

mike idealne tekućine, i osnove teorije broda i teorije stabilnosti elastičnih štapa, a dao je i osnove teorije proračuna vodnih turbina. Razvoju hidromehanike pridonio je, usporedno s Eulerom, *Daniel Bernoulli* (1700—1782). Potkraj XVIII stoljeća objavljeni su eksperimentalni zakoni trenja, što ih je formulirao *Ch. A. Coulomb* (1736—1806). Znatno se razvila nebeska mehanika, koju je uglavnom razradio *P. S. Laplace* (1749—1827). Ruski učenjak *M. V. Lomonosov* (1711—1765) jedan je od prvih koji je formulirao osnovne definicije kinetičke teorije plinova i širenja topline. Povijest razvoja dinamike neslobodnog sustava vezana je s razvojem principa virtualnih pomaka. Prvi ga je primijenio nizozemski učenjak *S. Stevin* (1548—1620) pri proučavanju ravnoteže kolotura. *Johann Bernoulli* (1667—1748) dao je tom principu opću formulaciju koja je bliska današnjoj, a taj princip prvi je dokazao *J. L. Lagrange* (1736—1813). On je najviše doprinio razvoju analitičke mehanike neslobodnog sustava. U djelu *Mécanique analytique* analitički je razradio d'Alembertov princip — opću formulu dinamike. Njegova obrada tog principa potpuno odgovara suvremenoj formulaciji kao uvjeta ravnoteže zadanih sila i u mislima priloženih na točke sustava fiktivnih sila inercije. Predodžba o silama inercije prihvaćena je kasnije kao osnova za platične inženjerske metode dinamičkih proračuna strojeva i mehanizama, poznatih pod općim nazivom *Kinetostatika*. Polazeći od opće formule dinamike, Lagrange je upozorio na dva osnovna oblika diferencijalnih jednadžbi gibanja neslobodnog sustava, poznatih pod nazivom Lagrangeove jednadžbe prvog i drugog reda. Njegova istraživanja pod općim nazivom *O malim oscilacijama proizvoljnog sustava tijela* temelji su suvremene teorije vibracija. Sredinom XIX st. formuliran je princip održanja energije. Nagli napredak na području gradnje novih strojeva i težnja za njihovim daljim usavršavanjem potaknuli su u prvoj četvrtini XIX st. stvaranje primijenjene ili tehničke mehanike. *J. V. Poncelet* (1788—1867) jedan je od utemeljitelja sistematike tehničke mehanike. U prvim radovima iz tog područja formuliran je pojam mehaničkog rada sile. U to vrijeme počinje razvoj novih općih principa dinamike, varijacijskih principa. Prvi takav princip bio je princip najmanjeg djelovanja. Strogu matematičku formulaciju tog principa dao je Euler. Kasnije su u poopćenju tog principa sudjelovali Lagrange, njemački učenjak *K. Jacobi* i ruski *N. E. Žukovski*. Među općenitijim varijacijskim principima valja istaći princip *W. R. Hamiltona* i *M. V. Ostrogradskoga*. Najvažniji su u razvoju općih metoda integriranja diferencijalnih jednadžbi gibanja bili radovi Ostrogradskoga, Hamiltona i *M. H. Jacobija*. Među najvažnijim problemima mehanike XIX stoljeća jesu: gibanje teškog krutog tijela, opća teorija stabilnosti ravnoteže i gibanja, te problem oscilacija čestice.

Teorija gibanja giroskopa bila je razrađena u radovima Eulera, Lagrangea, *S. Kovalevske* i drugih, i postala je veoma važna u XX stoljeću. Znatno su doprinijeli rješavanju problema stabilnosti ravnoteže i gibanja materijalnih sustava Lagrange, engl. učenjak *E. Routh* i *N. E. Žukovski*. Stroga postavka tog problema i prikaz najopćenitijih metoda za njegovo rješavanje pripada *A. M. Ljapunovu*. Dalji razvoj teorije malih oscilacija u XIX stoljeću bio je uglavnom vezan s proračunom utjecaja otpora u slučaju prigušenih oscilacija i vanjskih poremećajnih sila što pobuđuju prisilne oscilacije. Teorija prisilnih oscilacija i učenje o rezonanciji pojavili su se radi reguliranja rada strojeva. U XIX stoljeću uslijedio je dalji razvoj mehanike kontinuuma. Opće jednadžbe teorije elastičnosti postulirao je *L. M. H. Navier*, a dalje ih razvio *A. L. Cauchy*. Veoma su važni radovi na tom području *J. C. B. Saint-Venanta*, *G. Laméa* i drugih. Pojavilo se i učenje o vrtlozima u tekućini (*G. Helmholtz*) i postavljene su osnove dviju novih grana hidromehanike: dinamike viskozne tekućine (*L. M. H. Navier* i *G. G. Stokes*) i dinamike plinova (*S. A. Čaplygin* i drugi). Hidrodinamičku teoriju trenja postavio je *N. P. Petrov*. Potkraj XIX st. pojavio se poseban problem — gibanje tijela promjenljive mase, čiji je osnivač *I. V. Meščerski*. Pionirni razvoj teorije reaktivnog gibanja smatra se *K. E. Ciolkovskij*. U XX st. problemi elektrotehnike, radio-tehnike, tehnike automatskog reguliranja rada strojeva i proizvodnih procesa, tehničke akustike i dr. potakli su razvoj nove grane mehanike — teoriju nelinearnih oscilacija. Osnove te grane mehanike obrađene su u radovima *A. M. Ljapunova* i *A. Poincaréa*.

