nadžbu (gornji predznak odnosi se na unutrašnji, a donji na vanjski problem)

$$\mp 2\pi\,\tau(x) + \iint\limits_S \tau(y)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S = f(x). \qquad (29)$$

Rješenje $u(x)$ Neumannovog problema traži se u obliku *potencijala jednostrukog sloja* (v. DJP, t. 10, formula 12) s nepoznatom gustoćom $\sigma(y)$:

$$u(x) = \iint\limits_S \frac{1}{r}\sigma(y)\,\mathrm{d}S. \qquad (30)$$

Tada funkcija $\sigma(x)$ zadovoljava integralnu jednadžbu

$$\pm 2\pi\sigma(x) + \iint\limits_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{r}\mathrm{d}S = f(x). \qquad (31)$$

Uzimajući u obzir da je područje u kome se traži nepoznata funkcija dvodimenzionalno (dvodimenzionalna ploha S), lako je zaključiti da gornje jednadžbe imaju *polarnu jezgru*, dakle, da za njih vrijedi Fredholmova teorija. Pokazuje se da odgovarajuće homogene jednadžbe imaju samo trivijalna rješenja, tj. da je za svaku od tih jednadžbi realiziran slučaj Fredholmove alternative *a*). Prema tome za svaku (neprekidnu) funkciju $f(x)$ (u slučaju unutrašnjeg Neumannovog problema integral funkcije $f(x)$ po plohi S mora biti jednak nuli) Dirichletov, odnosno Neumannov problem ima jedno i samo jedno rješenje.

Analogno se pomoću dvodimenzionalnog potencijala dvostrukog, odnosno jednostrukog sloja (v. DJP, t. 10, formula 16, odnosno 15) rješavaju Dirichletov, odnosno Neumannov problem u prostoru E^2.

Znatne primjene u teoriji i praksi rubnih problema imaju *singularne integralne jednadžbe*. Danas se proučavaju i tzv. *integro-diferencijalne* i *singularne integro-diferencijalne jednadžbe* na koje se svode složeni kontaktni problemi mehanike kontinuuma.

LIT.: *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, Т. IV. Физматгиз, Москва [3]1953. — *С. Г. Михлин*, Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, Москва 1959. — *И. Г. Петровский*, Лекции по теории интегральных уравнений. Издат. Наука, Москва [3]1965. — *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York [3]1965. — *С. М. Б.* Интегральные уравнения. Издат. Наука, Москва 1968.

I. Aganović

INTEGRALNI RAČUN je zajedno s diferencijalnim računom uvod u matematičku analizu (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 288). Jedan od središnjih pojmova integralnog računa jest pojam određenog integrala na koji navode mnogi problemi matematike, prirodnih znanosti, tehnike i dr. Najjednostavniji problemi koji su doveli do pojma određenog integrala jesu izračunavanje ploštine (površine) zadanog lika u ravnini i obujma (volumena) tijela u prostoru.

Drugi osnovni pojam integralnog računa jest pojam primitivne funkcije i neodređenog integrala na koji vodi obrat problema deriviranja, tj. za funkciju f zadanu na nekom intervalu traži se funkcija F tako da za svaki x iz promatranog intervala bude $F'(x) = f(x)$.

Problemom izračunavanja ploštine bavio se već i grčki matematičar Arhimed (←III st.). Antička se matematika, uopće, u mnogo većoj mjeri može smatrati pretečom integralnog računa nego diferencijalnog računa. Pri tome se misli u prvom redu na metodu ekshaustije (iscrpljivanja) koja potječe od Eudoksa (←III st.), a koju je mnogo primjenjivao Arhimed.

Počeci integralnog računa u današnjem smislu spadaju u XVII st., a iz tog vremena potječu i prve primjene u geometriji, mehanici i fizici. Na razvoj integralnog računa svojim radovima osobito su utjecali J. Kepler (1571—1630), B. Cavalieri (1598—1647), J. Wallis (1616—1703), B. Pascal (1623—1662) i drugi. Osnivačima integralnog računa smatraju se I. Newton (1643—1727) i G. W. Leibniz (1646—1716), koji su uveli osnovne pojmove i dali algoritam.

Za dalji razvoj i primjenu integralnog računa veoma su zaslužni: A. Clairaut (1713—1765), A. Cauchy (1789—1857), G. Darboux (1842—1917), B. Riemann (1826—1866), P. du Bois Raymond (1831—1889), H. Lebesgue (1875—1941), Th. Stieltjes (1856—1894) i C. Jordan (1838—1922).

Ovaj klasični pojam integrala koji je bio jasno formuliran već sredinom prošlog stoljeća, naziva se integralom u Riemannovu smislu, a bio je prikladan za rješavanje mnogih problema matematike, fizike i njihovih primjena. Ipak su se u novije vrijeme pojavili i takvi problemi za čije rješavanje nije dovoljan ovaj pojam integrala. H. Lebesgue je 1902. godine uveo novi, mnogo širi pojam integrala koji je vrlo važan u suvremenoj matematici. Jedna od velikih prednosti ovog šireg pojma jest u tome što skup svih funkcija integrabilnih prema Lebesgueu tvori potpun normiran vektorski (Banachov) prostor.

NEODREĐENI INTEGRAL

Primitivna funkcija i neodređeni integral. Neka je f funkcija definirana na intervalu $(a,b) \subseteq R$. Kaže se da je F *primitivna funkcija* funkcije f na (a,b), ako za svaki $x \in (a,b)$ vrijedi $F'(x) = f(x)$. Pri tome lijevi kraj intervala može biti i $-\infty$, a desni može biti i $+\infty$. Npr. funkcija sinus je primitivna za funkciju kosinus na čitavom skupu realnih brojeva R, jer je za svaki $x \in R$ $(\sin x)' = \cos x$; funkcija $x \mapsto \ln x$ je za svaki $x > 0$ primitivna za funkciju $x \mapsto \frac{1}{x}$, jer je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ za $x > 0$.

Ako je F primitivna funkcija za f na (a,b), tada je i $F + C$, gdje je C po volji odabrana konstanta, također primitivna za f, jer je $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a,b)$. Ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije za f i ako je $\Phi = F_1 - F_2$, tada je $\Phi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ za svaki $x \in (a,b)$, pa je Φ konstanta na (a,b); (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 295).

Odatle proizlazi da se dvije primitivne funkcije F_1 i F_2 funkcije f razlikuju za neku konstantu, tj. da uvijek postoji takva konstanta C da je za svaki $x \in (a,b)$ $F_1(x) = F_2(x) + C$. Skup $\{F + C : C \in R\}$ svih primitivnih funkcija funkcije f zove se *neodređeni integral* funkcije f i označava se sa $\int f(x)\mathrm{d}x$. Dakle $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F + C : C \in R\}$. Mjesto te oznake obično se kraće piše $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. Funkcija f naziva se *podintegralnom funkcijom* ili *integrandom*, a C je *konstanta integracije*. Spomenuti primjeri mogu se prema tome pisati ovako: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, i $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$ za $x > 0$. Kako je $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, vrijedi $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, pa se znakovi diferenciranja i integriranja (u ovom redoslijedu) međusobno poništavaju. Ako su ti znakovi u obrnutom redoslijedu, vrijedi $\int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. Dakle, i u ovom slučaju se znakovi integriranja i diferenciranja poništavaju, s time da se funkciji F mora dodati konstanta C.

Ne postoji za svaku funkciju f njezina primitivna funkcija. Npr. Dirichletova funkcija $\chi : R \to R$ koja za racionalan x prima vrijednost 1, a za iracionalan x vrijednost 0, nema primitivne funkcije u nijednom intervalu. Naime, prema jednom poznatom teoremu, kad bi postojala primitivna funkcija F, morala bi derivacija funkcije F, tj. funkcija χ poprimiti sve vrijednosti između 0 i 1.

Iz definicije primitivne funkcije odmah slijede ova osnovna pravila za integriranje:

1) Ako f_1 i f_2 imaju primitivnu funkciju na (a,b), tada na tom intervalu vrijedi $\int (f_1(x) + f_2(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x$.

2) Ako je k konstanta po volji, tada je $\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$. Funkcije koje dolaze na lijevoj i desnoj strani ovih jednakosti mogu se razlikovati za konstantu.

Navedena su dva pravila za računanje s primitivnim funkcijama. Međutim, sasvim je drugi problem kako za zadanu funkciju f naći njezinu primitivnu funkciju. Dok je npr. derivacija svake elementarne funkcije (v. *Funkcije*, TE5, str. 626) opet elementarna funkcija, primitivna funkcija elementarne ne mora biti elementarna funkcija. Ipak se za mnoge elementarne funkcije lako nalaze njihove primitivne.

Iz tablice deriviranja elementarnih funkcija (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 293) lako se dobije tablica osnovnih integrala (v. str. 538).

Svaka formula vrijedi u bilo kojem intervalu koji je sadržan u području definicije podintegralne funkcije. Deriviranjem funkcija na desnoj strani dobije se uvijek odgovarajuća podintegralna funkcija, pa se na taj način provjerava istinitost navedenih formula.

Služeći se osnovnim svojstvima neodređenih integrala i tablicom osnovnih integrala, mogu se integrirati i neke druge elementarne funkcije. To je tzv. *direktna integracija.* Tako se npr. integrira polinom:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\mathrm{d}x = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \ldots a_n x + C.$$

Međutim, nema općih pravila za direktnu integraciju, a brojne se elementarne funkcije ne mogu na taj način integrirati. Da bi se za što više funkcija došlo do njihovih primitivnih, treba upotrijebiti neke druge metode.

Metoda supstitucije. U mnogim slučajevima uvođenje nove varijable omogućuje da se izračunavanje integrala neke funkcije svede na tablični integral. To je *metoda supstitucije* ili zamjene varijabli.

Neka je φ strogo monotona funkcija derivabilna na intervalu $(\alpha,\beta) \subseteq R$ i neka je za svaki $t \in (\alpha,\beta)$ $\varphi'(t) \neq 0$; neka je dalje f definirana na nekom intervalu $I \supseteq (\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$. Ako je $t \mapsto \Phi(t)$ primitivna za funkciju $t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, tada je $x \mapsto F(x) = \Phi(\varphi^{-1}(x))$ primitivna za funkciju f. Naime,

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Prema tome ako je poznat integral: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t) + C$, onda je $\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C$. Ta se činjenica obično zapisuje u obliku jednakosti $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Drugim riječima, ako treba naći $\int f(x)\mathrm{d}x$, a ne zna se izravno odrediti primitivna funkcija za f, zamijeni se $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Na kraju treba umjesto t opet pisati izraz za x. Dakako, uvoditi novu varijablu ima smisla ako se zna odrediti primitivna funkcija za novi integrand.

Primjeri. a) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Stavi se $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$, $(x > 0)$; stavi se $x = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$. Onda je $t = \ln x$, te je: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$

Ponekad integral koji se traži ima oblik $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ pa se uvođenjem nove varijable $\varphi(t) = x$, $\varphi'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ dobiva: $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x$. Ako se za podintegralnu funkciju na desnoj strani zna odrediti primitivna funkcija $x \mapsto F(x)$, tada je $t \mapsto F(\varphi(t))$ primitivna funkcija za zadanu funkciju. U ovom slučaju ne treba zahtijevati da φ ima inverznu funkciju.

Primjer. $\int \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$; stavi se $g(t) = x$, $g'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; $\int \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C = \ln|g(t)| + C.$

Parcijalna integracija. Neka su u i v funkcije sa neprekidnom prvom derivacijom na nekom intervalu (a,b). Tada je $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, $x \in (a,b)$, pa je uv primitivna funkcija za funkciju na desnoj strani navedenog izraza:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x), \quad \text{tj.}$$
$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

Taj se izraz naziva *formulom parcijalne integracije.* Tom se formulom izračunavanje integrala funkcije $x \mapsto u(x)v'(x)$ svodi na izračunavanje integrala funkcije $x \mapsto v(x)u'(x)$. Ta se metoda upotrebljava kad se ne zna izravno izračunati integral prve funkcije, a zna se izračunati integral druge funkcije.

Primjeri. a) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Ako je $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$, tada je $u'(x) = 1$; $v(x) = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$, dakle: $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

b) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$. Ako je $u(x) = \arcsin x$, $v'(x) = 1$, tada je $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $v(x) = x$, dakle: $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Posljednji se integral računa supstitucijom: $1 - x^2 = t$, $-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $x\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2}$, pa je $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = -\sqrt{t} + C_1$. Dakle: $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

c) $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$. Ako je $u(x) = \arctan x$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $v(x) = x$, tada je: $\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

Integracija racionalnih funkcija

Svaka racionalna funkcija može se prikazati kao kvocijent dvaju polinoma: $R = P_m/Q_n$, gdje je m stupanj polinoma u brojniku, a n stupanj polinoma u nazivniku. Ako je $m < n$, R je prava, a ako je $m \geqq n$, R je neprava racionalna funkcija. Svaka se neprava racionalna funkcija može napisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije. Zato se može od početka pretpostaviti da je R prava racionalna funkcija. Uz pretpostavku da su poznate sve nul-točke nazivnika, može se R rastaviti na parcijalne razlomke (ili prikazati pomoću parcijalnih razlomaka; v. *Funkcije,* TE5, str. 623). Tako se integracija prave racionalne funkcije svodi na integracije funkcija oblika:

$$\frac{A}{x+a}; \quad \frac{A}{(x+a)^n}; \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n};$$
$$(n = 2,3,\ldots).$$

Pri tome se pretpostavlja da je diskriminanta $p^2 - 4q$ kvadratnog trinoma u nazivniku negativna. Vrijedi:

$$\int \frac{A}{x+a}\mathrm{d}x = A\ln|x+a| + C; \quad \int \frac{A}{(x+a)^n}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{(1-n)(x+a)^{n-1}}; \quad (n \geqq 2).$$

Da se integriraju preostala dva razlomka, treba ih najprije transformirati. $I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$. Integracija od I svodi se, dakle, na integraciju ovih dvaju izraza: $I_{1n} = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$ i $I_{2n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$. Da se izračuna I_{1n}, uvodi se supstitucija $x^2 + px + q = t$, $(2x+p)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, pa je $I_{1n} = \int t^{-n}\mathrm{d}t$. Za $n = 1$:

$$I_{11} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + px + q| + C,$$

a za $n \geqq 2$:

$$I_{1n} = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{(-n+1)(x^2+px+q)^{n-1}} + C.$$

Da se izračuna I_{2n}, kvadratni trinom u nazivniku piše se u nešto drukčijem obliku:

$$(x^2 + px + q) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2 + 1\right].$$

Supstitucija $\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} = t$, $\quad dx = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}\,dt$, daje:

$$I_{2n} = \int \frac{4^n dx}{(4q-p^2)^n\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{4^n\sqrt{4q-p^2}}{2(4q-p^2)^n}\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Prema tome treba još izračunati $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$.

Za $n = 1$ jest:

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Za $n \geqq 2$ jest:

$$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^n}dt =$$

$$= \int\frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} - \int\frac{t^2}{(t^2+1)^n}dt;$$

prvi integral na desnoj strani jest I_{n-1}, a drugi se izračuna parcijalnom integracijom:

$$\int\frac{t^2}{(t^2+1)^n}dt = \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^n}dt = \frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)^{-n+1}}{-n+1}dt = \frac{t}{2(-n+1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

Uvrštavanjem u izraz za I_n dobije se:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

Tako se dobije rekurzivna formula pomoću koje se može za svaki prirodan broj n izračunati I_n polazeći od $I_1 = \arctan t + C$.

Postepeno se dobiva:

$$I_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C; \qquad I_3 = \frac{t+(3t^2+5)}{8(t^2+1)^2} +$$

$$+\frac{3}{8}\arctan t + C$$

itd. Na kraju se treba naravno vratiti na polaznu varijablu x.

Iz toga se zaključuje da je primitivna funkcija svake racionalne funkcije elementarna funkcija i uvijek se može predočiti kao zbroj racionalne funkcije, logaritma i arkus tangensa.

Integracija iracionalnih i transcendentnih funkcija

Integracija nekih iracionalnih i transcendentnih funkcija čiji se integrali izražavaju pomoću elementarnih funkcija obično se obavlja tako da se integral takve funkcije prikladnom supstitucijom svodi na integral racionalne funkcije, tj. promatrani se integral racionalizira.

Integracija racionalnih funkcija trigonometrijskih funkcija. Funkcija $x \mapsto R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$ naziva se racionalnom funkcijom trigonometrijskih funkcija ako se zamjenom $y = \sin x$, $z = \cos x$, $\frac{y}{z} = \tan x$, $\frac{z}{y} = \cot x$, dobije racionalna funkcija s obzirom na y i z $R\left(y, z, \frac{y}{z}, \frac{z}{y}\right)$ koja ne sadrži eksplicite varijablu x. Npr. $x \mapsto \frac{\sin x}{2+\cos x}$, $x \mapsto \frac{\tan x + 1}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ jesu racionalne funkcije trigonometrijskih, a $x \mapsto x\sin x$ nije.

Budući da su tangens i kotangens racionalne funkcije od sinus i kosinus, svaka se racionalna funkcija trigonometrijskih svodi na racionalne funkcije od sinus i kosinus. Integral takve funkcije označavat će se sa $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Takav se integral uvijek racionalizira supstitucijom $\tan\frac{x}{2} = t$. Tada je

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Kako je racionalna funkcija racionalne funkcije opet racionalna funkcija, integral na desnoj strani je integral racionalne funkcije od t.

Supstitucija $\tan\frac{x}{2} = t$ uvijek vodi cilju, ali često su podintegralne funkcije dosta komplicirane. Zato se u nekim specijalnim slučajevima upotrebljavaju druge supstitucije koje brže vode cilju.

Ako je podintegralna funkcija neparna s obzirom na funkciju sinus, tj. ako je $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, može se racionalizirati supstitucijom $\cos x = t$. Ako je podintegralna funkcija neparna s obzirom na kosinus, uvodi se supstitucija $\sin x = t$. Takve su npr. funkcije oblika $\sin^m x\cos^n x$, gdje su m i n cijeli brojevi od kojih je barem jedan neparan. Ako su m i n pozitivni parni brojevi, integracija se može provesti tako da se podintegralna funkcija izrazi pomoću trigonometrijskih funkcija dvostrukih argumenata.

Primjer: $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int(\sin^2 x\cos^2 x)\cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\sin^2 2x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{8}\int\sin^2 2x + \frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x +$$

$$+\frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, može se racionalizirati supstitucijom $\tan x = t$.

Na sličan način mogu se racionalizirati integrali racionalnih funkcija hiperbolnih funkcija (v. *Funkcije*, TE5, str. 626): $\int R(\sinh x, \cosh x)dx$. Supstitucija $t = \tanh\frac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{artanh} t = 2\tanh^{-1} t$, $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$, $\sinh t = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh t = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Integrali oblika $\int\sin mx\cos nx\,dx$, $\int\cos mx\cos nx\,dx$, $\int\sin mx\sin nx\,dx$ izračunavaju se tako da se primijene formule kojima se umnošci trigonometrijskih funkcija koje dolaze kao integrandi transformiraju u zbroj (v. *Funkcije*).

Primjer: $\int\sin mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int\sin(m+n)x\,dx +$

$$+\frac{1}{2}\int\sin(m-n)x\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,$$

$m \neq n$, $\quad m \neq -n$. Ako je $n = \pm m$, tada je

$$\int\sin mx\cos(\pm mx)dx = \frac{1}{2}\int\sin 2mx\,dx = -\frac{1}{4m}\cos 2mx + C.$$

Integrali oblika $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. Supstitucija $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vodi na integral racionalne funkcije.

Integrali kvadratnih iracionaliteta. Tako se nazivaju integrali oblika $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Pretpostavlja se da su nultočke kvadratnog trinoma međusobno različite, jer se u suprotnom slučaju korijen iz tog trinoma može zamijeniti racionalnim izrazom. Taj se integral uvijek može racionalizirati pomoću jedne od Eulerovih supstitucija.

Neka je $a>0$, tada se uvodi supstitucija $\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}x$. Odatle se dobiva:

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\qquad dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Prema tome x, dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju se kao racionalne funkcije od t, pa promatrani integral prelazi u integral racionalne funkcije.

Neka trinom ax^2+bx+c ima realne nultočke x_1 i x_2. Tada je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ i promatrani integral može se racionalizirati supstitucijom $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$.

Ako je $c \geqq 0$, tada se integral može racionalizirati supstitucijom $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$.

Primjer. Neka se izračuna $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Kako je $a>0$, supstitucijom $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ dobije se $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$,

$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+2t}$, $\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$. Prema tome

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt=$$
$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}=$$
$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$
$$+\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C.$$

Iako Eulerove supstitucije uvijek dovode do racionalizacije integrala $\int R(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$ (iz praktičnih razloga piše se $2b$ umjesto b), te supstitucije često vode na dosta složene izraze. Zato je jednostavnije upotrijebiti supstituciju koja promatrani integral prevodi u integral racionalne funkcije trigonometrijskih ili hiperbolnih funkcija. Najprije se kvadratni trinom napiše u nešto drukčijem obliku: $ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}[(ax+b)^2-(b^2-ac)]$. Dobit će se nekoliko različitih slučajeva:

α) Neka je $a>0$ i $b^2-ac>0$, tada su $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b^2-ac}$ realni, pa se može pisati:

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{a}}\sqrt{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)^2-1}.$$

Ako se supstituira $\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}=t$, $\quad dx=\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}dt$, tada se polazni integral svodi na integral oblika: $\int R(t,\sqrt{t^2-1})\,dt$. Supstitucijom $t=\cosh u$ taj se integral svodi na integral racionalne funkcije hiperbolnih, a supstitucijom $t=\frac{1}{\sin u}$ na integral racionalne funkcije trigonometrijskih funkcija.

β) Ako je $a<0$, $b^2-ac>0$, tada se može pisati

$$ax^2+2bx+c=\frac{b^2-ac}{-a}\left|-\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)^2+1\right| \quad \text{i}$$

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\sqrt{\frac{b^2-ac}{-a}}\sqrt{1-\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)^2}.$$

Ako se uvede ista supstitucija kao i u slučaju α), dolazi se do integrala oblika $\int R(t,\sqrt{1-t^2})\,dt$. Supstitucijom $t=\sin u$ taj se integral svodi na integral racionalnih funkcija trigonometrijskih, a supstitucijom $t=\frac{1}{\cosh u}$ na integral racionalnih funkcija hiperbolnih.

