su dienol i ricinensko ulje, kojima gliceridi imaju dienske acile, s mnogo konjugiranih dvostrukih veza. Zbog toga ta ulja imaju sušiva svojstva poput drvnog ulja. (Povećavanje nezasićenosti ulja direktnom dehidrogenacijom zasad nema izgleda za industrijsku primjenu.)

Katalitička se dehidratacija ricinusova ulja, pri kojoj se uz reakciju (14) odvijaju reakcije nastajanja izoliranih dvostrukih veza, izvodi na 230···270 °C ili šaržno, u zatvorenim miješalicama, ili kontinualnim postupcima, dakako u oba slučaja pod sniženim tlakom. Osim toga, ricinenska se ulja mogu proizvoditi i esterifikacijom oksi-skupine karboksilnim kiselinama, najprikladnije acetiliranjem, i termičkom razgradnjom esterificiranog proizvoda. (Za termičku razgradnju acetiliranog ulja preporuča se kratko izlaganje ulja temperaturama unutar 320···340 °C.)

Preradba masti izomerizacijom obuhvaća procese i za cis-trans-pregradnju i za konjugiranje dvostrukih veza acila glicerida.

Izomerizacija sušivih ulja, kao što su laneno, riblje i polusušivih kao što je sojino, u proizvode do 50% konjugiranih dienskih, trienskih i polienskih acila u gliceridima moguća je na 200···230 °C u prisutnosti viška otopine alkalija i zbog toga pod tlakovima vodene pare koji odgovaraju tim temperaturama. Nakon toga nastala se sapunica mora cijepati kiselinom, a time oslobođene masne kiseline esterificirati glicerolom. Međutim, usprkos velikom stupnju konjugacije, sušivost je tih proizvoda u usporedbi sa sušivošću prirodnih ulja s mnogobrojnima konjugiranim dvostrukim vezama u gliceridima slaba. Razlog je u tome što tim postupkom stvoreni konjugirani izomeri nemaju svojstva prirodnih izomera. Tako je npr. u uljima konjugiranim na taj način utvrđena prisutnost acila 10:11,12:13,14:15-oktadekatrienske kiseline koja se suši četvrtinom brzine sušenja prirodne 9:10,11:12,13:14-oktadekatrienske (oleostearinske) kiseline, acili koje se nalaze u gliceridima drvnog ulja. Zbog toga i zbog skupog procesa dobivanja proizvodi izomerizacije, radi povećanja nezasićenosti ulja, proizvode se uglavnom samo kad vlada nestašica drvnog ulja.

Međutim, izomerizacija masti radi pregradnje cis-izomera nezasićenih acila glicerida prirodnih masti u trans-izomere u posljednje vrijeme postaje sve važnija. Razlog je tome što su tališta tih trans-izomera viša i što su oni postojaniji prema oksidaciji, a procesi su cis-trans-izomerizacije jednostavni, što omogućuje da se na jeftin način dobiju masti koje često mogu zamijeniti proizvode hidrogenacije.

LIT.: *A. E. Bailey*, Cottonssed and cottonseed products. Interscience publishers, Inc., New York 1948. — *K. S. Markley*, Soybeans and Soybean products. Interscience publishers, Inc., New York 1950/1951. — *E. W. Eckey:* Vegetable fats and oils. Reinhold Publ. Comp., New York 1954. — *J. Devine, P. N. Williams*, The chemistry and technology of edible oils and fats. Pergamon press, Oxford 1961. — *R. Lüde*, Die Raffination von Fetten und fetten Ölen. Th. Steinkopff, Leipzig ²1962. — *A. J. C. Anderson*, Refining of Oils and fats for edible purposes. Pergamon press, London ²1962. — *M. Rac*, Ulja i masti. Poslovno udruženje proizvođača biljnih ulja, Beograd 1964. — *H. P. Kaufmann*, Neuzeitliche Technologie der Fette und Fettprodukte. Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster 1956/1965. — *M. E. Stansby*, Fish oils, thear chemistry, technology, stability, nutritional properties and uses. The Avi publishing Co. Inc., Westport, Connecticut 1967. — *E. Bernardini*, Technologia olearia. Casa editrice »Technologie« S.R.L., Roma 1971. — *D. Svern*, Industrijski proizvodi ulja i masti po Baileyju. Nakladni zavod Znanje, Zagreb 1972. — *L. A. Appelquist, R. Ohlson*, Rapeseed. Elsevier, Amsterdam 1972.

Ž. Viličić

MATEMATIKA, povijesni razvoj.

MATEMATIKA, povijesni razvoj. Počeci matematike sežu već u prapovijest, ali su u to doba matematička znanja bila konkretna, bez ikakve apstrakcije. Matematička su znanja čak i u prvim civilizacijama proizlazila iz iskustva, pa su i tada bila uvijek na razini konkretnog, bez uopćavanja. Ti su narodi u rješavanju matematičkih problema radili ono isto što i onda kad su pokušavali upotrijebiti polugu za podizanje tereta. Oni su naime postupak izračunavanja ponavljali sve dotle dok nisu pogodili rezultat, a tada je takav zgodan postupak postao radno pravilo pomoću kojeg se taj račun mogao ponoviti u drugoj jednakoj situaciji.

ANTIČKA MATEMATIKA

Dok su Egipćani i Babilonci u matematici vidjeli samo mnoštvo nepovezanih činjenica, mnoštvo podataka kojima nisu ni pokušali tražiti uzročnu vezu, stari su Grci u tom mnoštvu pokušali razlikovati sličnosti, apstrahirati ih iz njihova okvira i generalizirati ih, deducirajući odatle druge odnose u skladu s novim iskustvima. Prvi pokušaj takve apstrakcije nalazi se kod *Talesa* (rođen ←624), ali je i kod njega još uvijek velika konfuzija između apstraktnog i konkretnog, između racionalne koncepcije i empirijskog opisa. Potpunu apstrakciju matematičkih pojmova postigli su Pitagorejci, pa su oni imali predodžbu općeg pravokutnika kao predstavnika svih pojedinačnih pravokutnika. Oni su došli i do potpune apstrakcije broja, ali su brojem smatrali samo cijele pozitivne brojeve. Za njih je svaki broj bio skup jedinica.