Bitna nadgradnja Newtonove klasične mehanike počinje početkom XX st., i to u dva smjera: Einsteinovom specijalnom teorijom relativnosti (1905) i Planckovim otkrićem elementarnog kvanta energije (1900). Jedna je od bitnih konzekvencija teorije relativnosti, za razliku od klasične mehanike, da masa nije konstantna, već je funkcija brzine kojom se tijelo giba, odnosno da postoji ekvivalenost između mase i energije, $E = m_0 c^2$, tj. da su masa (m) i energija (E) samo dva oblika kojima se manifestira materija. Einsteinova teorija relativnosti našla je eksperimentalnu potvrdu i u makrosvijetu, a posebno u mikrosvijetu.

Problemi suvremene mehanike. Među osnovnim problemima suvremene mehanike u prvom su redu već spomenuti problemi teorije oscilacija, dinamike krutog tijela i teorije stabilnosti gibanja. Problemi oscilacija usko su vezani s problemima radio-tehnike, automatskog reguliranja i upravljanja gibanjem, te s problemima mjerenja, predviđanja i sprečavanja vibracija u strojevima, građevnim konstrukcijama, transportnim sustavima i dinamičkim letjelicama. Glavni problemi dinamike krutog tijela obrađuju se u mehanici leta (v. *Mehanika leta*), brodskoj dinamici, teoriji giroskopskih sustava i uređaja (v. *Giroskop*, TE 6, str. 129), što se uglavnom primjenjuju u aeronavigaciji i moreplovstvu. Dosadašnji su rezultati istraživanja svemira pomoću umjetnih nebeskih tijela uzrok da su se neke grane mehanike ponovno istakle, kao npr. nebeska mehanika i metode računa varijacija pri pronalaženju najboljih rješenja. Konačno se opet pojavio interes i za probleme specijalne i opće teorije relativnosti, a u vezi s tim i za problem opće gravitacije. Posebna se pažnja pridaje proučavanju dinamike sve-

mirskih letjelica, pri čemu se za razliku od aerodinamike aviona sada proučavaju još i najbolje putanje, problemi upravljanja umjetnim nebeskim tijelima i problemi nelinearne mehanike leta. Jedna od najnovijih grana mehanike, *magnehidrodinamika*, bavi se proučavanjem pojava pri letu materijalnih tijela hipersoničnim brzinama ($Ma > 5$) kroz Zemljinu atmosferu. Nastala je spajanjem dviju grana fizike: elektromagnetizma i hidrodinamike. Ona zapravo proučava djelomičnu ionizaciju zraka, što nastaje pri gibanju kroz zrak materijalnih tijela vrlo velikim brzinama. Ta je nova grana mehanike vrlo bitna za proučavanje problema toplinske barijere, tj. toplinskog efekta što nastaje zbog aerodinamičkog zagrijavanja.

STATIKA

Statika proučava uvjete ravnoteže materijalnih tijela na koja djeluju sile i zakone transformacije sustava sila što djeluju na kruta tijela. Pod *statičkom* ravnotežom tijela razumijeva se njegovo stanje *mirovanja* s obzirom na određeni sustav referencije. Ako je to inercijski sustav, ravnoteža je *apsolutna*, u protivnom *relativna*. U tehničkim problemima u većini slučajeva za inercijski sustav referencije može se uzeti sustav vezan za Zemlju. Ako se tijelo djelovanjem sila giba pravocrtno i jednoliko ($v = \text{const.}$), tijelo je u *dinamičkoj* ravnoteži. Tada za tijelo vrijedi prvi Newtonov aksiom (zakon inercije), tj. tijelo se ponaša kao da na nj ne djeluje nikakva sila. Stanje mirovanja pojam je kinematike i pod njim se razumijeva gibanje kada je brzina jednaka nuli ($v = 0$).

Statika (grč. *statiķή* statike, prvobitno značenje: *učenje o težinama i ravnoteži*) najstarija je grana mehanike, njezini osnovni zakoni bili su uglavnom poznati već u starom vijeku. Prve znanstvene temelje postavio je Arhimed iz Sirakuze u —III st. Među ostalim, postulirao je strogu teoriju ravnoteže poluge na koju djeluju paralelne sile. U XVII st. francuski je matematičar *P. Varignon* razradio geometrijsku teoriju ravnoteže s pomoću pojma o momentu sile, koju su u XIX st. svojim radovima dopunili francuski učenjaci *L. Poincaré* (1777—1859) i *M. Chasles* (1793—1880). Time su uglavnom bile postulirane osnove teorije statike krutog tijela.

Podjela statike. Prema načinu i metodama proučavanja uvjeta ravnoteže razlikuje se *geometrijska* i *analitička* statika krutih tijela. U prvoj se proučavaju metode svođenja ili redukcije zadanog sustava sila na jednostavniji oblik. Osim toga, postuliraju se uvjeti ravnoteže tih sustava sila. Kako je sila koja djeluje na kruto tijelo klizeći vektor, mogu se pri tom upotrijebiti metode vektorske algebre. Zbog toga razmatranja u tom dijelu statike imaju geometrijski karakter, pa se taj dio statike naziva još i *geometrijom sila*.