γ) Ako je $a>0$ i $b^2-ac<0$, tada se može pisati:

$$ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}[(ax+b)^2+(ac-b^2)] \quad \text{i}$$

$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\cdot\sqrt{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1}$. Neka je $\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}=t$, $\quad dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dt$.

Dolazi se do integrala oblika $\int R(t,\sqrt{t^2+1})\,dt$ i tu se primjenjuje supstitucija $t=\sinh u$ ili $t=\tan u$. Slučaj se $a<0$ i $b^2-ac<0$ ne promatra, jer je tada izraz $ax^2+2bx+c$ negativan za svaki x, pa kvadratni korijen iz tog izraza nije realan ni za jedan x.

Primjer. $I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$; supstitucijom $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$ dobiva se $I=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\cos t\,dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$. Podintegralna funkcija je neparna s obzirom na $\sin t$, pa je prikladna supstitucija $\cos t=u$, $-\sin t\,dt=du$. Tada je:

$$\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int\frac{\cos^2 t\sin t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{u^2}{u^2-1}du=$$
$$=u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

U rezultatu se treba još vratiti na polaznu varijablu x.

Binomni integrali. To su integrali oblika $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, gdje su m, n, p racionalni brojevi. Racionalizacija je moguća, kako je to dokazao ruski matematičar P. Čebišev, samo u slučajevima kada je barem jedan od brojeva p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ cijeli broj. Da bi se dokazalo da su ti uvjeti dovoljni, uvodi se supstitucija $t=x^n$, $x=t^{\frac{1}{n}}$, $\quad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. Tada je

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p t^{\frac{1}{n}-1}dt=$$
$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt.$$

Ako je p cijeli broj, onda je gornji integral oblika $\int R(t,\sqrt[n]{t})\,dt$, što je specijalan slučaj već navedenog integrala oblika

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$$

Ako je $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj, a $p=\frac{r}{s}$, r, s cijeli brojevi, onda supstitucija $a+bt=u^s$ prevodi integrand u racionalnu funkciju.

Ako je $\frac{m+1}{n}+p$ cijeli broj, piše se $\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$; za $p=\frac{r}{s}$, supstituira se $\frac{a+bt}{t}=u^s$, što opet prevodi integrand u racionalnu funkciju.

Integrali oblika $\int P_n(x)f(x)\mathrm{d}x$, gdje je P_n polinom n-tog stupnja, a $f(x)$ je $\cos kx$ ili $\sin kx$ ili e^{kx}, izračunavaju se parcijalnom integracijom ovako: neka je $u(x) = P_n(x)$, $v'(x) = f(x)$, $v(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \varphi(x)$, pa je funkcija $\varphi(x)$ ili $\frac{\sin kx}{k}$ ili $-\frac{\cos kx}{k}$ ili $\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}$, a $u'(x) = P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ jest polinom $(n-1)$-og stupnja. Tada je $\int P_n(x)f(x)\mathrm{d}x = P_n(x)\varphi(x) - \int P_n'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.

Na taj se način svelo izračunavanje polaznog integrala na integral istog oblika, ali u kojem je stupanj polinoma za jedinicu niži. Ponavljajući taj postupak n puta, dolazi se do integrala u kojima podintegralna funkcija poprima jedan od oblika $\cos kx$, $\sin kx$, e^{kx}.

Na sličan se način parcijalnom integracijom mogu naći integrali oblika: $\int P_n(x)\ln|x|\mathrm{d}x$; $\int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$; $\int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$.

Metoda neodređenih koeficijenata. Ta se metoda može upotrijebiti kad je unaprijed poznat oblik primitivne funkcije. Tako se npr. lako može zaključiti da će primitivna funkcija za $\mathrm{e}^{kx}P_n(x)$ imati oblik: $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = Q_n(x)\mathrm{e}^{kx} + C$, gdje je Q_n opet polinom n-tog stupnja s nepoznatim koeficijentima, a C konstanta po volji. Deriviranjem gornjeg izraza dobiva se

$$P_n(x)\mathrm{e}^{kx} = Q_n'(x)\mathrm{e}^{kx} + kQ_n(x)\mathrm{e}^{kx}.$$

Dijeljenjem sa e^{kx} dobije se identiteta

$$P_n(x) = Q_n'(x) + kQ_n(x),$$

a odatle se mogu odrediti koeficijenti od Q_n.

Primjer. Neka se izračuna $\int x^3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. Neka je $\int x^3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{e}^{3x} + C$. Deriviranjem i dijeljenjem sa e^{3x} izlazi: $x^3 = 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c)$.

Uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije od x, dobija se: $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{9}$, $d = -\frac{2}{27}$. Prema tome

$$\int x^3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^{3x} + C.$$

Ako podintegralna funkcija ima oblik $x \mapsto P_n(x)\cos kx + Q_n(x)\sin kx$, gdje su P_n i Q_n polinomi stupnja n (s time da jedan od njih može biti i nižeg stupnja, pa čak i jednak nuli), onda će primitivna funkcija imati oblik: $\int(P_n(x)\cos kx + Q_n(x)\sin kx)\mathrm{d}x = R_n(x)\cos kx + S_n(x)\sin kx + C$, gdje su R_n i S_n polinomi stupnja n. Da se odrede koeficijenti od R_n i S_n, treba opet derivirati gornju identitetu i izjednačiti koeficijente na obadvije strane uz sumande oblika $x^p\cos kx$, odnosno $x^q\sin kx$. Integrali oblika

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x$$

mogu se računati pomoću neodređenih koeficijenata ovako:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

pri čemu se koeficijenti polinoma Q_{n-1} i broj λ određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer. Neka se izračuna $I = \int(x + 2)\sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$. I se može transformirati tako da se racionalizira brojnik, pa se dobije:

$$I = \int\frac{(x + 2)(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 1} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Deriviranjem dobije se:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} = (ax^2 + bx + c)\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + (2ax + b)\sqrt{x^2 - 1} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Množenjem s $\sqrt{x^2 - 1}$ i uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije od x dobije se: $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $\lambda = -1$.

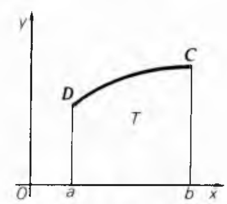
Konačno: $\int(x + 2)\sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}\right)\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$.

Kod navedenih metoda nastojalo se da se traženi integral svede pomoću neke od promatranih metoda na tablični, ako je to bilo moguće. S obzirom na to da se neodređeni integrali često upotrebljavaju u matematici i u njenim primjenama u tehnici, prirodnim znanostima, ekonomici i drugim područjima, postoje različite tablice neodređenih integrala koje često upotrebljavaju inženjeri, znanstveni radnici, ekonomisti i drugi.

ODREĐENI INTEGRAL

Promotrit će se dva problema koji vode na pojam određenog integrala. To su izračunavanje ploštine i rada sile.

Problem ploštine. Neka je na zatvorenom intervalu $[a,b]$ dana neprekinuta, nenegativna funkcija f. Lik $abCD$ koji je omeđen intervalom $[a,b]$, grafom funkcije f, te pravcima $x = a$ i $x = b$ naziva se krivocrtnim trapezom (pseudotrapezom). Prema tome pseudotrapez T na sl. 1 je skup $T = \{(x,y): x \in [a,b], 0 \leqq y \leqq f(x)\}$.



Sl. 1

Treba definirati ploštinu $p(T)$ tog pseudotrapeza. Neka je m infimum, a M supremum funkcije f na $[a,b]$. Tražena se ploština mora nalaziti između ploština pravokutnika kojima je osnovica duljina intervala $[a,b]$ a visina m, odnosno M: $m(b - a) \leqq p(T) \leqq M(b - a)$. Ako se želi točnije odrediti ploština skupa T, treba podijeliti interval $[a,b]$ na n dijelova diobenim točkama $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$. Neka je T_k dio pseudotrapeza koji se nalazi nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$, a m_k i M_k infimum i supremum funkcije f na tom intervalu. Za ploštinu pseudotrapeza T_k vrijediti: $m_k(x_k - x_{k-1}) \leqq p(T_k) \leqq M_k(x_k - x_{k-1})$, pa se ploština od T_k nalazi između ploština pravokutnika kojima je baza duljina intervala $[x_{k-1}, x_k]$, a visina m_k, odnosno M_k, Tada će za ploštinu od T vrijediti

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqq p(T) \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_n.$$

Ako se za ploštinu pseudotrapeza uzme približno vrijednost s_n ili vrijednost S_n, učinjena greška neće prijeći broj $S_n - s_n$ i bit će to manja što podjela intervala $[a,b]$ na manje intervale bude linija. Da se na taj način dođe do definicije ploštine, omogućuje pojam određenog integrala.

Rad sile. Promatra se problem rada pri pravocrtnom gibanju ako se smjer sile podudara sa smjerom gibanja. Neka je materijalna točka pod djelovanjem sile $\vec{F}$ prešla put od točke A s apscisom a do točke B s apscisom b, $a < b$. Kad bi sila bila konstantna na čitavom putu, rad potreban da se materijalna točka premjesti iz A u B bio bi jednak umnošku te konstantne sile i puta. Pretpostavi li se da sila $\vec{F}$ nije konstantna na $[a,b]$ i da je m njezina najmanja a M najveća vrijednost na tom intervalu, tada će za izvršeni rad W na putu od A do B vrijediti: $m(b-a) \leqq W \leqq M(b-a)$. Ako se želi bolja aproksimacija za iznos rada, izvršit će se opet podjela intervala $[a,b]$ na n manjih intervala diobenim točkama kao u navedenom primjeru. Ako se označi sa m_k najmanja a sa M_k najveća vrijednost sile na $[x_{k-1}, x_k]$, onda će za izvršeni rad W na putu od A do B vrijediti

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqq W \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Vidi se da se problem izračunavanja ploštine krivocrtnog trapeza i problem izračunavanja rada sile s matematičkog gledišta ne razlikuju. Različiti drugi problemi matematike, mehanike i fizike vode na istu zadaću.

Definicija i svojstva određenog integrala

Neka je $[a,b] \subseteq R$ zatvoreni interval realnih brojeva i $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$, $n \in N$. Skup $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, ... $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ zatvorenih intervala zove se *podjela* ili *subdivizija* intervala $[a,b]$, i označava se sa p. Točke x_0, $x_1 \ldots x_n$ zovu se *diobene točke* podjele p. Broj $x_k - x_{k-1}$ zove se *dijametar* ili *duljina intervala* I_k. Najveći dijametar intervala podjele p označava se sa $|p|$:

$$|p| = \max\{(x_k - x_{k-1}) : k = 1, \ldots n\}.$$

Ako se subdivizija p' intervala $[a,b]$ dobije iz subdivizije p istog intervala dodavanjem novih diobenih točaka, kaže se da je p' *profinjenje podjele* p.

Neka je $f:[a,b] \to R$ omeđena funkcija na $[a,b]$ i neka je m infimum a M supremum funkcije f na $[a,b]$. Ako je $[a',b'] \subseteq [a,b]$ i m' infimum od f na $[a',b']$ a M' supremum od f na tom intervalu, tada za svaki $x \in [a',b']$ vrijedi: $m \leqq m' \leqq f(x) \leqq M' \leqq M$.

Razlika $M - m$ naziva se *oscilacijom funkcije* f na $[a,b]$ i označava sa $\omega_{[a,b]} f$ ili ωf ako se razumijeva na koji se interval odnosi oscilacija. Jasno je da iz $[a',b'] \subseteq [a,b]$ slijedi $\omega_{[a',b']} f \leqq \omega_{[a,b]} f$. Neka je m_k infimum a M_k supremum funkcije f na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ podjele p. Uvode se oznake:

$$s(f,p) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - k_{k-1}); \quad S(f,p) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Zbroj $s(f,p)$ se naziva donjom *Darbouxovom sumom*, a $S(f,p)$ gornjom Darbouxovom sumom za funkciju f i podjelu p intervala $[a,b]$.

Uz Darbouxove sume promatraju se i integralne sume. Neka je $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Izraz $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ naziva se *integralnom sumom* za funkciju f i podjelu p intervala $[a,b]$ sa zadanim istaknutim točkama t_k.

Osnovna svojstva Darbouxovih suma. Kako je uvijek $m_k \leqq M_k$, vrijedi $s(f,p) \leqq S(f,p)$. Jasno je da za svaki izbor istaknutih točaka za danu podjelu p vrijedi:

$$s(f,p) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leqq S(f,p).$$

Ako se podjela p profini dodavanjem novih diobenih točaka do podjele p', bit će: $s(f,p) \leqq s(f,p')$ i $S(f,p) \geqq S(f,p')$, što se dokazuje vrlo jednostavno.

Svaka donja Darbouxova suma nije veća od bilo koje gornje Darbouxove sume. Stvarno, neka je $s(f,p_1)$ donja suma za podjelu p_1, a $S(f,p_2)$ gornja suma za podjelu p_2. Neka je p podjela čije su diobene točke sve diobene točke od p_1 i p_2. Tada je $s(f,p_1) \leqq s(f,p) \leqq S(f,p) \leqq S(f,p_2)$.

Prema tome je svaka donja Darbouxova suma omeđena zdesna bilo kojom gornjom Darbouxovom sumom, pa postoji supremum svih donjih Darbouxovih suma za sve moguće podjele intervala $[a,b]$. Taj se supremum označava sa $I_*(f,[a,b]) = I_*$ i naziva donjim *Riemannovim integralom* funkcije f na $[a,b]$. Analogno se zaključuje da postoji infimum gornjih Darbouxovih suma koji se zove gornji Riemannov integral funkcije f na $[a,b]$ i označava se sa $I^*(f,[a,b]) = I^*$. Uvijek vrijedi $I_* \leqq I^*$.

Zaista, supremum donjih Darbouxovih suma ne prelazi nijednu gornju Darbouxovu sumu, pa je I_* donja međa za sve gornje Darbouxove sume, odakle odmah izlazi gornja nejednakost.

Kaže se da je f *integrabilna* na $[a,b]$ ili integrabilna prema Riemannu na $[a,b]$, ako je $I_* = I^*$. Ta se zajednička vrijednost označava tada sa $I(f,[a,b]) = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$ i zove se *određeni integral* funkcije f na $[a,b]$.

Broj a se zove donja *granica integracije*, a b gornja granica; funkcija f se zove *podintegralna funkcija* ili *integrand*.

Vrijednost integrala ne ovisi o tome kako je označena nezavisna varijabla, pa vrijedi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$; itd.

Vrijedi ovaj teorem: omeđena funkcija f je integrabilna na $[a,b]$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji donja Darbouxova suma $s(f,p)$ i gornja Darbouxova suma $S(f,p)$ tako da bude $S(f,p) - s(f,p) < \varepsilon$.

Isto se tako može pokazati da je za egzistenciju integrala funkcije f na $[a,b]$ nužno i dovoljno da bude $\lim_{|p| \to 0} (S(f,p) - s(f,p)) = 0$.

Ako se sa ω_k označi oscilacija funkcije f na $[x_{k-1}, x_k]$, onda se nuždan i dovoljan uvjet za integrabilnost može pisati:

$$\lim_{|p| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Služeći se pojmom integralne sume, nuždan i dovoljan uvjet integrabilnosti funkcije f na $[a,b]$ može se i ovako izreći: f je integrabilna na $[a,b]$ onda i samo onda ako postoji broj I takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ sa svojstvom da za svaku podjelu p sa $|p| < \delta$ bude $|I - \sigma(f,p)| < \varepsilon$, pri čemu je $\sigma(f,p)$ bilo koja integralna suma za podjelu p.

Tada se piše

$$\lim_{|p| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Da bi funkcija f bila integrabilna na $[a,b]$, nužno je da na tom intervalu bude ograđena. Zaista, ako f nije ograđena na $[a,b]$, onda f nije ograđena u bar jednom elementu $[x_{k-1}, x_k]$ podjele p. Ako se odabere u svakom od preostalih elemenata podjele p po jedna čvrsta točka, onda mijenjajući točku t_k u $[x_{k-1}, x_k]$ mogu se dobiti integralne sume koje po apsolutnoj vrijednosti premašuju svaki unaprijed zadan broj $M > 0$, pa integralne sume nemaju konačne granice.

Svaka neprekidna na $[a,b]$ funkcija f je integrabilna. Naime, iz toga što je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ slijedi da je f jednoliko neprekidna na $[a,b]$, pa za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu p za koju je $|p| < \delta$ bude

$$|M_k - m_k| = M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

No, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Kako je ε izabran po volji, to upravo znači da je $\lim (S(f,p) - s(f,p)) = 0$, pa je funkcija f integrabilna.

Na temelju ovog teorema vidi se da je skup funkcija koje su integrabilne na $[a,b]$ širi od skupa funkcija koje su derivabilne na $[a,b]$, jer je za derivabilnost funkcije nužna njena neprekinutost, što ne mora biti dovoljno. Naprotiv, ima funkcija koje nisu neprekinute a integrabilne su.

Neka osnovna svojstva određenog integrala. *a*) Ako je f integrabilna na $[a,b]$, onda su i funkcije $|f|$ i cf, c realan broj, integrabilne na $[a,b]$.

Oscilacija ω_X funkcije f na nekom skupu X može se definirati ovako: $\omega_X = \sup\{(f(x') - f(x'')) : x', x'' \in X\}$. Kako je za $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ uvijek $|f(x'')| - |f(x')| \leqslant |f(x'') - f(x')|$, oscilacija $|\omega_k|$ funkcije $|f|$ na $[x_{k-1}, x_k]$ ne može biti veća od oscilacije ω_k funkcije f na tom intervalu, odakle odmah slijedi tvrdnja.

Na sličan se način može pokazati i integrabilnost funkcije cf na $[a,b]$.

b) Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, tada su zbroj i produkt tih funkcija također integrabilni na $[a,b]$.

c) Iz *a*) i *b*) slijedi specijalno: ako su f_1 i f_2 integrabilne na $[a,b]$, a c_1 i c_2 realni brojevi, tada je i funkcija $c_1 f_1 + c_2 f_2$ integrabilna na $[a,b]$.

Može se pokazati da vrijedi:

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Prema tome je skup svih integrabilnih na $[a,b]$ funkcija vektorski prostor s obzirom na zbrajanje funkcija i množenje funkcija s realnim brojevima (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288).

d) Ako su f_1 i f_2 integrabilne na $[a,b]$ i ako je za svaki $x \in [a,b]$, $f_1(x) \leqq f_2(x)$, onda je i $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$. To se svojstvo naziva *monotonost integrala*.

Posebno, ako je m infimum, a M supremum funkcije f na $[a,b]$, onda je za svaki $x \in [a,b]$ $m \leqq f(x) \leqq M$, pa je:

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqq \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

Kako se prema *c*) konstante m i M mogu pisati pred znak integrala a

$$\int_a^b \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a,$$

bit će:

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqq M(b-a).$$

Ako je $f(x) \geqq 0$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je i $m \geqq 0$, pa je i $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqq 0$.

e) Iz *d*) slijedi $m \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqq M$. Ako je funkcija f neprekidna, onda je m minimum, a M maksimum funkcije f na $[a,b]$ i f poprima svaku vrijednost između m i M. Zato postoji točka $\xi \in [a,b]$ za koju je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \quad \text{ili} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

Ova posljednja jednakost naziva se *teoremom o srednjoj vrijednosti* integralnog računa. Iz tog teorema slijedi: ako je f neprekidna na $[a,b]$, onda za svaku podjelu p intervala $[a,b]$ postoji integralna suma funkcije f koja je jednaka $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Zaista, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$. Prema teoremu o srednjoj vrijednosti za svaki $k = 1, \ldots, n$ postoji $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tako da bude $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = f(t_k)(x_k - x_{k-1})$, pa je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

Navedeni teorem o srednjoj vrijednosti je poseban slučaj slijedećeg teorema. Neka su f i φ integrabilne na $[a,b]$, a φ neka je uz to na čitavom tom intervalu nenegativna ili pozitivna funkcija; onda postoji realan broj μ, $m \leqq \mu \leqq M$, gdje je m infimum, a M supremum funkcije f na $[a,b]$ tako da bude: $\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.

Ako je uz to f neprekidna funkcija, onda postoji barem jedna točka $\xi \in [a,b]$ tako da je $\mu = f(\xi)$, pa vrijedi:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

f) Ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$, onda vrijedi:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Relacija slijedi neposredno iz *d*) i *a*) ako se uzme u obzir da vrijedi: $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$.

g) Ako je f integrabilna funkcija na $[a,c]$ i na $[c,b]$, $c \in (a,b)$, onda je f integrabilna i na $[a,b]$ i vrijedi:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

To je svojstvo *aditivnosti integrala* po području integracije. Obratno, ako je integrabilna funkcija na $[a,b]$, ona je integrabilna na $[a,c]$ i na $[c,b]$, $c \in (a,b)$ i vrijedi gornja formula.

h) Prema definiciji je $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Tada vrijedi: ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$, onda za po volji odabrane brojeve $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ bez obzira na njihov međusobni raspored po veličini vrijedi: $\int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\mathrm{d}x$.

Integral kao funkcija gornje granice. *a*) Neka je f integrabilna funkcija na $[a,b]$; tada je funkcija $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$ neprekinuta na $[a,b]$.

Zaista, $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \mu h$, gdje je μ broj između infimuma i supremuma od f na $[x, x+h]$. Kako je $\lim_{h\to 0}(F(x+h) - F(x)) = 0$, F je neprekinuta funkcija za svaki $x \in [a,b]$.

Za funkciju F se kaže da je integral s promjenljivom gornjom granicom.

b) Neka je f neprekinuta funkcija u točki $x_0 \in [a,b]$; tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ vrijedi: $f(x_0) - \varepsilon \leqq f(x) \leqq f(x_0) + \varepsilon$. Pretpostavlja se, naravno, da je $x \in [a,b]$. Neka je h takav da je $|h| < \delta$, tada vrijedi: $h(f(x_0) - \varepsilon) \leqq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x \leqq h(f(x_0) + \varepsilon)$, odnosno $f(x_0) - \varepsilon \leqq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqq f(x_0) + \varepsilon$, i prijelazom na granicu za $h \to 0$ dobiva se $F'(x_0) = f(x_0)$. Dakle, ako je f integrabilna funkcija definirana na $[a,b]$, onda je $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ derivabilna u svim točkama gdje je f neprekinuta funkcija i u tim točkama je $F'(x) = f(x)$. Prema tome vrijedi teorem: Neprekinuta na $[a,b]$ funkcija f ima na tom intervalu primitivnu funkciju.

