su zahtjevi za ponovljivošću i većom osjetljivošću titracijskih postupaka. Te metode u prvom redu jesu potenciometrija, diazo-titracija, određivanje vode metodom K. Fischera itd.

Za kontrolu i ispitivanje lijekova najviše i najčešće se upotrebljavaju optičke i spektroskopske metode: refraktometrija, polarimetrija, kolorimetrija, fotometrija, apsorpcijska spektrofotometrija u vidljivom, ultraljubičastom i infracrvenom svjetlu, apsorpcijska i emisijska plamena spektrometrija, fluorometrija, denzitometrija, koje su navedene u svim suvremenim farmakopejama i standardima. I spektroskopija nuklearne magnetske rezonancije, te spektrometrija masa uvode se u rutinsku praksu kao standardne metode za potvrdu konstitucije, čistoće i konfiguracije. Međutim, prije ispitivanja pomoću tih metoda, bilo da se radi o gotovim lijekovima, intermedijerima ili biološkom materijalu, treba komponente i frakcije razdvojiti i pročistiti, što se danas skoro redovito provodi jednom od kromatografija: papirnom, tankoslojnom, plinskom, visokotlačnom tekućinskom, afinitetnom, gel-kromatografijom ili kromatografijom u stupcu.

Područje primjene kromatografije u kontroli lijekova vrlo je veliko i pokriva sve kemijske grupe lijekova. Tu se ubraja ispitivanje čistoće, identiteta, steričkih karakteristika, kvalitativna i kvantitativna utvrđivanja sastava višekomponentnih smjesa, praćenje toka kemijske sinteze, praćenje toka kemijske razgradnje prilikom stajanja i čuvanja lijekova, studij farmakokinetike, ispitivanje procesa vezanih uz djelovanje enzima i sl.

Kontrola lijekova opisanim kemijskim metodama, te posebnim metodama vrednovanja farmaceutsko-tehnoloških karakteristika, o kojima ovdje nije bilo riječi, može i mora potvrditi uniformnost i podudarnost sastava i kvalitete s istim lijekom verificiranim u registracijskom postupku.

M. Grims

PROIZVODNJA I POTROŠNJA LIJEKOVA

Usporedno s otkrićem mnogih novih djelotvornih supstancija za medikamentno liječenje i razvojem farmaceutske industrije raste i potrošnja lijekova u svijetu i u nas. Tako se u mnogim zemljama oko 1% nacionalnog dohotka i više od 10% svih sredstava za zdravstvenu zaštitu troši na lijekove i ljekovita sredstva. Dok je 1939. godine vrijednost ukupne proizvodnje lijekova u svijetu iznosila oko 857 milijuna američkih dolara, danas ona iznosi oko 25 milijardi dolara. U SAD su u posljednjih 20 godina troškovi za zdravstvo porasli za 145%, a u Sovjetskom Savezu, prema nekim ocjenama, za 300%. Godine 1950. u SAD je po stanovniku utrošeno 1,5, a u 1971. godini 7,5 recepata. Slično je zabilježeno i u Saveznoj Republici Njemačkoj, gdje je od svih troškova za liječenje na troškove za lijekove u 1962. godini otpalo 17,7%, u 1968. godini 19,8% i u 1975. godini 20%.

U Jugoslaviji postoji tendencija stalnog povećanja potrošnje lijekova, no ona danas još nije dosegla razinu visokorazvijenih industrijskih zemalja. Godišnji porast potrošnje lijekova u našoj zemlji iznosi 30···40%, što je djelomično i odraz tehnološkog razvoja u poslijeratnom razdoblju. Naime, prije drugoga svjetskog rata u Jugoslaviji su prevladavala poduzeća inozemnog kapitala, koja su domaće tržište opskrbljivala inozemnim gotovim proizvodima ili poluproizvodima. Poslije oslobođenja pristupilo se reorganizaciji, modernizaciji i proširenju tvorničkih kapaciteta i gradnji novih tvornica. Osnovni je cilj bio smanjenje uvoza i ovisnosti o inozemstvu, povećanje proizvodnje postojećih domaćih lijekova i uvođenje novih lijekova. Industrijski proizvođači gotovih lijekova u našoj zemlji danas su Alkaloid (Skopje), Bayer-Pharma (Ljubljana), Belupo (Ludbreg), Bosnalijek (Sarajevo), Farmakos (Prizren), Galenika (Beograd), Hemofarm (Vršac), Isis (Novo Mesto), Jugoremedija — Servo Mihalj (Zrenjanin), Krka (Novo Mesto), Lek (Ljubljana), Pliva (Zagreb), Srbolek (Beograd), Šumaprodukt (Sarajevo), Zdravlje (Leskovac) i Zorka (Šabac). Neke od tih tvornica danas se sve manje služe licencama, a više se oslanjaju na baznu kemijsku industriju. Udjel troškova za lijekove izdane na temelju recepata zdravstvenog osiguranja, u ukupnim troškovima zdravstvene zaštite sve je veći (tabl. 1). Promatrano sa stanovišta pojedinih farmakodinamskih skupina, može se uočiti da su troškovi najveći za lijekove koji djeluju na infektivne i parazitarne bolesti (37%), zatim slijede lijekovi koji djeluju na bolesti cirkulatornog sustava (10%), pa lijekovi koji djeluju na bolesti digestivnog sustava i lijekovi koji djeluju na živčani sustav (po 6,5%). Troškovi za lijekove iz ostalih farmakodinamskih skupina nisu veći od 5% ni u jednoj skupini.

Tablica 1
TROŠKOVI ZA LIJEKOVE S OBZIROM NA UKUPNE TROŠKOVE ZDRAVSTVENE ZAŠTITE U JUGOSLAVIJI (u milijunima dinara)

Godina	1965	1967	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Ukupni troškovi zdravstvene zaštite	2928	3482	4297	5540	7194	9106	10922	14918
Troškovi za lijekove izdane na temelju recepata zdravstvenog osiguranja	406	471	736	951	1244	1645	1978	2589

D. Batinić

LIT.: *G. Ehrhart, H. Ruschig,* Arzneimittel, Entwicklung, Wirkung, Darstellung, Band 1 i 2. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr. 1968. — *G. D. Chase, R. A. Deno, A. R. Gennaro, M. R. Gibson, S. C. Harvey, J. E. Hoover, R. E. King, A. N. Martin, E. A. Swinyard, C. T. Van Meter, B. Witlin,* Remington's pharmaceutical sciences. Mack Publishing Company, Easton, Pennsylvania [14]1970. — Farmakopeja SFRJ. Savezni zavod za zdravstvenu zaštitu, Beograd [3]1972. — Priručnik zakonskih propisa o lekovima, Zagreb 1975. — *L. Lachman, H. A. Lieberman, J. L. Kanig,* The theory and practice of industrial pharmacy. Lea & Febiger, Philadelphia [2]1976. — Zakon o stavljanju lijekova u promet. Službeni list SFRJ od 31. prosinca 1976, broj 58.

D. Batinić I. Butula M. Grims

LINEARNE INTEGRALNE TRANSFORMACIJE, osobite vrste preslikavanja jednog skupa funkcija u drugi skup funkcija. Pri tom se preslikavaju i matematičke operacije koje se izvode nad funkcijama. U području slika dobiveni matematički problem obično se može lako riješiti. Iz tog rješenja, primjenom dovoljno bogatih tablica upotrijebljene transformacije, pročita se rješenje originalnog problema. U suštini, većinu matematičkog posla koji valja uložiti za rješavanje postavljenog problema već je ranije obavio matematičar koji je sastavio dovoljno opširne tablice primijenjene integralne transformacije.

U skladu sa suvremenom praksom u matematičkoj literaturi, u članku je proveden sljedeći način označivanja. Svaki važniji matematički objekt: definicija, teorem, uvjet ili formula iz definicije ili teorema, a isto tako primjeri koji služe za ilustraciju teorije odnosno odjeljci članka koji čine logičku cjelinu, označeni su prirodnim brojevima onim redom kojim dolaze u tekstu.

Neka je $\mathcal{O}$ skup funkcija definiranih na intervalu $\langle a,b\rangle$ realnih brojeva. Funkcije $f\in\mathcal{O}$ zvat će se *originalima*, a njihova nezavisna varijabla označivat će se sa t, jer ona u primjenama često ima značenje vremena. Vrijednosti $f(t)$ obično su realni, a rjeđe kompleksni brojevi. Originali će u raznim posebnim slučajevima morati zadovoljavati neke uvjete koji osiguravaju postojanje promatranih matematičkih objekata. U najopćenitijem slučaju originali su *distribucije* (poopćene funkcije), definirane na $\langle a,b\rangle$. Fiksira se funkcija $K(s,t)$ dviju varijabli, koja će se zvati jezgrom transformacije. Integralna transformacija definira se izrazom

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

pri čemu se uzima da su definicije i uvjeti tako odabrani da za svaki $f\in\mathcal{O}$ postoji neprazan podskup S_f skupa kompleksnih brojeva tako da integral konvergira za svaki $s\in S_f$. Integral može biti u smislu Riemanna, Lebesguea ili neki još općenitiji, kao što je integral distribucije. Funkcija F kompleksne varijable s definirana na S_f izrazom (1) naziva se *slikom originala f.* Za to pridruženje upotrebljavaju se različite oznake: $F=\mathcal{T}[f]$, $f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ itd. Transformacijom (1) funkcije (originali) preslikavaju se u funkcije (slike). Budući da se takve transformacije u matematici nazivaju *operatorima*, dio matematike koji se bavi tim transformacijama naziva se i *operatorskim računom*. Transformacija (1) je integralna, pa stoga i linearna. Naime, svi integrali koji dolaze u obzir tako su definirani da vrijedi svojstvo linearnosti: ako je $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tada je $\mathcal{T}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{T}[f_1] + \alpha_2 \mathcal{T}[f_2]$.

Pojedini problemi matematičkih primjena uvjetovali su odabiranje posebnih jezgri K i intervalâ $\langle a,b \rangle$. Nazivi koji su pridavani tako dobivenim integralnim transformacijama samo su djelomično opravdani stvarnim povijesnim razlozima. Evo popisa važnijih transformacija:

Jednostrana Laplaceova	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = \mathrm{e}^{-st}$	(2)
Dvostrana Laplaceova	$a = -\infty$, $b = \infty$	$K(s,t) = \mathrm{e}^{-st}$	(3)
Mellinova	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = t^{s-1}$	(4)
Fourierova eksponencijalna	$a = -\infty$, $b = \infty$	$K(s,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}$	(5)
Fourierova kosinusna	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = \cos(st)$	(6)
Fourierova sinusna	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = \sin(st)$	(7)
Stieltjesova	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = (s+t)^{-1}$	(8)
Hankelova	$a = 0$, $b = \infty$	$K(s,t) = J_\nu(st)(st)^{1/2}$.	(9)

Osnovne ideje o integralnim transformacijama mogu se naći već u radovima L. Eulera (1737), P. S. Laplacea (1782), A. L. Cauchyja (1815) i B. Riemanna (1859). Međutim, na prijelazu iz XIX u XX stoljeće razvio je engleski samouki inženjer Oliver Heaviside (1850—1925) u svojim radovima iz elektrotehnike metodu nazvanu *simbolički račun*. Heaviside je znao, i o tome ostavio zapisanu napomenu, da se njegov simbolički račun može egzaktno zasnovati na Laplaceovoj transformaciji. To egzaktno zasnivanje počeli su provoditi engleski matematičar T. J. Bromwich (1916), američki inženjer J. R. Carson (1926), francuski matematičar P. Levy (1926) i holandski inženjer B. van der Pol (1929). Velike zasluge za razvoj Laplaceove transformacije ima njemački matematičar G. Doetsch, koji je, uz ostalo, napisao vrlo opsežne priručnike o toj transformaciji. U posljednje vrijeme, počevši od francuskog matematičara L. Schwartza (1945) i poljskog matematičara J. Mikusińskog (1948. i 1952), razvijaju se integralne transformacije distribucija, što je omogućilo egzaktno fundiranje primjene integralnih transformacija u fizici i tehnici. Paralelno s tim razvio je J. Mikusiński (1953) stanovite algebarske metode, nazvane operatorskim računom Mikusińskoga, koje u ovim problemima mogu nadomjestiti upotrebu distribucija, ali taj pristup nije dosad postigao širu popularnost.