Pitagorejci su zamišljali da postoji identifikacija između geometrijskih i aritmetičkih objekata. Tako su točku nazivali jedan, crtu dva, i tako dalje, a smatrali su da je crta sastavljena od protežnih točaka ili jedinica. Takvom se gledištu suprotstavilo otkriće nesumjerljivosti. *Platon* (oko ←428—348/347) također je mislio da se crta sastoji od nedjeljivih dijelova. Aristotel (←384—322/321) naprotiv je mislio da je bit neprekinutosti crte ili bilo čega drugoga u tome što dijelovi koji se nastavljaju neposredno jedni na druge imaju zajedničku granicu. Da bi riješio teškoće s nesumjerljivošću, Aristotel je razdvojio aritmetiku i geometriju, pa su aritmetički objekti imali sasvim drugačija svojstva od geometrijskih. Aritmetički se objekti nisu


ELEMENTORVM
EVCLIDIS
LIBRI XV
AD GRAECI CONTEXTVS
FIDEM RECENSITI
ET AD VSVM TIRONVM
ACCOMMODATI
LIPSIAE
SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII
MDCCXXXXIII.

Sl. 1. Euklidovo djelo *Elementi*, prvo matematičko djelo koje sustavno prikazuje cjelokupnu matematiku svoga doba i koje je ostalo temeljno matematičko djelo tijekom dvije tisuće godina mogli neograničeno dijeliti, nego samo do jedinice, a sami su diskretni, jer su brojevi po njegovu mišljenju samo cijeli pozitivni. Posljedice odvajanja aritmetike od geometrije bile su velike, tako da se ta dva područja matematike od tada sve do XVI st. promatraju odvojeno.

U vezi s neprekinutošću pojavio se i problem beskonačnosti. Aristotel je držao da je sve što je neprekinuto djeljivo u beskonačnost. Ali to beskonačno nije nešto što se može realizirati, nego nešto što stalno nastaje, pa je time uvijek drugo. Takva je beskonačnost *potencijalna*. Kasnije su neki držali da je beskonačnost *aktualna*. U toku povijesti matematike stalno se suprotstavljaju gledišta potencijalne i aktualne beskonačnosti.

Tales je bio prvi Grk koji je pokušao dokazati jedan stavak pomoću drugog. Ali on nije jasno formulirao prve tvrdnje iz kojih će se dokazivati sve druge. *Pitagora* (umro oko ←497/6) dao je sustav u kojem postoje neke početne tvrdnje iz kojih se ostale dokazuju. U takvu sustavu sređuju se sva tada postojeća matematička znanja, sve tvrdnje, a postavljaju se neka temeljna načela iz kojih se zatim izvodi sve drugo. Takav deduktivni sustav doveo je i do *aksiomatike*, naime do postavljanja nekih nedokazanih početnih tvrdnji — aksioma — u temelj matematike. Daljnje usavršenje deduktivnog aksiomatskog sustava učinio je *Hipokrat* iz Hiosa, koji je djelovao između ←450. i ←430, ali je ipak prvi potpuni takav sustav dao *Euklid* (rođen oko ←365) u svojem matematičkom djelu *Elementi*. On je na početku svojih knjiga, Elemenata, postavio temeljne tvrdnje, aksiome i postulate, a onda je iz njih izveo sve ostale tvrdnje. Nedostatak Euklidova djela međutim bio je što ni on ni njegovi suvremenici nisu uočili da se isti postupak kao s tvrdnjama mora učiniti i s matematičkim pojmovima. Naime, pojmovi se definiraju jedan pomoću drugog, i time se dolazi do nekih početnih, kojih nema u Euklidovu djelu. Taj nedostatak nije uočio nijedan matematičar prije XIX st. Važna je karakteristika Euklidovih Elemenata da je cijela njegova geometrija idealizirana slika stvarnog svijeta. Euklid je držao da nema ništa istinitijeg od intuicije, pa je upravo ona ta koja mora opravdati početne pretpostavke. I ovo se shvaćanje matematike zadržalo stoljećima. Euklidovi Elementi predstavljaju pravu sliku grčkog matematičkog mišljenja toga doba. Podjela matematike na aritmetiku i geometriju reflektira se i u Euklidovim Elementima. Algebarske jednadžbe rješavaju se geometrijski, a svi problemi rješavaju se konstrukcijski. Matematičke se tvrdnje izražavaju riječima, te je u matematici posve odsutna svaka simbolika, pa i geometrijska.

U staroj Grčkoj postojala je jasna distinkcija između teorije i primjene. Ta razlika potječe iz činjenice da je u staroj Grčkoj, pored teorijskih razmatranja aritmetike, postojao i običan račun kojima su se koristili u praksi, a nazivao se *logistika*, kojoj se nije priznavao status znanosti.

U ovakvom shvaćanju došlo je do nekih promjena u početku naše ere. Već je Heronova formula za ploštinu trokuta odstupala od čiste geometrijske interpretacije, jer se nije mogla predočiti geometrijski. Osim toga, čini se da je *Heron*, koji je djelovao na početku prvog stoljeća, te veličine promatrao i brojčano. Kasnije je *Diofant*, koji je djelovao u prvoj polovici trećeg stoljeća, išao i dalje uvodeći uistinu brojčane vrijednosti. Na taj Diofantov pristup utjecala je s jedne strane grčka logistika, a s druge stari istočnjački tekstovi. Diofant je uveo brojčane elemente u svoju *Aritmetiku*, koja je obuhvaćala i algebru, ali je to spojio s grčkim načinom mišljenja i strogim rasuđivanjem, čega u starim istočnjačkim tekstovima, a ni u grčkoj logistici nije bilo. Tako je Diofant logistiku uzdigao na znanstvenu razinu. On je iz starogrčke matematike preuzeo i retoričko izlaganje, ali je ono kod njega pisano kraticama. Ta se algebra naziva *sinkopatskom*.

SREDNJOVJEKOVNA SHVAĆANJA

Indijska matematika, koje su tekstovi poznati tek iz IV st., bila je potpuno drugačija od grčke. Ona se temeljila na iskustvu i na numeričkim aspektima. Indijski matematičari nisu vodili računa o problemima kao što je nesumjerljivost, niti su vidjeli teškoće u zakrivljenim crtama ili površinama. Arapski su matematičari u srednjem vijeku preuzeli djelomično grčke a djelomično indijske tradicije u matematici, pa su dobili matematiku koja je bila pogodna da se dobiju mnogi novi rezultati. Oni su iz indijske matematike preuzeli promatranje polutetive i izračunavanje sinusa i kosinusa te pojam broja kao iskustvene kategorije. Iz grčke matematike preuzeli su strog geometrijski dokaz. U predočivanju jednadžbi arapski su se matematičari vratili opet retoričkom obliku napuštajući sinkopatski.