Ta je činjenica vrlo važna kako s teorijskog tako i s praktičnog stanovišta. Naime, ako je f neprekinuta funkcija na $[a,b]$, ona je, kako je već pokazano, integrabilna, a sada je dokazano da je derivacija takve funkcije po gornjoj granici jednaka vrijednosti podintegralne funkcije na toj granici.

Leibniz-Newtonova formula. Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, a F bilo koja njena primitivna funkcija, onda je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Zaista, za neprekidnu na $[a,b]$ funkciju f, funkcija $x \mapsto \Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ jest jedna njena primitivna funkcija i to ona za koju je $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$; ako je F bilo koja primitivna funkcija za f, onda je $\Phi(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in [a,b]$. Konstanta C može se lako odrediti. Naime, iz relacije $\Phi(a) = F(a) + C = 0$ slijedi $C = -F(a)$, pa se dobiva $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Specijalno za $x = b$ dobije se $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Dakle, vrijednost određenog integrala neprekidne funkcije jednaka je razlici vrijednosti bilo koje primitivne funkcije na gornjoj i donjoj granici integracije. Ta se razlika obično označava sa $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Kako se za mnoge elementarne funkcije primitivna funkcija može izraziti u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija, u tim se slučajevima određeni integral računa neposredno služeći se Leibniz-Newtonovom formulom.

Primjer. $\int_0^a x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{a^3}{3}$.

Iz izloženog slijedi da je za neprekidne na $[a,b]$ funkcije, problem integriranja u veoma uskoj vezi s problemom određivanja primitivne funkcije. Ova činjenica vrijedi i općenitije: ako je f integrabilna funkcija na $[a,b]$ i ako na tom intervalu ima primitivnu funkciju F, za f vrijedi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Ipak se klasa integrabilnih funkcija ne podudara s klasom funkcija koje imaju primitivnu, pa se prema tome u općem slučaju problem integriranja razlikuje od problema traženja primitivne funkcije. Ima funkcija koje su integrabilne a nemaju primitivne funkcije, a isto tako funkcija koje imaju primitivnu funkciju, a nisu integrabilne.

Leibniz-Newtonova formula nam omogućuje da se različite formule koje vrijede za neodređene integrale svedu na analogne formule za određene integrale. Tako se npr. za izračunavanje određenih integrala može primijeniti u odgovarajućim slučajevima parcijalna integracija ili metoda supstitucije.

Ako funkcije u i v imaju neprekidne derivacije na $[a,b]$, onda vrijedi za parcijalnu integraciju ova formula:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

Primjer. Neka se izračuna $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x$. Parcijalna integracija daje: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\mathrm{d}(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

Prvi sumand na desnoj strani je jednak nuli, pa ostaje

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

tj.

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}, \quad \text{ili} \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Ako je n paran broj, tj. $n = 2m$, dobije se:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}I_{2m-4} = \ldots =$$

$$= \frac{2m-1}{2m}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{2m-1}{2m}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ jer je}$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Za neparan n, $n = 2m+1$, dobije se: $I_{2m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\mathrm{d}x = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$, jer je $I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x = 1$.

Integracija pomoću supstitucije. Neka je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, a g neka ima na $[\alpha,\beta]$ neprekidnu derivaciju i neka je $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Formalno se, dakle, izvrši zamjena $x = g(t)$, $\mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t$, a istovremeno se izvrši promjena granica integriranja.

Primjer. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$. Ako se supstituira $x = \mathrm{e}^t$, tj. $t = \ln x$, tada je za $x = 1$ $t = 0$, a za $x = 2$ $t = \ln 2$, slijedi:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2}\frac{t}{\mathrm{e}^t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Nejednakost Cauchy-Bunjakovskog. Ako su f i φ integrabilne funkcije na $[a,b]$, onda vrijedi nejednakost

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Da bi se dokazala ta nejednakost, promatra se funkcija $x \mapsto [f(x) - \alpha\varphi(x)]^2$, $\alpha \in R$. Kao produkt integrabilnih funkcija ta je funkcija integrabilna i $\int_a^b [f(x) - \alpha\varphi(x)]^2\mathrm{d}x \geqq 0$, tj.

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\alpha\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \alpha^2\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x \geqq 0.$$

Na lijevoj je strani kvadratni trinom s obzirom na α koji je nenegativan za svaki α, pa je njegova diskriminanta manja ili jednaka nuli, tj. $4[\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x \leqq 0$, odakle slijedi tvrdnja.

Neke klase funkcija koje su integrabilne a nisu neprekidne. Funkcija $f: [a,b] \to R$ koja je jednaka nuli na čitavom (a,b), a vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ su različite od nule, prekida se u točkama a i b. Ako je p bilo koja podjela od $[a,b]$, onda će Darbouxove sume funkcije f za tu podjelu imati najviše dva člana različita od nule: $m_1(x_1 - x_0) + m_n(x_n - x_{n-1})$ i $M_1(x_1 - x_0) + M_n(x_n - x_{n-1})$. Pri tome su točno dva od brojeva m_1, m_n, M_1, M_n jednaka nuli. Lako se vidi da se za svaki $\varepsilon > 0$ može naći podjela p tako da bude $(M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) < \varepsilon$, pa je f integrabilna funkcija.

Neka je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, a f_1 neka se podudara sa f na otvorenom intervalu (a,b) dok su vrijednosti $f_1(a)$ i $f_1(b)$ proizvoljne. Tada je i f_1 integrabilna funkcija i vrijedi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$.

Zaista, ako se za svaki $x \in [a,b]$ stavi $h(x) = f(x) - f_1(x)$, funkcija h je jednaka nuli na (a,b), a prekida se možda u točkama a i b; prema spomenutom dobije se

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - f_1(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x = 0,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Definicija. Kaže se da je funkcija f po dijelovima neprekidna na $[a,b]$, ako postoji podjela p tog intervala s diobenim točkama $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, tako da je f neprekidna funkcija na svakom otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$, i postoje konačne granice $f(x_0 + 0)$, $f(x_1 - 0)$, $f(x_1 + 0), \ldots$, $f(x_n - 0)$, pri čemu je $f(x_k - 0) = \lim\limits_{x \to x_k - 0} f(x)$, $f(x_k + 0) = \lim\limits_{x \to x_k + 0} f(x)$. Vrijednosti funkcije f u točkama x_k mogu biti proizvoljne.

Svaka po dijelovima neprekidna funkcija f na $[a,b]$ jest integrabilna na tom intervalu.

Zaista, neka je f_k funkcija definirana na $[x_{k-1}, x_k]$ takva da se na (x_{k-1}, x_k) podudara sa f, a $f_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + 0)$, $f_k(x_k) = f(x_k - 0)$. Funkcija f_k je neprekidna na $[x_{k-1}, x_k]$. Restrikcija funkcije f na $[x_{k-1}, x_k]$ može se razlikovati od f_k najviše u krajevima intervala pa je integrabilna i vrijedi

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Prema tome je f integrabilna funkcija na $[a,b]$ i vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_1(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Neka je g po dijelovima neprekidna funkcija na $[a,b]$ i $g(x) \geqq 0$ za svaki $x \in [a,b]$; ako je $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, onda je $g(x) \neq 0$ za najviše konačno mnogo točaka.

Ako je g neprekidna funkcija, tada iz $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$ slijedi da je g identički jednaka nuli. Ako funkcija g nije identički jednaka nuli na $[a,b]$, onda postoji $c \in [a,b]$ u kojoj je $g(c) > 0$, a radi neprekidnosti od g postoji interval (α, β) oko točke c, tako da je u svakoj točki x iz tog intervala $g(x) > 0$. Tada je

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqq \int\limits_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Neka je g po dijelovima neprekidna funkcija na $[a,b]$ i neka su $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ sve točke prekida funkcije g. Tada je

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\mathrm{d}x.$$

Iz neprekidnosti funkcije g na svakom intervalu (x_{k-1}, x_k) slijedi da je u svakoj točki tog intervala vrijednost funkcije jednaka nuli, pa funkcija g može biti pozitivna jedino u točkama prekida, a tih je konačno mnogo.

Može se pokazati da je i svaka omeđena na $[a,b]$ funkcija, koja ima konačno točaka prekida, integrabilna. Isto tako je svaka monotona na $[a,b]$ funkcija integrabilna. Kako monotona funkcija može imati i beskonačno mnogo točaka prekida, slijedi da funkcija može biti integrabilna i ako se prekida na beskonačno mnogo mjesta. Ipak nije svaka omeđena funkcija integrabilna. Tako npr. nije integrabilna Dirichletova funkcija $\chi: [0,1] \to R$ koja za svaki racionalan broj iz $[0,1]$ prima vrijednost 1, a za svaki iracionalni broj vrijednost 0. Lako se vidi da se ta funkcija svugdje prekida.

Da χ nije integrabilna može se pokazati ovako: Neka je p bilo koja podjela intervala $[0,1]$, tada u svakom intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ te podjele bit će $m_k = 0$, $M_k = 1$, pa su Darbouxove sume $s(\chi, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0$, $S(\chi, p) = 1$. Prema tome χ nije integrabilna funkcija jer razlika Darbouxovih suma ne teži nuli.

Iz navedenog se vidi da se granica između integrabilnih i neintegrabilnih funkcija nalazi negdje među funkcijama koje imaju beskonačno mnogo točaka prekida.

Prije nego se navede jedan od teorema koji daju nužne i dovoljne uvjete integrabilnosti, treba uvesti neke pojmove.

Definicija. Skup $S \subseteq R$ je mjere nula ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz intervala $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ tako da je $S \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, a zbroj duljina svih intervala je manji od ε. Pri tome niz intervala može biti i konačan.

Skup $Q \subseteq R$ racionalnih brojeva je mjere nula. Q je prebrojiv, pa se dade napisati u obliku niza $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Neka je $\varepsilon > 0$ izabran proizvoljno. Odabere se jedan interval realnih brojeva koji sadrže r_1 a duljina mu je manja od $\frac{\varepsilon}{2}$; analogno se za svaki n odabere interval duljine manje od $\frac{\varepsilon}{2^n}$ koji sadrži točku r_n. Zaključuje se da se skup Q može pokriti s nizom intervala kojima je zbroj duljina manji od $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \varepsilon$.

Sasvim se analogno pokazuje da je svaki najviše prebrojiv skup točaka na pravcu mjere nula. Ima, međutim, i beskonačnih skupova točaka koji nisu prebrojivi a mjere su nula.

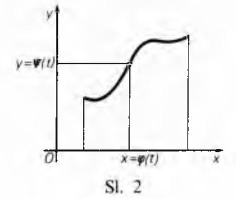
Ako je neka tvrdnja istinita za sve realne brojeve osim za neki podskup realnih brojeva mjere nula, kaže se da je tvrdnja istinita gotovo svuda na skupu R (ili za gotovo svaki realan broj).

Sada se može izreći Lebesgueov teorem o integrabilnosti u smislu Riemanna. Da ograđena na $[a,b]$ funkcija f bude integrabilna, nužno je i dovoljno da skup $S \subseteq [a,b]$ točaka u kojima se funkcija f prekida bude mjere nula, tj. da funkcija f bude gotovo svugdje neprekidna na $[a,b]$.

Iz ovog teorema odmah slijede svi oni teoremi o integrabilnosti koji su već promatrani.

Neke primjene integralnog računa

Jednostavna krivulja. Prirodno je da se krivulja promatra kao trag točke koja se giba. Takvo se gibanje u ravnini može opisati na ovaj način. Neka su φ i ψ neprekidne funkcije na $[\alpha, \beta]$. Nezavisna varijabla ili parametar označava se sa t i shvaća kao vrijeme. Stavljajući $M(t) = (\varphi(t), \psi(t)) = (x, y)$, gdje su $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ apscisa i ordinata točke $M(t)$, funkcije φ i ψ daju zakon gibanja točke M u ravnini. Tada se skup $K = \{(\varphi(t), \psi(t)) : \alpha \leqq t \leqq \beta\}$ promatra kao trag točke $M(t)$ (sl. 2).



Sl. 2

Međutim, ako se na funkcije φ i ψ ne stave dalja ograničenja, može se dogoditi da skup K ni približno ne odgovara našim predodžbama o krivulji. Postoje npr. takve neprekidne funkcije φ i ψ da trag točke, tj. skup K ispunja čitav kvadrat. To su tzv. *Peanove krivulje.* Da se izbjegnu takve situacije, pretpostavlja se da različitim vrijednostima parametra t odgovaraju različite točke $M(t)$ skupa K. Tada se skup K zove jednostavna krivulja (*luk*) ili Jordanov luk (v. *Funkcije*, TE 5, str. 631). Prema tome, *jednostavna krivulja* (*luk*) je skup svih točaka u ravnini (ili u prostoru) na koji se bijektivno i neprekidno može preslikati zatvoren integral $[\alpha, \beta]$. Tada se kaže, također, da jednadžbe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, definiraju jednostavnu krivulju u ravnini ili da je jednostavna krivulja u ravnini parametrizirana tim jednadžbama.

Kao primjer jednostavne krivulje u ravnini može poslužiti graf neprekidne funkcije $f: [a,b] \to R$. Naime, taj se graf može smatrati tragom točke koja se giba po zakonu $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqq t \leqq b$, a jasno je da je to preslikavanje i bijekcija na graf funkcije f. Jedna te ista jednostavna krivulja može se parametrizirati na različite načine. Npr. K se može parametrizirati tako da se parametar t prikaže kao strogo monotona funkcija nekog drugog parametra s.

Ako se dopusti da se bijektivnost preslikavanja pokvari samo na krajevima intervala $[\alpha, \beta]$, tj. da je $M(\alpha) = M(\beta)$, onda je to jednostavna zatvorena krivulja.

Pojam prostorne krivulje uvodi se analogno kao krivulja u ravnini. Tako se *jednostavna krivulja u prostoru* definira kao skup $K = \{(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \alpha \leqq t \leqq \beta\}$ točaka prostora s koordinatama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, gdje su φ, ψ, χ neprekidne funkcije na $[\alpha, \beta]$, uz uvjet da različitim vrijednostima parametra t odgovaraju različite točke iz K.

Zadali tri funkcije φ, ψ, χ na $[\alpha, \beta]$ ekvivalentno je s tim da se zada vektorska funkcija $\vec{r}$ na $[\alpha, \beta]$ za koju je $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ za svaki $t \in [\alpha, \beta]$, što se može pisati i ovako: $\vec{r}(t) = \vec{i}\varphi(t) + \vec{j}\psi(t) + \vec{k}\chi(t)$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jesu jedinični vektori u smjeru koordinatnih osiju, a $t \in [\alpha, \beta]$. Za funkciju $\vec{r}$ kaže se da je vektorski prikaz krivulje K i piše se: $K = \{\vec{r}(t): \alpha \leqq t \leqq \beta\}$. Ako se krivulja K nalazi u ravnini xy, onda je treća koordinata jednaka nuli, $\chi(t) = 0$ za $t \in [\alpha, \beta]$ (v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 275).

Kraj radijvektora $\vec{r}(t)$ označen je sa $r(t)$. Tada preslikavanje $t \mapsto r(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ daje još jedan način na koji se može prikazati krivulja K.

Uređaj na $[\alpha, \beta]$ na prirodan način generira uređaj na krivulji K: ako je $\alpha \leqq t_1 < t_2 \leqq \beta$, kaže se da točka $r(t_1)$ krivulje K prethodi točki $r(t_2)$ te krivulje. Točka $r(\alpha)$ je početak, a točka $r(\beta)$ je kraj krivulje K. Time je krivulja K orijentirana na jedan od dva moguća načina. Ta se orijentacija zove pozitivna. Druga je mogućnost da se K orijentira tako da točka $r(t_1)$ prethodi točki $r(t_2)$ na K, ako je $t_2 < t_1$, i to je negativna orijentacija.

Duljina luka krivulje. Ako se krivulja sastoji od konačnog broja pravocrtnih odrezaka koji se nastavljaju jedan na drugi, tj. ako je promatrana krivulja poligonalna crta, onda je duljina takve krivulje jednaka zbroju duljina svih pravocrtnih odrezaka. Dakle, određivanje duljine poligonalne crte svodi se na mjerenje dužina. Ako krivulja sadrži i krivocrtnih dijelova, izračunavanje je duljine takve krivulje nov problem koji se ne može riješiti elementarno.

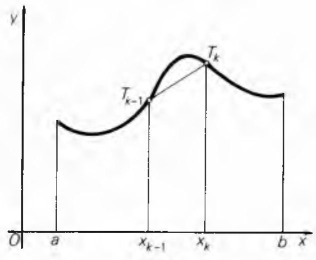
Neka je krivulja K zadana jednadžbom $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, gdje je f neprekinuta funkcija na $[a, b]$, tj. $K = \{(x, y): a \leqq x \leqq b, y = f(x)\}$. Sa p neka je označena podjela intervala $[a, b]$ diobenim točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$.

Neka su dalje $A = T_0$, $T_1, \ldots, T_n = B$ odgovarajuće točke na krivulji K (sl. 3). Spajajući po redu pravocrtno točku T_0 s T_1, T_1 s $T_2, \ldots, T_{n-1}$ s T_n dobiva se poligonalna crta P za koju se kaže da je upisana u krivulju K, a odgovara podjeli p intervala $[a, b]$. Kako je $T_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $T_k = (x_k, f(x_k))$, duljina odreska će biti jednaka

$$\overline{T_{k-1}T_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2},$$

a duljina čitave poligonalne crte P

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



Sl. 3

Duljina luka krivulje K (ili duljina krivulje K) definira se kao supremum duljina svih poligonalnih crta upisanih u K, ako taj supremum postoji (tj. ako je konačan). Tada se kaže da krivulja K ima duljinu ili da se dade rektificirati (tj. da je rektifikabilna). Ekvivalentna definicija: duljina luka krivulje K je granica duljina poligonalnih crta P upisanih u K kad $|p| \to 0$, ako ta granica postoji.

Dovoljan uvjet za rektifikabilnost krivulje. Neka funkcija $f: [a, b] \to R$ ima svugdje na $[a, b]$ neprekinutu derivaciju, tada se krivulja $K = \{(x, y), x \in [a, b], y = f(x)\}$ dade rektificirati i duljina luka je dana izrazom

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Ako je krivulja K u ravnini zadana parametarski jednadžbama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ i ako funkcije φ i ψ imaju neprekinute derivacije na $[\alpha, \beta]$, koje se ne poništavaju istovremeno, kaže se da je krivulja K *glatka*. Takva se krivulja dade rektificirati i duljina luka se može izračunati po formuli

$$l(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Ako je K glatka prostorna krivulja zadana parametarski, onda se duljina luka krivulje računa po formuli

$$l(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Krivulja koja se može prikazati kao unija od konačnog broja glatkih krivulja naziva se po dijelovima glatka. Vidi se da i po dijelovima glatke krivulje imaju duljinu.

Primjer. Neka se odredi duljina krivulje $K = \{(r\cos t, r\sin t, at);\ t \in [t_1, t_2]\}$. Tada je

$$l(K) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + a^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + a^2}\,dt =$$
$$= \sqrt{r^2 + a^2}(t_2 - t_1).$$

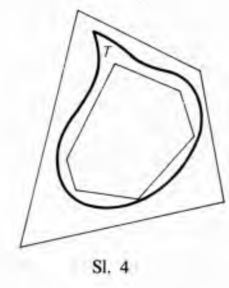
Duljinu imaju i općenitije krivulje. Već je C. Jordan dokazao ovaj teorem. Da se jednostavna krivulja K zadana parametarski jednadžbama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ dade rektificirati, nužno je i dovoljno da funkcije φ i ψ budu ograničene varijacije na $[\alpha, \beta]$. Za funkciju f definiranu na $[a, b]$ kaže se da je ograničene varijacije na $[a, b]$, ako postoji realan broj $M > 0$, tako da za svaku podjelu p intervala $[a, b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq M.$$

Najmanji broj $M > 0$ za koji vrijedi ta relacija zove se varijacija funkcije f na $[a, b]$.

Pojam ploštine. Iz elementarne geometrije poznat je pojam ploštine (površine) likova u ravnini koji su omeđeni dužinama, a koji se nazivaju elementarnim likovima. Da se nađe ploština takvog lika, postupa se obično tako da se taj lik rastavi na trokute bez zajedničkih unutrašnjih točaka i ploština lika će biti jednaka zbroju ploština svih trokuta. Postavlja se sada pitanje što će se smatrati ploštinom lika koji je omeđen lukovima krivulja koji nisu pravocrtni. Sredstvima elementarne geometrije ne može se definirati ploština takvog lika. Već se npr. ploština kruga ne može izračunati elementarno, nego se treba koristiti graničnim prijelazom.

Cilj je da se pojam ploštine proširi na što širi razred skupova u ravnini tako da se svakom skupu T iz tog razreda može pridružiti jedinstven, nenegativan realan broj kao njegova ploština. Naravno, definicija mora biti takva da veći skup ima veću ploštinu. Uz to ploština skupa T mora biti veća od ploštine svakog elementarnog lika koji mu je upisan, tj. sadržan u T, a manja od ploštine svakog elementarnog lika koji mu je opisan, tj. koji sadrži T (sl. 4). Neka je s supremum



Sl. 4

ploština svih elementarnih likova upisanih u T, a S infimum ploština svih elementarnih likova opisanih skupu T. Očito je $s \leqq S$. Ako je $s = S$, kaže se da lik T ima ploštinu koja je jednaka zajedničkoj vrijednosti s i S. Ako je T sastavljen od konačno mnogo skupova $T_1, \ldots, T_n$ bez zajedničkih unutrašnjih točaka od kojih svaki ima ploštinu, onda je ploština skupa T jednaka zbroju ploština skupova $T_1, \ldots, T_n$.

Ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji elementaran lik S_ε opisan liku T i elementaran lik s_ε upisan u T tako da razlika ploština likova S_ε i s_ε bude manja od ε, kaže se da granica ili rub skupa T ima ploštinu jednaku nuli. Može se dokazati da vrijedi ovaj teorem: Da bi lik T u ravnini imao ploštinu, nužno je i dovoljno da ploština granice lika T bude jednaka nuli.