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

Transformacije (2) do (9) imaju svoje prirodno podrijetlo u Fourierovu integralu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz} \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zu} \mathrm{d}u. \qquad (10)$$

Varijable u, z, x poprimaju vrijednosti iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, a f može imati vrijednosti u skupu $\mathbb{C}$. Vanjski integral u (10) uzima se u smislu glavne vrijednosti po Cauchyju, ako u običnom smislu ne postoji. Bit će navedena dva dovoljna uvjeta za postojanje integrala u (10):

(11) funkcija f je apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$.

(12) funkcija f je apsolutno integrabilna u svakom konačnom intervalu; postoji konstanta c tako da f monotono teži k 0 kad je $|x| > c$ i $x \to \infty$ odnosno $x \to -\infty$.

Valja naglasiti da postojanje integrala (10) općenito ne povlači valjanost jednakosti (10). Neka budu postavljeni sljedeći uvjeti:

(13) f je ili neprekinuta na $\mathbb{R}$ ili ima prekide prve vrste. U točkama prekida z pretpostavlja se da vrijedi: $f(z) = \frac{1}{2}[f(z-0) + f(z+0)]$, tj. vrijednost funkcije u točki z jednaka je aritmetičkoj sredini lijevoga i desnog limesa funkcije u toj točki.

(14) *Dinijev kriterij.* Neka je x fiksirana točka, $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, i neka vrijedi (13). Postoji realni broj $h > 0$ tako da integral

$$\int_0^h |\varphi(t)| t^{-1} \mathrm{d}t$$

konvergira.

(15) *Dirichlet-Jordanov kriterij.* Vrijedi (13) i za fiksiranu točku x postoji njezina okolina u kojoj f ima ograničenu varijaciju.

Bilo koji od kriterija (14) odnosno (15), uz bilo koji od uvjeta (11) odnosno (12), predstavlja dovoljni uvjet za valjanost jednakosti (10). Napose, ako f zadovoljava uvjet:

(16) f zadovoljava uvjet (13) i u svakom konačnom intervalu ima najviše konačan broj prekida prve vrste;

tada f zadovoljava uvjet (15), pri čemu x može biti bilo koji realan broj. Gotovo sve za tehničku primjenu interesantne funkcije zadovoljavaju uvjet (16).

Prilagodivši oznake tehničkim primjenama, (10) se može rastaviti u dva dijela:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t, \qquad (17)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega. \qquad (18)$$

U izrazu (17) valja prepoznati Fourierovu transformaciju (5), a izraz (18) tada predstavlja inverziju Fourierove transformacije. Funkcija F naziva se (eksponencijalnim) spektrom originala f. Pridruženje spektra F originalu f označuje se sa $F = \mathcal{F}[f]$, a obratno pridruženje sa $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$.

Skup originala $\mathcal{O}_F$ može se definirati na sljedeći način: $f \in \mathcal{O}_F$ ako i samo ako f zadovoljava uvjete (11) i (16).

Odabiranje takve definicije motivirano je nastojanjem da se izbjegne pretjerano kompliciranje teorije. Za funkciju $|t|^{-1/2}$ postoji spektar, ali ta funkcija ne zadovoljava uvjete (11) i (13), pa nije original u gornjem smislu. Takvi se originali nazivaju nepravima, pa ako su u primjenama potrebni, posebno se proučavaju.

Postoje mogućnosti manjih izmjena u definiciji Fourierove transformacije. U formulama (17) i (18) predznak ispred i može biti izmijenjen. Također se iz (10) vidi da produkt faktora ispred integrala (17) i (18) mora biti $(2\pi)^{-1}$. Zato se često za primjene u fizici ispred tih integrala uzimaju jednaki faktori $(2\pi)^{-1/2}$.

Svojstva Fourierove transformacije.

(19) Spektar svakog (pravog) originala trne u beskonačnosti, tj. $F(\omega) \to 0$ kad $\omega \to \pm\infty$.

(20) Spektar parnog originala je parna funkcija, a neparnog originala neparna funkcija.

(21) *Teorem množenja.* Neka je $f, g \in \mathcal{O}_F$. Tada je i funkcija

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau$$

original, a naziva se konvolucijom funkcijâ f i g i označuje sa $h = f * g$. Ako su F, G i H pripadni spektri, tada je $H(\omega) = F(\omega) G(\omega)$.

(22) *Dualni teorem množenja.* Ako je $f, g \in \mathcal{O}_F$, F i G pripadni spektri, tada je $f \cdot g$ original i vrijedi

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - u)G(u)\mathrm{d}u.$$

(23) *Plancherel-Parsevalova jednadžba.* Neka je $f, g \in \mathcal{O}_F$ i F, G pripadni spektri. Tada vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Ako se stavi $g(-t) = \bar{f}(t)$, što povlači $G(\omega) = \bar{F}(\omega)$, izlazi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

(24) *Deriviranje originala.* Ako su f i f' originali, $F = \mathcal{F}[f]$, tada je $\mathcal{F}[f'] = \mathrm{i}\omega F(\omega)$. Ako je, osim toga, i f'' original, vrijedi $\mathcal{F}[f''] = -\omega^2 F(\omega)$. Deriviranju originala odgovara, dakle, množenje spektra sa $\mathrm{i}\omega$.

(25) *Deriviranje slike.* Ako su $f(t)$ i $tf(t)$ originali, $F = \mathcal{F}[f]$, tada je $\mathcal{F}[tf(t)] = -\mathrm{i}F'(\omega)$.

(26) Neka je za $x \in \langle a,b\rangle$ $f(x,t)$ kao funkcija od t original, $F(x,\omega) = \mathcal{F}_t[f(x,t)]$, gdje indeks t označuje da se Fourierova transformacija izvodi po varijabli t. Ako se $|f'_x(x,t)|$ u području $x \in \langle a,b\rangle$, $-\infty < t < \infty$ može majorizirati funkcijom $g(t)$ integrabilnom na $\mathbb{R}$, tada vrijedi: $\mathcal{F}_t[f'_x(x,t)] = F'_x(x,\omega)$, za $x \in \langle a,b\rangle$, $-\infty < \omega < \infty$. Uz slične uvjete vrijedi $\mathcal{F}_t[f''_{xx}(x,t)] = F''_{xx}(x,\omega)$. Ti se uvjeti u primjenama obično ne provjeravaju.

(27) *Pomak slike.* Ako je f original i $F = \mathcal{F}[f]$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, tada je $\mathcal{F}[\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)f(t)] = F(\omega + \omega_0)$.

(28) *Teorem o uzorku.* Ako je Fourierov spektar F originala f jednak nuli izvan nekog konačnog segmenta, tj. $F(\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_c$, tada je f jednoznačno određeno svojim vrijednostima $f_n = f(n\pi\omega_c^{-1})$, gdje n prelazi skupom $\mathbb{Z}$ svih cijelih brojeva. Dapače, vrijedi formula

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi}.$$

(29) *Grafički prikaz Fourierove transformacije.* Analiza vremenskih funkcija s pomoću Fourierove transformacije naziva se frekvencijskom analizom. Spektar $F(\omega)$ originala $f(t)$ općenito je kompleksna funkcija realne varijable ω, pa se može prikazati u obliku $F(\omega) = A(\omega)\exp(\mathrm{i}\Theta(\omega))$, gdje je $A(\omega) = |F(\omega)|$ amplituda funkcije F, a $\Theta(\omega)$ faza funkcije F. Grafički prikazi funkcije $A(\omega)$ (pri čemu se za funkcijske vrijednosti upotrebljava logaritamsko mjerilo) i funkcije $\Theta(\omega)$ (funkcijske vrijednosti u radijanima) nazivaju se zajedničkim imenom *Bodeov dijagram.*

DISTRIBUCIJE

U različitim područjima tehnike važnu ulogu ima Heavisideova funkcija

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ za } t < 0 \\ 1 \text{ za } t > 0. \end{cases}$$

Da bi bio ispunjen uvjet (13), treba staviti $H(0) = 1/2$. Ta funkcija nije pravi original, jer ne zadovoljava uvjet (11). Za neke je zakone fizike, izražene u diferencijalnom obliku, potrebna primjena derivacija Heavisideove funkcije: $H'(t) = \delta(t)$, $H''(t) = \delta'(t)$, itd. Tako se dolazi do Diracove δ-funkcije, za koju nema osnove u klasičnoj matematičkoj analizi. Da bi se egzaktno uvele takve poopćene funkcije, razvijena je teorija distribucija. U tehnici se primjenjuju jedino δ-funkcija (distribucija) i njezine derivacije omeđenog reda. Stoga je za primjene najprikladnija teorija koju je razvio J. Mikusiński. Ta se teorija zasniva na pojmu uniformne konvergencije nizova funkcija (sekvencijalni pristup). Ovdje je nemoguće ulaziti u strogu definiciju distribucije, ali je za primjene korisno znati da četiri niže navedena niza u određenom (distribucijskom) smislu konvergiraju prema δ-distribuciji, za $x \in \mathbb{R}$, kad $n \to \infty$: *a)* $(n\exp[-nx - \exp(-nx)])_n$, *b)* $(n\pi^{-1/2}\exp(-n^2x^2))_n$, *c)* $(\pi^{-1}n((nx)^2+1)^{-1})_n$, *d)* $((\pi x)^{-1}\cdot\sin(nx))_n$.

Distribucije su definirane na intervalima realnih brojeva. Ali za razliku od funkcija, one u općem slučaju nemaju definirane vrijednosti u pojedinim točkama svog područja definicije. Tako se distribucije $\delta^{(k)}(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$, mogu promatrati na $\langle -\infty, \infty\rangle = \mathbb{R}$. U točki $t = 0$ ove distribucije nemaju vrijednosti. Međutim, inženjerska fizikalna predodžba da je $\delta(0)$ vrlo veliko (ili beskonačno) može biti korisna. Interval u kojem se promatra distribucija može se prekriti manjim intervalima, i u svakom od njih posebno proučavati. Primjerice, ako se odabere $\varepsilon > \eta > 0$ i uvedu intervali $\mathbb{R}_{-\varepsilon} = \langle -\infty, -\varepsilon + \eta\rangle$, $I_\varepsilon = \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$, $\mathbb{R}_\varepsilon = \langle \varepsilon - \eta, \infty\rangle$, tako da je $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{-\varepsilon} \cup I_\varepsilon \cup \mathbb{R}_\varepsilon$, tada je $\delta^{(k)}(t)$ jednako nul-funkciji na $\mathbb{R}_{-\varepsilon}$ i $\mathbb{R}_\varepsilon$, jedino je na I_ε to distribucija koja nije jednaka običnoj funkciji. Sve funkcije, integrabilne u Riemannovu smislu (R-integrabilne) uključene su među distribucije. Prema tome i $H(t)$ je distribucija na $\mathbb{R}$. Svaka distribucija u svom području definicije ima distribucijsku derivaciju proizvoljnog reda. Ako se na nekom intervalu distribucija svodi na običnu derivabilnu funkciju, distribucijska derivacija jednaka je običnoj. Tako iz $H(t) = 1$ za $t \in \mathbb{R}_\varepsilon$ izlazi $\delta(t) = 0$ za $t \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Kaže se da je funkcija klase C^∞, ako je na promatranom intervalu neograničeni broj puta derivabilna. Ako je φ klase C^∞, moguće je definirati umnožak takve funkcije i distribucije. Napose je $\varphi(t)\delta(t) = \varphi(0)\delta(t)$, i općenito

$$\varphi(t)\delta^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \varphi^{(r)}(0)\delta^{(k-r)}(t), \tag{30}$$

$k = 0,1,2,\ldots$. Za »pomaknutu« δ-distribuciju vrijedi: $\varphi(t)\delta(t-a) = \varphi(a)\delta(t-a)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, i općenito

$$\varphi(t)\delta^{(k)}(t-a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \varphi^{(r)}(a)\delta^{(k-r)}(t-a). \tag{31}$$