Problemi statike krutih tijela mogu se rješavati ili s pomoću *grafičkih* metoda ili *analitičkim* postupkom, pri čemu se zadane i tražene veličine razmatraju i određuju numerički. Grafički način rješavanja ima široku primjenu u tehničkoj praksi i poznat je pod nazivom *grafostatika*. Analitička statika zasniva se na principu virtualnih radova, koji se ubraja u fundamentalne principe mehanike. Taj princip daje opći kriterij ravnoteže mehaničkih sustava. Prema agregatnom stanju tijela razlikuje se *statika čvrstih tijela* (ili samo statika), *statika tekućina* (hidrostatika) i *statika plinovitih tijela* (aerostatika). Statika čvrstih tijela razvrstava se na statiku *krutih* (stereostatika) i statiku *elastičnih* tijela (elastostatika, statika deformabilnih tijela, nauka o čvrstoći ili otpornost materijala). U posljednje vrijeme razvija se i statika *plastičnih* tijela (plastostatika).

Statički pojam sile. Pod silom se u statici razumijeva količinska mjera mehaničkog uzajamnog djelovanja između materijalnih tijela. Sila predstavlja primarni pojam u statici. Njeno djelovanje na kruto tijelo određuje se: a) brojnomo vrijednošću (iznosom, modulom ili intenzitetom), b) pravcem i smjerom sile i c) njenim hvatištem, tj. točkom u kojoj sila djeluje na tijelo, a to su karakteristike vektorskih veličina. Na sl. 1 sila $\vec{F}$ u užetu AB , kojemu je jedan kraj vezan za tijelo u točki A , djeluje u pravcu AB i ima smjer od A prema B , prikazan strelicom. Pravac u kojem djeluje sila, u jednom ili drugom smjeru, zove se pravac djelovanja sile. Brojna vrijednost ili intenzitet određen je težinom obješenog tereta F , odnosno odsječkom AC i obično se označava sa $|\vec{F}|$ ili jednostavno sa F .

Pri proučavanju djelovanja sila na tijelo obično se upotrebljava pravokutni koordinatni sustav (sl. 2) i određuje se položaj hvatišta A sile $\vec{F}$ pomoću njegove vektorske koordinate $\vec{r}$ (vektor položaja točke A), odnosno pomoću projekcija x, y, z vektora $\vec{r}$ na koordinatne osi (skalarne koordinate točke A). Sila $\vec{F}$ kao vektorska veličina određena je ako je poznat njezin iznos $|\vec{F}| = F$ i kutovi α, β i γ što ih vektor $\vec{F}$ zatvara s pozitivnim smjerovima koordinatnih osi. Projekcije vektora $\vec{F}$ na koordinatne osi određene su relacijama:

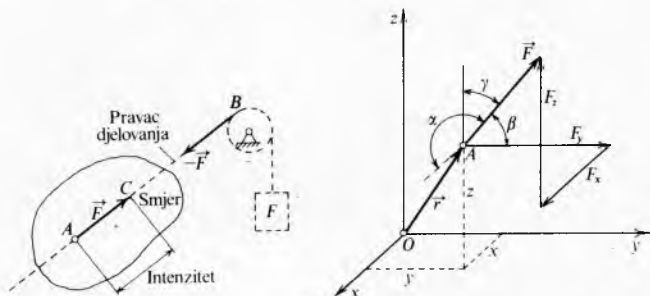
$$F_x = X = F \cos \alpha, \quad F_y = Y = F \cos \beta, \quad F_z = Z = F \cos \gamma. \quad (1)$$

Ako su poznati iznosi komponenta sile $\vec{F}$, iznos sile F izračunava se pomoću formule:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (2)$$

a njezin pravac djelovanja pomoću izraza:

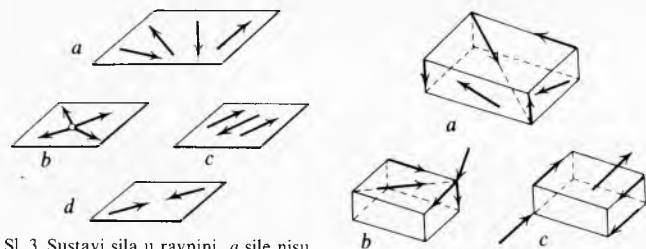
$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (3)$$



Sl. 1. Karakteristike vektora sile $\vec{F}$ Sl. 2. Položaj hvatišta i komponente sile $\vec{F}$

Sustavi sila. Skup svih sila koje djeluju na bilo koje kruto tijelo zove se sustav sila. Pri tom se razlikuje slobodno i vezano (neslobodno) tijelo. Slobodnom tijelu nisu nametnute nikakve veze i ono može iz zadanog položaja prijeći u bilo koji drugi položaj u prostoru. Ako slobodno tijelo pod djelovanjem zadanog sustava sila može biti u ravnoteži, odnosno miruje, onda je to *uravnoteženi sustav sila*. Ako se pak jedan sustav sila koji djeluje na slobodno tijelo može zamijeniti drugim sustavom sila a da se pri tom ne promijeni stanje mirovanja ili stanje gibanja krutog tijela, za takva se dva sustava kaže da su *ekvivalentni*. Sile što djeluju na kruto tijelo ili na sustav krutih tijela mogu biti vanjske i unutrašnje. Vanjske sile određuju djelovanje drugih tijela koja ne ulaze u promatrani sustav — na promatrana tijela, dok unutrašnje određuju uzajamno djelovanje među tijelima zadanog sustava. Unutrašnje sile čine uravnoteženi sustav sila i ne utječu na uvjete ravnoteže tijela. Zato se u statici krutog tijela razmatraju uvjeti ravnoteže samo vanjskih sila. U statici deformabilnih tijela uzimaju se u obzir i vanjske i unutarnje sile.