Za lik (skup) koji ima ploštinu kaže se da je i *kvadrabilan*.

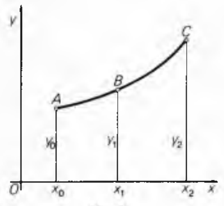
Uvedeni pojam ploštine naziva se ploštinom u Jordanovu smislu (ili mjerom u Jordanovu smislu). Taj pojam ploštine ima određene nedostatke. Za tako definiranu ploštinu vrijedi da je unija od bilo kojeg konačnog broja kvadrabilnih skupova opet kvadrabilan skup. Međutim, za beskonačan niz kvadrabilnih likova može se dogoditi da njihova unija ne bude više kvadrabilna.

Poteškoće ove vrste otpadaju ako se mjesto Jordanove mjere služi pojmom mjere prema Lebesgueu, prema kojoj unija niza skupova, od kojih svaki ima mjeru, ima također mjeru.

Kad se raspolaže pojmom ploštine i pojmom određenog integrala, može se zaključiti da krivocrtni trapez koji je definiran na početku ovog dijela ima ploštinu i da je ona jednaka $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. To je zajednička granica zbroja ploština u T upisanih i zbroja ploština oko T opisanih pravokutnika kada $|p|$ teži nuli.

Ako je f neprekinuta funkcija na $[a,b]$ i ako je $f(x) \leqq 0$ za svaki $x \in [a,b]$, onda $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ daje ploštinu odgovarajućeg pseudotrapeza uzetog s negativnim predznakom. Ako se $[a,b]$ može rastaviti na konačan broj manjih intervala tako da na svakom od njih funkcija f zadržava stalan predznak, onda je $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jednak algebarskom zbroju ploština krivocrtnih trapeza, pri čemu se oni koji se nalaze iznad osi apscisa uzimaju s pozitivnim predznakom, a oni ispod osi apscisa s negativnim predznakom.

Primjer. Neka su $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$, gdje je $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$, tri točke koje leže iznad osi x; treba odrediti ploštinu pseudotrapeza omeđenog lukom parabole koja prolazi točkama A, B, C, a os joj je paralelna s osi y, intervalom $[x_0, x_2]$ na osi x i pravcima $x = x_0$ i $x = x_2$ (sl. 5).

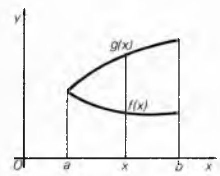


Sl. 5

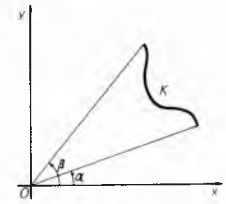
Kroz točke A, B, C prolazi jedinstvena parabola traženog tipa s jednadžbom oblika $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ako su A, B, C na jednom pravcu, parabola degenerira u pravac). Za traženu ploštinu pseudotrapeza dobije se: $\int_{x_0}^{x_2} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{3}\alpha(x_2^3 - x_0^3) + \frac{1}{2}\beta(x_2^2 - x_0^2) + \gamma(x_2 - x_0) =$$
$$= \frac{x_2 - x_0}{6}[y_0 + 4y_1 + y_2].$$

Polazeći od ploštine pseudotrapeza mogu se računati ploštine različitih drugih ravnih likova. Neka su f i g funkcije neprekinute na $[a,b]$ i neka je za svaki $x \in [a,b]$, $f(x) \leqq g(x)$, tada je ploština skupa $T = \{(x,y) \in R^2 : a \leqq x \leqq b,\ f(x) \leqq y \leqq g(x)\}$ (sl. 6) jednaka: $p(T) = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$.



Sl. 6



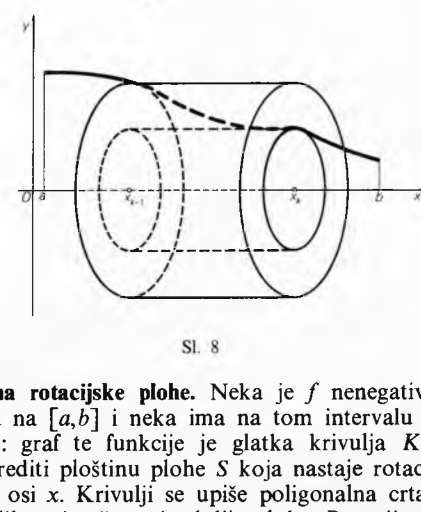
Sl. 7

Ploština i duljina luka u polarnim koordinatama. Neka je $r = f(\varphi)$, gdje je f neprekidna i pozitivna funkcija na $[\alpha, \beta]$, jednadžba krivulje u polarnim koordinatama. Treba odrediti ploštinu isječka T omeđenog zrakama $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i lukom K krivulje $r = f(\varphi)$ (sl. 7). Radeći analogno kao kad se tražila ploština krivocrtnog trapeza dolazi se do ove formule za traženu ploštinu: $p(T) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2 \mathrm{d}\varphi$.

Ako se pretpostavi da funkcija f ima neprekidnu derivaciju na $[\alpha, \beta]$, duljina luka K računa se prema formuli:

$$l(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

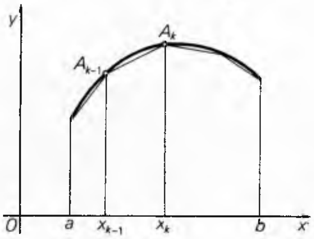
Obujam rotacijskog tijela. Neka je funkcija f neprekidna i nenegativna na $[a,b]$, a T pseudotrapez omeđen intervalom $[a,b]$, grafom funkcije f i pravcima $x = a$ i $x = b$. Treba odrediti obujam (volumen) tijela V koje nastaje rotacijom tog pseudotrapeza oko osi apscisa. Kao i obično, neka je p subdivizija intervala $[a,b]$, a m_k i M_k infimum i supremum funkcije f na $[x_{k-1}, x_k]$. Ploština pravokutnika nad $[x_{k-1}, x_k]$ kojemu je visina m_k jest $m_k(x_k - x_{k-1})$, a obujam valjka koji nastaje rotacijom tog pravokutnika oko osi x je $\pi m_k^2(x_k - x_{k-1})$; analogno, obujam valjka koji nastaje rotacijom pravokutnika s istom bazom a visinom M_k jest jednak $\pi M_k^2(x_k - x_{k-1})$. Obujam rotacijskog tijela V nalazi se između zbrojeva $\sum_{k=1}^n \pi m_k^2(x_k - x_{k-1})$ i $\sum_{k=1}^n \pi M_k^2(x_k - x_{k-1})$. Ta dva zbroja jesu donja i gornja Darbouxova suma za funkciju πf^2 (sl. 8). Kako je f neprekidna funkcija, neprekidna je i πf^2, pa je integrabilna i za obujam tijela V vrijedi $v(V) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$.



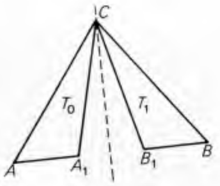
Sl. 8

Ploština rotacijske plohe. Neka je f nenegativna funkcija definirana na $[a,b]$ i neka ima na tom intervalu neprekinutu derivaciju: graf te funkcije je glatka krivulja K nad $[a,b]$. Treba odrediti ploštinu plohe S koja nastaje rotacijom te krivulje oko osi x. Krivulji se upiše poligonalna crta slično kao što se radilo pri računanju duljine luka. Rotacijom te upisane poligonalne crte dobije se ploha Σ koja se sastoji od plašteva konačno mnogo krnjih stožaca, pri čemu je svaki pravocrtni odrezak $\overline{A_{k-1}A_k}$ poligonalne crte izvodnica jednog krnjeg stošca (sl. 9). Ploština plohe Σ jednaka je zbroju ploština plašteva tih krnjih stožaca. Ploština rotacijske plohe koja nastaje rotacijom krivulje K oko osi x jest granica zbroja ploština ploha koje nastaju rotacijom poligonalnih crta upisanih u K, uz uvjet da $\max(x_k - x_{k-1})$ teži nuli. Može se pokazati da uz uvjete koji su postavljeni na funkciju f ta granica uvijek postoji i da je tražena ploština

$$p(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$



Sl. 9



Sl. 10

Krivulja u ravnini koja nije rektifikabilna i omeđen skup koji nema ploštine. Neka je u ravnini zadan jednakokračan trokut sa vrhovima A,B,C. Stranica AB rastavi se točkama A_1, B_1 na tri jednaka dijela AA_1, A_1B_1, B_1B i promatra se lik F_1 koji je unija trokuta ACA_1 i B_1CB. Prvi od tih trokuta označi se sa T_0 a drugi sa T_1 (sl. 10). Kaže se da se lik $F_1 = T_0 \cup T_1$ dobio iz trokuta ABC isijecanjem s fokusom u vrhu C. T_0 i T_1 zovu se trokuti reda 1. U trokutu T_0 izvrši se isijecanje s fokusom u novonastalom vrhu A_1; na taj se način iz T_0 dobiju dva trokuta T_{00} i T_{01}. Analogno se iz T_1 dobiju trokuti T_{10} i T_{11}. Na taj se način dobije $2^2 = 4$ trokuta reda 2. Unija tih četiriju trokuta označi se sa F_2 i pretpostavi se da je već konstruiran skup F_n koji se sastoji iz 2^n trokuta $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $i_k = 0$ ili 1, $k = 1,\ldots,n$, reda n. U svakom tom trokutu izvrši se isijecanje s fokusom u vrhu koji se posljednji pojavio. Na taj se način dobije 2^{n+1} trokut reda $n+1$, a F_{n+1} neka je njihova unija. Ta se konstrukcija može učiniti za svaki $n \in N$. Promatraju se nizovi oblika $T_{i_1} \supset T_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots$.

Svaki trokut iz tog niza (osim prvog) je strogo sadržan u prethodnom, a duljina najveće stranice trokuta u tom nizu teži nuli kad n teži u beskonačnost. Prema tome se presjek svih elemenata takvog niza sastoji točno iz jedne točke. Skup $L = \cap F_n$, $(n \in N)$ je neprazan skup u ravnini (koji između ostalog sadrži vrhove svih trokuta koji su se pojavili pri konstrukciji). Može se pokazati da je skup L homeomorfna slika intervala $[0,1]$, pa je to jednostavna krivulja. Ipak se ta krivulja ne da rektificirati, pa je ona primjer jednostavnog luka koji nema duljine.

Da se dobije skup u ravnini koji je omeđen jednostavnom zatvorenom krivuljom a nema ploštine, postupa se ovako: neka je L jednostavan luk koji je dobijen polazeći od trokuta ABC, a D neka je točka simetrična točki C s obzirom na dužinu AB. Skup Γ sastavljen od krivulje L i dužina AD i BD je jednostavno zatvorena krivulja. Dio Φ ravnine kojemu je Γ granica jest lik koji nema ploštine. Može se, naime, pokazati da granica Γ lika ima pozitivnu ploštinu.

Približne metode izračunavanja određenog integrala

Često se, kad treba rješavati pojedine probleme iz fizike, tehnike i drugih znanosti ili njihovih primjena, nailazi na određene integrale od neelementarnih funkcija ili funkcija čije primitivne funkcije nisu elementarne. Može se dogoditi da je podintegralna funkcija zadana i tabelarno, tj. da su poznate vrijednosti funkcije za samo pojedinačne vrijednosti nezavisne varijable. Takvi i slični slučajevi traže da se razrade metode približnog računanja određenih integrala.

Najviše se upotrebljavaju tri metode: metoda pravokutnika, trapezna formula i Simpsonova formula.

Svaka od navedenih triju metoda približnog integriranja jest potpuno određen postupak koji omogućuje računanje, a pri tome su i potpuno određene računske operacije koje treba obaviti. Ta dva svojstva omogućuju veoma široku primjenu tih metoda za približno računanje integrala na elektroničkim računskim strojevima, pa se one mnogo upotrebljavaju i za približno računanje određenih integrala elementarnih funkcija.

Metoda pravokutnika (aproksimacija pravokutnicima). Da se izračuna $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, f \geq 0$, razdijeli se interval $[a,b]$ na n jednakih dijelova točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Tada će približna vrijednost integrala biti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] \quad \text{ili}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

Ako se integral interpretira kao ploština, onda se tražena ploština zamjenjuje približno zbrojem ploštinâ n pravokutnika s osnovkama $(x_k - x_{k-1}) = \dfrac{b-a}{n}$, a visine su im po redu ordinate lijevih krajeva intervala $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1,\ldots,n)$ u prvoj formuli, odnosno ordinate desnih krajeva u drugoj formuli.

Trapezna formula. Interval $[a,b]$ razdijeli se opet na n jednakih dijelova kao i kod metode pravokutnika. Trapezna metoda se onda sastoji u tome da se $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ zamijeni zbrojem

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2},$$

tj. da se ploština pseudotrapeza (sl. 9) zamijeni zbrojem ploština trapeza s osnovkama $f(x_{k-1})$ i $f(x_k)$ i visinama $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Dakle, dio krivulje iznad intervala $[x_{k-1}, x_k]$ zamjenjuje se pravocrtnim odreskom koji spaja krajeve krivulje nad tim intervalom. Prema tome vrijedi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\cdot[f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))].$$

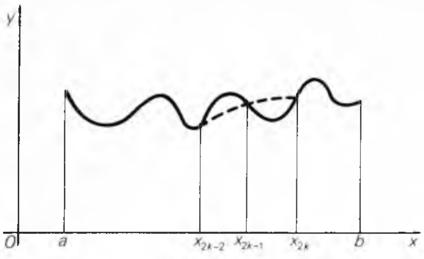
Postavlja se pitanje da se ocijeni pogreška koja se čini ako se integral računa približno po trapeznoj formuli. Može se pokazati: ako funkcija f ima na $[a,b]$ omeđenu drugu derivaciju $|f''(x)| \leq M$ za $x \in [a,b]$, onda, za po volji dan $\varepsilon > 0$, apsolutna veličina pogreške će biti manja od ε ako je $n > \sqrt{\dfrac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$. Dakle, ako se n uzme dosta velik može se postići točnost koja se želi.

Simpsonova formula (metoda parabola). Zatvoren interval $[a,b]$ rastavi se na n jednakih dijelova pomoću točaka $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ i neka je x_{2k-1} sredina intervala $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Ta se metoda sastoji u tome da se krivulja iznad svakog intervala $[x_{2k-2}, x_{2k})$ zamijeni lukom parabole koja prolazi točkama na krivulji s apscisama $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$, a os joj je paralelna s osi y (sl. 11). Prema već navedenom primjeru ploština će ispod tog luka parabole biti $\dfrac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$. Kako je $\dfrac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} = \dfrac{b-a}{6n}$, za vrijednost integrala dobije se približno:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}[f(a) + f(b) + 2(f(x_2) + \ldots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + \ldots + f(x_{2n-1}))].$$

Da se ocijeni pogreška koja se čini upotrebom ove približne formule, pretpostavi se da f ima omeđenu derivaciju 4. reda na $[a,b]$, $|f^{(4)}(x)| < M$ za svaki $x \in [a,b]$. Onda za po volji odabran $\varepsilon > 0$ apsolutna će veličina pogreške biti manja od ε ako je

$$\frac{(b-a)^5 M}{2880 n^4} < \varepsilon, \text{ tj. za } n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M}{2880\varepsilon}}$$



Sl. 11

Primjer. Promatra se integral $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Kako je već spomenuto, taj se integral ne izražava pomoću elementarnih funkcija, a veoma je važan u primjenama. Četvrta derivacija podintegralne funkcije f u točki x jest: $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$. Funkcija $x \mapsto 4(4x^4 - 12x^2 + 3)$ pada u $[0,1]$ od 12 do -20, pa u tom intervalu po apsolutnoj vrijednosti ne premašuje broj 20. Kako je za $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq e^{-x^2} \leqq 1$, bit će $|f^{(4)}(x)| \leqq 20$. Ako se uzme da je $n = 5$, dobije se $\frac{(b-a)^5 M}{2880 \cdot 5^4} = \frac{1}{144 \cdot 5^4} = \frac{1}{90000}$, pa se integral računa s točnosti do $\frac{1}{90000}$.

Integriranje nizova i redova funkcija. Neka je $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ niz integrabilnih na $[a,b]$ funkcija i neka taj niz konvergira prema funkciji f, tj. za svaki $x \in [a,b]$ niz $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ konvergira prema $f(x)$.

Prirodno je s tim u vezi postaviti ova pitanja: *1)* Da li je funkcija f integrabilna na $[a,b]$? *2)* Ako jest, da li je onda $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, tj. da li simboli lim i $\int$ mogu međusobno zamijeniti mjesta?

U općem slučaju odgovor je na oba pitanja negativan.

Primjer a). Neka je $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ niz svih racionalnih brojeva u $[0,1]$, a $f_n: [0,1] \to R$ niz funkcija definiranih ovako:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{za } x \in [0,1] - \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Niz f_n konvergira za svaki $x \in [0,1]$ prema funkciji f, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, gdje je

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in Q \\ 0 & \text{za } x \in [0,1] - Q. \end{cases}$$

Očigledno je svaka funkcija f_n integrabilna na $[0,1]$ i $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$, jer je f_n svuda jednaka nuli osim u konačno mnogo točaka. Funkcija f nije integrabilna na $[0,1]$; f je, naime, karakteristična funkcija skupa racionalnih brojeva iz $[0,1]$. Niz $\{f_n\}$, $n \in N$, je nepadajući niz funkcija, tj. za svaki n i svaki x vrijedi $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$. Dakle, iako nepadajući niz funkcija f_n konvergira, integral granične funkcije f ne postoji. Taj se nedostatak integrala prema Riemannu otklanja ako se prijeđe na integral prema Lebesgueu, koji je njegovo poopćenje.

Primjer b). Neka je $f_n: [0,\pi] \to R$ niz funkcija definiranih ovako: $f_n(x) = n \sin nx$ za $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{n}$, a $f_n(x) = 0$ za $\frac{\pi}{n} < x \leqq \pi$. Za svaki $x \in [0,\pi]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pa niz f_n konvergira prema $f = 0$. Dakle je granična funkcija integrabilna i njen je integral jednak nuli, međutim je

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = \int_0^{\pi/n} n \sin nx\, dx = -\cos nx\Big|_0^\pi = 2,$$

pa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx \neq \int_0^\pi \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Da bi odgovori na postavljena dva pitanja bili pozitivni, treba dodati još neke dopunske uvjete. Jedan dovoljan uvjet jest jednolika konvergencija niza funkcija. Niz f_n funkcija konvergira jednoliko na $[a,b]$ prema funkciji f ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ tako da za svaki $x \in [a,b]$ i svaki $n \geqq n_0$ bude $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Može se pokazati da vrijedi ovaj teorem: Ako niz f_n integrabilnih na $[a,b]$ funkcijâ konvergira na tom intervalu jednoliko prema funkciji f, onda je ona također integrabilna i niz $\int_a^x f_n(t)dt$ konvergira za svaki $x \in [a,b]$ jednoliko prema $\int_a^x f(t)dt$. Specijalno vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Ovaj teorem koji je izrečen za nizove funkcija može se prenijeti i na redove: ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ integrabilnih na $[a,b]$ funkcijâ f_n konvergira na tom intervalu jednoliko prema funkciji f, onda je ona integrabilna na $[a,b]$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$ također konvergira jednoliko na $[a,b]$ prema $\int_a^x f(t)dt$. Posebno vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Dakle, jednoliko konvergentan red funkcija može se integrirati član po član.

Nepravi integrali

Definicija određenog integrala kao granice integralnih suma zahtijeva da je podintegralna funkcija omeđena, a interval integracije konačan.

Naime, ako funkcija nije omeđena, nije ni integrabilna, kako je već rečeno u poglavlju *Definicija i osnovna svojstva određenog integrala*. Ako je pak interval integracije beskonačan, ne može se podijeliti na konačno intervala od kojih je svaki konačne duljine. Međutim, u matematici i njenim primjenama vrlo se često upotrebljavaju poopćenja pojma integrala, pri čemu barem jedan od navedenih uvjeta nije ispunjen. Takvi se integrali zovu nepravi.

Integrali s beskonačnim intervalom integracije. Neka je $f: [a, +\infty) \to R$ funkcija koja je integrabilna u svakom zatvorenom intervalu $[a,b]$, gdje je b bilo koji realan broj veći od a.

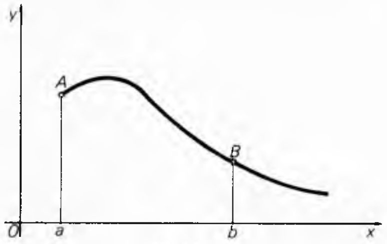
Nepravim integralom funkcije f naziva se izraz

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Ako taj limes postoji i ako je on konačan, kaže se da je nepravi integral konvergentan; u suprotnom slučaju kaže se da je divergentan.

Prema tome konvergencija znači da postoji konačna granica funkcije $b \mapsto F(b) = \int_a^b f(x)dx$ kada b teži u beskonačnost. Zato se pri ispitivanju konvergencije i u ovom slučaju može primijeniti Cauchyjev kriterij: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergira onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $b(\varepsilon)$ tako da za svaki par brojeva $b' > b(\varepsilon)$ i $b'' > b(\varepsilon)$ vrijedi $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Geometrijsko značenje. Neka je f neprekidna i nenegativna funkcija na $[a, +\infty)$. Za svaki $b > a$ ploština pseudotrapeza $abBA$ dana je sa $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (sl. 12). Neka je P dio ravnine omeđen grafom funkcije f, intervalom $[a, +\infty)$ na osi x i pravcem $x = a$. Kaže se da područje P ima ploštinu ako ploština trapeza $abBA$ teži nekoj konačnoj granici kada b teži u beskonačnost i ta se granica naziva ploština područja P.



Sl. 12

Analogno se definiraju nepravi integrali kada je f zadana na $(-\infty,b]$ ili $(-\infty,+\infty)$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, gdje je a bilo koji realan broj. Ekvivalentna je i ova definicija: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, pri čemu a i b teže svojim granicama nezavisno jedan od drugoga.

Primjer 1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}[\operatorname{arctan} b - \operatorname{arctan} a] = \pi$.

Primjer 2. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Za $\alpha \neq 1$: $\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right]$.