Umnožak funkcije i distribucije derivira se distribucijski po istom pravilu koje vrijedi za deriviranje umnoška funkcija. Množenje dviju ili više distribucija (koje nisu obične funkcije) nije definirano. Promjena mjerila nezavisne varijable odražava se kod k-te derivacije δ-distribucije na sljedeći način:

$$\delta^{(k)}(at + b) = |a|^{-1} a^{-k}\delta^{(k)}\left(t - \frac{b}{a}\right), \tag{32}$$

gdje je $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tako je napose $\delta(-t) = \delta(t)$. Kad se primjenjuju distribucije u tehnici, dostatna je definicija integrala distribucije po Mikusińskom. Taj integral ima svojstvo linearnosti. Nadalje, ako je $c \in \langle a,b\rangle$, tako da je $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, iz definicije integrala, uz stanovite uvjete koji u ovim primjenama mogu biti uvijek ispunjeni, proizlazi da je integral preko $[a,b]$ jednak zbroju integrala preko $[a,c]$ i $[c,b]$. Distribucijski integral distribucije, koja se na intervalu integracije svodi na R-integrabilnu funkciju, jednak je Riemannovu integralu te funkcije. *Konvolucija* dviju distribucija f i g definirana je kao i kod funkcija:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)\mathrm{d}\tau,$$

ali uz uvjet da su ili obje distribucije jednake nul-funkciji na nekom intervalu $\langle -\infty, a\rangle$, ili je jedna od njih jednaka nul-funkciji izvan nekog konačnog intervala. Napose je za distribuciju f

$$f(t) * \delta^{(r)}(t) = f^{(r)}(t), \tag{33}$$

$r = 0,1,2,\ldots$. Za primjene integralnih transformacija u tehnici, osim već navedenih činjenica o distribucijama, jedino je još potrebno poznavati formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t-a)\mathrm{d}t = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta^{(k)}(t-a)\mathrm{d}t = H^{(k)}(\varepsilon) - H^{(k)}(-\varepsilon) = \begin{cases} 1 \text{ za } k = 0 \\ 0 \text{ za } k > 0, \end{cases} \tag{34}$$

gdje je $\varepsilon > 0$.

(35) *Primjer.* Neka su $\varphi_l(t)$ i $\varphi_d(t)$ klase C^∞ na $\mathbb{R}$, pa se promatra funkcija $f(t) = \varphi_d(t)H(t) + \varphi_l(t)H(-t)$. Indeksi l i d podsjećaju da je $f = \varphi_l$ lijevo i $f = \varphi_d$ desno od ishodišta. Takav prikaz funkcije, koja u točki $t = 0$ može imati prekid prve vrste, prikladan je osim ostalog i zbog relacija $f(0-) = \varphi_l(0)$, $f(0+) = \varphi_d(0)$. Izračuna li se distribucijska derivacija primjenom navedenih pravila, izlazi: $f'(t) = \varphi_d'(t)H(t) + \varphi_l'(t)H(-t) + (\varphi_d(0) - \varphi_l(0))\delta(t)$. Ovdje je $\varphi_d(0) - \varphi_l(0) = f(0+) - f(0-)$ skok funkcije f u ishodištu.

(36) *Fourierova transformacija distribucija.* Neka se promatra nepravi original

$$f(t) = \varphi_l(t)H(-t) + \varphi_d(t)H(t) + \sum_{r=0}^{k} A_r\delta^{(r)}(t), \qquad (37)$$

gdje su φ_l i φ_d klase C^∞ na $\mathbb{R}$. Prva dva člana nazivaju se regularnim komponentama, a članovi pod znakom sume singularnim komponentama, smještenim u ishodištu. Konstantni koeficijenti A_r nazivaju se amplitudama singularnih komponenti. Dakako, mogla bi se promatrati i »pomaknuta« analogno građena distribucija, i posve općenito linearna kombinacija tako građenih distribucija. Međutim, ta poopćenja su nepotrebna ako se misli na izlaganje suštinskih pitanja. Pretpostavlja se da regularne komponente pripadaju skupu originala $\mathcal{O}_F$ i da im je spektar $\Phi(\omega)$. Tada je

$$\mathcal{F}[f(t)] = \Phi(\omega) + \sum_{r=0}^{k} A_r(\mathrm{i}\omega)^r.$$

Također se može pokazati da je $\mathcal{F}[\delta^{(k)}(t-a)] = (\mathrm{i}\omega)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}$ Naposе za $a = 0$ i $k = 0$ izlazi $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$.

Ako su f i F distribucije takve da je $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, tada vrijedi reciprocitet: $F(t) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[f(-\omega)]$. To svojstvo proizlazi iz djelomične simetrije između definicija originala i slike kod $\mathcal{F}$-transformacije.

Iz formule $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, primjenom već navedenog reciprociteta izlazi (lema Riemanna-Lebesguea): $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$. Isti rezultat može se izvesti i s pomoću definicije Fourierova integrala kao glavne vrijednosti, uz primjenu niza $((\pi x)^{-1}\sin(nx))_n$ koji teži prema $\delta(x)$ kad $n\to\infty$. Treba primijetiti da u ovim izrazima 1 nije Heavisideova funkcija H, nego funkcija-konstanta na čitavom $\mathbb{R}$. Ako se npr. zna da niz $(x^{-1}\cos(nx))_n$ teži (distribucijski) prema nul-funkciji na $\mathbb{R}$ kad $n\to\infty$, može se na sličan način izvesti:

$$\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Neka original f, klase C^∞, ima $\mathcal{F}$-spektar F. Postavlja se pitanje kako glasi spektar distribucije dobivene moduliranjem periodičke distribucije

$$s_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

zadanim originalom f. Dobivena distribucija

$$\hat{f}(t) = f(t)s_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)$$

može se smatrati uzorkom dobivenim iz originala f. Primjenom Fourierovih redova distribucija pokazuje se da vrijedi

$$\mathcal{F}[s_{\Delta t}(t)] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0),$$

gdje je $\omega_0 = 2\pi/\Delta t$. Nadalje, primjenom svojstva (22), koje vrijedi i za distribucije, izlazi

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0),$$

gdje je $\hat{F}(\omega) = \mathcal{F}[\hat{f}(t)]$. Vidi se da je spektar $\hat{F}$ uzorka $\hat{f}$ uvijek periodička funkcija perioda ω_0. Za primjene je posebno važno kad postoji ω_c tako da je $F(\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_c$. Ako se tada uzme $\Delta t = \pi\omega_c^{-1}$, dakle $\omega_0 = 2\omega_c$, u redu za $\hat{F}$ ne dolazi do »preklapanja« članova.

(38) *Višestruka Fourierova transformacija.* Funkcija $f(x_1,x_2)$ zvat će se originalom ako je apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}^2$, te ako za proizvoljno fiksiranu jednu varijablu po drugoj varijabli zadovoljava uvjet (13). *Fourierov transformat* definira se izrazom

$$F(v_1,v_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\exp(-\mathrm{i}(v_1x_1 + v_2x_2))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

Zato je inverzna transformacija dana sa

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(v_1,v_2)\exp(\mathrm{i}(x_1v_1 + x_2v_2))\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2.$$

Poopćenja na više varijabli su evidentna.

(39) *Fourierova kosinusna transformacija.* Neka je parna funkcija $f\in\mathcal{O}_F$ i $F = \mathcal{F}[f]$. Jednostavnim računom i primjenom (20) dobiva se $F(\omega) = 2F_c(\omega)$, gdje je

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t.$$

Sličnom primjenom svojstva (20) izlazi također

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega.$$

F_c naziva se *kosinusnim transformatom* ili *kosinusnim spektrom* funkcije f, usporedi (6). Za to pridruženje upotrebljava se oznaka $F_c = \mathcal{F}_c[f]$. Pretpostavka o parnosti funkcije f bila je važna samo za uspostavljanje veze između eksponencijalnoga i kosinusnog spektra. Ako se primjenjuje samo kosinusna transformacija, nije potrebno definirati f za $t < 0$.

(40) *Fourierova sinusna transformacija.* Neka je neparna funkcija $f\in\mathcal{O}_F$ i $F = \mathcal{F}[f]$. Slično kao u točki (39) dolazi se do veze $F(\omega) = -2\mathrm{i}F_s(\omega)$, pri čemu je

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t,$$

a formula za inverznu eksponencijalnu transformaciju može se dovesti u oblik

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega.$$

Time je definirana sinusna transformacija i njezina inverzija, F_s se naziva *sinusnim spektrom* funkcije f i za to pridruženje upotrebljava se oznaka $F_s = \mathcal{F}_s[f]$. Nakon provedenog razmatranja može se napustiti pretpostavka o neparnosti funkcije f, ako nije potrebna veza s eksponencijalnom transformacijom i ako se f promatra samo za $t > 0$.

(41) Neka su $f, f', f'' \in \mathcal{O}_F$, $\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega)$, $\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega)$. Tada vrijede relacije:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c[f'(t)] &= \omega F_s(\omega) - f(0+)\\
\mathcal{F}_s[f'(t)] &= -\omega F_c(\omega)\\
\mathcal{F}_c[f''(t)] &= -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0+)\\
\mathcal{F}_s[f''(t)] &= -\omega^2 F_s(\omega) + \omega f(0+).
\end{aligned}$$

(42) Neka je $f,g\in\mathcal{O}_F$, $F_s(\omega) = \mathcal{F}_s[f(t)]$, $G_s(\omega) = \mathcal{F}_s[g(t)]$ i $G_c(\omega) = \mathcal{F}_c[g(t)]$. Pri tom se f smatra neparnom funkcijom, a g parnom odnosno neparnom, prema tome da li je podvrgnuta kosinusnoj odnosno sinusnoj transformaciji. Vrijede formule:

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F_s(\omega)G_s(\omega)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(u)[g(u+t) + g(u-t)]\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(u)[f(u+t) + f(u-t)]\mathrm{d}u$$

$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)G_c(\omega)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(u)[g(u-t)-g(u+t)]\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty g(u)[f(u+t)-f(u-t)]\mathrm{d}u.$$

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Uzme li se čvrsti broj $a \in \mathbb{R}$, te u izrazima (17) i (18) izvrši zamjena $s = a + \mathrm{i}\omega$, $g(t) = f(t)\mathrm{e}^{at}$, $G(s) = F((s-a)\mathrm{i}^{-1})$, izlazi

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (43)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} G(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s. \quad (44)$$

Tim je relacijama definirana izravna i inverzna *dvostrana Laplaceova transformacija* (kraće $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ transformacija), usp. (3). Ako se znaju dovoljni uvjeti za primjenljivost izravne i inverzne Fourierove transformacije, iz već navedenog razmatranja mogu se dobiti odgovarajući dovoljni uvjeti za dvostranu i jednostranu Laplaceovu transformaciju. Tako dobiveni uvjeti mogu se znatno oslabiti, u što se ovdje neće ulaziti.

Ako je $f \in \mathcal{O}_F$, tada je $g(t)\mathrm{e}^{-at} = f(t)$ apsolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$, g može imati samo prekide prve vrste, i to u svakom konačnom intervalu najviše konačan broj takvih prekida. Tada $G(s)$, dano sa (43), ima smisla na pravcu $\mathrm{Re}(s) = a$, i vrijedi (44). Međutim, skup točaka kompleksne ravnine s gdje konvergira integral (43) može biti veći. To se lakše objašnjava primjenom jednostrane Laplaceove transformacije.

Uzme li se $f \in \mathcal{O}_F$, $f(t) = 0$ za $t < 0$, bit će i $g(t) = 0$ za $t < 0$, a (43) će glasiti

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t. \quad (45)$$

Tim je definirana *jednostrana Laplaceova transformacija* (kraća oznaka: $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ transformacija), usp. (2). Veza između originala i slike pisat će se $G = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}[g]$. Inverzija jednostrane Laplaceove transformacije dana je izrazom (44), koji se naziva Mellin-Riemannovom formulom.

Neka svojstva $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ i $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ transformacije.

(46) Ako Laplaceov integral (45) konvergira apsolutno za $s = s_0$, on konvergira apsolutno u zatvorenoj poluravnini $\mathrm{Re}(s) \geqq \mathrm{Re}(s_0)$.

(47) Najveće područje apsolutne konvergencije integrala (45) jest otvorena poluravnina $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ ili zatvorena poluravnina $\mathrm{Re}(s) \geqq \alpha$, pri čemu se α naziva apscisom apsolutne konvergencije integrala (45).