U XIII st. bilo je utjecaja arapske matematike na Zapadnu Evropu, ali su ipak od XIII do XV st. u matematici Zapadne Evrope dominirale diskusije o nekim filozofskim pitanjima matematike. U prvom redu raspravljalo se o pojmu beskonačnog i neprekinutosti u Aristotelovu i Platonovu smislu. Najvažniji napredak u srednjovjekovnoj matematici Zapadne Evrope bilo je uvođenje pojma kvantitativne promjene.

NOVOVJEKA MATEMATIKA

Simbolička algebra, analitička geometrija i infinitezimalni račun. U XV st. nastale su promjene u karakteru matematičkih istraživanja. Tada raste zanimanje za algebarske i aritmetičke probleme, a *L. Pacioli* (1445—1517) obnovio je sinkopatski način izražavanja. Kratice koje su se upotrebljavale još uvijek su bile u istom smislu kao i kod Diofanta, a algebarski su se objekti promatrali konkretno kako su to činili arapski matematičari. Neodređenost se prvi put pojavljuje u geometrijskoj analizi, a u aritmetici se neodređenost uvodila postupno tijekom XVI st. shvaćajući pravila matematičkih postupaka općenito. Odlučan je korak učinio *F. Viète* (1540—1603), koji je promatrao *speciese*, veličine koje mogu biti

Sl. 2. Getaldićevo glavno djelo *O matematičkoj analizi i sintezi*, u kojem je primijenio Vièteovu algebarsku metodu i došao do rezultata koji su neposredno prethodili otkriću analitičke geometrije

geometrijske i aritmetičke. To je bio početak novog povezivanja geometrije i aritmetike. Za promatranje tih općih veličina Viète je uveo simbole koji predstavljaju opće veličine. Vièteova algebarska analiza i uvođenje općih veličina bili su vrlo važni u razvoju matematike. Bitan korak učinio je *R. Descartes* (1596—1650). S njim je ušla u matematiku i sustavna upotreba promjenljive veličine na način potpuno stran dotadašnjoj matematici. Naime, promjenljiva je veličina promatrana i u srednjem vijeku kao kvantitativna promjena pojedinih kvaliteta, ali je u toj srednjovjekovnoj interpretaciji promjene izostala svaka algebarska predodžba. Tek nakon što je Viète počeo predočivati ma koju veličinu speciesom, mogao je Descartes promatrati neprekidan tok jedne veličine, odnosno njezinu promjenu, pomoću algebarskog simbola. Tako je jednadžba prije predstavljala samo sredstvo da se pronađe nepoznati broj, a od sada je predočivala *funkcijsku vezu* između pojedinih promjenljivih veličina, što se jasno prepoznalo u XVIII st. Tako će matematika prestati biti statična i u temelj svog istraživanja uključit će promjenu. Descartes je našao i način kako pomoću koordinatne metode može geometrijskim objektima, npr. krivuljama, pridružiti algebarske jednadžbe u kojima će se reflektirati svojstva tih krivulja. To je bio početak analitičke geometrije, ali i sve novovjeke matematike.

U XVII st. mnogo se raspravljalo o starom problemu neprekinutosti crte i matematičkih veličina uopće. Tada je prevladavalo uvjerenje da su geometrijski objekti sastavljeni od nedjeljivih dijelova, kako je još mislio Platon. *B. Cavalieri* (1598—1674) stavio je u temelj svog istraživanja matematike upravo te nedjeljive dijelove, koje je nazivao *indivizibilima*. Kako je Vièteovim pristupom matematici uvedena opća veličina koja je predstavljala i geometrijske i aritmetičke objekte, a s Descartesovim i korespondencija geometrijskih i aritmetičkih veličina, to je bilo prirodno da se takvi indivizibili uvedu i u aritmetičko područje, što je učinio *P. Fermat* (1601—1665) i nazvao *numerički infinitezimal*. Postojala je jasna težnja da se rezultati dobiveni u Cavalierijevoj geometriji indivizibila prenesu i u aritmetičko područje. Tu je težnju nametala nužno Vièteova algebra i Descartesova geometrija. I doista, Fermat je vrlo uspješno primijenio pojam indivizibila u algebarskoj analizi problema. Tim postupkom Fermat je dobio maksimume i minimume nekih promjenljivih veličina, površine omeđene krivuljom, tangente krivulja i drugo. *I. Newton* (1642—1727) uspio je odvojiti ove Fermatove postupke od geometrijskih i fizikalnih razmatranja i shvatiti ih kao operacije. Tim činom, i osobito prepoznavanjem inverznosti postupka traženja površine ispod krivulje i postupka traženja tangente krivulje, Newton, a nezavisno, i *G. W. Leibniz* (1646—1716) stvorili su novi tip analize, tzv. *infinitezimalni račun*. Newton se postupno oslobodio nejasnog, ali do tada i vrlo plodonosnog pojma indivizibila i primijenio granični postupak. Time je u stvari bio rođen infinitezimalni račun.

Pojam funkcije. Formaliziranje matematičkih postupaka. Već je Descartesovim uvođenjem koordinata uspostavljena veza između dviju promjenljivih veličina, iako ta veza tada još nije bila prepoznata. Pojam funkcijske veze razvijao se zapravo vrlo polako iz nejasnih predodžaba do svjesne spoznaje. Važan korak učinio je Leibniz koji je u raspravama sa *Jeanom Bernoullijem* (1667—1748) uveo pojam promjenljive i konstantne veličine. Bernoulli je još uz to smatrao da je funkcija promjenljive veličine količina koja je sastavljena na bilo koji način od promjenljive veličine i konstanata. Takvim razvojem bilo je sve pripravljeno da se pojam funkcije postavi na čisto formalistički temelj. Bernoullijevo je gledište zapravo već bio analitički izraz funkcije, oslobođen od geometrijske predodžbe. Odlučan korak u tom pogledu učinio je *L. Euler* (1707—1783), koji je formalizirao ne samo funkciju nego i analizu uopće. Euler je i diferencijalni račun promatrao kao predmet formalne teorije funkcija u kojoj nema potrebe za dijagramima ili geometrijskim pojmovima. U skladu sa svojim formalističkim gledištima, Euler pod izrazom funkcija ne misli samo na veličinu koja ovisi o varijablama nego i na analitički izraz u konstantama i varijablama koji se može predstaviti jednostavnim simbolima. U okviru takvih stavova Euler je prvi učinio sustavna istraživanja funkcija i klasificirao sve tada poznate funkcije, uključivši i integrale, Euler je uveo potpuno formalističke postupke u analitičku geometriju, tj. potpuno je formalistički postupao s analitičkim izrazima i jednadžbama, koje su samo u početku bile vezane uz geometrijske objekte.