Ako je $\alpha < 1$, onda je $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = +\infty$; za $\alpha > 1$ je $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$; za $\alpha = 1$ je $\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \ln b$ i $\lim_{b\to\infty}\ln b = +\infty$. Prema tome $\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leqq 1$. Za nepravi integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ kaže se da je apsolutno konvergentan ako konvergira integral $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$. Iz apsolutne konvergencije nepravog integrala uvijek slijedi njegova konvergencija. Obrat, međutim, ne mora vrijediti. Tako npr. $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ konvergira, a $\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ nije konvergentan.

Integrali neomeđenih funkcija. Neka je f funkcija koja je integrabilna u svakom intervalu $[a+\mu, b]$, $(0<\mu<b-a)$, a neomeđena je u svakom okolišu točke a. Pod nepravim integrabilna u svakom intervalu $[a+\mu, b]$, $(0<\mu<b-a)$, a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to0}\int_{a+\mu}^b f(x)\mathrm{d}x$. Integral je konvergentan ako taj limes postoji i konačan je, inače je divergentan.

Analogno se definira nepravi integral ako je f neomeđena funkcija u svakom okolišu točke b: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to0}\int_a^{b-\mu} f(x)\mathrm{d}x$.

I u ovom slučaju vrijedi Cauchyev kriterij: ako je f neomeđena funkcija na desnom kraju intervala $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergira onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svaki par μ',μ'' pozitivnih brojeva manjih od $\delta(\varepsilon)$ bude: $\left|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Apsolutna konvergencija definira se kao i pri nepravom integralu s beskonačnim intervalom integracije.

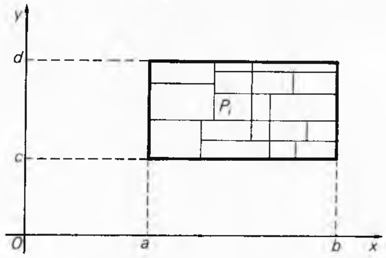
Primjer. $\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $(b>0, \alpha>0)$; podintegralna funkcija je neomeđena na lijevom kraju intervala integracije:

$$\int_\mu^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\mu^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{\mu^{\alpha-1}}\right).$$

Ako je $\alpha > 1$, onda je $\lim_{\mu\to0}\frac{1}{\mu^{\alpha-1}} = +\infty$ te integral divergira: ako je $0<\alpha<1$, onda je $\lim_{\mu\to0}\frac{1}{\mu^{\alpha-1}} = \lim_{\mu\to0}\mu^{1-\alpha} = 0$, te je $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}}$; za $\alpha = 1$ je $\lim_{\mu\to0}\int_\mu^b\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\mu\to0}(\ln b - \ln\mu) = +\infty$. Dakle: $\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ konvergira za $0<\alpha<1$, a divergira za $\alpha \geqq 1$.

Dvostruki integral

Definicija i osnovna svojstva. Neka je u ravnini R^2 dan pravokutnik $P = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y)\in R^2 | x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$. P je, dakle, Kartezijev produkt zatvorenih intervala $[a,b]$ i $[c,d]$. Skup pravokutnika $P_1,\ldots,P_n$ sa stranicama paralelnim stranicama pravokutnika P naziva se podjelom ili subdivizijom od P ako su svaka dva različita pravokutnika bez zajedničkih unutrašnjih točaka i ako je $P = \bigcup_{i=1}^n P_i$ (sl. 13). Podjela se i sada označava sa p, pa je $p = \{P_i | i = 1,\ldots,n\}$. Ako je $p' = \{P'_j | j = 1,\ldots,m\}$ neka druga podjela pravokutnika P, kaže se da je p' profinjenje podjele p i piše $p \subset p'$ ako za svaki $j\in\{1,\ldots,m\}$ postoji $i\in\{1,\ldots,n\}$ tako da bude $P'_j \subset P_i$. Zajedničko profinjenje podjela p i p' jest podjela p'' koja se sastoji od svih pravokutnika oblika $P_i \cap P'_j$.



Sl. 13

Neka je $f: P \to R$ omeđena funkcija, m njezin infimum, a M njezin supremum na P. Analogno neka su m_i i M_i infimum i supremum funkcije f na pravokutniku P_i podjele p. Ploštinu pravokutnika P označi se sa $p(P)$, a $\delta(P)$ neka je dijagonala (dijametar) tog pravokutnika. Za podjelu p neka je $|p|$ najveća dijagonala pravokutnikâ te podjele; $|p| = \max\{\delta(P_i) | i = 1,\ldots,n\}$. Izrazi $s(f,p) = \sum_{i=1}^n m_i p(P_i)$ i $S(f,p) = \sum_{i=1}^n M_i p(P_i)$ zovu se donja, odnosno gornja Darbouxova suma funkcije f za podjelu p pravokutnika P. Ako je $p\subset p'$, onda je $s(f,p) \leqq s(f,p')$

i $S(f,p') \leqq S(f,p)$. Može se pokazati da je skup svih gornjih Darbouxovih suma omeđen odozdo bilo kojom donjom Darbouxovom sumom i da je skup svih donjih Darbouxovih suma omeđen odozgo bilo kojom gornjom Darbouxovom sumom. Supremum svih donjih suma naziva se donjim Riemannovim integralom funkcije f na P, a infimum svih gornjih suma gornjim Riemannovim integralom te funkcije na P.

Ako su donji i gornji integral međusobno jednaki, kaže se da je f integrabilna funkcija na P; zajednička vrijednost se označava sa

$$I(f,p) = \int_P f = \int_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

i zove dvostruki integral funkcije f po pravokutniku P. Jasno je da vrijede ove nejednakosti:

$$m(b-a)(d-c) \leqq \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq M(b-a)(d-c).$$

Podintegralna funkcija je funkcija dviju varijabli. Pojam integrala može se poopćiti na funkcije bilo kojeg konačnog broja varijabli. Integrali funkcija više od jedne varijable zovu se zajedničkim imenom višestruki integrali za razliku od integrala funkcija jedne varijable koji se zovu jednostruki integrali.

Uz Darbouxove sume i za višestruke integrale definiraju se integralne sume. U svakom pravokutniku P_i subdivizije p odabere se proizvoljna točka (s_i,t_i) i načini suma $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(s_i,t_i)p(P_i)$. Vidi se da se za zadanu funkciju f i subdiviziju p pravokutnika P može načiniti beskonačno mnogo integralnih suma od kojih se svaka nalazi između donje i gornje Darbouxove sume za p. Slično kao i za jednostruki integral može se pokazati da je funkcija f integrabilna na P ako postoji broj I s ovim svojstvom: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu p za koju je $|p| < \delta$ vrijedi $|I - \sigma| < \varepsilon$, gdje je σ bilo koja integralna suma za podjelu p. Tada se piše:

$$I = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(s_i,t_i)p(P_i) = \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Može se pokazati da je svaka integrabilna na P funkcija omeđena.

Neki dovoljni uvjeti integrabilnosti. Svaka neprekidna na P funkcija je integrabilna na tom pravokutniku. Općenitije vrijedi: funkcija f omeđena na pravokutniku P jest na tom pravokutniku integrabilna ako točke prekida te funkcije leže na konačnom broju jednostavnih krivulja koje se dadu rektificirati.

Neka svojstva dvostrukog integrala po pravokutniku P.
a) Aditivnost. Ako su f i g integrabilne funkcije na P, onda je njihov zbroj integrabilan i vrijedi

$$\iint_P (f(x,y) + g(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_P g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Homogenost. Ako je funkcija f integrabilna na P, a $\lambda \in R$ bilo koji realan broj, onda je i λf integrabilna funkcija i vrijedi

$$\iint_P \lambda f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Svojstva *a)* i *b)* kažu da je skup integrabilnih na P funkcija vektorski prostor, a integral je linearan funkcional na tom prostoru (v. *Funkcije*, TE5, str. 623).

c) Ako je funkcija $f: P \to R$ omeđena na P i jednaka nuli u svim točkama pravokutnika osim u točkama koje leže na konačnom broju jednostavnih krivulja koje se dadu rektificirati, onda je

$$\iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

d) Ako su funkcije f i g omeđene na P i $f(x,y) = g(x,y)$ za svaku točku $(x,y) \in P$ osim za točke koje leže na konačnom broju jednostavnih krivulja koje se dadu rektificirati, onda iz integrabilnosti jedne od tih funkcija slijedi integrabilnost druge i integrali su im jednaki.

Izračunavanje dvostrukog integrala. Iako je definiran dvostruki integral i navedena su neka njegova svojstva, ništa nije rečeno o tome kako se oni izračunavaju. Izračunavanje takvih integrala polazeći od definicije u principu je moguće, ali praktički teško izvedivo, pogotovo ako podintegralna funkcija nije jednostavna. U nekim slučajevima moguće je izračunati dvostruki integral pomoću jednostrukih.

Neka je $f: P = [a,b] \times [c,d] \to R$, ako je f kao funkcija varijable y integrabilna na $[c,d]$ za svaki $x \in [a,b]$, tada je očigledno $x \mapsto \varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ funkcija varijable x definirana na $[a,b]$, Ako je φ integrabilna na $[a,b]$, onda se integral funkcije φ na tom intervalu zove iterirani integral funkcije f i označava se sa $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$. Integrira se najprije po varijabli y, a zatim po x.

Slično, ako je $y \mapsto \psi(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ integrabilna funkcija na $[c,d]$, onda je $\int_c^d \psi(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$, a integrira se najprije po x a zatim po y.

Može se pokazati da vrijedi ovaj teorem: ako je f funkcija integrabilna u pravokutniku P i ako za svaki $x \in [a,b]$ postoji $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, onda postoji i $\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ i vrijednost mu je jednaka vrijednosti dvostrukog integrala

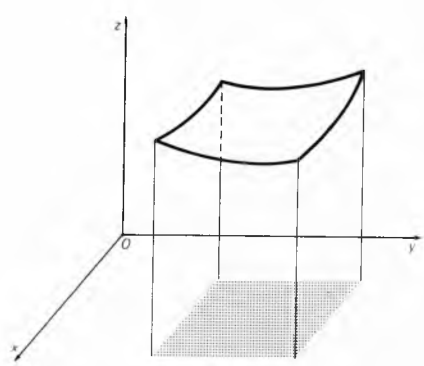
$$\iint_P f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Prema tome, ako je funkcija f integrabilna na P i ako postoji $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ za svaki $y \in [c,d]$ i $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ za svaki $x \in [a,b]$, onda postoje oba iterirana integrala, koji su međusobno jednaki i jednaki dvostrukom integralu. Specijalno je ovo istina ako je funkcija f neprekidna na P.

Primjer. Neka se izračuna $I_1 = \iint_P (x^2 + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, gdje je $P = [0,1] \times [-1,1]$. Vrijedi

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} (x^2 + y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Geometrijsko značenje dvostrukog integrala. Neka je f nenegativna neprekidna funkcija na pravokutniku P. Treba odrediti obujam V onog dijela prostora koji je omeđen plohom $z = f(x,y)$, koordinatnom ravninom xy i ravninama koje prolaze stranicama pravokutnika P paralelno s osi z (sl. 14).



Sl. 14

Neka je $p = \{P_i | i = 1,\ldots,n\}$ podjela pravokutnika P, a m_i infimum i M_i supremum funkcije f na P_i. Obujam pravokutnog paralelepipeda kojemu je osnovka pravokutnik P_i a visina m_i jednak je $m_i p(P_i)$, pa donja Darbouxova suma funkcije f za podjelu p $s(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i p(P_i)$ jest zbroj obujmova paralelepipeda čija je unija sadržana u V, a gornja Darbouxova suma $S(f,p) = \sum_{i=1}^{n} M_i p(P_i)$ jest zbroj obujmova paralelepipeda čija unija sadrži područje V. Ovo je istina za svaku podjelu p pravokutnika P, a kako je funkcija f integrabilna, onda će obujam $v(V)$ biti jednak zajedničkoj vrijednosti supremuma donjih i infimuma gornjih suma, tj. $v(V) = \iint_P f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

Pravokutnik je suviše specijalan skup, pa se pojam dvostrukog integrala proširuje i na općenitije skupove u ravnini. Pri tome je nužno da takvi skupovi imaju ploštinu, tj. da budu kvadrabilni.

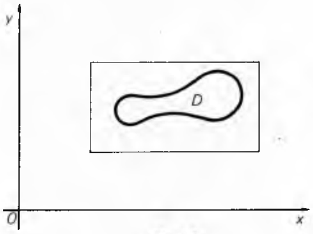
Neka je $O \subseteq R$ otvoren skup u ravnini, tj. neka za svaku točku $x \in O$ postoji krug sa središtem u x koji je čitav sadržan u O. Otvoren skup se često zove i otvoreno područje. Točka koja ne pripada otvorenom području O naziva se rubnom ili graničnom točkom područja ako svaki krug sa središtem u toj točki ima zajedničkih točaka sa O. Skup koji se sastoji od svih točaka otvorenog područja i svih graničnih točaka područja naziva se zatvorenim područjem. Zatvoreno područje D je omeđeno ako postoji krug koji sadrži D. Neka je D omeđeno zatvoreno područje u ravnini, a $f: D \to R$ omeđena funkcija na D. Neka je $P = [a,b] \times [c,d]$ bilo koji pravokutnik koji sadrži D (sl. 15) i neka je na P definirana funkcija F koja je proširenje funkcije f na ovaj način:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{za } (x,y) \in D \\ 0 & \text{za } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

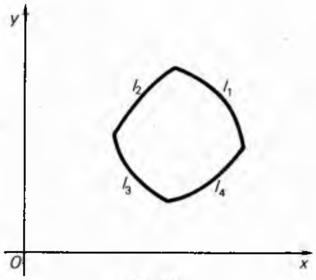
Kaže se da je funkcija f integrabilna na području D ako je funkcija F integrabilna na P. Integral funkcije f po području D prema definiciji će biti jednak integralu funkcije F po P:

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_P F(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Ako se pravokutnik P zamijeni nekim drugim pravokutnikom P' koji također sadrži D, dobit će se ista vrijednost integrala. To se odmah vidi ako je $P \subseteq P'$; ako pak nije P sadržan u P', onda se izabere treći pravokutnik P'' koji sadrži P i P'. Odmah se vidi da su integrali funkcije F po P i P' jednaki integralu te funkcije po P'' pa su i međusobno jednaki.



Sl. 15



Sl. 16

Omeđeno zatvoreno područje $D \subset R^2$ naziva se pravilnim ili regularnim, ako se granica područja sastoji od konačnog broja jednostavnih krivulja $l_1, \ldots, l_n$ od kojih se svaka dade rektificirati. Specijalno će D biti pravilno, ako je granica područja po dijelovima glatka zatvorena krivulja (sl. 16). Može se pokazati da vrijedi: ako je f omeđena u zatvorenom pravilnom području D i neprekidna unutar tog područja, onda je funkcija f integrabilna na D. Specijalno ako je $f(x,y) = 1$ svugdje na D, onda je $\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ i predstavlja ploštinu područja D.

Ako je područje D sastavljeno iz konačnog broja pravilnih područja $D_1, \ldots, D_n$ tako da su svaka dva različita područja bez zajedničkih unutrašnjih točaka, i područje D će biti pravilno. Pretpostavi li se sada da je funkcija f omeđena na svakom od područja $D_1 \ldots D_n$ i neprekidna unutar svakog tog područja, tada je funkcija f integrabilna na područjima $D, D_1, \ldots, D_n$ i vrijedi:

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Ako je funkcija f neprekidna i nenegativna u pravilnom zatvorenom području D, onda skup

$$V = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$$

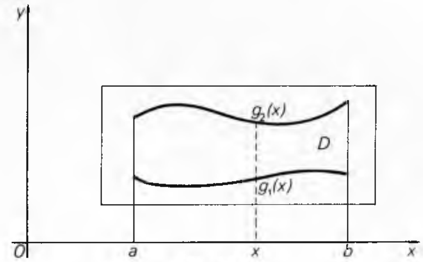
jest tijelo u prostoru čiji se obujam definira sa

$$v(V) = \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Neka su g_1 i g_2, $g_1 \leqq g_2$, neprekidne funkcije definirane na $[a,b] \subseteq R$, a D pravilno područje u ravnini definirano ovako (sl. 17):

$$D = \{(x,y) \in R^2 | \; a \leqq x \leqq b, \; g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\} \tag{2}$$

Postoje brojevi c, d, $c < d$, tako da je skup D sadržan u pravokutniku $P = [a,b] \times [c,d]$.



Sl. 17

Pretpostavi li se da je funkcija $f: D \to R$ neprekidna, a F proširenje funkcije f na pravokutnik P tako da je $F(x,y) = 0$ u svakoj točki (x,y) koja se ne nalazi u D, onda je kao što se zna

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_P F(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d F(x,y) \mathrm{d}y.$$

Za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi

$$\int_c^d F(x,y) \mathrm{d}y = \int_c^{g_1(x)} F(x,y) \mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y) \mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{d} F(x,y) \mathrm{d}y.$$

No, iz definicije funkcije F slijedi da su prvi i treći integral na desnoj strani jednaki nuli, a u srednjem se funkcija F može zamijeniti sa f, pa slijedi:

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \mathrm{d}y.$$

Na taj se način izračunavanje dvostrukog integrala po području D svelo na izračunavanje dvaju uzastopnih jednostrukih integrala, slično kao kad je područje integracije bio pravokutnik.

Slično se postupa i kad je pravilno područje D definirano ovako:

$$D = \{(x,y) \in R^2 | \; c \leqq y \leqq d, \; h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}, \tag{3}$$

gdje su h_1 i h_2, $h_1 \leqq h_2$, neprekidne funkcije definirane na $[c,d]$. Tada vrijedi:

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \mathrm{d}x.$$

Ako se područje D može rastaviti na konačan broj područja $D_1, \ldots, D_n$ oblika (2) ili (3) tako da ni jedan od ta dva različita područja nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka, onda opet vrijedi (1).

Dvostruki integral po pravilnom području D ima analogna svojstva kao integral po pravokutniku, pa ih ne treba posebno navoditi.

Primjer. Neka se izračuna $\iint_D \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, gdje je D područje omeđeno krivuljama $y^2 = 2x$ i $y = x - 4$ (sl. 18). Područje D

može se pravcem $x = 2$ rastaviti na dva područja D_1 i D_2:

$$D_1 = \{(x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 2,\ -\sqrt{2x} \leqq y \leqq \sqrt{2x}\}$$
$$D_2 = \{(x,y)|\ 2 \leqq x \leqq 8,\ x-4 \leqq y \leqq \sqrt{2x}.$$

Dobije se:

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y + \int_2^8 \mathrm{d}x \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y =$$

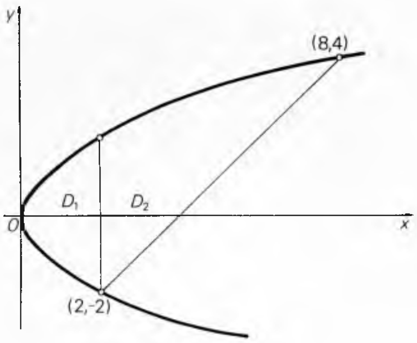
$$= \int_0^2 2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + \int_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4)\mathrm{d}x = 18.$$

Područje D može se definirati i ovako:

$$D = \{(x,y)|\ -2 \leqq y \leqq 4,\ \frac{y^2}{2} \leqq x \leqq y+4\},\ \text{pa slijedi:}$$

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int_{y^2/2}^{y+4} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = 18.$$

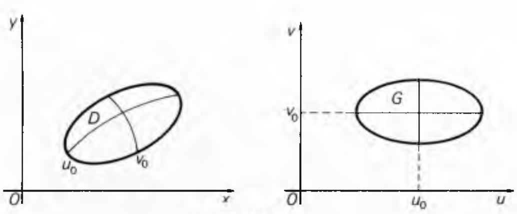
Kako je podintegralna funkcija svugdje jedinica, dvostruki integral daje površinu područja D.



Sl. 18

Zamjena varijabli u dvostrukom integralu. Isto kao i kod jednostrukog integrala zamjena varijabli važna je u dvostrukom i općenito višestrukom integralu.

Preslikavanje područja. Neka su zadane dvije ravnine, jedna s Kartezijevim koordinatama x,y, a druga s Kartezijevim koordinatama u,v. Neka je dalje D zatvoreno područje u ravnini xy omeđeno s po dijelovima glatkom krivuljom L, a G omeđeno zatvoreno područje u ravnini u,v, kojemu je granica po dijelovima glatka krivulja Γ (sl. 19*a* i *b*).



Sl. 19

Preslikavanje $F: G \to D$ neka svaku točku $(u,v) \in G$ prevede u točku $(x,y) = F(u,v) \in D$, pri čemu je

$$x = f_1(u,v),\quad y = f_2(u,v), \tag{4}$$

a ispunjena su ova svojstva:

a) F je bijekcija, pa postoji inverzna funkcija F^{-1}, tako da se sustav jednadžbi (4) može riješiti po u i v:

$$u = g_1(x,y),\quad v = g_2(x,y). \tag{5}$$

b) funkcije f_1, f_2, g_1 i g_2 jesu neprekidne i imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda.

c) Jacobijeva determinanta (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 288):

$$\det\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Uz ove uvjete svaka glatka ili po dijelovima glatka krivulja iz G prelazi u isto takvu krivulju u D. Napose granica područja G prelazi u granicu L područja D, što slijedi iz teorema o implicitnim funkcijama.

Krivocrtne koordinate. Neka je u području G zadan pravac $u = u_0$. Tom pravcu u području D odgovara krivulja $x = f_1(u_0,v)$, $y = f_2(u_0,v)$. Analogno pravcu $v = v_0$ u G odgovara u D krivulja $x = f_1(u,v_0)$, $y = f_2(u,v_0)$. Tako definirane krivulje iz D u koje preslikavanjem F prelaze pravci paralelni s koordinatnim osima iz G nazivaju se koordinatnim krivuljama. Iz toga što je F bijekcija izlazi da kroz točku $(x,y) \in D$ prolazi jedinstvena krivulja koja odgovara konstantnoj vrijednosti od u i jedinstvena krivulja koja odgovara konstantnoj vrijednosti od v. Na taj se način u i v mogu smatrati i koordinatama točaka iz D. Kako te koordinate općenito nisu pravocrtne, nazivaju se one krivocrtnim koordinatama točaka iz D. Prema tome u i v imaju dvostruki smisao: to su pravocrtne koordinate točaka iz G i krivocrtne koordinate točaka iz D.