(48) Ako integral (45) konvergira (u običnom smislu) za $s = s_0$, tada on konvergira u otvorenoj poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

(49) Najveće područje (obične) konvergencije Laplaceova integrala je poluravnina $\mathrm{Re}(s) > \beta$, čiji rub $\mathrm{Re}(s) = \beta$ može pripadati, ne pripadati ili djelomično pripadati tom području. Tu se β naziva apscisom (obične) konvergencije, a očito vrijedi: $\beta \leqq \alpha$.

(50) Ako je β apscisa konvergencije integrala (45), slika $G(s)$ analitička je funkcija u poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \beta$.

(51) Da bi se analiziralo područje konvergencije $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ transformacije, valja ustanoviti da se (43) može napisati $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$, gdje je $G_1(s) = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}[g(t)]$ i $G_2(-s) = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}[g(-t)]$. Neka $G_1(s)$ konvergira u poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \beta_1$, a $G_2(s)$ neka konvergira u poluravnini $\mathrm{Re}(s) < \beta_2$. Mogu nastupiti tri slučaja: *1)* $\beta_1 < \beta_2$. Tada $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ transformat $G(s)$ ima za područje (obične) konvergencije prugu $\beta_1 < \mathrm{Re}(s) < \beta_2$. *2)* $\beta_1 = \beta_2$. $G(s)$ može konvergirati u svim, nekim ili nijednoj točki pravca $\mathrm{Re}(s) = \beta_1$. *3)* $\beta_1 > \beta_2$. $G(s)$ uopće ne konvergira.

Posve slični zaključci mogu se izvesti i za područje apsolutne konvergencije.

(52) Zamjenom $\mathrm{e}^{-t} = x$, $g(-\ln x) = h(x)$, $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ transformat (43) poprima oblik

$$G(s) = \int_0^\infty h(x)x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

a to je Mellinova transformacija funkcije $h(x)$, usp. (4).

(53) *Funkcije eksponencijalnog reda.* Ako za kompleksnu funkciju f realne varijable t, definiranu za $t \geqq 0$, postoje konstante $M, a \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tako da za $t \geqq 0$ vrijedi $|f(t)| \leqq M\mathrm{e}^{at}$, kaže se da je f eksponencijalnog reda. Infimum skupa $\{\sigma \in \mathbb{R} \,|\, \exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \geqq 0;\ |f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t} \leqq M\}$ označuje se sa σ_0 i naziva eksponentom rasta funkcije f. Infimum ne mora pripadati tom skupu, pa se zato može tvrditi samo da vrijedi: $|f(t)| \leqq M\mathrm{e}^{(\sigma_0+\varepsilon)t}$ za $\varepsilon > 0$. Ako je α apscisa apsolutne konvergencije za f, tada je $\alpha \leqq \sigma_0$. U novijoj literaturi o Laplaceovoj transformaciji češće se upotrebljava pojam eksponenta rasta negoli pojmovi apscise apsolutne ili obične konvergencije.

(54) *Original u $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ transformaciji.* Definicija originala prilagođena je tehničkim primjenama. U klasičnoj (jednostranoj) Laplaceovoj transformaciji skup originala $\mathcal{O}_L$ definiran je na sljedeći način: $f \in \mathcal{O}_L$ ako i samo ako je *a)* f ili neprekidna na $\mathbb{R}$ ili ima samo prekide prve vrste, i to u svakom konačnom intervalu najviše konačni broj takvih prekida; *b)* $f(t) = 0$ za $t < 0$; *c)* f je eksponencijalnog reda.

Laplaceova transformacija distribucija. Ovdje se također uvode nepravi originali (37), pri čemu regularne komponente zadovoljavaju drugačije uvjete: φ_1 i φ_{d} su klase C^∞, $\varphi_{\mathrm{d}}(t)H(t) \in \mathcal{O}_L$. Skup svih takvih originala neka bude označen sa $\mathcal{O}_D$. Laplaceova transformacija distribucija $f \in \mathcal{O}_D$ definira se izrazom

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \to 0-} \int_\varepsilon^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

To će se pridruženje pisati kraće $F = \mathscr{L}[f]$, a transformacija će se zvati *$\mathscr{L}$ transformacijom.* Primjenjujući već navedene metode računanja s distribucijama, dobiva se

$$F(s) = F_{\mathrm{d}}(s) + \sum_{r=0}^{k} A_r s^r, \quad (55)$$

gdje je $F_{\mathrm{d}}(s) = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}[\varphi_{\mathrm{d}}(t)]$ klasična $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ transformacija desne regularne komponente.

(56) $F_{\mathrm{d}}(s)$ je analitička funkcija u poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, gdje je σ_0 eksponent rasta funkcije φ_{d}. Osim toga $F_{\mathrm{d}}(s) \to 0$ kad $s \to \infty$ u kutnom području $|\arg s| < \pi/2 - \alpha$, gdje je $0 < \alpha < \pi/2$.

(57) Pri izvođenju izraza (55) upotrijebljene su formule $\mathscr{L}[\delta^{(r)}(t)] = s^r$, $r = 0, 1, 2, \ldots$

(58) *Teorem sličnosti.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $F = \mathscr{L}[f]$ i $a > 0$, tada je $\mathscr{L}[f(at)] = a^{-1}F(sa^{-1})$.

(59) *Teorem pomaka.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $F = \mathscr{L}[f]$, $F_{\mathrm{d}} = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}[\varphi_{\mathrm{d}}]$ i $a > 0$, tada vrijedi

$$\mathscr{L}[f(t \mp a)] = \mathrm{e}^{\mp as}[F_{\mathrm{d}}(s) - \int_{0+}^{\mp a} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t].$$

Ako je napose $\varphi_1(t) = 0$ za $t < 0$, izlazi

$$\mathscr{L}[f(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}\left|F_{\mathrm{d}}(s) + \sum_{r=0}^{k} A_r s^r\right| = \mathrm{e}^{-as}F(s).$$

(60) *Teorem prigušenja.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $\mathscr{L}[f] = F$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tada je

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}f(t)] = F(s + \alpha).$$

(61) *Deriviranje originala.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $\mathscr{L}[f] = F$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}f'(0-) - \cdots -$$
$$- f^{(n-1)}(0-).$$

Može se pokazati da vrijedi $f^{(r)}(0-) = \varphi_l^{(r)}(0)$, $f^{(r)}(0+) = \varphi_d^{(r)}(0)$. Laplaceova transformacija distribucijâ kod koje se pri preslikavanju derivacijâ pojavljuju lijevi limesi (lijevi početni uvjeti, početni uvjeti $0-$) prikladna je i primjenjuje se za proučavanje prijelaznih pojava linearnih sustava. Pri rješavanju nekih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi primjenjuje se (klasična) $\mathscr{L}_\mathrm{I}$ transformacija. Ako je $f^{(n)} \in \mathcal{O}_L$, $\mathscr{L}_\mathrm{I}[f] = F$, tada je

$$\mathscr{L}_\mathrm{I}[f^{(n)}(t)] = s^n F_n(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

(62) *Deriviranje slike.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $\mathscr{L}[f] = F$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\mathscr{L}[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(s).$$

(63) *Integriranje originala.* Ako je $f \in \mathcal{O}_D$, $\mathscr{L}[f] = F$, $a > 0$, $g(t) = \int\limits_{-a}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$, tada je

$$\mathscr{L}[g(t)] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} g(0-).$$

Ako f nema singularnih komponenata, može se uzeti $a \in \mathbb{R}$, $g(0-) = g(0+) = g(0)$. Ako je osim toga $a = 0$, tada je $g(0) = 0$ i $\mathscr{L}[g(t)] = F(s)/s$.

(64) *Integriranje slike.* Neka je $f \in \mathcal{O}_D$, pri čemu f nema singularnih komponenata, i $f(t)/t \in \mathcal{O}_D$. Ako je $F = \mathscr{L}[f]$, tada je

$$\mathscr{L}[f(t)/t] = \int\limits_s^\infty F(z)\mathrm{d}z.$$

Krivulja integracije u kompleksnoj z-ravnini nalazi se u poluravnini $\mathrm{Re}(z) > \beta$, gdje je β apscisa konvergencije originala.

(65) *Teorem množenja.* Za originale se pretpostavlja da su lijevo od ishodišta identički jednaki nuli:

$$f(t) = \varphi_\mathrm{d}(t) H(t) + \sum_{k=0}^{m} A_k \delta^{(k)}(t)$$

$$g(t) = \psi_\mathrm{d}(t) H(t) + \sum_{k=0}^{n} B_k \delta^{(k)}(t).$$

Za takve distribucije definirana je konvolucija

$$f(t) * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{0-}^{t+0} f(\tau) g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Ako je $\mathscr{L}[f] = F$ i $\mathscr{L}[g] = G$, tada je $\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$.

(66) *Dualni teorem množenja.* Neka su f i $g \in \mathcal{O}_L$, σ_1 odnosno σ_2 eksponenti rasta za f odnosno g. Tada je produkt tih funkcija također original, pri čemu vrijedi

$$\mathscr{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(z) G(s-z)\mathrm{d}z,$$

gdje je $a > \sigma_1$ i $\mathrm{Re}(s) > \sigma_2 + a$.

(67) *Teoremi o graničnim vrijednostima. a)* Teorem o početnoj vrijednosti. Neka su f i $f' \in \mathcal{O}_L$, i $\mathscr{L}_\mathrm{I}[f] = F$. Tada vrijedi

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s),$$

gdje se granični prijelaz po s vrši u području $|\arg s| < \pi/2 - \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$. *b)* Teorem o krajnjoj vrijednosti. Ako se navedenim uvjetima doda pretpostavka o postojanju granične vrijednosti $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, tada vrijedi

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

(68) *Prvi teorem razvoja.* Ako je $F(s)$ analitička funkcija u beskonačno dalekoj točki, i ima u njezinoj okolini Laurentov razvoj

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^{-k},$$

tada je $F(s)$ $\mathscr{L}_\mathrm{I}$ slika funkcije $\varphi(t)H(t)$, gdje je

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

(69) *Drugi teorem razvoja.* Neka funkcija $F(s)$ zadovoljava uvjete: *1)* F je meromorfna na $\mathbb{C}$ i analitička u poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. *2)* Postoji familija kružnica $C_n = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| = R_n\}$, $n = 1,2,3,\dots$, $R_1 < R_2 < \dots$, $R_n \to \infty$, na kojoj $F(s)$ teži k 0 jednoliko s obzirom na $\arg s$. *3)* Za $a > \sigma_0$ apsolutno konvergira integral $\int\limits_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{d}s$. Tada je $\mathscr{L}_\mathrm{I}^{-1}[F(s)] = \varphi(t)H(t)$, gdje je

$$\varphi(t) = \sum_{(s_k)} \operatorname*{res}_{s_k}(F(s)\mathrm{e}^{st}),$$

gdje se suma reziduuma uzima po svim singularnim točkama s_k funkcije $F(s)$ u poredaju neopadajućih modula.

Posljedica 1. Ako je $F(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$, pri čemu je stupanj polinoma A manji od stupnja polinoma B, tada je $\mathscr{L}_\mathrm{I}^{-1}[F(s)] = \varphi(t)H(t)$, gdje je

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{s\to s_k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{n_k-1} \{F(s)(s-s_k)^{n_k} \mathrm{e}^{st}\},$$

a s_k su polovi višestrukosti n_k funkcije $F(s)$. Suma se uzima preko svih polova.

