reakcije (reakcija s vodikom uz katalizator), elektrodni potencijal u sustavu u kojem kisik djeluje kao oksidans, električna vodljivost u sustavu u kojem talij reagira s kisikom itd.

Pri izboru procesnog analizatora potrebno je uvažiti niz činilaca: broj analiza, vremenski raspored analiza, broj komponenata koje se određuju u pojedinoj točki procesne struje, broj mjesta koja se motre, točnost i brzinu određivanja, uvjete u kojima će analizator djelovati (vlaga, vibracije, korozivna atmosfera, promjene temperature i dr.), te potrebe budućeg razvoja postrojenja. Podaci iz procesnih analizatora upotrebljavaju se najčešće za vođenje procesa, ali i za sastavljanje materijalne bilance procesa ili osiguranje prijeko potrebnih higijensko-tehničkih uvjeta (npr. analizator metana u radnoj okolici).

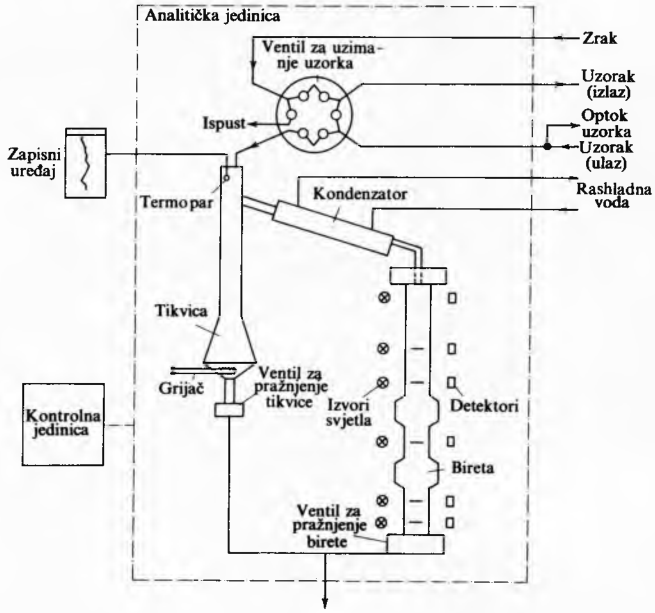
Kao primjer procesnog analizatora sastava može poslužiti uređaj za kontinuirano određivanje plinovitih uzoraka, čije se djelovanje osniva na mjerenju apsorpcije infracrvenog zračenja (sl. 38). Infracrveno zračenje iz izvora razdvaja se u dvije zrake, od kojih jedna prolazi kroz ćeliju za uzorak, a druga kroz referentnu ćeliju. Referentna ćelija ispuni se plinom koji ne apsorbira infracrveno zračenje, a obje ćelije detektora plinovitom komponentom koja se određuje. Kada struja uzorka sadrži analit koji apsorbira infracrveno zračenje, tada na ćeliju detektora *1* pada manja energija zračenja nego na ćeliju detektora *2*.



Sl. 38. Shematski prikaz analizatora koji djeluje na temelju apsorpcije infracrvenog zračenja

Razlika temperatura u ćelijama detektora proporcionalna je koncentraciji određivane komponente u uzorku. Ako je u uzorku prisutna komponenta koja smeta mjerenju, tada se interferentna ćelija ispunjava tom komponentom u prikladnoj koncentraciji. Time se iz obiju zraka uklanja karakteristično zračenje smetajuće komponente, ali uređaj radi s manjom osjetljivošću. Pomoću takvog analizatora može se odrediti mnogo različitih poliatomnih neelementarnih plinova i para. Na tom principu radi i uređaj za mjerenje sadržaja ugljik-monoksida u ispušnim plinovima motornih vozila.