Ploština u krivocrtnim koordinatama. Neka je sa (4) definirano preslikavanje sa G u D koje zadovoljava *a*), *b*) i *c*). Tada se ploština područja D može ovako izraziti:

$$p(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G \left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{6}$$

Izraz (6) za ploštinu u krivocrtnim koordinatama omogućuje da se nađe opći izraz za zamjenu varijabli u dvostrukom integralu.

Neka je D zatvoreno omeđeno područje s granicom koja je po dijelovima glatka krivulja, a f neka je funkcija definirana na D, omeđena i svugdje neprekidna osim možda uzduž konačnog broja po dijelovima glatkih krivulja. Neka su dalje $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$ funkcije koje povezuju područje D i neko područje G tako da su ispunjeni uvjeti *a*), *b*), *c*) (v. *Preslikavanje područja*). Tada vrijedi

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(f_1(u,v),\ f_2(u,v)) \left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Napomena. Formula zamjene varijabli vrijedi i kad se bijektivnost, neprekidnost i neprekidnost derivacije narušava uzduž konačnog broja krivulja kojima je ploština nula.

Pri prijelazu na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dobije se $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r$, pa vrijedi:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Neke primjene dvostrukog integrala

Izračunavanje ploštine plohe u prostoru. Neka je D zatvoreno kvadrabilno područje u ravnini xy a $f: D \to R$ neprekidna funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama f'_x i f'_y na D. Tada se skup

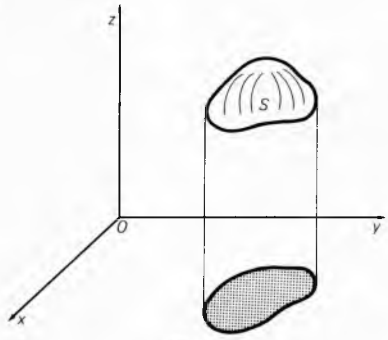
$$S = \{(x,y,z)|\ (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$$

naziva glatkom plohom (sl. 20). Može se, naime, pokazati da uz postavljene uvjete na funkciju f, u svakoj točki plohe postoji tangencijalna ravnina i normala koje se neprekinuto mijenjaju. Izraz

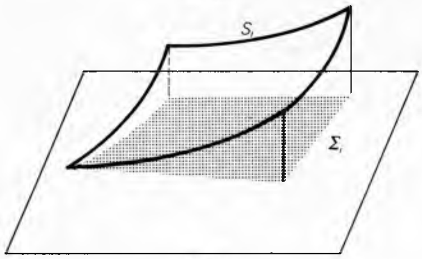
$$z = f(x,y),\quad (x,y) \in D \tag{7}$$

naziva se jednadžbom plohe S.

Da se definira ploština glatke plohe S koja je omeđena po dijelovima glatkom krivuljom, postupa se ovako: rastavi se ploha S pomoću konačnog broja po dijelovima glatkih krivulja na dijelove $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_n$ koji se zovu i elementima. U svakom elementu S_i odabere se proizvoljna točka T_i i položi se u toj točki tangencijalna ravnina na plohu. Zatim se element S_i projicira na tu tangencijalnu ravninu. Projekcija je neki kvadrabilni lik Σ_i (sl. 21).



Sl. 20



Sl. 21

Za svaku subdiviziju plohe S na opisani način načini se suma ploština tih projekcija. Ako postoji granica takvih suma kada maksimalni dijametar subdivizije teži nuli, kaže se da S ima ploštinu i da je ona jednaka toj granici.

Može se pokazati da se ploština glatke plohe S zadane jednadžbom (7) računa po formuli

$$p(S) = \iint_D \sqrt{1 + [f'_x(x,y)]^2 + [f'_y(x,y)]^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ako se ploha S sastoji od konačnog broja dijelova od kojih se svaki može predstaviti jednadžbom oblika (7), ploština plohe S može se izračunati tako da se na svaki dio primijeni navedena formula.

Napomena. Prva misao koja se nameće jest da se ploština plohe S definira kao granica ploštinâ u S upisanih poliedara uz uobičajeni uvjet da maksimum dijametara strana poliedara teži nuli, dakle na analogan način kako se definira duljina krivulje. Može se, međutim, pokazati da takva definicija ne bi bila ispravna.

Izračunavanje mase, momenta i središta masa. Pomoću dvostrukih integrala mogu se definirati i računati različne mehaničke veličine koje su vezane s rasporedom mase po nekom području (liku) D u ravnini xy. Pri tome se u svim takvim slučajevima postupa slično: najprije se izvrši subdivizija područja D, tj. D se rastavi u konačan broj manjih područja ili elemenata. Zatim se na svakom takvom elementu odredi približna vrijednost tražene veličine. Zbroj svih tih približnih vrijednosti daje onda približnu vrijednost te veličine na čitavom području D. Prava vrijednost će biti onda granična vrijednost (ako postoji) kojoj teže približne vrijednosti uz uvjet da maksimalni dijametar elemenata u subdiviziji teži nuli.

Neka je D zatvoreno područje u ravnini xy i neka je u svakoj točki $(x,y) \in D$ zadana plošna gustoća $\mu(x,y)$ rasporeda mase. Pri tome se pretpostavlja da je funkcija μ neprekidna. Tada se ukupna masa m područja D računa prema formuli:

$$m = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Izraz $S_y = \iint_D x\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ naziva se statičkim momentom područja D s obzirom na os y, a $S_x = \iint_D y\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je statički moment tog područja s obzirom na os x.

Koordinate središta masa područja D računaju se prema formulama:

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Izraz $I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ naziva se momentom inercije područja D s obzirom na os x, a $I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jest moment inercije područja D s obzirom na os y.

Primjer. Neka se izračunaju koordinate središta masa polukruga K zadanog nejednadžbama $x^2 + y^2 \leqq r^2$, $y \geqq 0$, ako je plošna gustoća dana sa $\mu(x,y) = y^2$, $(x,y) \in K$.

Vidi se da je gustoća konstantna na svakoj paraleli s osi x, a raste proporcionalno kvadratu udaljenosti od te osi. Zbog simetrije s obzirom na os y bit će $x_c = 0$. Dobije se

$$S_x = \iint_K y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-r}^{r}\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y^3\,\mathrm{d}y = \int_{-r}^{r}\frac{(r^2-x^2)^2}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}r^5;$$

$$m = \iint_K y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}r^4, \quad \text{pa je} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{32}{15\pi}r.$$

Višestruki integral

Analogno definiciji dvostrukog integrala definira se i n-struki integral za svaki prirodan broj n. Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dvije točke iz R^n i neka je $a_i \leqq b_i$ za $i = 1, \ldots, n$ (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288). Tada se skup $I = [a_1, b_1] \times \times \ldots \times [a_n, b_n]$ naziva zatvorenim intervalom ili kvadrom u R^n i označava se sa $[a,b]$. Otvoreni, interval $J = (a,b)$ sastoji se od svih unutrašnjih točaka iz $I = [a,b]$. Obujam intervala I podudara se s obujmom otvorenog intervala i računa se prema formuli:

$$v(I) = v(J) = (b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n).$$

Skup zatvorenih intervala $I_1, \ldots, I_n$ zove se podjela ili subdivizija intervala I, ako su svaka dva različita takva intervala bez zajedničkih unutrašnjih točaka i ako je $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Podjela se i u ovom slučaju označava sa p. Ako se u svakom intervalu I_i podjele p izostave sve granične točke, dobit će se otvorena podjela intervala I koja se označava sa $\{J_i : i = 1, \ldots, n\}$. Sasvim analogno kao i u ravnini, definira se profinjenje p' podjele p kao i zajedničko profinjenje dviju podjela p i p'.

Neka je f omeđena na $I \subseteq R^n$, m njezin infimum, M njezin supremum, a m_i i M_i neka su infimum i supremum funkcije f na intervalu I_i podjele p. Tada se izrazi

$$s(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i v(I_i)$$

i

$$S(f,p) = \sum_{i=1}^{n} M_i v(I_i)$$

zovu donja i gornja Darbouxova suma funkcije f za podjelu p. Ako je supremum svih donjih Darbouxovih suma jednak infimumu svih gornjih suma, kaže se da je funkcija f integrabilna prema Riemannu na I i zajednička granica tih suma naziva se određenim integralom funkcije f na I i piše se:

$$\int_I f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \underbrace{\int_{[a,b]} \ldots \int}_{n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Može se pokazati da je realna omeđena na $I \subseteq R^n$ funkcija f integrabilna onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija p tako da bude $S(f,p) - s(f,p) < \varepsilon$. Skup svih na I integrabilnih funkcija tvori vektorski prostor.

Slično kao na pravcu definiraju se i u R^n skupovi mjere 0. Skup $S \subseteq R^n$ je mjere 0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz otvorenih intervala $J_1,\ldots,J_n,\ldots$ tako da bude $S \subseteq \bigcup_{n=1}^{r} J_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} v(J_n) < \varepsilon$. Unija svakog niza skupova mjere 0 opet je skup mjere 0.

Vrijedi ovaj kriterij integrabilnosti: omeđena na $I \subseteq R^n$ funkcija f je integrabilna na I onda i samo onda ako je neprekidna svugdje na I osim možda na skupu mjere 0 (tj. ako je skoro svugdje na I neprekidna).

Riemannov integral može se definirati i na nekim drugim omeđenim skupovima iz R^n. Neka je $V \subseteq I \subseteq R^n, f: V \to R$ omeđena funkcija, a $F: I \to R$ proširenje funkcije f na I tako da je za svaki $x \in I \setminus V$, $F(x) = 0$. Kaže se da je funkcija f integrabilna na V, ako je funkcija F integrabilna na I i tada je po definiciji

$$\int_V f(x)\mathrm{d}x = \int_I F(x)\mathrm{d}x.$$

Neka je $\chi_V: I \to R$ karakteristična funkcija skupa $V \subseteq I$, tj.

$$\chi_V(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in V \\ 0 & \text{za } x \in I \setminus V, \end{cases}$$

a $f: I \to R$ omeđena funkcija. Tada vrijedi: ako je funkcija $f \cdot \chi_V$ integrabilna na I, onda je funkcija f integrabilna na V i

$$\int_V f(x)\mathrm{d}x = \int_I (f\chi_V)(x)\mathrm{d}x.$$

Ako je napose $V = I$, tada je funkcija χ_I integrabilna i vrijedi

$$\int_I \chi_I(x)\mathrm{d}x = v(I).$$

Trostruki integral se kao i dvostruki mnogo primjenjuje u različitim problemima fizike, geometrije i drugdje. Uvodeći dvostruki integral, polazi se od toga da područje u ravnini po kojem se integrira ima ploštinu. Analogno kod trostrukog integrala, područje $V \subseteq R^3$ po kojem se integrira mora imati obujam. Pretpostavlja se da je pojam obujma poliedra poznat iz elementarne geometrije. Za poliedar ili općenitije za tijelo Q, koje je sastavljeno od konačnog broja poliedara, obujam $v(Q)$ je nenegativan realan broj i vrijedi: *a*) ako je $Q_1 \subseteq Q_2$, onda je $v(Q_1) \leqq v(Q_2)$; *b*) ako Q_1 i Q_2 nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka, onda je $v(Q_1 \cup Q_2) = v(Q_1) + v(Q_2)$; *c*), ako su Q_1 i Q_2 kongruentni, onda imaju jednak obujam.

Neka je $V \subseteq R^3$ omeđen skup točaka u prostoru. Promatraju se svi skupovi Q' koji se sastoje od konačno poliedara, a svaki je sadržan u V, i svi skupovi Q'' od kojih svaki sadrži V i sastavljen je od konačno mnogo poliedara. Kaže se da skup V ima obujam ako se za svaki $\varepsilon > 0$ može naći $Q' \subseteq V$ i $Q'' \subseteq V$ tako da bude: $v(Q'') - v(Q') < \varepsilon$.

Skup S ima obujam jednak nuli ako se za svaki $\varepsilon > 0$ može naći konačno mnogo poliedara s ukupnim obujmom manjim od ε koji sadrže S. Iz već rečenog može se zaključiti da tijelo V ima obujam onda i samo onda ako njegova granica ima obujam jednak nuli. Na temelju ovog kriterija može se zaključiti da svaki cilindar kojemu osnovica D ima ploštinu, a odozgo je omeđen plohom $\Sigma = \{(x,y,z):(x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$, gdje je $f \geqq 0$ neprekidna funkcija, ima obujam.

Neka je $V \subseteq R^3$ omeđeno zatvoreno područje (tj. omeđen otvoren skup zajedno s granicom) koje ima volumen, a $f: V \to R$ neka je neprekidna funkcija; tada je funkcija f integrabilna na V. Općenitije integrabilna je svaka funkcija f definirana na području V koja je svugdje neprekidna osim na nekom skupu $S \subseteq V$, kojemu je obujam jednak nuli.

Osnovna svojstva trostrukih integrala sasvim su analogna svojstvima dvostrukih integrala, pa ih ne treba posebno navoditi.

Izračunavanje trostrukih integrala. U jednostavnijim slučajevima trostruki se integral računa svođenjem na tri jednostruka, odnosno na jednostruki i dvostruki integral.

Neka je područje integracije kvadar $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$, gdje je $I_1 = [a_1,b_1]$, $I_2 = [a_2,b_2]$, $I_3 = [a_3,b_3]$. Ako je funkcija f neprekidna na tom kvadru, onda je

$$\iiint_I f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}y \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Pri tome se redoslijed integracije može mijenjati. Analogno se računa integral po kvadru (intervalu) viših dimenzija. Općenitije vrijedi: ako je funkcija f integrabilna na I i ako je za svaki uređen par $(x,y) \in I_1 \times I_2$ funkcija $z \to f(x,y,z)$ integrabilna kao funkcija varijable z, onda je funkcija $(x,y) \to F(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ integrabilna na pravokutniku $P = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ i $\iiint_I f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_P \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Neka je $D \subseteq R^2$ zatvoreno područje u ravnini xy koje ima ploštinu i $g_1, g_2: D \to R$ neka su neprekidne funkcije tako da je $g_1 \leqq g_2$ na D; neka je dalje

$$V = \{(x,y,z):(x,y) \in D,\quad g_1(x,y) \leqq z \leqq g_2(x,y)\};$$

V je prema tome omeđeno plohama $z = g_1(x,y)$, $z = g_2(x,y)$, $(x,y) \in D$ i plaštom cilindra kojemu izvodnice prolaze granicom područja D, a paralelne su s osi z. Neka je dalje $f: V \to R$ neprekidna funkcija; tada je funkcija f integrabilna po V i vrijedi:

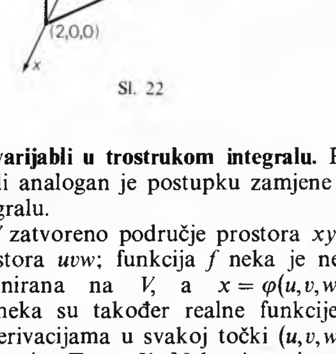
$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Analogne formule vrijede ako se prva integracija izvodi po varijabli x, odnosno po varijabli y.

Primjer. Neka se izračuna integral $\iiint_V (2x + 3y - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, gdje je V trostrana prizma omeđena ravninama $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$, $z = 0$ i $z = 1$ (sl. 22). Područje D u ravnini xy na koje se projicira prizma jest trokut omeđen pravcima $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 2$, pa vrijedi:

$$\iiint_V (2x + 3y - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^1 (2x + 3y - z)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_D \left(2x + 3y - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{17}{3}.$$



Sl. 22

Zamjena varijabli u trostrukom integralu. Postupak pri zamjeni varijabli analogan je postupku zamjene varijabli u dvostrukom integralu.

Neka je V zatvoreno područje prostora xyz, a T zatvoreno područje prostora uvw; funkcija f neka je neprekidna realna funkcija definirana na V, a $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$ neka su također realne funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama u svakoj točki $(u,v,w) \in T$, koje bijektivno preslikavaju T na V. Neka je osim toga Jacobijeva determinanta

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada vrijedi ova formula zamjene varijabli:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T f(\varphi(u,v,w),\ \psi(u,v,w),\ \chi(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Kao i za dvostruke integrale, formula vrijedi i uz nešto općenitije uvjete. Najčešće se upotrebljavaju dvije zamjene varijabli.

a) Prijelaz na cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z \tag{8}$$

(v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 275). Tu je vrijednost Jacobijeve determinante jednaka r, pa formula za prijelaz s Kartezijevih na cilindrične koordinate glasi:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\ r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

T je područje prostora $r\varphi z$ koje preslikavanjem (8) prelazi u područje V.

b) Prijelaz na sferne koordinate.

$$x = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = \varrho\cos\vartheta, \tag{9}$$

gdje je $\varrho \geqq 0$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$. Jacobijeva determinanta je jednaka $\varrho^2\sin\vartheta$, a formula prijelaza glasi:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T f(\varrho\sin\vartheta\cos\varphi,\ \varrho\sin\vartheta\sin\varphi,\ \varrho\cos\vartheta)\cdot\varrho^2\sin\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Područje T transformacijom (9) prelazi u područje V.

Neke primjene trostrukog integrala u mehanici. Ako je poznata gustoća $\varrho(x,y,z)$ mase u svakoj točki (x,y,z) nekog omeđenog zatvorenog područja V, onda se statički moment s obzirom na koordinatnu ravninu xy računa po formuli:

$$S_{xy} = \iiint_V z\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Analogno su statički momenti s obzirom na druge dvije koordinatne ravnine

$$S_{yz} = \iiint_V x\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$S_{zx} = \iiint_V y\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Momenti inercije područja V s obzirom na koordinatne osi x, y i z jesu po redu:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\varrho\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\varrho\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\varrho\,dx\,dy\,dz.$$

Koordinate središta masa područja V računaju se prema formulama

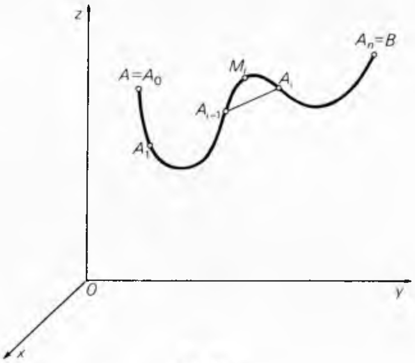
$$x_c = \frac{S_{yz}}{m};\quad y_c = \frac{S_{zx}}{m};\quad z_c = \frac{S_{xy}}{m},$$

gdje je $m = \iiint_V \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ukupna masa područja V.

Krivuljni integrali

To su integrali funkcija koje su zadane na krivuljama. Oni imaju široku primjenu u analizi, geometriji, mehanici, fizici i drugdje. U skladu sa zahtjevima koji se postavljaju pri rješavanju različitih problema, uvode se obično dva tipa krivuljnih integrala.

Krivuljni integrali prve vrste. Neka je K rektifikabilna jednostavna krivulja u prostoru s krajevima A i B, a f funkcija definirana na K. Krivulja K rastavi se točkama $A_0 = A$, A_1, ..., $A_n = B$ koje su raspoređene od A prema B na n dijelova $A_{i-1}A_i$ (sl. 23).



Sl. 23

Na svakom luku $A_{i-1}A_i$ izabere se po volji točka $M_i = (\xi_i, \eta_i; \zeta_i)$ i načini suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i, \tag{10}$$

gdje je Δs_i duljina luka $A_{i-1}A_i$. Izraz (10) naziva se integralnom sumom, a njegova vrijednost ovisi o subdiviziji krivulje K i o izboru točaka M_i. Ako postoji granica tih suma uz uvjet da maksimum duljina Δs_i teži nuli kad n teži u beskonačnost, onda se ta granična vrijednost naziva krivuljnim integralom prve vrste funkcije f po krivulji AB i označava sa

$$\int_{AB} f(M)\,ds = \int_{AB} f(x,y,z)\,ds.$$

Taj se integral naziva i krivuljnim integralom po duljini luka krivulje AB. Može se pokazati da navedeni integral postoji ako je K neprekidna rektifikabilna krivulja, a f neprekidna funkcija na K. Napose integral postoji ako je f neprekidna, a K glatka ili po dijelovima glatka krivulja.

Kako je duljina krivulje uvijek pozitivna, iz definicije krivuljnog integrala prve vrste slijedi da njegova vrijednost ne ovisi o orijentaciji krivulje AB.

Pojam se krivuljnog integrala prve vrste u biti ne razlikuje od pojma običnog određenog integrala i lako se svodi na takav integral. Ako se krivulja K orijentira npr. od A prema B, tada se položaj neke točke $M = (x,y,z)\in K$ može odrediti pomoću duljine s luka AM stavljajući

$$x = \varphi(s),\quad y = \psi(s),\quad z = \chi(s),\quad 0 \leqq s \leqq S,$$

gdje je S duljina krivulje K. Točki A odgovara vrijednost $s = 0$, a točki B vrijednost $s = S$. Funkcija f postaje složena funkcija varijable s i vrijedi

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_0^S f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s))\,ds.$$

Ako je AB glatka krivulja zadana parametarski jednadžbama

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \chi(t),\quad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

pri čemu točki A odgovara vrijednost $t = \alpha$ a točki B vrijednost $t = \beta$, onda je

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt.$$

Kada je AB glatka krivulja koja leži u ravnini xy a zadana je jednadžbom $y = g(x)$, $a \leqq x \leqq b$, može se za parametar uzeti varijabla x, pa se dobiva poseban slučaj gornje formule

$$\int_{AB} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Kao primjena krivuljnog integrala prve vrste, pokazat će se kako se računa masa krivulje ako je poznata linearna gustoća. Neka je K po dijelovima glatka krivulja uzduž koje je raspoređena neka masa. Takva se krivulja obično naziva materijalnom krivuljom. U svakoj točki $M \in K$, neka je $\varrho(M)$ linearna gustoća rasporeda mase. Krivuljni integral prve vrste primjenjuje se za izračunavanje mase krivulje

$$m = \int_{AB} \varrho(M)\mathrm{d}s.$$

Pomoću krivuljnih integrala prve vrste računaju se i koordinate središta masa materijalne krivulje, momenti inercije i dr. Tako se npr. središte masa (x_c, y_c, z_c) računa prema formulama:

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\varrho(x,y,z)\mathrm{d}s; \quad y_c = \frac{1}{m}\int_{AB} y\varrho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{AB} z\varrho(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

gdje je m masa krivulje AB.