Posljedica 2. Heavisideov teorem razvoja. Ako je $F(s) = \dfrac{A(s)}{sB(s)}$, gdje je stupanj polinoma A manji ili jednak stupnju polinoma B, B ima samo jednostruke nultočke, različite od nule, tada je pripadni original $\varphi(t)H(t)$, gdje je

$$\varphi(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{A(s_k)}{s_k B'(s_k)} \mathrm{e}^{s_k t}.$$

PRIMJENE I DODATNE NAPOMENE

Integralne transformacije nalaze široku primjenu u matematici i u drugim područjima gdje se matematika primjenjuje. Različiti problemi primijenjene matematike često zahtijevaju upotrebu baš neke određene integralne transformacije. Fourierova transformacija primjenjuje se pri rješavanju nekih vrsta parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (Laplaceova jednadžba; jednadžba difuzije; problemi vibracija), u teoriji signala, u teoriji vjerojatnosti i u kvantnoj mehanici. Laplaceova transformacija prikladna je za primjene pri rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi, pa se zato posebno razvila primjena na proučavanje prijelaznih pojava u linearnim električnim mrežama, i općenito u teoriji linearnih stacionarnih sustava. Jedna od bitnih prednosti primjene $\mathscr{L}$ transformacije pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi sastoji se u tome što se istodobno rješava i odgovarajući Cauchyjev problem: za određene početne uvjete odmah se dobiva pripadno partikularno rješenje. I neke parcijalne diferencijalne jednadžbe (jednadžba linije — valna jednadžba, jednadžba širenja topline — difuzija, jednadžba usporenja neutrona) spretno se rješavaju primjenom Laplaceove transformacije. Ta je transformacija prikladna za rješavanje integralnih jednadžbi konvolucijskog tipa. Također se linearne jednadžbe konačnih razlika (diferencijske jednadžbe i diferencijalno-diferencijske jednadžbe) mogu rješavati primjenom Laplaceove transformacije. Razvijajući metode primjene Laplaceove transformacije na linearne diskretne sustave, došlo se do metode nazvane $\mathscr{Z}$ transformacijom, koja se može zasnovati na Laurentovim redovima nezavisno od integralnih transformacija. Laplaceova transformacija omogućuje pronicanje u dublja svojstva specijalnih funkcija, napose izvođenje asimptotskih razvoja i izvođenje funkcionalnih jednadžbi. Višedimenzionalne $\mathscr{L}$ transformacije u nekim slučajevima rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi svode na rješavanje algebarskih jednadžbi. Mellinova transformacija primjenjuje se na rješavanje nekih integralnih jednadžbi, za određivanje razdiobe potencijala u kutnom području u ravnini ($\varrho > 0$, $|\varphi| < \alpha$ u polarnom koordinatnom sustavu). Hankelova transformacija prikladna je za rješavanje aksijalno simetričnog Dirichletova problema u poluprostoru i u debeloj ploči. Također pri proučavanju simetričnih vibracija velike membrane i tanke elastične ploče, pri istraživanju kretanja viskozne tekućine pod plošnim opterećenjem.

Od bezbrojnih primjena integralnih transformacija, ovdje će se navesti samo nekoliko primjera radi ilustracije.

(70) *Laplaceova jednadžba u poluravnini.* Treba odrediti funkciju $u(x,y)$ koja zadovoljava jednadžbu $\Delta u = 0$ u poluravnini $y \geqq 0$ uz rubni uvjet: $u(x,0) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, gdje je f zadana funkcija iz $\mathcal{O}_F$, i granični uvjet: $u(x,y) \to 0$ kad $x^2 + y^2 \to \infty$. Ako se pretpostavi da takvo rješenje postoji i da je s obzirom na varijablu x original iz $\mathcal{O}_F$, stavlja se $U(\omega, y) = \mathscr{F}_x[u(x,y)]$, te primjenom (24) i (26) preslikava Laplaceova diferencijalna jednadžba: $U''_{yy} - \omega^2 U = 0$. Slika rubnog uvjeta glasi $U(\omega,0) = F(\omega)$, a granični uvjet za funkciju u povlači $U(\omega,y) \to 0$ kad $y \to \infty$. Rješenje diferencijalne jednadžbe u području slika, koje zadovoljava i preslikane rubne i granične uvjete, glasi $U(\omega,y) = F(\omega)\exp(-|\omega|y)$. Pročita li se iz tablica Fourierove transformacije da je $\mathscr{F}_\omega^{-1}[\exp(-|\omega|y)] = \pi^{-1} y(x^2+y^2)^{-1} = g(x)$, rješenje u području originala može se dobiti primjenom (21):

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) \mathrm{d}\tau = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^2 + y^2} \mathrm{d}\tau, \qquad y > 0.$$

U fizikalnoj interpretaciji funkcija u može imati značenje stacionarne temperature ili električnog potencijala.

(71) *Laplaceova jednadžba u polubeskonačnoj traci.* Traži se rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe $\Delta u = 0$ (razdioba temperature) u polubeskonačnoj traci $0 \leqq x < \infty$, $0 \leqq y \leqq a$, uz rubne uvjete $u(0,y) = 0$ za $0 \leqq y \leqq a$; $u(x,0) = f(x)$ za $x \geqq 0$, $u(x,a) = g(x)$ za $x \geqq 0$. Funkcije f i g su zadani originali. Za rješavanje takvih problema primjenjuje se $\mathscr{F}_s$ ili $\mathscr{F}_c$ transformacija. Rubni uvjet $u(0,y) = 0$ i formule (41) sugeriraju da bi najprikladnija bila $\mathscr{F}_s$ transformacija. Ako se pretpostavi da postoji $\mathscr{F}_{sx}[u(x,y)] = U_s(\omega,y)$, slika Laplaceove diferencijalne jednadžbe jednako izgleda kao u primjeru (70). Slike su rubnih uvjeta $\mathscr{F}_s[u(x,0)] = F_s(\omega)$, $\mathscr{F}_s[u(x,a)] = G_s(\omega)$. Rješenje diferencijalne jednadžbe u području slika, uz ove rubne uvjete glasi

$$U_s(\omega,y) = F_s(\omega)\frac{\operatorname{sh}\omega(a-y)}{\operatorname{sh}\omega a} + G_s(\omega)\frac{\operatorname{sh}\omega y}{\operatorname{sh}\omega a}.$$

U tablicama Fourierove transformacije može se naći formula

$$\mathscr{F}_{c\omega}^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\omega y}{\operatorname{sh}\omega a}\right] = \frac{a^{-1}\sin(\pi y/a)}{\operatorname{ch}(\pi x/a) + \cos(\pi y/a)} = H(x,y).$$

Tako se u području slika dobiva

$$U_s(\omega,y) = F_s(\omega)\mathscr{F}_{cx}[H(x,a-y)] + G_s(\omega)\mathscr{F}_{cx}[H(x,y)],$$

odakle primjenom druge formule iz (42) izlazi

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(u)[H(u-x,a-y) - H(u+x,a-y)]\,\mathrm{d}u +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty g(u)[H(u-x,y) - H(u+x,y)]\,\mathrm{d}u.$$

(72) *Karakteristična funkcija.* Ako slučajna varijabla X ima gustoću razdiobe $f(x)$ (ovo može biti i distribucija, tj. poopćena funkcija), tada se karakteristična funkcija $\Theta_x(v)$ slučajne varijable X definira s pomoću Fourierove eksponencijalne transformacije:

$$\Theta_x(-v) = \mathscr{F}[f(x)],$$

dakle eksplicite

$$\Theta_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}\mathrm{d}x.$$

Kumulantnom funkcijom naziva se $\Psi_x(v) = \ln\Theta_x(v)$. Za slučajnu varijablu X s općom normalnom razdiobom $N(a,\sigma^2)$ je $\Psi_x(v) = \mathrm{i}va - v^2\sigma^2/2$. Za Poissonovu razdiobu $P(a)$ je $\Psi_x(v) = a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} - 1)$, a za binomnu razdiobu $B(n,p)$ je $\Psi_x(v) = n\ln(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} + q)$, gdje je $p + q = 1$. *Kumulantom* ili *semiinvarijantom* r-tog reda naziva se veličina

$$\varkappa_r = \mathrm{i}^{-r}\Psi_x^{(r)}(0).$$

Pokazuje se da je centar razdiobe $E(X) = \varkappa_1$, disperzija $D(X) = \varkappa_2$, koeficijent asimetrije $k_a = \varkappa_3\varkappa_2^{-3/2}$ i koeficijent ekscesa $k_e = \varkappa_4\varkappa_2^{-2}$.

S pomoću (21) dokazuje se da je karakteristična funkcija zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka umnošku karakterističnih funkcija pribrojaka.

(73) Promatra se diferencijalna jednadžba n-tog reda

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = f(t), \qquad (74)$$

gdje je $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0,\ldots,n-1$, a zadana funkcija smetnje $f \in \mathcal{O}_D$. Pretpostavlja se da su zadani lijevi početni uvjeti $y^{(r)}(0-) = 0$, $r = 0,1,\ldots,n-1$, tako da je prirodno primijeniti $\mathscr{L}$ transformaciju. U teoriji diferencijalnih jednadžbi pokazuje se da za opće početne uvjete i ostale već navedene pretpostavke postoji rješenje y diferencijalne jednadžbe (74), te da je $y^{(r)} \in \mathcal{O}_D$, $r = 0,1,\ldots,n$. Može se dakle staviti $\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$, i primjenom (61) preslikati (74): $K(s)Y(s) = F(s)$, gdje je $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ i $K(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0$. Uvede li se oznaka $G(s) = 1/K(s)$, dobiva se $Y(s) = G(s)F(s)$, te primjenom konvolucije (usp. (65)) izlazi rješenje $y(t) = g(t) * f(t)$, gdje je $g(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)]$. Za nalaženje originala g može se npr. primijeniti Posljedica 1 iz (69). Ako K ima samo jednostruke nultočke s_k, $k = 1,2,\ldots,n$, tada je

$$g(t) = H(t)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{s_k t}/K'(s_k).$$

U elektrotehnici funkcija f naziva se *ulaznom funkcijom* (uzbudom), a funkcija y naziva se *izlaznom funkcijom* (odzivom). Isti nazivi prenose se i na pripadne slike. Funkcija G zavisi od strukture parametara fizičkog sustava, a naziva se prijenosnom funkcijom. Pripadni original g naziva se u matematici *Greenovom funkcijom* promatranog problema, a u elektrotehnici g se naziva *težinskom funkcijom.* Promatra li se odziv y_δ na impulsnu uzbudu, $f = \delta$, dobiva se (usp. (52) za $r = 0$) $Y_\delta(s) = G(s)$, dakle $y_\delta(t) = g(t)$. Ako se ovo rješenje ograniči na interval $\langle 0,\infty\rangle$, izlazi da $g(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (74), kad se u toj jednadžbi f zamijeni nul-funkcijom. Važan je i odziv y_1 na uzbudu $f(t) = H(t)$ (tzv. jedinični odziv). U tom slučaju je $Y_1(s) = s^{-1}G(s)$, odakle primjenom (63) izlazi

$$y_1(t) = \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Težinska funkcija može se prema tome izraziti s pomoću jediničnog odziva: $g = y_1'$. Stavljajući to u izraz za opći odziv, dobiva se $y = y_1' * f$. Ta se formula naziva *Duhamelovom.* Osobito je važno poznavanje stacionarnog dijela odziva na harmonijsku uzbudu $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Odziv na tu uzbudu glasi

$$y_\omega(t) = g(t) * \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Uvodi se pretpostavka da razlomljeno-racionalna funkcija $G(s)$ ima sve polove lijevo od imaginarne osi. Tada Laplaceov integral

$$G(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau}g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

konvergira i za $s = \mathrm{i}\omega$, pa se može pisati

$$y_\omega(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}g(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}g(\tau)\mathrm{d}\tau\right] =$$
$$= G(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Budući da posljednji integral teži k nuli kad $t \to \infty$, stacionarni odziv je $\tilde{y}_\omega(t) = G(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Funkcija $G(\mathrm{i}\omega)$ naziva se frekventnom karakteristikom sustava. Ona se može prikazati i u tzv. eksponencijalnom obliku: $G(\mathrm{i}\omega) = |G(\mathrm{i}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(\omega)}$, gdje je $|G(\mathrm{i}\omega)|$ amplitudna, a $\psi(\omega)$ fazna karakteristika. Jedinični odziv moguće je povezati s frekventnom karakteristikom. Pokazalo se već da je

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)/s] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{G(s)}{s}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

Put integracije može se modificirati tako da se uzme $a = 0$, pri čemu se ishodište mora zaobići polukružnicom. Daljnjom primjenom teorije funkcija kompleksne varijable izlazi

$$y_1(t) = \frac{1}{2}G(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{|G(\mathrm{i}\omega)|}{\omega}\sin(\omega t + \psi(\omega))\mathrm{d}\omega, \qquad t > 0.$$