U XVIII st. uglavnom su se izgrađivali infinitezimalni račun i formulirali temeljni pojmovi koji su bili u vezi s njim, kao npr. beskonačno male veličine, pojam beskonačnog i pojam neprekinutosti. Izgradnja infinitezimalnog računa u XVIII st. dapače je ovisila o raščišćavanju upravo tih pojmova. Pojam beskonačno male veličine, koji je bio vrlo važan pri stvaranju infinitezimalnog računa u XVII st., bio je još i u XVIII st. vrlo nejasan. Upravo zbog toga i neadekvatne upotrebe pojma beskonačnog, a u vezi s tim i konvergencije beskonačnih redova, i Euleru je nedostajala svaka strogost unatoč njegovoj formalizaciji matematike. Među ostalim on je potpuno zanemario pojam granice i prihvaćao je beskonačno male veličine kao jednake nuli. O tome je li infinitezimal konačan, nula ili što drugo vodile su se u XVIII st. mnoge rasprave. Ali postupno se dolazilo i do drugih predodžaba beskonačno male veličine, a pojam indivizibila se odbacivao. Tako je npr. *R. Bošković* (1711—1787) odbacio pojam indivizibila, pa je beskonačno malu veličinu promatrao kao promjenljivu veličinu koja postaje manja od svake ma kako male zamišljene veličine.

Newtonova upotreba konačnog omjera kod definicije granične vrijednosti bila je u to doba podvrgnuta kritici, jer se taj konačni omjer kao granica mogao shvatiti i kao zadnji član reda kojemu je to granica. *J. le Rond d'Alembert* (1717—1783) dao je egzaktnu definiciju granice kao veličine kojoj se druga veličina može približiti bliže od bilo koje dane veličine ili tako da razlika među njima bude apsolutno neodređena. On je smatrao da je temelj diferencijalnog računa u ideji granice. Nakon toga pojam beskonačno male veličine ili infinitezimala gubio je svoj smisao i ulogu u matematici.

Unatoč tome što se sve više pokušavalo da se pojam granice stavi u temelj diferencijalnog računa, ipak ona još nije bila do kraja jasna ni definirana. Stoga je bilo i onih koji su htjeli infinitezimalni račun osloboditi pojma granice, koja je također izgledala nejasna. Tako je engleski matematičar *J. Landen* pokušao izbjeći u infinitezimalnom računu i pojam beskonačno malih veličina i pojam granice. On je krenuo putem algebrizacije infinitezimalnog računa. Još radikalniji stav u tom pogledu imao je *J. L. Lagrange* (1736—1813), pa je vjerovao da se svi postupci infinitezimalnog računa mogu prikazati pomoću čisto algebarskog procesa. U temelj svoje metode stavio je Taylorov red, pa je držao da se svaka funkcija može razviti u taj red algebarskim postupkom. Ta je metoda urodila plodom, kako se to obično događa u trenucima velikih lutanja. Njegov apstraktni način diskusije funkcija omogućio je da se u njegovim djelima prvi put pojavi teorija funkcija realne promjenljive.

Budući da je pojam indivizibila, odnosno nedjeljivih dijelova bio uglavnom odbačen, sve je više prevladavalo mišljenje da su geometrijski objekti neprekinuti u Aristotelovu smislu. I Bošković je bio pristaša pojma neprekinutosti u Aristotelovu smislu, ali je taj pojam prenio i u područje brojeva. Naime, Aristotel je držao da su samo geometrijski objekti, npr. crta, neprekinuti, a brojevi da su diskretni. Još u XVIII st. pojam je broja bio nedovoljno razjašnjen. Premda je već Descartesova koordinatna metoda implicite dopuštala neprekinutost brojeva, makar pozitivnih, te prešutno čak i korespondenciju geometrijskog kontinuuma s brojevima, a Eulerova metoda još i negativnih brojeva, ipak sve do druge polovice XVIII st. nije nitko eksplicite rekao da i brojevi čine kontinuum. Među prvima je to učinio Bošković, ali je držao da se svojstvo neprekinutosti brojeva sastoji u činjenici da se uvijek između dva elementa nalazi treći. Međutim, jasno je da ovakva definicija neprekinutosti ne upućuje na skup realnih brojeva, nego da ona samo određuje gust skup kakav je i skup racionalnih brojeva.

Novi putovi geometrije i algebre i dalji razvoj analize u XIX st. Premda su u XVIII st. matematička istraživanja bila pretežno usredotočena na infinitezimalni račun, odnosno analizu, ipak su neki matematički problemi inicirali nove poglede u starim područjima algebre i geometrije, pa tako otvorili put njihovu snažnom istraživanju u XIX st.

Čista geometrija kako su je razmatrali stari Grci bila je u XVIII st. uglavnom zapostavljena jer se činilo da se svi geometrijski problemi mogu i moraju promatrati algebarski. Snažan razvoj infinitezimalnog računa odnosno analize sugerirao je pak da se ta metoda može primijeniti i na geometriju. Tako je već na početku XIX st. *K. F. Gauss* (1777—1855) primijenio analizu na geometrijske probleme i utemeljio novo područje geometrije, tzv. *diferencijalnu geometriju.* Ovo područje geometrije doživjelo je u XIX st. golem napredak, osobito u radovima *B. Riemanna* (1826—1866).