Procesni analizator svojstava i s diskontinuiranim djelovanjem jest procesni analizator za praćenje destilacije (sl. 39). Taj je uređaj namijenjen za određivanje kompletne krivulje destilacije naftnih produkata (određivanje početka, 5, 10, 50, 90 i 95% volumena destilata, te svršetka destilacije). Sastoji se iz analitičke i kontrolne jedinice. Analitička jedinica analizatora smještena je u kutiji sigurnoj od eksplozije i sadrži destilacijsku tikvicu s ugrađenim grijačem, pneumatski ventil za uvođenje poznatog i uvijek jednakog volumena uzorka u tikvicu, kondenzator, posebno kalibriranu biretu za prihvaćanje destilata iz kondenzatora, izvore svjetla i fotoelektrične detektore smještene na izabranim visinama birete, te termopar smješten u vratu tikvice za mjerenje temperature pare. Kontrolna jedinica osigurava provedbu svih predviđenih operacija u ciklusu analize i izbor uzorka kada se uzorci uzimaju na više mjesta u procesu. Na početku ciklusa analize kontrolna jedinica pomoću programskog elementa pokreće ventil za uzimanje uzorka, propuštajući



Sl. 39. Procesni analizator za praćenje destilacije (C. Erba, Model 150)

točan volumen uzorka u tikvicu. Istodobno se uključuje grijač i aktivira detektor početka destilacije. Termopar u tikvici mjeri temperaturu pare i prenosi signal na zapisni uređaj za čitavo vrijeme analize. Nakon što detektor zamijeti prvu kap kondenzata, šalje impuls u zapisni uređaj i istovremeno aktivira detektor prve razine i tako redom dalje. Detektor svršetka destilacije je termopar smješten na dnu tikvice. Nakon isparivanja posljednje kapi uzorka mijenja se temperatura u tikvici, što se očituje impulsom koji se šalje u zapisni uređaj. Istovremeno se isključuje grijanje, a programski element određuje pranje i hlađenje uređaja, te nakon određenog vremena početak novog ciklusa analize.

D. Maljković

LIT.: *L. Kofler, A. Kofler,* Thermo-Mikro-Methoden zur Kennzeichnung organischer Stoffe und Stoffgemische. Universitäts-Verlag Wagner, Innsbruck 1954. — *J. J. Lingane,* Electroanalytical chemistry. Wiley-Interscience, New York 1958. — *S. Siggia,* Continuous analysis of chemical process systems. Johan Wiley and Sons, New York 1959. — *W. Heller, D. D. Fitto,* Physical methods of organic chemistry, Vol. I, Part II, A. Weissberger ed.. Wiley-Interscience, New York 1960. — *W. Wm. Wendlandt,* Thermal methods of analysis. Interscience Publishers, New York 1964. — *K. Mislow,* Introduction to stereochemistry. W. A. Benjamin, New York 1965. — *J. D. Roberts, M. C. Caserio,* Basic principles of organic chemistry. W. A. Benjamin, New York-Amsterdam 1965. — *J. Heyrovský, J. Kuta,* Principles of polarography. Academic Press, New York 1965.—*L. Meites,* Polarographic techniques. Wiley-Interscience, New York 1966. — *F. J. Welcher,* Standard methods of chemical analysis, Vol. IIIA, Instrumental analysis. Van Nostrand Co., Princeton-Toronto-London-New York 1966. — *A. J. Bard,* Electroanalytical chemistry, A series of advances. Marcel Dekker, New York, Vol 1, 1966; Vol. 5, 1972. — *H. Kaiser, A. C. Manzies,* The limit of detection of a complete analytical procedure. Adam Hilger Ltd., London 1968. — *Grupa autora,* Analytikum, Methoden der analytischen Chemie und ihre theoretischen Grundlagen. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1971. — *K. J. Clevett,* Handbook of process stream analysis. Ellis Horwood, Chichester 1973. — *K. A. Connors,* Reaction mechanisms in organic analytical chemistry. John Wiley and Sons, New York 1973. — *H. H. Emons, H. Keune, H. H. Seysarth,* Chemische Mikroskopie. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1973. — *H. Freund,* Mikroskopie in der chemischen Technik, u djelu *J. Grehn,* Handbuch der Mikroskopie in der Technik. Umschau—Verlag, Frankfurt/Main 1974. — *F. W. Fifield, D. Kealey,* Principles and practice of analytical chemistry. International Textbook Company Ltd., London 1975. — *J. K. Foreman, P. B. Stockwell,* Automatic chemical analysis. Ellis Horwood, Chichester 1975.

V. Grdinić D. Maljković Z. Štefanac

INTEGRALNE JEDNADŽBE definiraju se često kao jednadžbe u kojima se nepoznata funkcija nalazi pod znakom integrala. Ta definicija opisuje zajedničko svojstvo integralnih jednadžbi, ali ne precizira dopuštene operacije s nepoznatom funkcijom i zato je nepotpuna. Ne ulazeći u pitanje korektne definicije, u daljem će se navesti neki najvažniji primjeri integralnih jednadžbi.