Klasifikacija sustava sila. Sustavi sila mogu biti ravninski i prostorni. U općem slučaju ravninskog ili komplanarnog



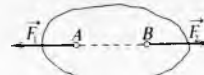
Sl. 3. Sustavi sila u ravnini. a sile nisu paralelne a pravci se djelovanja ne sijeku u jednoj točki, b pravci djelovanja svih sila sijeku se u jednoj točki (komplanarno-konkurentni sustav sila), c pravci djelovanja svih sila međusobno su paralelni (komplanarno-paralelni sustav), d sile imaju zajednički pravac djelovanja (kolinearni sustav)

Sl. 4. Sustavi sila u prostoru. a sile nisu paralelne a pravci djelovanja ne prolaze kroz istu točku u prostoru, b pravci djelovanja prolaze kroz istu točku (prostorni konkurentni sustav), c pravci djelovanja su paralelni (prostorni paralelni sustav sila)

sustava sila sve sile djeluju u jednoj ravnini, nisu međusobno paralelne i njihovi se pravci djelovanja ne sijeku u jednoj točki (sl. 3a). Specijalni su slučajevi: a) pravci djelovanja svih sila sijeku se u jednoj točki ravnine u kojoj djeluju (komplanarno-konkurentni sustav sila, sl. 3b), b) sve su sile međusobno paralelne (komplanarno-paralelni sustav sila, sl. 3c) i c) sve sile imaju zajednički pravac djelovanja (sl. 3d), ali mogu imati i suprotan smjer (kolinearni sustav sila). U općem slučaju prostornog sustava sila sve sile ne djeluju u istoj ravnini, nisu međusobno paralelne i ne prolaze kroz jednu točku prostora (sl. 4a). U specijalnom slučaju sve sile mogu prolaziti kroz istu točku (prostorni konkurentni sustav sila, sl. 4b), odnosno sve mogu biti međusobno paralelne (prostorni paralelni sustav sila, sl. 4c).

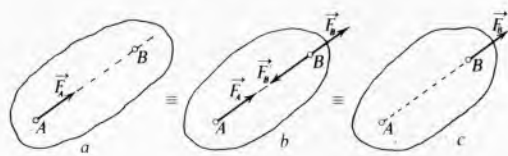
Aksiomi statike. Osim Newtonovih aksioma, koji izražavaju tri osnovna zakona gibanja, u statici se primjenjuje još nekoliko aksioma koji formuliraju najjednostavnije i opće zakone ili principe kojima se podvrgavaju sile što djeluju na jedno i isto tijelo ili sile što djeluju na tijela koja uzajamno djeluju jedno na drugo. U aksiomima statike radi se o svojstvima sila koja su određena mnogobrojnim neposrednim promatranjima. Prva dva aksioma statike izražavaju pravila djelovanja sila kad se stanje tijela pod djelovanjem zadanog sustava sila ne mijenja.

Prvi aksiom. Ako na slobodno kruto tijelo djeluju dvije sile u različitim točkama, onda takvo tijelo može biti u ravnoteži samo ako su te sile jednakog intenziteta ($F_1 = F_2$) i ako imaju zajedničku liniju djelovanja, a suprotan smjer (sl. 5).



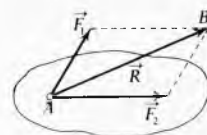
Sl. 5. Prikaz prvog aksioma statike

Drugi aksiom (pravilo o pomicanju hvatišta sile). Hvatište sile koja djeluje na kruto tijelo može se slobodno pomicati po liniji njezina djelovanja bez ikakva utjecaja na stanje gibanja, odnosno mirovanja tijela. Takva sila je vektor vezan za liniju (tzv. klizeći vektor). Ako npr. na tijelo u točki A djeluje sila $\vec{F}_A$ (sl. 6a) i ako se u točki B dodaju dvije jednake i suprotno usmjerene sile $\vec{F}_B$ i $\vec{F}'_B$ koje leže na pravcu djelovanja sile $\vec{F}_A$, pri čemu je $F_B = F_A$ (sl. 6b), onda su sile $\vec{F}'_B$ i $\vec{F}_A$ u ravnoteži, pa preostaje samo sila $\vec{F}_B$ u točki B (sl. 6c).



Sl. 6. Prikaz pravila o pomicanju hvatišta sile (drugi aksiom statike)

Treći aksiom. Dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ što djeluju u jednoj točki tijela mogu se zamijeniti jednom silom $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ koja je njihova rezultanta (sl. 7). Ona je jednaka dijagonali paralelograma kojemu su stranice zadane sile. Taj je aksiom poznat pod nazivom *pravilo paralelograma sila*.

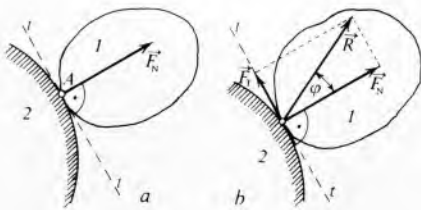


Sl. 7. Prikaz pravila paralelograma sila (treći aksiom statike)

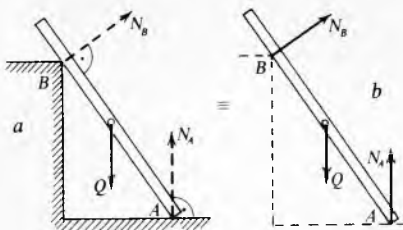
Četvrti aksiom (pravilo o oslobađanju tijela od nametnutih veza). Svako vezano (neslobodno) kruto tijelo može se promatrati kao slobodno ako se postojeće veze koje ograničavaju slobodu gibanja tijela zamijene tzv. reakcijama veza koje treba dodati zadanim silama. Na osnovi tog aksioma svaki problem ravnoteže vezanog tijela može se svesti na određeni problem slobodnog tijela.