(75) *Operatorske karakteristike elemenata linearne električne mreže.* Pretpostavlja se da su napon $u(t)$ i struja $i(t)$ originali iz $\mathcal{O}_D$, tako da je $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$, $\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$.

a) Kod otpornika napon i struja vezani su relacijom $u(t) = R\,i(t)$. Preslikavanjem veza ostaje linearna: $U(s) = R\,I(s)$.

b) Veza napona i struje kod kondenzatora kapaciteta C dana je integralom

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Primjenom pravila (63) dobiva se

$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}u(0-).$$

Ako je $u(0-) = 0$, veza između slika struje i napona je linearna, kao kod otpornika. Zato se $Z(s) = (sC)^{-1}$ naziva impedancijom kondenzatora. Ako $u(0-)/s$ nije jednako nuli, interpretira se kao EMS naponskog generatora u području slika.

c) Ovisnost napona o struji svitka induktiviteta L glasi: $u(t) = L\,i'(t)$. Preslikavanje se može izvesti primjenom pravila (61) za $\mathcal{L}$ transformaciju i $n = 1$:

$$U(s) = LsI(s) - Li(0-).$$

Kad je $i(0-) = 0$, veza između slika struje i napona je linearna. Stoga se $Z(s) = Ls$ naziva *impedancijom svitka*. Ako $Li(0-)$ nije jednako nuli, interpretira se kao EMS prikladno polariziranog naponskog generatora u području slika.

d) Komutator se u području slika može nadomjestiti ekvivalentnim generatorom. Ako u trenutku $t_v \geqq 0$ komutator prelazi u položaj »uključeno«, napon je na komutatoru $u_1(t)H(t_v - t)$. Taj komutator može se u području slika nadomjestiti naponskim generatorom EMS $U_K(s) = \mathcal{L}[u_1(t)H(t_v - t)]$, koji je postavljen na mjesto komutatora i polariziran tako da »tjera pozitivnu struju« u suprotnom smjeru od one koja je tekla granom s komutatorom. Ako u trenutku $t_v \geqq 0$ komutator prelazi u položaj »isključeno«, struja kroz komutator je $i_1(t)H(t_v - t)$. Paralelno kratko spojenom komutatoru treba, dakle, u području slika priključiti strujni generator MMS $I_K(s) = \mathcal{L}[i_1(t)\cdot H(t - t_v)]$, koji proizvodi struju jednako orijentiranu kao »pozitivna« struja u komutatorskoj grani.

(76) *Linearni stacionarni sustavi.* Stanje i izlaz takvog sustava opisani su jednadžbama

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

gdje je $\mathbf{u}(t)$ vektor ulaza (ulaznog djelovanja), $\mathbf{x}(t)$ vektor stanja sustava, $\mathbf{y}(t)$ vektor izlaza, a matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ imaju konstantne elemente i određene su strukturom sustava. Ako se promatra sustav u vremenu $t > 0$, mora biti poznato stanje $\mathbf{x}(0-) = \mathbf{x}_0$. Stanje i vektor izlaza mogu se dobiti primjenom $\mathcal{L}$ transformacije. Matrica $\mathbf{F}(t) = [f_{jk}(t)]$, formata $m \times r$, gdje je $f_{jk} \in \mathcal{O}_D$, $j = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,r$, preslikava se tako da se svaki njezin element preslika: $\mathcal{L}[\mathbf{F}(t)] = [\mathcal{L}[f_{jk}(t)]]$ (dvosmislena upotreba uglatih zagrada!). Obratno, matrica $\mathbf{G}(s) = [G_{jk}(s)]$, gdje su $G_{jk}(s)$ slike, vraća se u područje originala tako da se svaki njezin element podvrgne inverznoj transformaciji: $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)] = [\mathcal{L}^{-1}[G_{jk}(s)]]$. Ako su elementi vektora ulaza $\mathbf{u}(t)$ originali, može se dokazati da je to slučaj i kod vektora $\mathbf{x}(t)$ odnosno $\mathbf{y}(t)$. Dakle postoji slika vektora stanja $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$, te primjenom pravila (56) izlazi $\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0$. Preslika li se još i vektor ulaza, $\mathcal{L}[\mathbf{u}(t)] = \mathbf{U}(s)$, može se preslikati jednadžba stanja:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{x}_0,$$

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica formata $n \times n$, ako je sustav n-dimenzionalan. Slika vektora stanja može se sad eksplicite izračunati:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{x}_0).$$

Matrica $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ima za elemente razlomljene racionalne funkcije u varijabli s, kojima su brojnici polinomi najviše $(n-1)$-tog stupnja, a nazivnik je $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, dakle polinom n-tog stupnja. Primjenom inverzne transformacije, najčešće Posljedice 1 iz točke (69), dobiva se vektor stanja $\mathbf{x}(t)$, a zatim se izračuna vektor izlaza $\mathbf{y}(t)$. U teoriji sustava upotrebljava se relacija

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \exp(\mathbf{A}t) \qquad \text{za } t \geqq 0.$$

Pretpostavi li se da je $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, slika vektora stanja glasi $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\exp(\mathbf{A}t)]\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$. Pokazuje se da i u ovom slučaju inverzno preslikavanje dovodi do konvolucije

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t) * (\mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(77) $\mathcal{Z}$ *transformacija.* U teoriji diskretnih sustava proučavaju se funkcije koje su u svom fizikalnom izvoru definirane na prebrojivim podskupovima od $\mathbb{R}$. Najčešće su to nizovi $(f_n)_n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Od takvih nizova mogu se sagraditi *stepenaste funkcije* f_0 na sljedeći način:

$$f_0(t) = f_n \qquad \text{za } n \leqq t < n+1,\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Ako se stavi $f_0(t) = 0$ za $t < 0$ i pretpostavi da je f_0 eksponencijalnog reda, tada je $f_0 \in \mathcal{O}_D$, pa se može podvrći $\mathcal{L}$ transformaciji:

$$\mathcal{L}[f_0(t)] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-ns}.$$

Kad se ukloni nebitni faktor ispred sume, dolazi se do tzv. *diskretne Laplaceove transformacije*

$$\mathcal{D}[f_n] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-ns}.$$

Međutim, tako definirana, to nije integralna transformacija. U području integralnih transformacija moguće je ostati primjenom δ-distribucije. Podvrgne li se distribucija

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n)$$

$\mathcal{L}$ transformaciji, primjenom (54) izlazi

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathcal{L}[\delta(t-n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-ns}.$$

Dakle, $\mathcal{D}[f_n] = \mathcal{L}[f^*(t)]$. Za mnoge primjene formule se znatno pojednostavnjuju kad se uvede zamjena varijable u području slika: $\mathrm{e}^s = z$, gdje je z kompleksna varijabla. Tako se dolazi do $\mathcal{Z}$ transformacije niza $(f_n)_n$:

$$F^*(z) = \mathcal{Z}[f_n] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Slika $F^*(z)$ u matematičkoj terminologiji naziva se generirajućom funkcijom niza $(f_n)_n$. $\mathcal{Z}$ transformacija pojavila se u tehničkoj literaturi oko 1950. godine. Taj naziv transformacije nije prikladan, jer se ovdje radi o Laurentovu redu funkcije $F^*(z)$, pa bi bolji naziv bio Laurentova transformacija. U posljednje vrijeme (od 1975. god.) primjenjuje se u elektrotehnici i Taylorova transformacija, pri čemu se radi o Taylorovim redovima funkcija.

Primjenom $\mathcal{Z}$ transformacije rješavaju se jednadžbe diferencija, slično kao što se diferencijalne jednadžbe rješavaju primjenom $\mathcal{L}$ transformacije.

U teoriji impulsnih sustava primjenjuje se metoda uzorkovanja. Najprije je zadana neprekidna funkcija $f(t)$ na intervalu $0 \leqq t < \infty$. Za teoretsku obradu potrebno je pretpostaviti da je f klase C^∞. Fiksira se period T ponavljanja impulsa i parametar (pomak) τ, $0 \leqq \tau < T$, pa se formira niz $(f(nT+\tau))_n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Taj se niz može smatrati nekom vrstom uzorka dobivenog iz skupa vrijednosti funkcije f. Podvrgavanjem tog niza $\mathscr{Z}$ transformaciji dobiva se

$$F^*(z,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+\tau)z^{-n}.$$

Slika $F^*(z,\tau)$ naziva se *modificiranim* $\mathscr{Z}$ *transformatom*, da bi se istakla razlika prema $\mathscr{Z}$ transformatu niza $(f(nT))_n$. Uvođenjem distribucije

$$f^*(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+\tau)\delta(t - nT - \tau)$$

omogućena je primjena $\mathscr{L}$ transformacije:

$$\mathscr{L}[f^*(t,\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+\tau)\mathrm{e}^{-(nT+\tau)s} = \mathrm{e}^{-\tau s}F^*(\mathrm{e}^{Ts},\tau).$$

Ako je f klase C^{∞} na $[0,\infty\rangle$ i f' eksponencijalnog reda, $\mathscr{Z}$ transformate moguće je izraziti s pomoću $\mathscr{L}$ transformata $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$:

$$F^*(\mathrm{e}^{sT}) = \frac{1}{2}f(0+) + \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(s + \mathrm{i}m\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$F^*(\mathrm{e}^{sT},\tau) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(s + \mathrm{i}m\frac{2\pi}{T}\right)\exp\left(\left(s + \mathrm{i}m\frac{2\pi}{T}\right)\tau\right),$$
$$0 < \tau < T.$$

Dokaz se izvodi primjenom teorema jedinstvenosti u teoriji Fourierovih redova.

(78) *Integralne jednadžbe.* Volterrina linearna integralna jednadžba druge vrste, s razlikovnom (diferencijskom) jezgrom, ima oblik

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

gdje su f i k zadane funkcije, k se naziva jezgrom integralne jednadžbe, a x je nepoznata funkcija. Neka su f, k i x originali iz $\mathcal{O}_D$, a integral se interpretira kao konvolucija te integralna jednadžba preslika $\mathscr{L}$ transformacijom. Izlazi

$$X(s) = F(s) + K(s)X(s),$$

odakle je

$$X(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)}.$$

Ako se iz tablica može pročitati pripadni original $x(t)$, problem je riješen. Ako se slika ne nalazi u tablicama, rješenje u integralnom obliku daje formula (44) za inverznu $\mathscr{L}$ transformaciju:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s}{1 - K(s)}.$$

Slično se može rješavati i Volterrina jednadžba prve vrste

$$f(t) = \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

gdje oznake imaju isto značenje kao u prijašnjem razmatranju.

(79) *Izračunavanje nepravih integrala.* Neka je $f \in \mathcal{O}_L$, a nepravi integral

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

konvergira, te mu je vrijednost I. Tada je i

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

original. Budući da je $g(0-) = 0$, pravilo (63) daje $\mathscr{L}[g(t)] = s^{-1}F(s)$, gdje je $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$. Primjenom teorema o krajnjoj vrijednosti (usp. (67), *b*) izlazi

$$I = \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} F(s).$$

(80) *Definicije rjeđe primjenjivanih linearnih integralnih transformacija.* Neke srodne integralne transformacije ponekad se vrlo malo razlikuju u definicijama, a ima slučajeva kad je srodnost jedva prepoznatljiva. Ako se jezgra transformacije (2) zamijeni sa $s\mathrm{e}^{-st}$, dobiva se *Carsonova transformacija*, češće primjenjivana u strojarstvu. *Stieltjesova transformacija* (8) proizlazi iz dva puta iterirane jednostrane Laplaceove transformacije.