Teorija integralnih jednadžbi počela se razvijati radovima I. Fredholma, A. Poincaréa, D. Hilberta i E. Schmidta, i bila je vrlo važna u formiranju *funkcionalne analize*. Generalizacija te teorije je dalekosežna *teorija operatora*. Danas je teško povući granicu između tih disciplina. Navest će se samo najvažniji rezultati *klasične teorije*.

Primjeri integralnih jednadžbi. U primjeni najvažnija je *Fredholmova integralna jednadžba 2. vrste:*

$$u(x) - \lambda \int_D K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = f(x), \tag{1}$$

gdje je *D zatvoreno ograničeno područje* u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n, x i y su točke područja D a $\mathrm{d}y$ je element volumena prostora E^n, $u(x)$ *nepoznata funkcija*, $f(x)$ (*slobodni član*) i $K(x,y)$ (*jezgra*) jesu zadane *neprekidne* funkcije, a λ je brojni *parametar*. *Rješenje jednadžbe* $u(x)$ traži se među neprekidnim funkcijama.

Ako je

$$K(x,y) = \frac{N(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}, \tag{2}$$

gdje je $N(x,y)$ neprekidna funkcija, $|x-y|$ udaljenost točaka x i y i α konstanta, $0 < \alpha < n$, onda se gornja jednadžba zove *jednadžba s polarnom jezgrom* (takva jednadžba nije Fredholmova, jer njena jezgra ima prekid za $x = y$).

Jednadžba

$$\int_D K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = f(x). \tag{3}$$

zove se *Fredholmova jednadžba 1. vrste.*

Volterrina jednadžba 1. odnosno 2. vrste ima oblik

$$\int_a^x K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = f(x), \quad a \leqq x \leqq b, \tag{4a}$$

odnosno

$$u(x) - \int_a^x K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = f(x), \quad a \leqq x \leqq b. \tag{4b}$$

Ako je jezgra integralne jednadžbe oblika $K(x-y)$, tj. ako je ona funkcija jedne varijable $\xi = x - y$, onda je to *jednadžba tipa konvolucije*. Važan primjer takve jednadžbe jest *Wiener--Hopfova jednadžba*

$$a u(x) - \int_0^\infty K(x-y) u(y) \mathrm{d}y = f(x). \tag{5}$$

Γ je krivulja u kompleksnoj ravnini a z ili t su kompleksne koordinate (afix) točke na Γ. Neka su $a(z)$, $b(z)$, $K(z,t)$ i $f(z)$ zadane funkcije, a $u(z)$ nepoznata funkcija. *Singularna integralna jednadžba* ima oblik

$$a(z)u(z) - \frac{b(z)}{i\pi} \int_\Gamma \frac{u(t)}{t-z} \mathrm{d}t + \int_\Gamma K(z,t) u(t) \mathrm{d}t = f(z). \tag{6}$$

Singularni integral u drugom članu na lijevoj strani te jednadžbe razumije se *u smislu glavne vrijednosti*, tj. definira se ovako:

$$\int_\Gamma \frac{u(t)}{t-z} \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{u(t)}{t-z} \mathrm{d}t; \tag{7}$$

Γ_ε je luk što ga na krivulji Γ ograničava kružnica polumjera $\varepsilon > 0$, opisana oko točke z.

Do sada spomenute jednadžbe imaju važno *svojstvo linearnosti*: ako je $f(x) \equiv 0$ i ako su funkcije $u_1(x)$ i $u_2(x)$ rješenja jednadžbe a a_1 i a_2 brojevi, onda je i funkcija $a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)$ rješenje te jednadžbe. Jednadžbe koje nemaju svojstvo linearnosti nazivaju se *nelinearnim*. Primjeri takvih jednadžbi jesu *Hammersteinova jednadžba*

$$u(x) - \int_D K(x,y) F(y, u(y)) \mathrm{d}y = 0 \tag{8}$$

i *Urysonova jednadžba*

$$u(x) - \int_D G(x,y,u(y)) \mathrm{d}y = 0; \tag{9}$$

funkcije su $K(x,y)$, $F(y,u)$, $G(x,y,u)$ zadane, a $u(x)$, kao i ranije, nepoznata je funkcija.