Ipak neki su problemi već krajem XVIII st. inicirali nov tip istraživanja geometrije. Bili su to osobito neki praktični problemi. *G. Monge* (1746—1818) tako je uz istraživanja sjene, perspektive i topografije i strojeva obratio pažnju svojstvima površina. To ga je dovelo do metode dvostrukih ortografskih projekcija. Naime, on je uzeo dvije ravnine pod pravim kutom, od kojih je jedna bila vertikalna a druga horizontalna, i tada projicirao bridove i vrhove tijela ortogonalno na obje ravnine. Nakon toga je vertikalnu ravninu rotirao oko presječnice ravnina dok nije pala u horizontalnu ravninu. Tako je dobio dijagram trodimenzionalnog tijela u dvodimenzionalnoj ravnini. Ovo je značilo pravu revoluciju u crtežima vojne inženjerije. Kasnije se iz tog postupka razvila *nacrtna geometrija.*

Ali u Mongeovoj nacrtnoj geometriji nalazile su se klice i *projektivne geometrije.* Projektivna i nacrtna geometrija kakve je inicirao Monge utjecale su mnogo na uvjerenje da se može projektivna geometrija razumjeti samostalno i neovisno o analitičkoj interpretaciji. To je poljuljalo gotovo dvostoljetno uvjerenje da je rješenje svih geometrijskih problema u analitičkoj interpretaciji. Taj je stav smanjio zanimanje i za neka projektivna svojstva koja je u XVII st. otkrio G. Desargues. Sam Monge još nije davao prednost ni čistoj geometrijskoj metodi ni algebarskoj odnosno analitičkoj interpretaciji geometrije. Njegov učenik *J. V. Poncelet* (1788—1867) naprotiv je davao prednost sintetičkoj metodi, ali uz postavljanje projektivnih svojstava u temelj geometrije. On je promatrao svojstva likova koja ostaju nepromijenjena projiciranjem. Postavivši temelje projektivnoj sintetičkoj geometriji, došao je do nekih njezinih bitnih pojmova kao što su harmonijski odnosi, perspektivnost, projektivnost, involucija i cikličke točke u beskonačnosti.

Promatranje geometrijskih problema na taj način izgledalo je vrlo udobno u nekim istraživanjima geometrije. Tako je sintetička geometrija dobila stanovitu prednost prema analitičkim interpretacijama geometrije. Međutim, kako to uvijek biva, došlo je u XIX st. i do daljnjeg napretka analitičkih metoda i formiranja analitičke geometrije kakva još nije bila u XVIII st. *J. Plücker* (1801—1868) definirao je i proširio upotrebu kratica. On je pokazao kako kratice vode do istih rezultata kao i u čistoj geometriji. Mnogi rezultati dobiveni sintetičkom metodom dobivaju se sada i analitički. U početku se samo analitička geometrija u ravnini proširuje na tri dimenzije, a to dalje vodi i do geometrija u n-dimenzionalnom prostoru. Postalo je očito da se nijednoj od metoda u geometrijskim istraživanjima ne može dati prednost, nego da svaku od njih treba posebno razvijati.

Algebarska interpretacija geometrije te pokušaji nekih matematičara druge polovice XVIII st. da algebriziraju infinitezimalne metode zahtijevali su i nova istraživanja u samoj algebri. Ubrzo se pokazalo da algebarska znanja naslijeđena iz XVII i XVIII st. nisu dovoljna. Posebno se to odnosilo na rješivost nekih tipova jednadžbi. Gauss se mnogo bavio tim problemom i tražio rješenje nekih tipova jednadžbi, što je iniciralo istraživanja u tom pravcu. *N. H. Abel* (1802—1829) dokazao je da se opća jednadžba petog stupnja ne može riješiti analogno jednadžbama nižeg stupnja. Problem rješivosti jednadžbi višeg stupnja od četvrtoga rješavao je i *E. Galois* (1811—1832). On je našao uvjete uz koje će takva jednadžba biti rješiva. Pri tom je našao temeljna svojstva grupâ, novoga važnog područja matematike, koje su kasnije primijenjene i na druge matematičke probleme i razvile se u samostalnu teoriju grupa. Galois je naime temeljna svojstva grupa transformacija povezao s korijenima algebarske jednadžbe i pokazao da se područje racionalnosti tih brojeva određuje tom grupom.

U XIX st. naglo je napredovalo i istraživanje linearnih problema. Posebno je to bilo vezano s istraživanjima determinanata, matrica, algebarskih formi, invarijanata, teorije kvaterniona i hiperkompleksnih brojeva. Istodobno se linearna algebra, koja je prvotno bila ograničena samo na algebarske jednadžbe prvog stupnja, razvojem infinitezimalnog računa protegla i na diferencijalne i parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Iako se infinitezimalni račun, odnosno analiza, u XVIII st. jako razvijao, ipak u tim istraživanjima nije bilo nikakve strogosti. Potkraj XVIII st. D'Alembert je tražio da se strože definiraju neki matematički pojmovi, pa je i predlagao kako da se to za neke od njih učini. Ipak se tek XIX st. može uzeti kao razdoblje formuliranja matematičkih pojmova u strogom smislu. Gauss je bio prvi koji je ozbiljno težio za tim, ali je stroge definicije gotovo svih pojmova, osobito u analizi, dao *A. L. Cauchy* (1789—1857). On je među tim strogim definicijama dao posebno definiciju derivacije na temelju graničnog procesa i to je bio početak strogom istraživanju matematičke analize.

Strogo postavljanje temelja analize omogućivalo je njezin brzi razvoj, ali je na stvaranje novih rezultata, pa i cijelih područja u analizi, utjecalo i uzajamno djelovanje matematičke analize i fizike. Fizikalni problemi su nametnuli rješavanje pojedinih matematičkih problema, ali je, obrnuto, i primjena matematičke analize na fizikalne probleme omogućivala razvoj fizike. Prvi koji je snažno afirmirao ovu vezu bio je *J. Fourier* (1768—1830). Tako je analitička teorija topline dovela Fouriera do parcijalne diferencijalne jednadžbe za koje se rješavanje morao upotrijebiti razvoj bilo koje funkcije u beskonačni trigonometrijski red, koji je za tu svrhu otkrio. U XIX st. je tako matematika postala vrlo važna u svim granama fizike, pa su mnogi matematičari zapravo tamo i nalazili svoje glavne inspiracije u matematičkim istraživanjima fizikalnih problema. Zahvaljujući strogim definicijama temeljnih pojmova, u matematičkoj analizi u XIX st. učinjen je veliki napredak u istraživanjima funkcija i redova. Pronađene su metode integracije diferencijalnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Teorija brojeva, vektora, vjerojatnosti i topologija. U XVIII st. matematika se razvijala još uvijek u nekoliko temeljnih matematičkih područja, od kojih je većina bila zacrtana još u ranijem razdoblju njezine povijesti. Međutim, neki problemi nametali su istraživanja koja su postupno vodila u nova i samostalna područja. U XVIII st. ta područja još nisu bila formirana, ali su dobrim dijelom bila inicirana. Tako su istraživanja svojstava brojeva postojala još i u XVII st., kad je Fermat dao u tom pogledu važne priloge, a u XVIII st. Legendre je znatno unaprijedio ta istraživanja. Ipak, tek je početkom XIX st. Gauss toliko unaprijedio istraživanja svojstava brojeva i prikazao ih u novom svjetlu da se od tada *teorija brojeva* može smatrati posebnom matematičkom disciplinom. On je u teoriju brojeva uveo pojam kongruencije, a u teoriju primbrojěva uveo je nove pojmove upotrebljavajući kompleksne brojeve. Gauss je također prikazao kompleksne brojeve pomoću točaka ravnine.