Veze i njihove reakcije. Vezama se nazivaju mehanički ili fizički uređaji koji ograničuju, odnosno sprečavaju gibanje nekog tijela. Ako se čestica ili tijelo ne može od veza odvojiti, veza se naziva *postojanom* (npr. prsten na konopcu), u protivnom veza je *nepostojana*. Npr. uteg na stolu može se premještati po stolu i pri tom se veza ne prekida, ali se može i podići, a time je veza prekinuta. Veze koje ne zavise od vremena zovu se *skleronomne* ili *stacionarne*, a koje zavise od vremena *reonomne* ili *nestacionarne* veze. Razlikuju se *unutrašnje* i *vanjske* veze sustava. Unutrašnje veze sprečavaju relativni pomak pojedinih tijela unutar sustava. Prema tome, ako su veze ona tijela koja pripadaju promatranom sustavu, onda su to unutrašnje veze i obratno. Materijalni sustav koji ima samo unutrašnje veze zove se *slobodni sustav*. Djelovanje veza na materijalni sustav očituje se u tome što veze sprečavaju, odnosno mijenjaju gibanje sustava koje bi priložene vanjske sile pobudile kad bi sustav bio slobodan. Zbog toga se može smatrati da veze proizvode isto djelovanje kao i sile, pa se u statici djelovanje veza, prema četvrtom aksiomu statike, zamjenjuje silama koje se zovu *reakcije veza* ili samo *reakcije*.

Sile koje ne zavise od veza zovu se *aktivne* (zadane) sile, a reakcije veza *pasivne* sile. Reakcije veza razlikuju se od aktivnih sila koje djeluju na tijelo u tome što njihovi intenziteti uvijek zavise od tih sila i nisu unaprijed poznati. Npr. pri krutom štapu reakcija veza ima pravac njegove uzdužne osi, a takva veza može prenositi vlačne i tlačne sile.

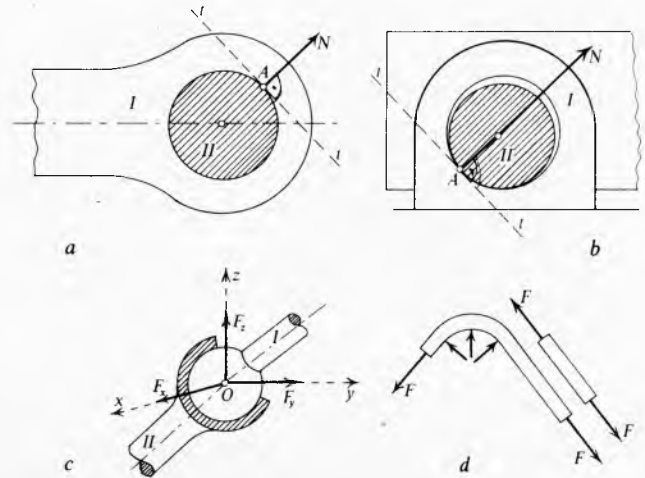


Sl. 8. Pravac djelovanja reakcije u dodirnoj točki dvaju tijela. a) kruto tijelo oslanja se na idealno glatku površinu bez trenja, b) veza između krutog tijela i hrapave površine s trenjem



Sl. 9. Kruti štap oslonjen na idealno glatku površinu u A i na oštari brid u B

Ako se kruto tijelo oslanja na idealno glatku površinu (bez trenja), onda dodirna točka s površinom može slobodno po njoj kliziti, ali se ne može pomicati u pravcu normale na površinu. Prema tome, reakcija F_N idealno glatke površine upravljena je u pravcu normale na tangencijalnu ravninu kroz dodirnu točku (sl. 8a). Kad je *veza s trenjem*, pojavljuje se u dodirnoj točki još i tangencijalna reakcija F_T . Ukupna ili totalna reakcija takve veze nagnuta je od normalne reakcije za kut φ (sl. 8b). Ako se kruti štap težine Q oslanja u A na idealno glatku površinu, a u B na oštari brid (sl. 9a), i ako se u A i B dodaju normalne reakcije N_A i N_B , zamjenjujući time nametnute veze, štap se može promatrati kao slobodno tijelo koje se nalazi pod djelovanjem aktivne sile Q i reakcija N_A i N_B (sl. 9b). Kad je veza *zglobna* prema sl. 10a, tj. kada je čep II nepomičan, štap I može se samo okretati oko osi čepa II, okomitoj na ravninu slike. Zanimljivo je da reakcija nepomičnog čepa upravljena okomito na njegovu cilindričnu površinu u točki A, gdje površina ležaja dodiruje čep i prema tome leži u ravnini okomitoj na os čepa. Ako je, dakle, veza ostvarena pomoću *nepomičnog cilindričnog zgloba*,