Fredholmova teorija odnosi se na Fredholmovu jednadžbu 2. vrste:

$$u(x) - \lambda \int_D K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = f(x). \tag{10a}$$

Toj jednadžbi odgovara *homogena jednadžba*

$$u(x) - \lambda \int_D K(x,y) u(y) \mathrm{d}y = 0. \tag{10b}$$

Za svaku vrijednost parametra λ homogena jednadžba ima *trivijalno rješenje*, tj. rješenje koje je identički jednako nuli. Vrijednosti parametra λ za koje homogena jednadžba ima *netrivijalno rješenje* nazivaju se *karakterističnim vrijednostima jezgre* $K(x,y)$. Svakoj karakterističnoj vrijednosti λ odgovaraju *svojstvene funkcije jezgre* $K(x,y)$ — netrivijalna rješenja homogene jednadžbe. Ako su $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_k(x)$ svojstvene funkcije jezgre $K(x,y)$ koje odgovaraju karakterističnoj vrijednosti λ, onda je to i svaka njihova *linearna kombinacija*

$$u(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \ldots + a_k u_k(x) \tag{11}$$

koja nije identički jednaka nuli; tu su $a_1 a_2, \ldots, a_k$ brojevi — *koeficijenti linearne kombinacije*. Funkcije $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ jesu *linearno neovisne*, ako je njihova linearna kombinacija identički jednaka nuli samo u slučaju kad su svi koeficijenti te linearne kombinacije jednaki nuli. Maksimalan broj linearno neovisnih svojstvenih funkcija koje odgovaraju danoj karakterističnoj vrijednosti naziva se *rangom* te karakteristične vrijednosti.

Jezgri $K(x,y)$ odgovara *transponirana jezgra* koja je definirana formulom

$$\tilde{K}(x,y) = K(y,x). \tag{12}$$

Fredholmovoj jednadžbi odgovara *transponirana jednadžba*

$$v(x) - \lambda \int_D \tilde{K}(x,y) v(y) \mathrm{d}y = g(x), \tag{13a}$$

a homogenoj Fredholmovoj jednadžbi — *transponirana homogena jednadžba*

$$v(x) - \lambda \int_D \tilde{K}(x,y) v(y) \mathrm{d}y = 0. \tag{13b}$$

Pretpostavlja se da je λ realan broj i da su funkcije $u(x)$, $K(x,y)$ i $f(x)$ realne (i neprekidne). Sve informacije o Fredholmovoj jednadžbi (u daljem: jednadžba) daju ovi *Fredholmovi poučci:*

1. Vrijedi jedna od ovih dviju tvrdnja koje se međusobno isključuju: *a*) za svako $f(x)$ jednadžba ima jedno i samo jedno rješenje, ili *b*) broj λ u jednadžbi karakteristična je vrijednost jezgre $K(x,y)$ (tj. odgovarajuća homogena jednadžba ima bar jedno netrivijalno rješenje).

2. Ako je istinita tvrdnja *a*), onda odgovarajuća transponirana jednadžba ima za svako $g(x)$ jedno i samo jedno rješenje. Ako je istinita tvrdnja *b*), onda je broj λ u jednadžbi karakteristična vrijednost i za jezgru $\tilde{K}(x,y)$ (tj. odgovarajuća transponirana homogena jednadžba ima bar jedno netrivijalno rješenje); rang vrijednosti λ jest konačan i isti za jezgru $K(x,y)$ i jezgru $\tilde{K}(x,y)$.

3. Ako je istinita tvrdnja *b*), jednadžba ima rješenje onda i samo onda kad funkcija $f(x)$ zadovoljava uvjete:

$$\int_D f(x) v_i(x) \mathrm{d}x = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \tag{14}$$

gdje je r rang (karakteristične) vrijednosti λ, a $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_r(x)$ jesu odgovarajuće linearno neovisne svojstvene funkcije jezgre $\tilde{K}(x,y)$ (tj. netrivijalna rješenja odgovarajuće transponirane homogene jednadžbe).

4. Jezgra $K(x,y)$ ili nema karakterističnih vrijednosti ili ima niz takvih vrijednosti; ako je taj niz beskonačan, on teži u beskonačnost.