Neka fizikalna istraživanja nametala su još jedno novo matematičko područje. Naime, paralelogram sila i brzina bio je uveden još u XVI st., a početkom XIX st. upotrebljavaju ga mnogi matematičari u mehaničkim problemima. U svim tim problemima bio je pojam vektora već implicite sadržan. Ali, uvođenje geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva navelo je više autora XIX st. da uvedu jasnije pojam vektora. Od god. 1870. to je dovelo do razvoja *vektorske analize,* koja je sve više prodirala u matematičku fiziku i diferencijalnu geometriju. To je dalje vodilo i do *tenzorske analize.*

Tijekom XVIII st. pojačani interes za igre na sreću, a u prvoj polovici XIX st. fizikalni problemi strukture tvari, koja se sve više počela promatrati kao skup čestica, nametnuli su probleme koji su vezani s vjerojatnošću. Već je u XVII st. *Jakob Bernoulli* (1654—1705) rješavao teorijska pitanja u vezi s matematičkom vjerojatnošću, a početkom XIX st. Laplace je postavio ozbiljne temelje toj teoriji. Statistika, koja je u uskoj vezi s teorijom vjerojatnosti, bila je kao znanstvena disciplina postavljena tek u prvoj polovici XIX st., a njezinim se osnivačem može smatrati *A. Quetelet* (1796—1874). Teorija vjerojatnosti doživljava snažan razvoj u radovima. S. D. Poissona u prvoj polovici XIX st. Teorija vjerojatnosti i statistika našle su vrlo brzo široku primjenu u različitim matematičkim i fizikalnim disciplinama. Među prvim primjenama statistike u XIX st. bila je primjena na kinetičku teoriju tvari, koju je šezdesetih godina XIX st. uveo J. C. Maxwell, a koja je i pomogla da se statistika kao matematička disciplina počne razvijati.

Iz nekih pojedinačnih problema koji su se pojavili u XVIII st. razvila se još jedna vrlo važna grana matematike: *topologija.* Prve poticaje rješavanju topoloških problema dao je Eulerov problem prijelaza preko sedam mostova na rijeci u Königsbergu a da se ne prijeđe dva puta preko jednog od njih. U prvoj polovici XIX st. bilo je više topoloških razmatranja, ali je ipak bitan korak prema sustavnim istraživanjima topološke problematike učinio B. Riemann. On je definirao topologiju kao istraživanje svojstava prostora koji ostaju invarijantni uz homeomorfne transformacije, a takve invarijante je definirao kao dimenzije geometrijske konfiguracije. Uveo je topološka razmatranja i teoriju funkcija kompleksne varijable i u opću analizu pomoću tzv. Reimannovih površina. Kasnije je razvoj topologije bio pod utjecajem stvaranja teorije skupova, napretka u teoriji realnih brojeva i istraživanja funkcija realne varijable.


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Sl. 3. Hilbertovo djelo *Osnovi geometrije*, u kojem se po prvi put na nov način različit od Euklidova, postavljaju osnovi geometrije

Matematička logika, skupovi i neeuklidske geometrije. Nova transformacija matematičkog mišljenja počela je onda kad se logika počela interpretirati u okviru aritmetike i algebre. Već je krajem XVII st. Leibniz pokušao matematički interpretirati logiku. Ali je tek u prvoj polovici XIX st. nastao pravi procvat primjene matematike na nju, pa se počela razvijati posebna matematička disciplina *matematička logika.* To je osobito istaknuto u djelima *G. Boolea* (1815—1864). On je promatrao klase pojmova kao skupove, pa taj izraz često i upotrebljava u svojim spisima. Doduše, pojam skupa već je i prije postojao u matematici, ali je svjesno upotrijebljen tek tada. Boole osim toga svjesno definira operacije s takvim skupovima. Radovima Boolea i drugih matematičara koji su obrađivali matematičku logiku ušao je u matematiku sasvim nov način rasuđivanja. U prvom redu njihovim se radovima afirmirao pojam skupa i njegovih elemenata. Uvedene su operacije sa skupovima koje su bile po svom značaju različite od algebarskih. Otada je pojam skupa i operacija s njima postajao u matematici sve važniji, pa je pojam skupa postao temeljni pojam matematike.

U matematici su se od davnine pridruživali jedni objekti drugima, iako se to nije posebno naglašavalo. U Descartesovoj geometriji čak se prešutno promatralo pridruživanje točaka brojevima. I formalna upotreba funkcije upućivala je na određenu korespondenciju između brojeva i onih drugih koji su se dobivali operacijama naznačenim u funkcijskoj vezi. Međutim, svjesnog pridruživanja ipak još nije bilo, jer se takvi brojevi ili točke nisu shvaćali kao skupovi. Čim je u logiku uveden pojam skupa, bilo je prirodno da se on svjesno proširi i na bilo kakve matematičke objekte. A uvođenje općeg pojma elemenata skupa dovelo je odmah i do pojma transformacije skupa bilo kakvih elemenata u drugi skup. Ta transformacija jednog skupa u drugi, nazvana kasnije *preslikavanje skupova*, postala je bitna u svakom promatranju matematičkih problema.