Krivuljni integrali druge vrste. Neka je K jednostavna rektifikabilna krivulja s krajnjim točkama A i B, a $\vec{F}$ neka je sila zadana na nekom području V prostora xyz koje sadrži K. Treba odrediti rad koji izvrši sila $\vec{F}$ prilikom pomicanja jedinice mase po krivulji K od A do B. Radi toga razdijeli se krivulja K u smjeru od A prema B točkama $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$ na n dijelova $A_{i-1}A_i$, pri čemu je $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Na svakom luku $A_{i-1}A_i$, izabere se po volji točka $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ i zamijeni se promjenljiva sila $\vec{F}$ konstantnom silom $\vec{F}(M_i)$, tj. s vrijednosti što je $\vec{F}$ prima u točki M_i. Osim toga pretpostavi se da se materijalna točka pod djelovanjem te konstantne sile giba po pravocrtnoj spojnici $\overline{A_{i-1}A_i}$ umjesto po luku (sl. 23). Rad na $\overline{A_{i-1}A_i}$ bit će onda jednak $\vec{F}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i}$ i predstavlja aproksimaciju rada što ga izvrši promjenljiva sila $\vec{F}$ po luku $A_{i-1}A_i$. Rad se sile $\vec{F}$ uzduž čitavog luka AB onda aproksimira sa

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i}. \tag{11}$$

Neka je $M = (x,y,z)$ proizvoljna točka krivulje K, a $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ neka su projekcije vektora $\vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ na koordinatne osi; neka su dalje $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$; tada je približna vrijednost rada na luku AB dana sa

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i} = \sum P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + $$
$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

Da se odredi točna vrijednost rada, treba prijeći na limes uz zahtjev da maksimum duljine luka $A_{i-1}A_i$ teži nuli. Ta se granična vrijednost označava simbolom

$$\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z. \tag{12}$$

Naravno da se granične vrijednosti tog tipa mogu razmatrati apstraktno ne vezujući ih uz konkretan sadržaj.

Neka je AB krivulja sa svojstvima kao u navedenom primjeru rastavljena diobenim točkama $A_0, \ldots, A_n$ na n dijelova a $(x,y,z) \to P(x,y,z)$ neka je funkcija definirana na toj krivulji. Na svakom luku $A_{i-1}A_i$ odabere se proizvoljna točka $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ i načini suma

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

koja se zove integralnom sumom za funkciju P na krivulji AB po varijabli x. Ako postoji granična vrijednost te integralne sume kad maksimum Δx_i teži nuli, ta se granica naziva krivuljnim integralom druge vrste funkcije P po varijabli x i krivulji AB u smjeru od A prema B i označava se sa $\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x$.

Sasvim se analogno definiraju krivuljni integrali po varijabli y, odnosno z:

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y \quad \text{i} \quad \int_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

kao i zbroj takvih integrala: $\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z$ koji se obično piše u obliku (12).

Kako se pri sastavljanju integralnih suma vrijednost funkcije u točki M_i množi s veličinom projekcije luka na odgovarajuću koordinatnu os, krivuljni integral druge vrste mijenja predznak pri promjeni orijentacije krivulje AB. Naime, veličina projekcije mijenja predznak ako se promijeni orijentacija krivulje. Prema tome

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Ako je AB krivulja koja leži u ravnini xy, onda integral (12) poprima specijalni oblik:

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

Navodi se jedan dovoljan uvjet za egzistenciju krivuljnog integrala druge vrste. Neka je AB glatka krivulja zadana parametarski jednadžbama:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

a $\vec{F} = (P,Q,R)$ neka je neprekidna vektorska funkcija zadana na AB; tada vrijedi:

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + \right.$$
$$\left. + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\right]\mathrm{d}t,$$

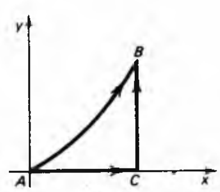
gdje je α vrijednost parametra t u točki A, a β vrijednost od t u B.

Teorem ostaje valjan i kad je AB po dijelovima glatka krivulja.

Primjer. Neka se izračuna $\int_{AB} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3+1)\mathrm{d}y$:

a) uzduž luka parabole $y = x^2$ između točaka $A = (0,0)$ i $B = (1,1)$,

b) uzduž poligonalne crte koja spaja točke A, $C = (1,0)$ i B (sl. 24).



Sl. 24

a) Neka je parametar varijabla x; tada je:

$$\int_{AB} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3+1)\mathrm{d}y = \int_0^1 3x^4\mathrm{d}x + (x^3+1)2x\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 (5x^4 + 2x)\mathrm{d}x = 2.$$

b) Tada se luk AB sastoji od pravocrtnih spojnica $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Kako je na $\overline{AC}$ $y = 0$, $\mathrm{d}y = 0$, a na $\overline{CB}$ $x = 1$, $\mathrm{d}x = 0$, vrijedi:

$$\int_{AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)dy = \int_{AC} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)dy +$$

$$+ \int_{CB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)dy = \int_0^1 (x^3 + 1)dy = 2\int_0^1 dy = 2.$$

Vidi se da je u tom primjeru vrijednost integrala po različitim putovima sa čvrstim krajevima ista.

Krivuljni integral može se promatrati i po općenitijim krivuljama. Neka je krivulja K sastavljena od konačnog broja rektifikabilnih jednostavnih krivulja AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$ koje se mogu i presijecati. Svaka krivulja $A_{i-1}A_i$ neka se orijentira u smjeru od A_{i-1} prema A_i, čime je čitava krivulja orijentirana od A prema B. Tada je

$$\int_{AB} P\,dx = \int_{AA_1} P\,dx + \ldots + \int_{A_{n-1}B} P\,dx.$$

Slično vrijedi za integrale po drugim koordinatama.

Često se promatraju krivuljni integrali druge vrste po zatvorenim krivuljama (tj. krajnje točke A i B se podudaraju). Pri tome se ne isključuje mogućnost da krivulja siječe samu sebe. Međutim, ako zatvorena krivulja K nema točaka u kojima samu sebe siječe, onda postoje samo dvije orijentacije. Ako prilikom obilaska po krivulji K unutrašnje područje koje omeđuje krivulja K ostaje s lijeve strane, onda je krivulja K pozitivno orijentirana (to je obilaženje u smjeru suprotnom kazaljci na satu). Orijentacija u suprotnom smjeru naziva se negativnom. Često se krivuljni integral po zatvorenoj krivulji K označava simbolom $\oint_K$.

Greenova formula. Ta se formula mnogo upotrebljava u matematičkoj analizi i u njenim primjenama, a povezuje krivuljni integral po granici nekog zatvorenog područja sa dvostrukim integralom po tom području.

Neka je u ravnini zadano zatvoreno područje $D = \{(x,y) \in R^2 | a \leqq x \leqq b,\ f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x)\}$, gdje su f_1 i f_2, $f_1 \leqq f_2$, neprekidne funkcije na $[a,b]$ i neka su dalje P i Q neprekidne realne funkcije na D s neprekidnim parcijalnim derivacijama. Tada vrijedi Greenova formula:

$$\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

gdje je krivulja K granica područja D.

Primjer. Neka se primjenom Greenove formule izračuna $\int_K (2x - 3y)dx + (x - y)dy$, gdje je krivulja K jedinična kružnica sa središtem u ishodištu. Tu je $P(x,y) = 2x - 3y$, $Q(x,y) = x - y$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -3$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1$ te je $\int_K (2x - 3y)dx + (x - y)dy = \iint_D (1 + 3)dx\,dy = 4\pi$.

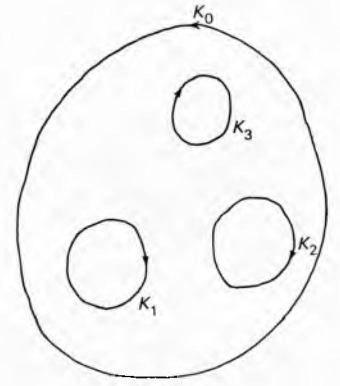
Neka se granica K područja D sastoji od više jednostavnih zatvorenih krivulja koje se ne sijeku, i to vanjske krivulje K_0 i unutrašnjih $K_1, \ldots, K_n$, pri čemu su unutrašnje krivulje jedna izvan druge (sl. 25). Pozitivnom orijentacijom smatrat će se ona orijentacija koja prilikom obilaska po krivulji ostavlja područje nalijevo. Tada će Greenova formula izgledati ovako:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_K P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{K_0} P\,dx + Q\,dy - \left(\int_{K_1} P\,dx + Q\,dy + \ldots + \int_{K_n} P\,dx + Q\,dy\right),$$

gdje se svi integrali uzimaju u pozitivnom smislu (suprotno gibanju kazaljke na satu).

Područje D po kojem se integrira ima *rupa* pa se zato zove višestruko povezano za razliku od jednostruko povezanog koje se ovako definira: područje D u ravnini zove se jednostruko povezano ako za svaku jednostavno zatvorenu krivulju K koja leži u D, unutrašnje područje koje je omeđeno krivuljom K, u potpunosti leži u D. Drugim riječima, D je jednostruko povezano ako se svaka takva krivulja K može stegnuti u točku a da se ne izađe iz područja D.



Sl. 25

Uvjeti nezavisnosti krivuljnog integrala od puta. U nekim već spomenutim slučajevima krivuljni integral poprima istu vrijednost po različitim krivuljama uz uvjet da krivulje počinju u istoj i završavaju u istoj točki. Navest će se uvjeti uz koje je krivuljni integral neovisan o putu po kojem se integrira. Zbog jednostavnosti promatrat će se samo krivuljni integrali u ravnini. Neka je D zatvoreno, omeđeno, jednostruko povezano područje u ravnini xy, a P i Q neka su funkcije koje su neprekidne zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama u D; tada su ovi uvjeti međusobno ekvivalentni.

a) $\oint P\,dx + Q\,dy$ po proizvoljnoj zatvorenoj krivulji u D jest jednak nuli.

b) $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ ne ovisi o izboru krivulje koja spaja točke A i B (uz uvjet da krivulje leže u D).

c) Izraz $P\,dx + Q\,dy$ jest potpun diferencijal neke funkcije definirane na D (v. *Diferencijalni račun*, TE3, str. 288).

d) U svakoj točki $(x,y) \in D$ vrijedi $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Ako područje D nije jednostruko povezano, navedeni uvjeti ne moraju biti ekvivalentni, kao što se vidi iz ovog primjera: neka je

$$I = \int_K \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

gdje je K jedinična kružnica sa središtem u ishodištu: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Tu je

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Funkcije P i Q nisu definirane u ishodištu. Zato se mora isključiti neka (mala) okolina ishodišta. Preostali dio D nije jednostruko povezano područje (D je kružni vijenac). U području D funkcije P i Q neprekidne su s neprekidnim parcijalnim derivacijama i $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Međutim, integral I uzet po jediničnoj kružnici ima vrijednost $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

Plošni integrali

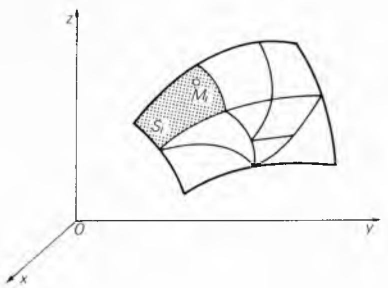
Često se u mehanici, fizici i tehnici susreću funkcije koje su definirane na plohama. Takve su funkcije npr. gustoća rasporeda masa na plohi, brzina tekućine koja prolazi kroz plohu itd. Integrali takvih funkcija nazivaju se plošni integrali i njihova teorija ima mnogo sličnosti s teorijom krivuljnih integrala. Specijalno se i tu uvode dva tipa integrala.

Plošni integrali prve vrste. Ti su integrali poopćenje dvostrukog integrala u istom smislu kao što je krivuljni integral prve vrste poopćenje običnog jednostrukog integrala.

Neka je S po dijelovima glatka ploha s granicom K koja je po dijelovima glatka krivulja, a g neka je omeđena funkcija definirana na toj plohi. Ploha S rastavi se sa po dijelovima glatkim krivuljama na dijelove $S_1, \ldots, S_n$ (sl. 26). Neka je $p(S_i)$ površina dijela S_i, $i = 1, \ldots, n$. U svakom S_i odabere se točka M_i i načini zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} g(M_i) p(S_i), \tag{13}$$

koji se zove integralna suma funkcije g za danu subdiviziju S_i plohe i dani izbor točaka M_i. Ako integralne sume (13) teže nekoj konačnoj granici uz uvjet da najveći dijametar dijelova S_i teži nuli, ta se granica zove plošni integral prve vrste funkcije g po plohi S i označava sa $\iint_S g(M)\mathrm{d}S$ ili sa $\iint_S g(x,y,z)\mathrm{d}S$, ako su (x,y,z) koordinate točke M.



Sl. 26

Ako je ploha S glatka ploha zadana jednadžbom $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, a funkcija g neprekidna funkcija na S, tada vrijedi

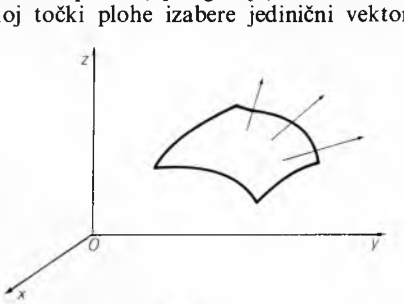
$$\iint_S g(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + (f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pri čemu se pretpostavlja da je D omeđeno, zatvoreno područje. Tom se formulom plošni integral svodi na dvostruki integral i istovremeno omogućuje njegovo izračunavanje.

Plošni integrali druge vrste. Najprije se definira pojam orijentacije plohe. Neka je S glatka ploha a T neka unutrašnja točka plohe S (tj. T ne leži na granici plohe S). Točkom T položi se normala na S i na normali odabere jedan od dva moguća smjera, npr. tako da fiksiramo određeni jedinični vektor $\vec{n}$ normale u točki T. Neka je K bilo koja jednostavno zatvorena krivulja (kontura) na plohi S koja prolazi točkom T, a nema zajedničkih točaka s granicom plohe S. Sada se pomiče jedinični vektor $\vec{n}$ iz točke T uzduž krivulje K tako da ostane uvijek normalan na plohu S i da gibanje uz to bude neprekidno. Mogu nastupiti dva slučaja: *a*) kad se vrati u točku T vektor $\vec{n}$ zauzima početni položaj i *b*) nakon punog obilaska krivulje K vektor $\vec{n}$ mijenja svoj smjer u suprotan.

Definicija: Glatka ploha S naziva se dvostranom ako puni obilazak po bilo kojoj jednostavno zatvorenoj krivulji K koja leži na S, a ne siječe granicu od S, ne mijenja smjer normale na S.

Ako na plohi postoji zatvorena krivulja K tako da se prilikom obilaska smjer normale mijenja na suprotni, ploha se naziva jednostranom. Kao primjer dvostrane plohe može se navesti svaka glatka ploha zadana jednadžbom $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Jedna strana takve plohe (npr. gornja) može se dobiti tako da se u svakoj točki plohe izabere jedinični vektor normale

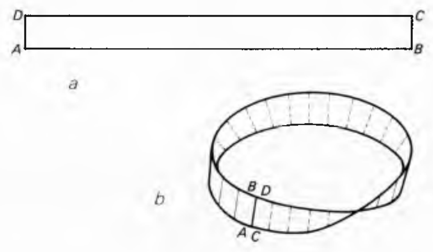


Sl. 27

tako da tvori oštar kut s pozitivnim smjerom osi z (sl. 27). Takva orijentacija naziva se pozitivnom.

Dvostrana je i svaka zatvorena ploha bez samopresjeka, npr. kuglina ploha.

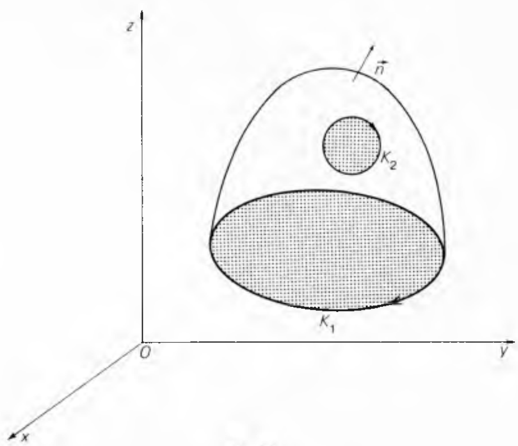
Najjednostavniji primjer jednostrane plohe jest Möbiusova vrpca koja se može dobiti tako da se komad papira u obliku pravokutnika $ABCD$ (sl. 28a) zalijepi tako da točka A padne zajedno s točkom C, a B s D, tj. prije spajanja treba jedan kraj vrpce zarotirati za 180° (sl. 28b). Vidi se da se prilikom punog obilaska Möbiusove vrpce po srednjoj crti smjer normale promijeni u suprotan smjer.



Sl. 28

Dvostrana ploha naziva se i orijentabilnom, a izbor jedne strane naziva se i orijentacijom plohe. Ploha na kojoj je izabrana orijentacija naziva se i orijentiranom plohom. Za jednostrane plohe se kaže da su neorijentabilne.

Neka je S orijentirana ploha čija se granica sastoji od jedne ili više kontura (jednostavno zatvorenih krivulja) i neka se na plohi nalazi motrilac tako da se smjer jediničnog vektora normale na plohu podudara sa smjerom koji ide od njegovih nogu prema glavi; kaže se da je orijentacija na pojedinoj konturi suglasna (koherentna) s orijentacijom plohe (ili da je orijentacija konture pozitivna) ako prilikom obilaska po konturi ploha ostaje motriocu slijeva (sl. 29).



Sl. 29

Orijentacija granice ovisi o izboru koordinatnog sustava. Pretpostavlja se da se radi u desnom koordinatnom sustavu (v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 275).

Plošni integral druge vrste jest poopćenje dvostrukog integrala u istom smislu u kojem je krivuljni integral druge vrste poopćenje jednostrukog integrala. Ulogu koju je imala orijentirana krivulja preuzima sada orijentirana ploha.

Primjer. Neka je S orijentirana ploha u prostoru kroz koju protječe tekućina brzinom $\vec{v}$ koja ovisi samo o položaju točke u prostoru. Ploha S rastavi se na male dijelove $S_1, \ldots, S_n$. Neka je $T_i = (x_i, y_i, z_i)$ točka iz S_i, $\vec{n}(T_i)$ neka je jedinični vektor normale u toj točki, $\varrho(T_i)$ gustoća tekućine u T_i, a $p(S_i)$ ploština dijela S_i. Neka je dalje v_n projekcija brzine $\vec{v}(T_i)$ na smjer normale u T_i. Tada je v_n skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{n}$ u točki T_i, $v_n = \vec{v}(T_i) \cdot \vec{n}(T_i)$. Približna masa tekućine koja protječe u jedinici vremena kroz dio S_i iznosi $\varrho(T_i) \cdot v_n \cdot p(S_i)$, a približna masa koja protječe u jedinici vremena kroz S jest

$\sum_{i=1}^{n} \varrho(T_i) \cdot v_n \cdot p(S_i)$. Točna masa tekućine koja protječe kroz S u jedinici vremena dana je sa

$$\iint_S \varrho \vec{v} \vec{n} \, dS = \iint_S \varrho v_n \, ds.$$

Ako su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori u smjeru koordinatnih osiju xyz, onda je $\vec{n}(T_i) = \vec{i}\cos(\vec{n},\vec{i}) + \vec{j}\cos(\vec{n},\vec{j}) + \vec{k}\cos(\vec{n},\vec{k})$, a $\vec{v}(T_i) = \vec{i}\,P(T_i) + \vec{j}\,Q(T_i) + \vec{k}\,R(T_i)$, pa se gornji integral može pisati u obliku

$$\iint_S \varrho(P\cos(\vec{n},\vec{i}) + Q\cos(\vec{n},\vec{j}) + R\cos(\vec{n},\vec{k}))\,dS.$$

Jasno je da taj integral ovisi i o smislu normale u svakoj točki.

Definicija plošnog integrala druge vrste. Neka je S glatka orijentirana ploha, a $\vec{v} = (P,Q,R)$ vektorska funkcija zadana na S; neka je v_n projekcija vektora $\vec{v}(T)$ na smjer normale $\vec{n}(T)$ u danoj točki T plohe S. Tada se integral

$$\iint_S \vec{v}\vec{n}\,dS = \iint_S [P\cos(\vec{n},\vec{i}) + Q\cos(\vec{n},\vec{j}) + R\cos(\vec{n},\vec{k})]\,dS$$

zove integralom druge vrste funkcije $\vec{v}$ po plohi S i piše se

$$\iint_S \vec{v}\vec{n}\,dS = \iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Ako se promijeni orijentacija plohe, integral mijenja predznak.

Svođenje plošnog integrala druge vrste na dvostruki. Neka je S glatka (ili po dijelovima glatka) ploha zadana jednadžbom $z = f(x,y)$ i neka je pozitivno orijentirana, a R neka je omeđena funkcija na S. Tada je:

$$\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_D R(x,y,))\,dx\,dy,$$

gdje je D projekcija plohe S na ravninu xy. Ako se uzme negativna orijentacija plohe S, integral na desnoj strani mijenja predznak.

Analogne relacije vrijede ako je ploha S zadana jednadžbom $x = g(y,z)$ ili $y = h(x,z)$.

Green-Gaussova formula ili formula Ostrogradskog. To je formula koja povezuje trostruki integral po nekom omeđenom području u prostoru s plošnim integralom uzetim po vanjskoj strani plohe koja je granica tog područja. Neka je V zatvoreno područje u prostoru omeđeno sa po dijelovima glatkom zatvorenom plohom S bez samopresijecanja, a funkcije P,Q,R neka su neprekidne zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama u V; tada vrijedi:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Ako je $\vec{v}$ vektor kojemu su komponente u smjeru koordinatnih osi $v_x = P$, $v_y = Q$, $v_z = R : \vec{v} = (P,Q,R)$, onda se gornja formula može pisati

$$\int_V \operatorname{div}\vec{v}\,dV = \int_S \vec{v}\vec{n}\,dS,$$

pri čemu je divergencija vektora $\vec{v}$, $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Stokesova formula je poopćenje Greenove formule a mnogo se koristi u analizi i primjenama. Neka je S glatka orijentirana ploha omeđena orijentiranom krivuljom K tako da orijentacije od S i K budu koherentne; neka su dalje P,Q,R funkcije neprekidne zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama u nekom području koje sadrži plohu S. Tada vrijedi:

$$\int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx.$$

Primjer. Neka se primjenom Stokesove formule izračuna $I = \int_K x^2 y^3\,dx + dy + z\,dz$, gdje je K kružnica $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, a S neka je polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$, tako da je K njena granica.