Prvi Fredholmov poučak zove se često *Fredholmova alternativa*. Fredholmovi poučci vrijede za Fredholmovu jednadžbu 2. vrste. Oni ne vrijede npr. za Fredholmovu jednadžbu 1. vrste ili za singularnu integralnu jednadžbu.

Rješenje Fredholmove jednadžbe 2. vrste za male vrijednosti $|\lambda|$. Iz Fredholmovih poučaka proizlazi da za vrijednosti λ koje su po modulu dovoljno male Fredholmova jednadžba 2. vrste ima jedno i samo jedno rješenje $u(x)$. Ako je

$$|\lambda| < \frac{1}{MV},$$

gdje je M maksimum modula jezgre $K(x,y)$ a V volumen područja D, to rješenje dano je formulom (*Neumannov red*):

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_D K_j(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{15}$$

Iterirana jezgra $K_j(x,y)$ definirana je ovako:

$$K_0(x,y) = K(x,y), \qquad K_j(x,y) = \int_D K(x,t)\,K_{j-1}(t,y)\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Rješenje Fredholmove jednadžbe 2. vrste s degeneriranom jezgrom. Jezgra $K(x,y)$ jest *degenerirana* ako je oblika

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\beta_i(y), \tag{17}$$

gdje su $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x)$ i $\beta_1(y), \beta_2(y), \ldots, \beta_m(y)$ dva niza linearno neovisnih funkcija. Neka je

$$a_{ji} = \int_D \alpha_i(x)\beta_j(x)\,\mathrm{d}x, \qquad j,i = 1,2,\ldots,m, \tag{18a}$$

$$b_j = \int_D f(x)\beta_j(x)\,\mathrm{d}x, \qquad j = 1,2,\ldots,m. \tag{18b}$$

Taj *sustav linearnih algebarskih jednadžbi* (u daljem: sustav) s nepoznanicama $c_1, c_2, \ldots, c_m$ jest:

$$c_j - \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ji} c_i = b_j, \qquad j = 1,2,\ldots,m. \tag{19}$$

Pokazuje se da je Fredholmova jednadžba 2. vrste (u daljem: jednadžba) s degeneriranom jezgrom $K(x,y)$ *ekvivalentna* tom sustavu u slijedećem smislu: ako je $u(x)$ rješenje jednadžbe i ako je

$$c_j = \int_D \beta_j(x) u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad j = 1,2,\ldots,m, \tag{20}$$

onda je $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ rješenje sustava; obratno, ako je $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ rješenje sustava, onda je funkcija

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j(x) + f(x) \tag{21}$$

rješenje jednadžbe. Prema tome, rješavanje Fredholmove jednadžbe 2. vrste s degeneriranom jezgrom svodi se na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Na tome se zasniva i slijedeća metoda za *aproksimativno rješavanje* Fredholmove jednadžbe 2. vrste s općom (neprekidnom) jezgrom: jezgra se aproksimira *polinomom* u varijablama x i y (odnosno njihovim komponentama ako je $n > 1$), što je uvijek moguće; polinomijalna jezgra je očito degenerirana, pa se rješavanje *aproksimativne jednadžbe* svodi na rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi; rješenje aproksimativne jednadžbe jest *aproksimativno rješenje* polazne integralne jednadžbe.

Fredholmova integralna jednadžba 2. vrste sa simetričnom jezgrom. Jezgra $K(x,y)$ simetrična je ako je $K(x,y) = K(y,x)$. Vrijedi slijedeća *dopuna 4. Fredholmovog poučka*. Svaka simetrična jezgra ima bar jednu karakterističnu vrijednost.

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ karakteristične vrijednosti simetrične jezgre $K(x,y)$ i neka je $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ (svaka vrijednost u tom nizu dolazi toliko puta koliki joj je rang). Odgovarajuće (linearno neovisne) svojstvene funkcije označene su sa $u_1(x), u_2(x), \ldots$

Funkcije $u_1(x), u_2(x), \ldots$ koje odgovaraju različitim karakterističnim vrijednostima međusobno su *ortogonalne* u slijedećem smislu:

$$\int_D u_i(x) u_j(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{ako je } i \neq j. \tag{22}$$