Pojam beskonačnog ostao je sve do XIX st. nedovoljno razjašnjen. Postojale su velike nejasnoće oko prihvaćanja aktualne beskonačnosti, pa se ona obično odbacivala jer da vodi k priznavanju jednakosti dijela i cjeline. Sredinom XIX st. *B. Bolzano* (1781—1848) naprotiv je tvrdio da se beskonačno i konačno ne smiju uspoređivati. Treba, po njemu, samo prihvatiti da je svojstvo beskonačnog upravo to što je njegov dio jednak cjelini. Novo shvaćanje beskonačnog dovelo je i do promatranja beskonačnih skupova. *J. R. W.* Dedekind (1831—1916) i *G. Cantor* (1845—1918) tražili su u prvom redu temelj za beskonačne skupove i našli ga u Bolzanovu paradoksu. Cantor je otišao i dalje, pa je tvrdio da se racionalni brojevi mogu dovesti u obostrano jednoznačnu korespondenciju s prirodnim brojevima, i zbog toga ta dva skupa imaju istu tzv. potenciju. Naprotiv skup realnih brojeva ne može se dovesti s prirodnim brojevima u obostrano jednoznačnu korespondenciju, pa takav skup nije prebrojiv. Zato Cantor zaključuje da skup realnih brojeva ima višu potenciju od skupa racionalnih brojeva. Uvođenje beskonačnih skupova više potencije od skupa racionalnih brojeva otvorilo je velike mogućnosti za matematiku i značilo početak njezine nove ere.

Nova shvaćanja u matematici u XIX st. inicirao je i tzv. peti Euklidov postulat. To je postulat o usporednicama koji su htjeli dokazati mnogi matematičari. Istražujući taj postulat, *N. Lobačevski* (1793—1856) zaključio je da se umjesto tog postulata može uvesti protivan pa da se ipak dobije geometrija koja nije proturječna. On je izgradio takvu geometriju, a ona je nazvana neeuklidskom.

Budući da nisu proturječne same u sebi ni euklidska ni neeuklidska geometrija, postavlja se pitanje: koja je od tih dviju geometrija istinita? Matematika nije mogla odgovoriti na to pitanje, pa su neki počeli tražiti odgovor u prirodi, oslanjajući se na Euklidovo gledište da se matematički objekti moraju izvoditi iz iskustva. Međutim, mjerenja kutova trokuta nisu pokazivala odstupanja od euklidske geometrije. Ako bi se, dakle, ostalo pri tome da iskustvo mora potvrditi istinitost geometrije, što je tražio Euklid, trebalo bi euklidsku geometriju zadržati, a neeuklidsku odbaciti. Međutim, neproturječnost neeuklidske geometrije nije dopuštala da se tako postupi. Pitanje je trebalo postaviti drugačije, naime, nije trebalo zahtijevati provjeravanje geometrijskih aksioma u iskustvu.

Dotadašnja geometrija bila je zapravo fizikalna geometrija. Ne samo što su aksiomi trebali biti provjereni u iskustvu nego je i točka bila apstrakcija male kuglice, pravac napetog užeta, ravnina drvene daske, krug kola i sl. Ako se iz takvih pojedinačnih opažanja apstrahiraju aksiomi, uvode se sudovi koji moraju biti apsolutno istiniti i općenito valjani. Ako se prizna mogućnost i neeuklidskih geometrija, onda je dovoljno da se za aksiome postavi nekoliko tvrdnji po volji koje će ispunjavati neke uvjete. Tada se iz takve skupine aksioma, koje mogu biti sasvim različite, mogu izvesti poučci. Takvim je preokretom matematika dobila konačno svoju slobodu.

Polazeći od takvih načela, izgradio je *D. Hilbert* (1862—1942) u svojoj knjizi *Osnove geometrije* (1899) novu strukturu euklidske geometrije. On ne definira pojmove točke, pravca i ravnine kao Euklid, niti im pridaje bilo kakvo fizikalno određenje. Dapače on potpuno isključuje intuiciju iz geometrije. *H. Poincaré* (1854—1912) tvrdio je da su aksiomi geometrije dogovor, pa nema nikakva smisla govoriti o njihovoj istinitosti. »Matematička istinitost« leži samo u logičkoj dedukciji koja polazi od po volji postavljenih pretpostavaka kao aksioma. Ovakvo postavljanje stvari otvorilo je goleme mogućnosti u matematici i omogućilo joj brz razvoj.

Mnoga područja matematike koja su bila u XIX st. tek potaknuta razvila su se u XX st. u posebne matematičke discipline. Teško je pratiti jedinstven kronološki razvoj svih tih matematičkih područja do današnjih dana. Stoga su ona područja koja su posebno zanimljiva za tehničku primjenu obrađena u posebnim člancima (v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 275; v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 371; v. *Deskriptivna geometrija*, TE 3, str. 208; v. *Diferencijalna geometrija*, TE 3, str. 251; v. *Diferencijalne jednadžbe, obične*, TE 3, str. 265; v. *Diferencijalne jednadžbe, parcijalne* TE 3, str. 273; v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288; v. *Funkcije*, TE 5, str. 623; v. *Geometrija*, TE 6, str. 120; v. *Integralne jednadžbe*, TE 6, str. 512; v. *Integralni račun*, TE 6, str. 515; v. *Linearne integralne transformacije*; v. *Logika, matematička)*.

Ostala će se područja obraditi po temama: Nomografija; Numeričke metode; Planimetrija; Poopćene funkcije; Račun diferencija; Redovi; Statistika; Stereometrija; Teorija grafova; Teorija integracije i mjere; Teorija operatora i funkcionalna analiza; Teorija potencijala; Teorija skupova; Topologija; Trigonometrija; Vektorski i tenzorski račun; Vjerojatnost i stohastički procesi.

LIT.: *L. Brunschvicg*, Les étapes de la philosophie mathématique. Librairie Félix Alcan, Paris 1922. — *G. Loria*, Storia delle matematiche, vol. I—III. U. Hoepli, Milano 1929—1933. — *O. Becker*, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Verlag Karl Alder, Freiburg-München 1954. — *R. Taton*, Histoire générale des sciences, t. I—IV. Press Universitaires de France, Paris 1957. — *C. Boyer*, The history of the calculus and its conceptual development. Dover publications, New York 1959. — *N. Bourbaki*, Elementi di storia della matematica (prijevod). Feltrinelli, Milano 1963. — *C. Boyer*, A history of mathematics. John Wiley and Sons, inc., New York 1968. — *D. Struik*, Kratak pregled istorije matematike (prijevod). Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1969. — *А. П. Юшкевич*, История математики, том I—III. Наука, Москва 1970—1972. — *Ž. Dadić*, Razvoj matematike. Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju. Školska knjiga, Zagreb 1975. — *V. Devidé*, Matematika kroz kulture i epohe. Školska knjiga, Zagreb 1979.