Sl. 10. Primjeri veza: a) nepomični cilindrični zglob, b) oslonac horizontalne grede na nepomični cilindrični zglob, c) sferni zglob, d) savitljivo uže prebačeno preko kolotura ili remenice

pravac reakcije je nepoznat, jer ta reakcija može imati bilo koji pravac okomit na os čepa, što zavisi od položaja tijela i drugih sila koje na nj djeluju. Tipičan primjer takve veze je nepomični oslonac nosača (sl. 10b). Veza u obliku *sfernog zgloba* (sl. 10c) osigurava nepomičnost točke O tijela I i dopušta samo rotacije tijela oko bilo koje osi kroz točku O. Reakcije takva zgloba određene su trima komponentama F_x, F_y, F_z koje su međusobno okomite. U primjeru prikazanom na sl. 10d savitljivo uže bez težine može prenositi samo vlačne sile u pravcu svoje uzdužne osi. Ako je uže prebačeno preko kolotura ili remenice (bez trenja), mijenja se samo pravac sile u užetu, dok intenzitet sile ostaje isti. Iz tih primjera slijedi da je reakcija veza uvijek upravljena suprotno pravcu i smjeru u kojem veza sprečava gibanje tijela.

Rezultanta sila i ravnoteža

Sustavi konkurentnih sila. Sustav sila kojima se linije djelovanja sijeku u jednoj točki zove se konkurentni sustav sila. Određivanje rezultante takvih sustava sila svodi se na primjenu trećeg aksioma statike. Ako npr. na točku A (sl. 11a) djeluju samo dvije sile $\vec{F}$ i $\vec{Q}$ koje međusobno zatvaraju kut γ , onda je rezultanta $\vec{R}$ tih sila jednaka njihovoj geometrijskom zbroju (sl. 11b):

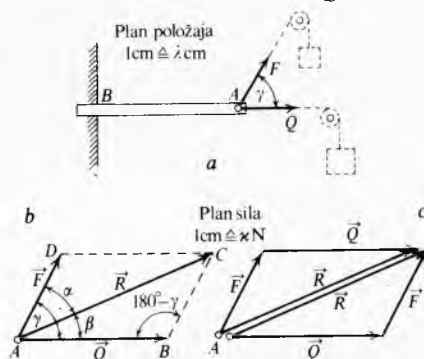
$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{Q}. \quad (4)$$

Intenzitet te rezultante dobiva se pomoću kosinusa poučka:

$$R = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2FQ\cos\gamma}. \quad (5)$$

Kutovi α i β , što ih rezultanta zatvara sa svojim komponentama, određuju se primjenom sinusova poučka:

$$\sin\alpha = \frac{Q}{F} \sin\gamma \quad \text{ i } \quad \sin\beta = \frac{F}{Q} \sin\gamma. \quad (6)$$



Sl. 11. Određivanje rezultante konkurentnog sustava sila. a) plan položaja, b) određivanje rezultante pomoću paralelograma sila, c) određivanje rezultante pomoću trokuta sila

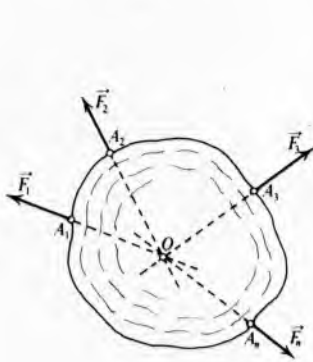
Umjesto paralelograma sila može se konstruirati *trokut sila* (sl. 11c). U tu svrhu crta se npr. vektor sile $\vec{F}$ u prikladnom mjerilu i nadovezuje mu se vektor sile $\vec{Q}$. Završna stranica tog trokuta sila, povučena iz početne točke sile $\vec{F}$, daje rezultantu po pravcu, smjeru i intenzitetu, tj. $\vec{F} + \vec{Q} = \vec{R}$. Isti rezultat dobiva se kada se u planu sila najprije nacrtaju sile $\vec{Q}$, pa se na njemu nadoveže sila $\vec{F}$, tj. $\vec{Q} + \vec{F} = \vec{R}$. Prema tome vrijedi *zakon komutacije*, tj. zadane sile mogu se bilo kojim redom nizati u poligonu sila a da se pri tom ne mijenja intenzitet, pravac i smjer rezultante. Odatle se može zaključiti da je metoda sastavljanja *kolinearnih* sila samo poseban slučaj pravila poligona sila kada su kutovi poligona sila jednaki 0° ili 180° . Sastavljanjem u rezultantu više sila koje djeluju na jednu točku dolazi se postupno primjenom pravila paralelograma sila do sljedećeg zaključka: sustav proizvoljnog broja konkurentnih sila ekvivalentan je jednoj sili (rezultanti ili glavnom vektoru) koja je jednaka vektorskoj sumi svih tih sila i prolazi kroz točku u kojoj se sijeku njihovi pravci djelovanja. Ako je npr. zadan sustav konkurentnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ koje djeluju na kruto tijelo u točkama $A_1, A_2, \dots, A_n$ (sl. 12), onda se primjenom drugog aksioma statike hvatišta tih sila mogu pomaknuti u točku u kojoj se sijeku pravci njihovih djelovanja. Tako se dobiva prostorni sustav sila sa zajedničkim hvatištem u točki O (sl. 13). Sastavljanjem sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ dobiva se njihova rezultanta:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_2, \quad (7)$$

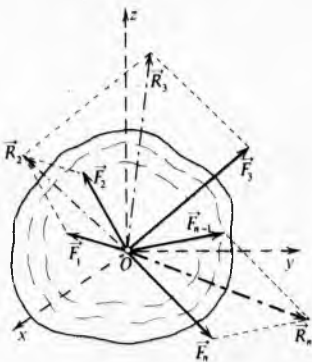
a zatim sastavljanjem sile $\vec{R}_2$ i sile $\vec{F}_3$ slijedi da je

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \quad (8)$$

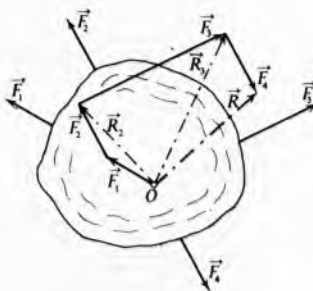
tj. sila $\vec{R}_3$ jednaka je zbroju sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$.