Vrijedi ovaj *Holbert-Schmidtov* poučak: ako se neprekidna funkcija $\varphi(x)$, koja je definirana na području D, može pomoću simetrične jezgre $K(x,y)$ i neke funkcije $h(y)$ prikazati u obliku

$$\varphi(x) = \int_D K(x,y) h(y)\,\mathrm{d}y, \tag{23a}$$

onda vrijedi formula

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(x), \tag{23b}$$

gdje je

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_D h(y) u_k(y)\,\mathrm{d}y. \tag{24}$$

Ako za Fredholmovu jednadžbu 2. vrste sa simetričnom jezgrom $K(x,y)$ vrijedi slučaj Fredholmove alternative *a*), onda je njeno rješenje dano *Schmidtovom formulom*

$$u(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k - \lambda} u_k(x) + f(x), \tag{25}$$

gdje je

$$a_k = \int_D f(y) u_k(y)\,\mathrm{d}y. \tag{26}$$

Jednadžbe s polarnom jezgrom. Bitno je da Fredholmovi poučci vrijede i za jednadžbu s polarnom jezgrom. Ako je N maksimum funkcije

$$\Phi(x) = \int_D |K(x, y)|\,\mathrm{d}y \tag{27}$$

i ako je $|\lambda| < \frac{1}{N}$, onda jednadžba s polarnom jezgrom $K(x,y)$ ima jedno i samo jedno rješenje i ono je jednako sumi Neumannovog reda. Polarna simetrična jezgra ima bar jednu karakterističnu vrijednost. Svojstvene funkcije simetrične polarne jezgre koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su ortogonalne. Hilbert-Schmidtov poučak i Schmidtova formula vrijede i za jednadžbu s polarnom jezgrom.

Primjena integralnih jednadžbi. Prirodni se zakoni formuliraju pomoću *diferencijalnih jednadžbi* (v. *Diferencijalne jednadžbe, parcijalne*, TE3, str. 273; u daljem tekstu: DJP). Klasični postupak za rješavanje diferencijalne jednadžbe (preciznije: *rubnog problema* za diferencijalnu jednadžbu) sastoji se u zamjeni takve jednadžbe ekvivalentnom integralnom jednadžbom. To je i najvažnija primjena integralnih jednadžbi. Ideja postupka vidi se na primjeru rubnih problema za *Laplaceovu jednadžbu* u prostoru E^3. Neka je D ograničeno područje i neka je ploha S njegova granica. Za funkciju $u(x)$ kaže se da je *harmonijska* u nekom području ako ona u tom području zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\Delta u(x) = 0$ (v. DJP, t. 7···10). *Dirichletov problem* sastoji se u određivanju funkcije $u(x)$ koja je harmonijska u području D (*unutrašnji problem*), odnosno u vanjštini područja D (*vanjski problem*) i koja na plohi S prima unaprijed zadane vrijednosti $f(x)$; u slučaju vanjskog problema zahtijeva se još da funkcija $u(x)$ u beskonačnosti teži nuli. *Neumannov problem* sastoji se u određivanju funkcije $u(x)$ koja je harmonijska u području D (unutrašnji problem), odnosno u vanjštini područja D (vanjski problem), i čija *derivacija u smjeru vanjske normale* na plohi S prima unaprijed zadane vrijednosti $f(x)$; u slučaju unutrašnjeg problema zahtijeva se još da integral funkcije $u(x)$ po području D bude jednak nuli, a u slučaju vanjskog problema da $u(x)$ u beskonačnosti teži nuli.

Rješenje $u(x)$ Dirichletovog problema traži se u obliku *potencijala dvostrukog sloja* (v. DJP, t. 10, formula 13) s nepoznatom gustoćom $\tau(y)$:

$$u(x) = \iint_S \tau(y) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}S; \tag{28}$$

$\partial/\partial\nu$ je derivacija u smjeru vanjske normale, a $\mathrm{d}S$ element površine plohe S. Tada gustoća $\tau(x)$ zadovoljava integralnu jednadžbu (gornji predznak odnosi se na unutrašnji, a donji na vanjski problem)

$$\mp 2\pi\tau(x) + \iint_S \tau(y)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S = f(x). \qquad (29)$$

Rješenje $u(x)$ Neumannovog problema traži se u obliku *potencijala jednostrukog sloja* (v. DJP, t. 10, formula 12) s nepoznatom gustoćom $\sigma(y)$:

$$u(x) = \iint_S \frac{1}{r}\sigma(y)\,\mathrm{d}S. \qquad (30)$$

Tada funkcija $\sigma(x)$ zadovoljava integralnu jednadžbu

$$\pm 2\pi\sigma(x) + \iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r}\mathrm{d}S = f(x). \qquad (31)$$