Ž. Dadić

MEDICINSKI ELEKTRONIČKI UREĐAJI.

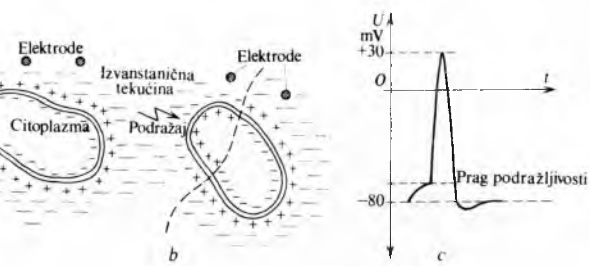
Biomedicinska elektronika je široko područje primjene elektronike u biologiji i medicini. Tu, svakako, najvažnije mjesto zauzima medicinska instrumentacija, ali je uz to uključeno i bioelektrično upravljanje, uređaji za pomoć slijepima i gluhonijemima, električko-matematičko modeliranje bioloških sustava itd. Za razumijevanje karakteristika i primjene medicinske instrumentacije i biomedicinske elektronike uopće, nužno je poznavati neke elemente fiziologije (elektrofiziologije) koji su vezani uz funkciju medicinskih uređaja. Medicinska instrumentacija najviše se primjenjuje u dijagnostici, i to za mjerenje električnih veličina: napona srca, mozga, mišića, impedancije biološkog tkiva, te neelektričnih veličina kao što je krvni tlak, brzina protoka krvi, parcijalni tlakovi kisika i ugljik-dioksida u krvi, respiracija itd. Automatizirani mjerni sustavi prisutni su pri intenzivnoj njezi (skrbi), gdje je potrebno pratiti vitalne funkcije bolesnika u kritičnom stanju. Telemetrijski uređaji daju ispitaniku slobodu kretanja u njegovoj sredini i omogućuju mjerenje podataka i inače nepristupačnih mjesta unutar organizma. U terapiji se elektronička instrumentacija primjenjuje radi liječenja različitim valnim oblicima napona, stimulacijom atrofiranih mišića, liječenjem elektromagnetskim poljem (dijatermija) itd. Važno mjesto u elektroničkoj instrumentaciji zauzima, svakako, dijagnostika ultrazvukom, dok u terapiji ultrazvuk nešto manje dolazi do izražaja. U ovom članku nisu spomenuta nuklearna i laboratorijska instrumentacija, ni rendgenska tehnika (v. *Rendgenska tehnika*). To se isto odnosi i na primjenu računala u medicini. Cjelokupno područje medicinske elektroničke instrumentacije snažno je utjecalo na razvoj medicinske dijagnostike i omogućilo je kvantitativan pristup kroz mjerenja, što dotadašnju vještinu pretvara u znanost.

UREĐAJI ZA MJERENJE BIOELEKTRIČNIH NAPONA

Između pojedinih dijelova živih stanica, tkiva i organa mogu se ustanoviti električni naponi koji su posljedica životnih funkcija. Ti su naponi vrlo niski, reda veličine milivolta i niži. Za mjerenje takvih napona, uz uvjet da se ne remeti stvarno stanje živog organizma, moraju se upotrebljavati vrlo osjetljivi mjerni instrumenti, odnosno pojačala s vrlo velikim ulaznim otporom.

Bioelektrični naponi

Većina stanica živih organizama ima različit električni potencijal na stranama stanične membrane (sl. 1). Te statičke razlike potencijala iznose 70···90 mV. Vanjski je dio stanice pozitivno, a unutrašnji negativno polariziran. Razlika tih potencijala može se mjeriti samo ako je jedna elektroda smještena izvan stanice, a druga unutar stanice. Ako su obje elektrode smještene izvan stanice, onda nema razlike potencijala ni električnog polja. Ako se stanica podraži električnim, mehaničkim ili kemijskim podražajem, naboji koji su činili stanicu izvana pozitivnom, a iznutra negativnom, prodrijet će u unutrašnjost stanice i promijenit će njezin potencijal u potpunosti u vrlo kratkom vremenu, nakon čega se opet uspostavlja prijašnja ravnoteža izlaskom pozitivnih naboja, opet izvan stanice. Na taj je način stanica za kratko vrijeme bila čak iznutra pozitivna. Ta promjena potencijala zove se *akcijski potencijal* i može se registrirati elektrodama smještenim izvan stanice. U nekim organima većina stanica djeluje organizirano, tako da akcijski potencijal jedne stanice pobuđuje akcijski potencijal druge stanice. Na taj se način elektrodama izvan stanice mogu registrirati određeni valni oblici napona, karakteristični za skupinu stanica tog organa. Za dijagnostiku je posebno važno da ti valni oblici pri nekim bolestima mijenjaju svoj karakteristični normalni oblik.



Sl. 1. Potencijal stanice: *a* u mirovanju, *b* promjena potencijala stanice zbog podražaja, *c* grafički prikaz akcijskog potencijala u vremenu

Najvažniji izvori takvih valnih oblika, koji se mogu nazvati bioelektričnim potencijalima, jesu naponi srca kojih se zapisi nazivaju elektrokardiogrami, EKG, naponi mišića (elektromiogrami, EMG), naponi mozga (elektroencefalogrami, EEG), te naponi oka, koji se primjenjuju u elektronistagmografiji (ENG), elektrookulografiji (EOG) i elektroretinografiji (ERG). Mogu se još mjeriti naponi peristaltike želuca, naponi kontrakcije uterusa, ali su oni dijagnostički manje važni.

Na sl. 2 prikazani su karakteristični valni oblici napona koji su posljedica bioelektričnih aktivnosti napona srca, mozga, mišića i oka, a u tablici 1 prikazane su minimalne i maksimalne vrijednosti njihovih amplituda te područje koje pokriva spektar frekvencija tih napona.

Naponi srca pojavljuju se pri svakom otkucaju na vrhu desne pretklijetke, na mjestu poznatom pod imenom sinusnoatrijski čvor (SA-čvor). Električna se aktivnost širi preko pretklijetke na klijetku, gdje se naglo proširuje zahvatajući cijeli srčani mišić. Srce se može grubo aproksimirati šupljom kuglom