Original $f \in \mathcal{O}_L$ podvrgne se $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ transformaciji: $F(u) = \mathscr{L}[f(t)]$, a zatim se $F(u)$ podvrgne ponovo $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ transformaciji: $\Phi(s) = \mathscr{L}[F(u)]$. Ako se redoslijed integracija može zamijeniti, izlazi Stieltjesova transformacija funkcije f. U poopćenoj Stieltjesovoj transformaciji jezgra je $K(s,t) = (s+t)^{-\varrho}$. Srodna transformaciji (8) jest *Hilbertova transformacija* kod koje je $K(s,t) = \pi^{-1}(t-s)^{-1}$. Ona se može dobiti iteracijom Fourierove transformacije, slično kao što se Stieltjesova transformacija dobiva iz Laplaceove. Granice kod Hilbertove transformacije jesu $a = -\infty$, $b = \infty$, a integral se uzima u smislu glavne vrijednosti. Što se tiče definicije Hankelove transformacije (9), tu ima najviše raznolikosti. Umjesto jezgre (9) ponekad se uzima $tJ_\nu(st)$, a rjeđe $J_\nu(2\sqrt{st})$. U svim ovim izrazima J_ν je Besselova funkcija prve vrste. Inverzna transformacija ima jednako građenu jezgru. Interesantno je primijetiti da se *Hankelova transformacija* cijelog i polucijelog reda ($\nu = n/2$, n nenegativni cijeli broj) može izvesti iz višedimenzionalne Fourierove transformacije. Za proizvoljni realni red $\nu > -1/2$ izvodi se izravna i inverzna Hankelova transformacija iz integralne formule za Besselove funkcije. Ta integralna formula posve je analogna Fourierovu integralu za trigonometrijske funkcije. Integralne transformacije oblika

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)K(st)\mathrm{d}t,$$

gdje je jezgra K jedna od Besselovih ili srodnih funkcija, pomnožena nekim elementarnim funkcijama, naziva se *Besselovom transformacijom.* Ako se uzme $K(st) = K_\nu(st)(st)^{1/2}$, gdje je K_ν modificirana Besselova funkcija treće vrste (Bassetova ili Macdonaldova funkcija) naziva se *K transformacijom* ili *Meijerovom transformacijom* (uvedena 1940). Jezgra inverzije transformacije je $I_\nu(st)(st)^{1/2}$, gdje je I_ν modificirana Besselova funkcija prve vrste. Kod *Y transformacije* jezgra je $K(st) = Y_\nu(st)(st)^{1/2}$, gdje je Y_ν Besselova funkcija druge vrste (Neumannova funkcija). Inverzno preslikavanje ima jezgru $\mathbf{H}_\nu(st)(st)^{1/2}$, gdje je $\mathbf{H}_\nu$ Struveova funkcija. Kad se ova inverzna transformacija uzme kao izravna, naziva se *H transformacijom. Weberova transformacija* definirana je integralom

$$F(s) = \int_a^{\infty} f(t)K(s,t)t\,\mathrm{d}t,$$

gdje je jezgra $K(s,t) = J_\nu(as)Y_\nu(st) - Y_\nu(as)J_\nu(st)$, $\nu > -1/2$. Inverzna transformacija dana je izrazom

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(s)K^*(s,t)s\,\mathrm{d}s,$$

gdje je $K^*(s,t) = K(s,t)/(J_\nu^2(as) + Y_\nu^2(as))$, $a < t < \infty$. Iako povezana s Besselovim funkcijama, *transformacija Kontorovića* i *Lebedeva* (1938) nešto je drugačijeg karaktera, jer je kod te transformacije jezgra $K_{it}(s)$, gdje je K_ν kao i prije, a varijabla integracije t nalazi se u redu (indeksu) ove Besselove funkcije. *Transformacija Mehlera* (1881) i *Focka* (1943) definirana je izrazom

$$F(s) = \int_1^{\infty} f(t)P_{-(1/2)+\mathrm{i}s}(t)\mathrm{d}t, \qquad s \geqq 0$$

gdje je $P_\nu(x)$ Legendreova sferna funkcija prve vrste. U tom slučaju inverzna transformacija glasi

$$f(t) = \int_0^{\infty} s\tanh(\pi s)F(s)P_{-(1/2)+\mathrm{i}s}(t)\mathrm{d}s.$$

Zamjenom varijabli ova transformacija može poprimiti znatno izmijenjeni oblik. Poopćenje na transformaciju *m*-tog reda postiže se zamjenom Legendreove funkcije $P_\nu(x)$ prve vrste pridruženom Legendreovom funkcijom prve vrste *m*-tog reda,

$P_\nu^m(x)$. Ta se transformacija primjenjuje u teoriji potencijala, provođenja topline, za rješavanje integralnih jednadžbi itd. *Laguerreova transformacija* (Me-Cully, 1957) funkcije f definirana je s pomoću Laguerreovih polinoma $L_n(t)$:

$$F(n)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}L_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

(81) *Brza Fourierova transformacija.* Pripada metodama numeričke matematike, a naziv je nastao iz postignutog skraćenja vremena rada elektroničkog računala. Neka je $f\in\mathcal{O}_F$, a F pripadni $\mathcal{F}$ spektar. U numeričkoj obradi funkcije f i F ne promatraju se na čitavom $\mathbb{R}$, nego u konačnim intervalima: f na intervalu $|t|<T$, a F na intervalu $|\omega|<\omega_c$. Za izračunavanje integrala najčešće se upotrebljava trapezna formula. Integrali (17) i (18) aproksimiraju se sumama:

$$F(\omega_n)=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}f(t_k)\exp(-i\omega_n t_k), \qquad n=0,1,\ldots,N-1 \tag{82}$$

$$f(t_k)=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}F(\omega_n)\exp(\mathrm{i}\omega_n t_k), \qquad k=0,1,\ldots,N-1 \tag{83}$$

gdje je N fiksirani prirodni broj, $\Delta t=\pi/\omega_c$, $t_k=k\Delta t$, $\Delta\omega=2\pi/T$, $\omega_n=n\Delta\omega$. Pri tom se uzima $N\pi=\omega_c T$. Parametri ω_c i T mogu se tako podesiti da bude $N=2^\gamma$, γ prirodni broj; ovdje je iskorišteno izlaganje s kraja točke (36). Prijelazom s integrala na sumu primijenjen je postupak uzorkovanja. Pripadni spektar $\hat{F}$ je periodička funkcija perioda $2\omega_c$. U numeričkom se postupku unutar tog perioda F i $\hat{F}$ identificiraju, i vrši se pomak sumiranja za pola perioda. U sumi (83) treba dakle uzeti za $n>N/2$: $F(\omega_n)=F(\omega_{n-N})$. Budući da je $\omega_n t_k=2\pi nk/N$, prikladno je uvesti oznaku $W=\exp(-2\pi\mathrm{i}/N)$, i zatim matrice $\mathbf{W}=[W_{n+1,k+1}]$, $\mathbf{W}_i=[W_{n+1,k+1}^{-1}]$, gdje je $W_{n+1,k+1}=W^{nk}$, $n,k=0,1,\ldots,N-1$. Pokazuje se da je $\mathbf{W}_i=N\mathbf{W}^{-1}$. Ako se još uvedu vektori $\mathbf{F}=[F(\omega_n)]$, $\mathbf{f}=[f(t_k)]$, $n,k=0,1,\ldots,N-1$, diskretna $\mathcal{F}$ transformacija (82) može se zapisati u obliku $\mathbf{F}=\Delta t\mathbf{W}\mathbf{f}$, a inverzija diskretne transformacije (83) u obliku $\mathbf{f}=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\mathbf{W}_i\mathbf{F}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}$. Pri efektivnom izračunavanju primjenom jedne od formula (82) ili (83) ima N^2 operacija množenja i približno isto toliko zbrajanja kompleksnih brojeva. Bit metode brze $\mathcal{F}$ transformacije sastoji se u tome da se, zahvaljujući građi matrice $\mathbf{W}$, ona može faktorizirati u γ faktora ($N=2^\gamma$): $\mathbf{W}=\mathbf{W}_\gamma\mathbf{W}_{\gamma-1}\ldots\mathbf{W}_1$ primjenom prilično složenog algoritma (Cooley i Tukkey, 1956). Pri tom se potreban broj operacija smanjuje $N(\log_2 N)^{-1}$ puta.

(84) *Inverzija $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ transformacije s pomoću ortogonalnih polinoma.* Metode koje se iznose pripadaju numeričkoj inverziji $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ transformacije. Ako je za neki original $f(t)$ poznata slika $F(s)=\mathcal{L}_\mathrm{I}[f(t)]$, pokazuje se kako se iz vrijednosti slike u točkama $s=0,1,2,\ldots$, dobiva pripadni original f u obliku razvoja po ortogonalnim polinomima. Iz tog razvoja vrijednosti originala f mogu se izračunati sa željenom točnošću. Metoda će biti ilustrirana Jacobijevim polinomima $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha,\beta>-1$, $n=0,1,\ldots$, ortogonalnim na segmentu $[-1,1]$ s težinskom funkcijom $x^\alpha(1-x)^\beta$. Iz beskonačnog sustava jednadžbi (trokutnog oblika)

$$\frac{\Gamma(2n+\gamma)}{n!\,\Gamma(n+\gamma)}F(n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+\gamma}{(n-k)!}\,\frac{\Gamma(2n+\gamma)\Gamma(k+\gamma)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+k+\gamma+1)\Gamma(n+\gamma)\Gamma(k+\alpha+1)}a_k,$$

gdje je Γ gama funkcija, $\gamma=\alpha+\beta+1$, $n=0,1,2,\ldots$, lako se izračunaju redom nepoznanice $a_0,a_1,a_2,\ldots$, koje imaju značenje poopćenih Fourierovih koeficijenata u razvoju traženog originala

$$f(t)=\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}(1-\mathrm{e}^{-t})^\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}P_k^{(\alpha,\beta)}(\mathrm{e}^{-t}), \qquad t>0.$$

Ovdje je

$$r_k=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(2n+\gamma)\Gamma(n+\gamma)}.$$

Ako $F(s)$ nije analitička za $\mathrm{Re}(s)>0$, prije numeričke inverzije moguće je primijeniti teorem prigušenja (60). Za eventualnu promjenu mjerila u smjeru realne osi s-ravnine upotrebljava se teorem sličnosti (58). Najjednostavnije formule dobivaju se za $\alpha=\beta=0$, kad Jacobijevi polinomi prelaze u Legendreove $P_n(x)$. Trokutni sustav jednadžbi za određivanje Fourierovih koeficijenata a_k glasi:

$$\binom{2n}{n}F(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-k}a_k, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

a pripadni original

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)a_kP_k(\mathrm{e}^{-t}).$$

(85) *Trapezna formula za Mellin-Riemannov integral.* Iz poznate slike F u $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ transformaciji, pripadni original daje Mellin-Riemannov integral (44). Neka je a veće od eksponenta rasta σ_0 originala f. Pravac integracije podijeli se na segmente duljine h, sredine segmenata neka su točke $s_k=a+\mathrm{i}kh$, $k\in\mathbb{Z}$. Za aproksimaciju integrala (44) primjenjuje se trapezna formula, koja daje

$$\mathrm{e}^{-at}f(t)=\frac{h}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kht}F(a+\mathrm{i}kh). \tag{86}$$

Pretpostavlja se da $F(s)\to0$ i kad $\mathrm{Im}(s)\to\pm\infty$, i to dovoljno brzo da beskonačni red konvergira. Taj je red trigonometrijski, te prikazuje periodičku funkciju perioda $2\pi/h$. Ako lijeva strana nije periodička funkcija s gornjim periodom, aproksimacija (86) ima smisla u intervalu $\langle 0,2\pi/h\rangle$. Brzina konvergencije reda može se poboljšati kad $f^{(n)}$, $n\geq1$, pripada originalima. Označi li se $\mathcal{L}_\mathrm{I}[f^{(n)}(t)]=G_n(s)$, primjenom svojstva (61) izlazi

$$F(s)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(0+)}{s^{m+1}}+\frac{1}{s^n}G_n(s).$$

Podvrgavajući tu jednakost $\mathcal{L}_\mathrm{I}^{-1}$ transformaciji, original drugog pribrojka s desne strane aproksimira se primjenom formule (86):

$$f(t)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(0+)}{m!}t^m+\frac{h}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}kh)t}\frac{G_n(a+\mathrm{i}kh)}{(a+\mathrm{i}kh)^n}.$$

Teorem o početnoj vrijednosti ((67), a) omogućuje konstrukciju algoritma za uzastopno računanje $f^{(m)}(0+)$ i $G_n(s)$ na sljedeći način: $G_0(s)=F(s)$, $\lim_{s\to\infty}sG_m(s)=f^{(m)}(0+)$, $G_{m+1}(s)=sG_m(s)-f^{(m)}(0+)$, $m=0,1,\ldots,n-1$. Kad m postigne vrijednost $n-1$, treba staviti $s=a+\mathrm{i}kh$.