Sl. 12. Sustav konkurentnih sila koji djeluje na kruto tijelo



Sl. 13. Određivanje zajedničkog hvatišta konkurentnog sustava sila na sl. 12 primjenom drugog aksioma i rezultante pomoću paralelograma sila



Sl. 14. Određivanje rezultante konkurentnog sustava sila na sl. 12 pomoću trokuta sila

Istim postupkom dolazi se do sile $\vec{F}_n$ i dobiva se rezultanta zadanog sustava sila:

$$\vec{R} = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (9)$$

Tako dobiveni paralelogrami sila leže u općem slučaju u različitim ravninama, a dobiveni vektorski poligon naziva se *prostorni poligon sila*. Određivanje rezultante može se pojednostavniti ako se umjesto paralelograma sila crtaju *trokuti sila* (sl. 14). Ako se na kraj vektora $\vec{F}_1$ nadoveže vektor $\vec{F}_2$, onda će vektor

koji spaja točku O s krajem vektora $\vec{F}_2$ biti vektor rezultante $\vec{R}_2$. Zatim se nadovezivanjem vektora $\vec{F}_3$ na kraj vektora $\vec{F}_2$ dobiva vektor $\vec{R}_3$ koji spaja točku O s krajem vektora $\vec{F}_3$. Na isti način dodaje se sljedeći vektor $\vec{F}_4$ i konačno spajanjem točke O s krajem vektora $\vec{F}_4$ dobiva se rezultanta $\vec{R}$. I tada vrijedi zakon komutacije. Tako se dolazi do zaključka da je rezultanta jednaka vektoru koji spaja početnu i krajnju točku izlomljene linije, sastavljene od vektora zadanih sila. Drugim riječima: rezultanta je završna stranica poligona sila. Pravac djelovanja rezultante prolazi kroz točku u kojoj se sijeku pravci djelovanja zadanih sila, a smjer rezultante u planu sila suprotan je smjeru obilaženja zadanih sila. To je tzv. *pravilo poligona sila*.

Za ravninski sustav sila može se primijeniti grafička metoda, pri čemu se *plan sila* obično crta posebno, i to uvijek u prikladnom mjerilu, za razliku od *plana položaja* koji prikazuje zadane sile i njihovo hvatište. U planu položaja sile se obično označuju samo po pravcu i smjeru, dok se kao vektori predložuju samo u planu sila. *Analitička metoda* određivanja intenziteta i pravca rezultante slijedi iz vektorske jednadžbe (9). Tada se točka u kojoj se sijeku pravci djelovanja zadanih sila uzima kao ishodište pravokutnog koordinatnog sustava (sl. 13), pa se projiciranjem zadanih sila na koordinatne osi dobivaju izrazi za komponente R_x, R_y i R_z rezultante $\vec{R}$:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} \end{aligned} \quad (10)$$

gdje su F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} projekcije sile $\vec{F}_i$ na koordinatne osi. Prema tome, projekcije rezultante konkurentnog sustava sila na koordinatne osi jednake su algebarskim zbrojevima projekcija tih sila na pripadne osi. S pomoću jednadžbi (10) može se odrediti intenzitet rezultante i njezin pravac u pravokutnom koordinatnom sustavu $Oxyz$. Budući da su komponente rezultante $\vec{R}$ promatranog sustava sila $\vec{R}_x = R_x \vec{i}, \vec{R}_y = R_y \vec{j}, \vec{R}_z = R_z \vec{k}$ međusobno okomite, intenzitet rezultante određen je relacijom

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

a pravac rezultante jednadžbama

$$\cos(x, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \vec{R}) = \frac{R_z}{R}. \quad (12)$$

Kada sve sile djeluju u jednoj ravnini (ravninski ili komplanarni sustav sila), primjenjuje se pravokutni koordinatni sustav Oxy u toj ravnini. Tada su projekcije svih sila na os z jednake nuli, pa vrijede relacije:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

i odatle

$$\cos(x, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}. \quad (14)$$

Ravnoteža konkurentnog sustava sila. Za ravnotežu takvih sila koje djeluju na kruto tijelo potrebno je i dovoljno da rezultanta tih sila (njihov glavni vektor) bude jednaka nuli. Uvjeti koji pri tom moraju biti zadovoljeni mogu se izraziti u *geometrijskom* i u *analitičkom* obliku. Iz jednadžbe (11) slijedi

da će rezultanta R biti jednaka nuli ako je $R_x = 0$, $R_y = 0$ i $R_z = 0$. Analogno formulama za projekcije rezultante R_x, R_y, R_z može se zaključiti da će sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ koje djeluju u jednoj točki tijela biti u ravnoteži ako su zadovoljene jednadžbe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_{ix} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0,\end{aligned}\quad (15)$$