Uzimajući u obzir da je područje u kome se traži nepoznata funkcija dvodimenzionalno (dvodimenzionalna ploha S), lako je zaključiti da gornje jednadžbe imaju *polarnu jezgru*, dakle, da za njih vrijedi Fredholmova teorija. Pokazuje se da odgovarajuće homogene jednadžbe imaju samo trivijalna rješenja, tj. da je za svaku od tih jednadžbi realiziran slučaj Fredholmove alternative *a*). Prema tome za svaku (neprekidnu) funkciju $f(x)$ (u slučaju unutrašnjeg Neumannovog problema integral funkcije $f(x)$ po plohi S mora biti jednak nuli) Dirichletov, odnosno Neumannov problem ima jedno i samo jedno rješenje.

Analogno se pomoću dvodimenzionalnog potencijala dvostrukog, odnosno jednostrukog sloja (v. DJP, t. 10, formula 16, odnosno 15) rješavaju Dirichletov, odnosno Neumannov problem u prostoru E^2.

Znatne primjene u teoriji i praksi rubnih problema imaju *singularne integralne jednadžbe*. Danas se proučavaju i tzv. *integro-diferencijalne* i *singularne integro-diferencijalne jednadžbe* na koje se svode složeni kontaktni problemi mehanike kontinuuma.

LIT.: *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, Т. IV. Физматгиз, Москва [3]1953. — *С. Г. Михлин*, Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, Москва 1959. — *И. Г. Петровский*, Лекции по теории интегральных уравнений. Издат. Наука, Москва [3]1965. — *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York [3]1965. — *С. М. Б.* Интегральные уравнения. Издат. Наука, Москва 1968.

I. Aganović

INTEGRALNI RAČUN je zajedno s diferencijalnim računom uvod u matematičku analizu (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 288). Jedan od središnjih pojmova integralnog računa jest pojam određenog integrala na koji navode mnogi problemi matematike, prirodnih znanosti, tehnike i dr. Najjednostavniji problemi koji su doveli do pojma određenog integrala jesu izračunavanje ploštine (površine) zadanog lika u ravnini i obujma (volumena) tijela u prostoru.

Drugi osnovni pojam integralnog računa jest pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala na koji vodi obrat problema deriviranja, tj. za funkciju f zadanu na nekom intervalu traži se funkcija F tako da za svaki x iz promatranog intervala bude $F'(x) = f(x)$.

Problemom izračunavanja ploštine bavio se već i grčki matematičar Arhimed (←III st.). Antička se matematika, uopće, u mnogo većoj mjeri može smatrati pretečom integralnog računa nego diferencijalnog računa. Pri tome se misli u prvom redu na metodu ekshaustije (iscrpljivanja) koja potječe od Eudoksa (←III st.), a koju je mnogo primjenjivao Arhimed.

Počeci integralnog računa u današnjem smislu spadaju u XVII st., a iz tog vremena potječu i prve primjene u geometriji, mehanici i fizici. Na razvoj integralnog računa svojim radovima osobito su utjecali J. Kepler (1571–1630), B. Cavalieri (1598–1647), J. Wallis (1616–1703), B. Pascal (1623–1662) i drugi. Osnivačima integralnog računa smatraju se I. Newton (1643–1727) i G. W. Leibniz (1646–1716), koji su uveli osnovne pojmove i dali algoritam.

Za dalji razvoj i primjenu integralnog računa veoma su zaslužni: A. Clairaut (1713–1765), A. Cauchy (1789–1857), G. Darboux (1842–1917), B. Riemann (1826–1866), P. du Bois Raymond (1831–1889), H. Lebesgue (1875–1941), Th. Stieltjes (1856–1894) i C. Jordan (1838–1922).

Ovaj klasični pojam integrala koji je bio jasno formuliran već sredinom prošlog stoljeća, naziva se integralom u Riemannovu smislu, a bio je prikladan za rješavanje mnogih problema matematike, fizike i njihovih primjena. Ipak su se u novije vrijeme pojavili i takvi problemi za čije rješavanje nije dovoljan ovaj pojam integrala. H. Lebesgue je 1902. godine uveo novi, mnogo širi pojam integrala koji je vrlo važan u suvremenoj matematici. Jedna od velikih prednosti ovog šireg pojma jest u tome što skup svih funkcija integrabilnih prema Lebesgueu tvori potpun normiran vektorski (Banachov) prostor.