Zaključak. Linearne integralne transformacije mogu se smatrati uglavnom definitivno razvijenim ogrankom funkcionalne analize. Svi zahtjevi koje su nametnule primjene zadovoljeni su nakon uključivanja distribucija među originale. Primjene pri rješavanju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, integralnih i diferencijskih jednadžbi, imaju trajnu vrijednost. Primjena Fourierove transformacije u teoriji signala, kao uostalom i primjena Fourierovih redova, dopušta mogućnost fizikalne interpretacije, pa stoga ima veliku vrijednost. Pojavom teorije distribucija i njezinim širim prodiranjem u matematički aparat fizičara i tehničara, omogućeno je provođenje analize linearnih sustava u vremenskom području i napuštanje fizikalno nejasnog pojma slike u Laplaceovoj transformaciji. Ipak će primjena Laplaceove transformacije i u tom području zadržati dosadašnju važnost.

LIT.: *G. Doetsch,* Handbuch der Laplace-Transformation. Verlag Birkhäuser, Basel, Band I 1950, Band II 1955. — *D. Voelker, G. Doetsch,* Die Zweidimensionale Laplace-Transformation. Verlag Birkhäuser, Basel 1950. — *A. Erdelyi,* Tables of integral transforms, Vol I, Vol II. McGraw-Hill, New York 1954. — *B. van der Pol, H. Bremmer,* Operational calculus, Cambridge University Press, Cambridge ²1959. — *A. A. Papoulis,* The Fourier integral and its applications. McGraw-Hill, New York 1960. — *E. I. Jury,* Theory and applications of the z-transform method. J. Wiley, New York 1964. — *A. С. Розенфельд, В. И. Яхинсон,* Переходние процесси и обобщение функции. Наука, Москва 1966. — *G. Doetsch,* Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. R. Oldenbourg, München 1967. — *S. W. Director, R. A. Rohrer,* Introduction to systems theory. McGraw-Hill, New York 1972. — *I. N. Sneddon,* The use of integral transforms. McGraw-Hill, New York

1972. — *P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski*, Theory of distributions, Elsevier Scientific Publ. Comp., Amsterdam 1973. — *В. А. Диткин, А. П. Прудников*, Интегральные преобразования и операционное исчисление. Наука, Москва ²1974. — *А. Г. Земанян*, Интегральные преобразования обобщенных функций, Наука, Москва 1974. — *В. С. Владимиров*, Обобщенные функции в математической физике, Наука, Москва 1976. — *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников*, Интегральные преобразования обобщенных функций. Наука, Москва 1977.

D. Ugrin-Šparac

LITIJ, **litijum** (lithium, Li), hemijski element sa at. br. 3 i relativnom atomskom masom 6,941 te elektronskom konfiguracijom $1s^2\,2s$, prvi u grupi alkalnih metala, odmah iza vodonika u Ia grupi periodnog sistema elemenata.

Prirodni je litijum smeša od dva stabilna izotopa: prosečno od 7,52% ^{6}Li i 92,48% ^{7}Li. Osim tih poznata su još tri nestabilna izotopa litijuma: ^{8}Li, ^{9}Li i ^{11}Li s vremenima poluraspada od 844, odnosno 176, odnosno 9,7 ms.

Otkriće litijuma pripisuje se švedskom hemičaru J. A. Afvedsonu, jer je (1817) primetio da produkti raščinjanja minerala petalita (jednog litijum-alumosilikata) sumpornom kiselinom sadrže jedan alkalijumski sulfat koji ne pokazuje tipične reakcije sulfata natrijuma, ni kalijuma, ni magnezijuma. Međutim, tek je docnije utvrđeno da je to sulfat dotad nepoznatog elementa, litijuma, koji je (1818) prvi dobio H. Davy elektrolizom rastvora litijum-oksida. Naziv tom elementu nadenuli su J. Berzelius i Afvedson prema grčkom λίθος lithos *stena*. R. W. Bunsen i Matthiessen (1855) dobili su litijum elektrolizom rastopa litijum-klorida. Time su postavili osnov za savremeni proces proizvodnje litijuma. Do prvog svetskog rata proizvodile su se samo male količine litijuma za farmaceutsku industriju. Tek je 1923. primena litijuma proširena upotrebom u proizvodnji nekih legura (tzv. železničkog metala). Gotovo istodobno počele su se upotrebljavati litijumove soli kao primese elektrolita alkalnih akumulatora i u keramici. Najviše se proizvodnja litijuma povećala za vreme drugoga svetskog rata, kad je litijum-hidrid postao važan nosilac vodonika za vojne ciljeve. Dalje povećanje proizvodnje litijuma usledilo je s razvojem nuklearne tehnike.

Litijum je relativno široko rasprostranjen u Zemljinoj kori ($6{,}5\cdot10^{-3}$%). Njegovi su minerali pretežno skoncentrisani u primarnim stenama i u sedimentima. Manje se količine jedinjenja litijuma nalaze u morskoj vodi, mnogim mineralnim vodama, ugljevima i organizmima.

Za industriju su prvenstveno važni izvori litijuma granitni pegmatiti, u kojima je asociran s natrijumom usled sličnih energetskih karakteristika jona. Litijum je pretežno vezan u mineralima u kojima su vezani i magnezijum, aluminijum i železo, jer su im razlike jonskih radijusa male.

Glavni su minerali litijuma *spodumen, lepodolit, cinvaldit, ambigonit, petalit* i *oukriptit*. U rudama litijuma koje se danas eksploatišu u industriji najviše su zastupljeni spodumen, lepodolit i petalit. Čistim se formama tih minerala, kojih nema u prirodi, pripisuju formule $Li_2O\cdot Al_2O_3\cdot 4SiO_2$, $LiF\cdot KF\cdot Al_2O_3\cdot 3SiO_2$ i $Li_2O\cdot Al_2O_3\cdot 8SiO_2$. Već prema sadržaju primesa, sadržaj je litijuma prirodnih minerala mnogo manji od onoga koji sledi iz tih formula: kad se računa kao litijum-oksid, obično 5···7,5% u spodumenu, 3···4,5% u lepodolitu i 2···4% u petalitu.

Najvažnija svetska ležišta ruda litijuma nalaze se u SSSR, Kanadi, SAD, jugozapadnoj Africi, Južnoj Rodeziji, Mozambiku, Brazilu, Španiji, DDR i ČSSR.

ELEMENTARNI LITIJUM

Litijum je srebrnastobele boje, vrlo je mekan (tvrdoća mu je na mineraloškoj skali 0,6) i izvanredno lak (gustina mu je 0,531 g/cm³). Kristališe u prostorno centriranoj kubnoj rešetki s parametrom $a = 0{,}35023$ nm.

Napon para litijuma jest 13,33 kPa (100 torr) na 1084 °C, a 53,33 kPa (400 torr) na 1236 °C, t. t. (178 ± 1) °C, t. k. (1336 ± 5) °C, toplota topljenja 432,1 kJ/kg, toplota isparavanja 19,6 MJ/kg, specifična toplota (u području 0···100 °C) 3,28···3,77 $\mathrm{kJ\,g^{-1}\,K^{-1}}$, toplotna provodljivost (u istom području) 0,71 $\mathrm{J\,cm^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}}$, koeficijenat linearnog toplotnog širenja $56\cdot10^{-6}$ (na 20 °C). Specifični električni otpor litijuma jest 8,55 Ωcm na 0 °C, a 12,7 Ωcm na 100 °C.

Hemijska svojstva litijuma. Litijum je manje hemijski aktivan nego drugi alkalni metali. To se objašnjava malim radijusom njegovih atoma i s time u vezi većim potencijalom jonizacije. Normalni elektrodni potencijal litijuma jest −3,02 V, pa je litijum najelektronegativniji metal. U rastopinama soli, gde nema hidratacije, potencijal mu je izdvajanja elektropozitivniji od potencijala izdvajanja alkalnih metala.

U suvom vazduhu na običnoj temperaturi litijum vrlo sporo reaguje sa kiseonikom i azotom, obrazujući na površini tanak sloj oksida, odnosno nitrida. U prisutnosti vlage u vazduhu reakcije su litijuma s kiseonikom i azotom brže. U prisutnosti kiseonika litijum se pali na 200 °C i gori plavičastim plamenom. S vodom litijum reaguje burno uz obrazovanje litijum-hidroksida i razvijanje vodonika. S vodonikom litijum reaguje na 500···600 °C, pri čemu nastaje litijum-hidrid (LiH). S azotom litijum reaguje brzo iznad 250 °C uz obrazovanje litijum-nitrida (Li_3N). S halogenim elementima litijum reaguje već na običnoj temperaturi. Sa sumporom, ugljenikom i silicijumom litijum reaguje pri zagrevanju obrazujući litijum-sulfid (Li_2S), odnosno litijum-karbid (Li_2C_2), odnosno litijum-silicid (Li_6Si_2). Sona, azotna i razblažena sumporna kiselina reaguju sa litijumom vrlo burno uz razvijanje vodonika.

Svojstva stabilnih izotopa litijuma. Prirodni litijum i njegovi izotopi međusobno se najviše razlikuju vrednostima poprečnog preseka zahvata toplotnih neutrona (tabl. 1).

Tablica 1

POPREČNI PRESEK ZAHVATA TOPLOTNIH NEUTRONA PRIRODNOG I IZOTOPA LITIJUMA I DUŽINE λ NA KOJIMA SE PRI TOME INTENZITET ZRAČENJA SMANJI DO 1/e

	Poprečni zahvat barn	λ mm
Li	71	3
^{6}Li	946	0,2
^{7}Li	0,033	8000

Zbog vrlo velike vrednosti tog zahvata izotop se ^{6}Li upotrebljava za izradu regulatora u sistemima zaštite nuklearnih reaktora. Pri bombardovanju tog izotopa neutronima odvija se nuklearna reakcija

$$^6_3\mathrm{Li} + ^1_0\mathrm{n} \rightarrow ^4_2\mathrm{He} + ^3_1\mathrm{H}, \qquad (1)$$

kojom se u industriji dobija tritijum.

Zbog vanredno male vrednosti poprečnog preseka zahvata toplotnih neutrona izotop ^{7}Li je prikladno sredstvo za hlađenje nuklearnih reaktora. Za te su svrhe vrlo povoljna i druga svojstva litijuma: visok toplotni kapacitet, široko područje temperatura tečnog stanja, velika toplotna provodljivost, mala gustina i viskozitet rastopa.

Pored tih primena stabilnih izotopa litijuma, koji se baziraju na velikim razlikama njihovih svojstava, u nuklearnoj su tehnici oni važni i za druge svrhe. Tako se npr. iz ^{6}Li proizvodi ^{6}LiD koji je jak termonuklearni eksploziv, iz ^{7}Li proizvodi se ^{7}LiF koji služi kao rastvarač uranovih i torijumovih jedinjenja u homogenim reaktorima.

Tehnika proizvodnje litijuma. Zbog obično malog sadržaja litijuma u njegovim rudama (sadržaj litijum-oksida u njima varira unutar 0,7···3%), njihova prerada gotovo redovno obuhvata dobijanje koncentrata minerala litijuma već u postrojenjima rudnika. Glavni procesi prerade tih koncentrata u litijum obuhvataju raščinjanje i dobijanje najpre litijum-karbonata ili litijum-hidroksida, iz kojih se zatim dobijaju druga jedinjenja, te proizvodnju metala iz tih jedinjenja elektrolizom rastopa, odnosno metalotermijskom redukcijom. Raščinjanje koncentrata minerala litijuma izvodi se kiselim ili baznim postupcima.

Pored tih procesa, u novije se vreme ispituje mogućnost dobijanja litijuma direktnom metalotermijskom redukcijom iz spodumenskog koncentrata.

Litijum dobijen tim procesima sadrži različite primese (najčešće kalijum, natrijum, magnezijum). Za neke oblasti primene taj sirovi litijum mora da se rafiniše.

Dobijanje koncentrata litijuma najviše se zasniva na flotacijskim procesima (v. *Flotacija*, TE 5, str. 460). Jedan od tih