Na plohi S odabere se vanjska strana tako da je koherentna orijentacija od K suprotna gibanju kazaljke na satu. Kako je $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$, primjenom Stokesove formule dobije se:

$$I = \iint_S -3x^2 y^2\,dx\,dy = -3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2\,dx\,dy = -\frac{\pi}{8}.$$

Napomena. Ako je S ravna ploha koja čitava leži u ravnini, onda je $dz = 0$, pa Stokesova formula prelazi u Greenovu.

TABLICA OSNOVNIH INTEGRALA

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{cases}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Ar\,sinh} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar\,cosh} x + C, \quad x>1$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,tanh} x + C, \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,coth} x + C, \quad \lvert x\rvert > 1$	

Lebesgueov integral

H. Lebesgue je 1902. dao definiciju integrala koja je veoma važno poopćenje pojma integrala prema Riemannu. Definicija i neka osnovna svojstva tog poopćenja.

Stepeničaste funkcije. Funkcija $f: R^n \to R$ naziva se stepeničastom na R^n ako postoji zatvoren interval $I = [a,b]$ iz R^n, otvorena podjela $J_1, \ldots, J_r$ intervala I i realni brojevi $c_1, \ldots, c_r$ tako da bude $f(x) = c_i$ za $x \in J_i$, $i = 1, \ldots, r$ i $f(x) = 0$ ako x nije iz I (vrijednost stepeničaste funkcije na granici intervala J_i nije bitna). Kako je funkcija f jednaka nuli izvan kompaktnog skupa I (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288), kaže se da je f funkcija s kompaktnim nosačem. Ako se zada stepeničasta funkcija f, time još nije na jedinstven način zadan zatvoren interval I niti subdivizija p tog intervala. Određen izbor intervala I i subdivizije p naziva se reprezentacijom funkcije f. Prema tome ista stepeničasta funkcija f ima različite reprezentacije.

Neka je $\mathscr{S}$ skup svih stepeničastih funckija iz R^n. Na $\mathscr{S}$ se definira realna funkcija koja se naziva integral. Za funkciju $f \in \mathscr{S}$ s reprezentacijom koja je upravo opisana neka je

$$\int f = \sum_{i=1}^{r} c_i v(I_i).$$

Nije teško ustanoviti da se taj integral podudara s Riemannovim integralom funkcije f na I. Ta definicija integrala stepeničaste funkcije jest korektna, jer se može pokazati da bilo koje dvije reprezentacije iste funkcije f daju istu vrijednost integrala. Iz definicije integrala slijedi: ako je stepeničasta funkcija f nenegativna, onda je $\int f \geqq 0$.

Nije teško pokazati da je zbroj $f+g$ dviju stepeničastih funkcija iz R^n opet stepeničasta funkcija i da je umnožak realne konstante i stepeničaste funkcije opet stepeničasta funkcija. Prema tome je skup $\mathscr{S}$ vektorski prostor i pri tome vrijedi

$$\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g, \text{ gdje su } f,g\in\mathscr{S}, \text{ a } \alpha,\beta\in R.$$

Neka su f i g stepeničaste funkcije; kaže se da je $f \leqq g$ ako je za svaki $x\in R^n$, $f(x)\leqq g(x)$. Tako definirana relacija »$\leqq$« jest uređajna relacija, jer su ispunjena ova svojstva: *a) refleksivnost*: za svaku funkciju $f\in\mathscr{S}$ je $f\leqq f$; *b) antisimetričnost*: ako za $f,g\in\mathscr{S}$ vrijedi $f\leqq g$ i $g\leqq f$, onda je $f=g$; *c) tranzitivnost*: ako su $f,g,h\in\mathscr{S}$ i ako je $f\leqq g$ i $g\leqq h$, onda je i $f\leqq h$. Zato se kaže da je skup $\mathscr{S}$ parcijalno (djelomično) uređen relacijom »$\leqq$«. U $\mathscr{S}$ ima i elemenata koji su međusobno neusporedivi, tj. postoje funkcije $f',f''\in\mathscr{S}$ takve da nije $f'\leqq f''$ niti $f''\leqq f$.

Neka su f i g stepeničaste funkcije. U $\mathscr{S}$ postoji funkcija h za koju je $f\leqq h$ i $g\leqq h$. Među funkcijama s takvim svojstvom postoji i najmanja; ta se funkcija naziva supremumom od f i g i označava se sa $f\vee g$. Jasno je da iz $f\in\mathscr{S}$ slijedi i $|f|\in\mathscr{S}$.

Iz definicije supremuma slijedi da je za svaki $x\in R^n (f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, odakle se onda dobiva

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+h+|f-h|).$$

Slično se sa $g\wedge h$ označava infimum funkcijâ g i h i vrijedi $g\wedge h=\frac{1}{2}(g+h-|g-h|)$. Infimum je također element iz $\mathscr{S}$.

Parcijalno uređen skup u kojem svaka dva elementa imaju supremum i infimum zove se *rešetka* ili *mreža*. Prema tome je skup $\mathscr{S}$ stepeničastih funkcija rešetka, a budući da je i vektorski prostor, $\mathscr{S}$ je vektorska rešetka.

Zanemarivi skupovi. Skup $S\subseteq R^n$ je zanemariv ako postoji nepadajući niz

$$f_1\leqq f_2\leqq\ldots\leqq f_n\leqq\ldots \tag{14}$$

stepeničastih funkcija tako da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty$ za svaki $x\in S$, a da uz to konvergira niz integrala

$$\int f_1,\ \int f_2,\ldots,\ \int f_n,\ldots \tag{15}$$

Može se pokazati da je skup $S\subseteq R^n$ zanemariv onda i samo onda ako je mjere nula.

Polazeći od integrala stepeničastih funkcija, definirat će se postepeno integral u smislu Lebesguea.

Neka se označi sa $\tilde{\mathscr{S}}$ skup svih realnih funkcija $f\colon R^n\to R$ za koje postoji nepadajući niz (14) stepeničastih funkcija tako da za skoro svaki x (tj. za sve x osim eventualno one koji pripadaju nekom skupu mjere 0) bude $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, a da uz to niz integrala (15) bude omeđen.

Za svaku funkciju $f\in\tilde{\mathscr{S}}$ definira se integral te funkcije ovako: $\int f=\lim_{n\to\infty}\int f_n$.

Ta je definicija korektna. Najprije (15) je nepadajući niz realnih brojeva koji je omeđen, pa je i konvergentan. Osim toga $\int f$ ne ovisi o specijalno odabranom nepadajućem nizu (14) koji konvergira prema f. Vrijedi, naime, ovaj teorem: ako su g_n i $h_n, n\in N$, nepadajući nizovi stepeničastih funkcija za koje su nizovi $\int g_n$ i $\int h_n$ omeđeni i ako je za skoro svaki x $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty} h_n(x)$, onda je $\lim_{n\to\infty}\int g_n=\lim_{n\to\infty}\int h_n$.

Budući da se svaka stepeničasta funkcija $f\in R^n$ može smatrati kao limes nepadajućeg niza stepeničastih funkcija čiji su svi članovi jednaki f, skup $\mathscr{S}$ stepeničastih funkcija je podskup skupa $\tilde{\mathscr{S}}$ i jasno je da se za svaku funkciju $f\in\mathscr{S}$ njen integral kao element skupa $\mathscr{S}$ podudara s njenim integralom kao elementom skupa $\tilde{\mathscr{S}}$. Treba naglasiti još i to da iz $f\in\tilde{\mathscr{S}}$ i $g=f$ skoro svuda slijedi da je i $g\in\tilde{\mathscr{S}}$ i $\int g=\int f$.

Primjer. Neka je $f\colon R\to R$ funkcija definirana ovako: $f(x)=1$ ako je x racionalan broj iz $[0,1]\subseteq R$, i $f(x)=0$ ako je x bilo koji drugi broj iz R. Neka je $r_1, r_2,\ldots, r_n,\ldots$ niz svih racionalnih brojeva iz $[0,1]$, a $f_1, f_2,\ldots,f_n,\ldots$ niz funkcija definiranih na R ovako:

$$f_n(x)=\begin{cases}1 \text{ ako je } x\in\{r_1,\ldots,r_n\}\\ 0 \text{ ako je } x\in R\setminus\{r_1,\ldots,r_n\}.\end{cases}$$

Niz f_n je nepadajući niz stepeničastih funkcija i $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ za svaki $x\in R$. Uz to je $\int f_n=0$ za svaki $n\in N$. Prema tome je $f\in\tilde{\mathscr{S}}$ i $\int f=0$.

Može se pokazati da svake dvije funkcije iz $\tilde{\mathscr{S}}$ imaju u $\tilde{\mathscr{S}}$ infimum i supremum tako da je $\tilde{\mathscr{S}}$ rešetka. Međutim $\tilde{\mathscr{S}}$ nije vektorski prostor jer iz $g\in\tilde{\mathscr{S}}$ ne slijedi da je i $-g\in\tilde{\mathscr{S}}$. Ipak, ako je $\alpha>0$, onda iz $f,g\in\tilde{\mathscr{S}}$, slijedi $f+g\in\tilde{\mathscr{S}}$ i $\alpha f\in\tilde{\mathscr{S}}$, pri čemu vrijedi $\int f+g=\int f+\int g$ i $\int\alpha f=\alpha\int f$.

Što se tiče konvergencije u $\tilde{\mathscr{S}}$, osnovni se rezultat može ovako izreći: neka je $f_1,\ldots,f_n,\ldots$ nepadajući niz funkcija iz $\tilde{\mathscr{S}}$ a $\int f_1,\ldots,\int f_n,\ldots$ neka je omeđen niz brojeva; tada postoji funkcija $f\in\tilde{\mathscr{S}}$ tako da za skoro svaki x bude $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ i $\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

Za definiciju integrala prema Lebesgueu treba još proširiti skup $\tilde{\mathscr{S}}$ tako da postane vektorski prostor. Budući da iz $f,g\in\tilde{\mathscr{S}}$ ne mora slijediti da je $f-g\in\tilde{\mathscr{S}}$, prošireni skup mora sadržavati sve takve razlike.

Definicija. Neka je $\mathscr{L}$ skup svih realnih funkcija f definiranih na R^n sa svojstvom da postoje $g,h\in\tilde{\mathscr{S}}$ tako da skoro svuda bude $f=g-h$. $\mathscr{L}$ je tada skup realnih funkcija na R^n integrabilnih u smislu Lebesguea, a Lebesgueov integral funkcije f definira se sa $\int f=\int g-\int h$.

Ta je definicija korektna, jer ako je uz to $f=g'-h'$ skoro svuda, pri čemu su $g',h'\in\tilde{\mathscr{S}}$, onda je $\int g-\int h=\int g'-\int h'$. Osim toga, ako je $f=g-h$ skoro svuda, $g,h\in\tilde{\mathscr{S}}$ i ako je $f=f_1$ skoro svuda, onda je također $f_1=g-h$ skoro svuda, pa je i $f_1\in\mathscr{L}$ i Lebesgueovi integrali funkcijâ f i f_1 se podudaraju. Odatle odmah slijedi da je $\tilde{\mathscr{S}}\subseteq\mathscr{L}$ i, ako je $f\in\tilde{\mathscr{S}}$, onda se Lebesgueov integral funkcije f podudara s integralom te funkcije kao funkcije iz $\tilde{\mathscr{S}}$.

Definirat će se Lebesgueov integral funkcije f na nekom skupu $S\subseteq R^n$. Neka je $f\colon R^n\to R$, a skup $S\subseteq R^n$ takav da je funkcija $f\chi_S$, gdje je χ_S karakteristična funkcija skupa S, integrabilna prema Lebesgueu. Tada se integral funkcije f po skupu S definira ovako:

$\int_S f=\int f\chi_S$. Ako je S zatvoren interval $I=[a,b]$, obično se piše $\int_I f=\int_a^b f=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Budući da se integrali prema Riemannu i Lebesgueu označavaju istim simbolom, može se kad se misli na integral prema Lebesgueu dodati ispred slovo L: $(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Da je Lebesgueov integral poopćenje Riemannova integrala slijedi iz ovog teorema: Ako je f integrabilna prema Riemannu na $[a,b]$, onda je ona integrabilna i prema Lebesgueu na $[a,b]$ i oba su integrala jednaka: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Iz integrabilnosti funkcije f na $[a,b]$ prema Riemannu slijedi postojanje nepadajućeg niza $f_1,\ldots,f_n,\ldots$ stepeničastih funkcija (donje Darbouxove sume) koje su sve jednake nuli izvan $[a,b]$ tako da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ za gotovo svaki $x\in[a,b]$.

To znači da je $f \in \mathscr{P}$ pa je $f \in \mathscr{L}$ i

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{tj.} \quad (L)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vrijedi i općenitije; ako je f integrabilna prema Riemannu na omeđenom skupu $S \subseteq R^n$, onda je f i (L)-integrabilna na tom skupu i oba su integrala jednaka.

Može se pokazati da skup svih (L)-integrabilnih funkcija na R^n tvori vektorsku rešetku.

Kao primjer funkcije koja je (L)-integrabilna, a nije integrabilna može poslužiti Dirichletova funkcija $\chi:[0,1] \to R$. Već je spomenuto da funkcija χ nije integrabilna na tom intervalu prema Riemannu. Međutim, ona je (L)-integrabilna i $(L)\int_0^1 \chi(x)\,dx = 0$, jer je funkcija χ skoro svuda jednaka nuli.

Teorem o monotonoj konvergenciji. Neka je f_n, $n \in N$, skoro svuda monoton niz funkcija iz $\mathscr{L}$ tako da je niz $\int f_n$ omeđen. Tada niz $f_n(x)$ konvergira za skoro svaki x i, ako je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ skoro svuda, onda je $f \in \mathscr{L}$ i $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Lebesgueov teorem o dominirajućoj konvergenciji. Neka je f_n, $n \in N$, niz funkcija iz $\mathscr{L}$ koji konvergira za skoro svaki x i neka je za svaki n $|f_n(x)| \leqq g(x)$ za skoro svaki x, gdje je g neka funkcija iz $\mathscr{L}$. Ako je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za skoro svaki x, onda je $f \in \mathscr{L}$ i $\int f = \lim \int f_n$.

LIT.: V. lit. za *Diferencijalni račun* (TE 3, str. 299). — *М. К. Гребенча, С. И. Новоселов*, Курс математического анализа. Москва 1951 (том 1), 1953 (том 2). — *Б. М. Будак, С. В. Фомин*, Кратные интегралы и ряды. Москва 1965. — *N. B. Haaser, J. A. Sullivan*, Real analysis. New York 1971. — *D. Blanuša*, Viša matematika II dio, 2. svezak. Tehnička knjiga, Zagreb 1974. — *S. Kurepa*, Matematička analiza. Tehnička knjiga, Zagreb, 1. knjiga, 1970; 2. knjiga, 1971; 3. knjiga, 1975. — *S. Mardešić*, Matematička analiza u *n*-dimenzionalnom realnom prostoru. Školska knjiga, Zagreb, I dio, 1974; II dio, 1977.

P. Papić

ISPARIVANJE, laboratorijska ili industrijska operacija u kojoj se iz neke otopine dovođenjem topline uklanja otapalo u obliku pare da bi se otopina koncentrirala. Prema kinetičko-molekularnoj teoriji topline zagrijavanjem se molekulama tekućine dovodi kinetička energija, pa tekućina isparuje kad molekule dobivaju dovoljno kinetičke energije da savladaju kohezijske sile i tlak nad tekućinom.

Razlikuje se isparivanje ključanjem i ishlapljivanjem. Tekućina isparuje ključanjem kad se tlak pare u tekućini izjednači s tlakom nad površinom tekućine. Temperatura pri kojoj tekućina ključa, naziva se temperaturom ključanja ili vrelištem. Temperatura ključanja ovisi o tlaku nad površinom tekućine. Porastom tlaka nad površinom tekućine temperatura ključanja raste, a smanjenjem tlaka opada. Tekućina ishlapljuje kad je tlak pare u tekućini veći od parcijalnog tlaka te pare u okolici, a manji od ukupnog tlaka okolice.

U tehnici se pod isparivanjem podrazumijeva tehnološka operacija kojom se zagrijavanjem do temperature ključanja otopina uparuje, tj. dio otapala prevodi u parovito stanje da bi se povećala koncentracija otopljene krute tvari u otopini. U primjeni tog postupka mora se zadovoljiti uvjet da otopljene krute tvari samo u zanemarljivo malim količinama ulaze u plinsku fazu.

Od davnine čovjek za koncentriranje otopina upotrebljava najrazličitije posude koje zagrijava vatrom na otvorenom ložištu. Najčešće su to bile tave i kotlovi. Tek 1692. godine A. Smith predlaže da se tave griju vodenom parom. T. Wood uvodi 1785. dvostruko dno na tavama, a Ph. Taylor cijevne grijače 1818. E. Ch. Howard primjenjuje 1813. isparivanje pod vakuumom, što znatno pojeftinjuje čitav postupak isparivanja. Poslije tog važnog Howardovog patenta Roth uvodi spiralna grijaća tijela, Robinson (1844) horizontalne ogrjevne površine, a M. Walker (1852) kratke vertikalne cijevi kao ogrjevna tijela. N. Rillieux patentira 1843. dvostepenu isparnu stanicu, a 1851. trostepenu s horizontalnim ogrjevnim komorama. J. F. Cail konstruirao je iste godine isparivač s vertikalnim cijevima. Zatim N. Robert, F. Wellner i H. Jelinek usavršavaju postojeće konstrukcije isparivača i daju im oblik kakav su zadržali gotovo do danas.

Poboljšanje prijelaza topline postignuto je u tankoslojnim isparivačima, na čijoj su izvedbi i usavršivanju radili Yaryan (1886), Lillie (1888) i posebno P. Kestner (1903). Veliki je napredak bilo uvođenje termokompresije. Bitnu ulogu u razvoju tog postupka isparivanja imali su Pelletan (1840) i Robertson (1872), te Prache i Boullon (1905), a Wiebel (1879) i Piccard (1883) uvode turbokompresiju.

Za razliku od destilacije (v. *Destilacija*, TE 3, str. 232), u kojoj je produkt odvojena para u obliku kondenzata, u isparivanju se pod produktom podrazumijeva zaostala koncentrirana otopina. Otopina se uparuje u isparivačima pri atmosferskom tlaku ili pri tlaku većem ili manjem od atmosferskog. Para koja nastaje isparivanjem otopine naziva se *suparom*. Isparivači se najčešće zagrijavaju svježom vodenom parom ili suparom iz nekog drugog isparivača. To je *ogrjevna para*. Toplina za uparivanje otopine može se upotrijebiti jednostruko i višestruko. Postrojenja u kojima se otopina uparuje jednostrukom upotrebom ogrjevne pare nazivaju se jednostepenim isparivačkim stanicama, a isparivanje je jednostepeno. Kad se supara iz prethodnog isparivača upotrebljava za koncentriranje otopine u slijedećem isparivaču, govori se o višestepenim isparivačkim stanicama, a isparivanje se naziva višestepenim. Jednostepeno isparivanje odvija se pri stalnom tlaku. U višestepenim isparivačkim stanicama supara iz prvog isparivača upotrebljava se za zagrijavanje drugog, itd. U svakom narednom isparivaču otopina ključa pri nižem tlaku. Toplina se supare može višestruko upotrijebiti i termokompresijom. Osim toga, supara iz isparivačkih stanica često se upotrebljava za grijanje različitih drugih postrojenja izvan isparivačke stanice, te se tada zove oduzeta para (*ekstra para*).

Isparivači se primjenjuju u industriji u vrlo širokom opsegu. Jedna je od najstarijih primjena isparivača za dobivanje kuhinjske soli iz morske vode ili iz podzemnih naslaga kamenih soli, koje se otapaju u vodi, a otopina se zatim uparuje. Veoma je star i postupak proizvodnje sladora koji se vodom izlučuje iz sladorne repe, te se takva otopina uparuje. Isparivači se mnogo upotrebljavaju za koncentriranje alkalijskih lužina i dobivanje alkalija u krutom obliku, za dobivanje različitih soli iz njihovih otopina (sulfata, karbonata, sulfita, bikromata itd.), u proizvodnji umjetnih gnojiva, za koncentriranje tutkala, želatina, ekstrakta za štavljenje i sl. Isparivači služe i u koncentriranju voćnih i povrtnih sokova i mlijeka, u proizvodnji vitamina C, u preradbi industrijskih otpadnih voda itd.

U isparivačima toplina prelazi s nosioca topline na uparivanu otopinu direktnim dodirom ili posredstvom neke stijenke, pri čemu se nosilac topline i otopina ne miješaju. U industrijskoj praksi važnost prvog načina je mala. Oblik i konstrukcija isparivača uvjetovani su svojstvima otopine i nosioca topline, te svojstvom materijala od kojeg je isparivač građen (sl. 1). Prilikom projektiranja isparivača treba obratiti pažnju na režim prijelaza topline, način izdvajanja pare iz tekućine i na što bolje iskorišćivanje energije.

Dio isparivača u kojem se izmjenjuje toplina jest ogrjevna komora, a dio u kojem se para razdvaja od tekućine naziva se parnim prostorom. Para se od tekućine mora nužno odvojiti da bi se spriječilo odnošenje tekućine. U protivnom su neizbježni gubici produkta (krute tvari ili koncentrirane otopine), onečišćenje supare i onečišćenje ili korozija površine na kojoj kondenzira supara. Izdvajanje pare iz tekućine u parnom prostoru naročito je važno kad se kapljice otopine hvataju za stijenke. To zahtijeva upotrebu cirkulacijske pumpe. Ako je cirkulacija nedovoljna, dolazi do odnošenja pare ili čiste tekućine u cirkulacijsku pumpu i ogrjevnu komoru. Djelotvornost isparivača može se ocijeniti prema ekonomičnosti utroška pare, a izražava se u kilogramima supare na kilogram utrošene ogrjevne pare.