NEODREĐENI INTEGRAL

Primitivna funkcija i neodređeni integral. Neka je f funkcija definirana na intervalu $(a,b) \subseteq R$. Kaže se da je F *primitivna funkcija* funkcije f na (a,b), ako za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi $F'(x) = f(x)$. Pri tome lijevi kraj intervala može biti i $-\infty$, a desni može biti i $+\infty$. Npr. funkcija sinus je primitivna za funkciju kosinus na čitavom skupu realnih brojeva R, jer je za svaki $x \in R$ $(\sin x)' = \cos x$; funkcija $x \mapsto \ln x$ je za svaki $x > 0$ primitivna za funkciju $x \mapsto \frac{1}{x}$, jer je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ za $x > 0$.

Ako je F primitivna funkcija za f na (a,b), tada je i $F + C$, gdje je C po volji odabrana konstanta, također primitivna za f, jer je $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a,b)$. Ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije za f i ako je $\Phi = F_1 - F_2$, tada je $\Phi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ za svaki $x \in (a,b)$, pa je Φ konstanta na (a,b); (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 295).

Odatle proizlazi da se dvije primitivne funkcije F_1 i F_2 funkcije f razlikuju za neku konstantu, tj. da uvijek postoji takva konstanta C da je za svaki $x \in (a,b)$ $F_1(x) = F_2(x) + C$. Skup $\{F + C : C \in R\}$ svih primitivnih funkcija funkcije f zove se *neodređeni integral* funkcije f i označava se sa $\int f(x)\mathrm{d}x$. Dakle $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F + C : C \in R\}$. Mjesto te oznake obično se kraće piše $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. Funkcija f naziva se *podintegralnom funkcijom* ili *integrandom*, a C je *konstanta integracije*. Spomenuti primjeri mogu se prema tome pisati ovako: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, i $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$ za $x > 0$. Kako je $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, vrijedi $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, pa se znakovi diferenciranja i integriranja (u ovom redoslijedu) međusobno poništavaju. Ako su ti znakovi u obrnutom redoslijedu, vrijedi $\int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. Dakle, i u ovom slučaju se znakovi integriranja i diferenciranja poništavaju, s time da se funkciji F mora dodati konstanta C.

Ne postoji za svaku funkciju f njezina primitivna funkcija. Npr. Dirichletova funkcija $\chi : R \to R$ koja za racionalan x prima vrijednost 1, a za iracionalan x vrijednost 0, nema primitivne funkcije u nijednom intervalu. Naime, prema jednom poznatom teoremu, kad bi postojala primitivna funkcija F, morala bi derivacija funkcije F, tj. funkcija χ poprimiti sve vrijednosti između 0 i 1.

Iz definicije primitivne funkcije odmah slijede ova osnovna pravila za integriranje:

1) Ako f_1 i f_2 imaju primitivnu funkciju na (a,b), tada na tom intervalu vrijedi $\int (f_1(x) + f_2(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x$.

2) Ako je k konstanta po volji, tada je $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$. Funkcije koje dolaze na lijevoj i desnoj strani ovih jednakosti mogu se razlikovati za konstantu.

Navedena su dva pravila za računanje s primitivnim funkcijama. Međutim, sasvim je drugi problem kako za zadanu funkciju f naći njezinu primitivnu funkciju. Dok je npr. derivacija svake elementarne funkcije (v. *Funkcije*, TE5, str. 626) opet elementarna funkcija, primitivna funkcija elementarne ne mora biti elementarna funkcija. Ipak se za mnoge elementarne funkcije lako nalaze njihove primitivne.

Iz tablice deriviranja elementarnih funkcija (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 293) lako se dobije tablica osnovnih integrala (v. str. 538).

Svaka formula vrijedi u bilo kojem intervalu koji je sadržan u području definicije podintegralne funkcije. Deriviranjem funkcija na desnoj strani dobije se uvijek odgovarajuća podintegralna funkcija, pa se na taj način provjerava istinitost navedenih formula.