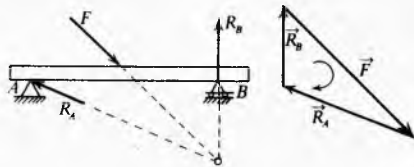
tj. za ravnotežu prostornog konkurentnog sustava sila potrebno je i dovoljno da su algebarski zbrojevi projekcija svih sila zadanog sustava na svaku od tri koordinatne osi jednaki nuli. Tada se *analitički uvjeti ravnoteže* mogu izraziti u skraćenom obliku:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0. \quad (16)$$

Očito je da za ravninski sustav sila koje djeluju u jednoj točki postoje samo dva analitička uvjeta ravnoteže:

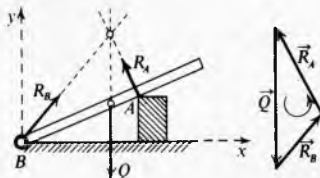
$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0. \quad (17)$$

Rezultanta $\vec{R}$ sustava sila koje djeluju u jednoj točki krutog tijela određena je završnom stranicom poligona sila, sastavljenog od zadanih sila. Ta rezultanta može biti jednaka nuli samo ako se kraj posljednje sile u poligonu sila poklopi s početkom prve sile, tj. ako je poligon sila zatvoren. Prema tome, za ravnotežu sila potrebno je i dovoljno da poligon sila, konstruiran od tih sila, bude zatvoren pa je to *geometrijski uvjet ravnoteže*. To pravilo može često poslužiti pri rješavanju zadataka o ravnoteži tijela na koje djeluju tri sile u ravni. Kao tipičan primjer za primjenu toga pravila jest postupak pri grafičkom određivanju reakcija u osloncima jednostavne grede na koju djeluje kosa sila $\vec{F}$ (sl. 15). Greda se u A oslanja na nepomičan oslonac, dok je u B slobodno oslonjena na pomičan oslonac (bez trenja). Sila $\vec{F}$ pobuđuje reakcije u osloncima A i B . Kako greda miruje, sve tri sile koje na nju djeluju ($\vec{F}$, R_A i R_B) moraju biti u ravnoteži. To znači da pravac djelovanja reakcije R_A mora prolaziti kroz sjecište poznatih pravaca sila $\vec{F}$ i R_B . U protivnom, tijelo unatoč prividnoj ravnoteži sila neće mirovati.



Sl. 15. Grafičko određivanje reakcija u osloncima jednostavne grede

Na osnovi aksioma o slobodnom pomicanju hvatišta sila u pravcu njene linije djelovanja, te tri sile mogu se smatrati silama sa zajedničkim hvatištem i, prema tome, može se konstruirati zatvoren trokut sila kojim su određeni intenziteti i smjerovi reakcija R_A i R_B .

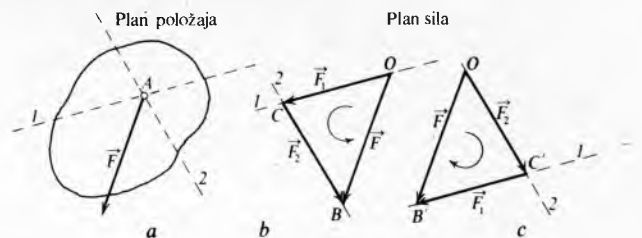


Sl. 16. Grafičko određivanje reakcija u zglobu i osloncu na oštri brid

Kad je štap AB težine Q , koji je u B zglobno vezan za nepomičnu točku, a u A se naslanja na oštar brid (sl. 16), može se štap smatrati slobodnim ako se umjesto nametnutih veza dodaju reakcije u A i B . Na štap djeluju tri sile: vlastita

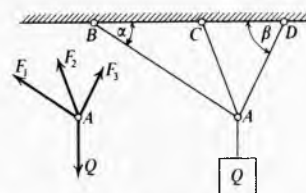
težina Q poznata po pravcu, smjeru i intenzitetu, sila R_A poznata po pravcu, dok sila R_B mora prolaziti kroz središte zgloba u B . Za ravnotežu moraju se te tri sile sjeći u jednoj točki i moraju dati zatvoren trokut sila. Prema tome, reakcija u B mora prolaziti kroz sjecište pravaca sila Q i R_A . Crtanjem trokuta sila određeni su intenziteti i smjerovi reakcija u A i B .

Grafičko rastavljanje sile u dvije komponente. Taj je zadatak određen ako su poznati pravci traženih komponenata. Ako, npr., treba silu $\vec{F}$ koja djeluje u točki A krutog tijela rastaviti u dvije komponente u pravcima 1 i 2 , uz pretpostavku da sila $\vec{F}$ i pravci 1 i 2 leže u jednoj ravni (sl. 17a), postupak je sljedeći: sila $\vec{F}$ crta se u prikladnom mjerilu s hvatištem u po volji izabranoj točki O , pa se zatim kroz njezin početak i kraj povlače pravci paralelni sa zadanim pravcima 1 i 2 do njihova presjeka C . Ta točka određuje intenzitete traženih komponenata $OC = F_1$ i $CB = F_2$ (sl. 17b). Isti rezultat dobiva se ako se paralele povuku obrnutim redom (sl. 17c). Tako dobiveni novi trokut $OB'C'$ dopunjuje prvi trokut na paralelogram sila koji se, dakle, također može primijeniti za rastavljanje sile u dvije komponente. Pri tom smjer obilaženja komponenata $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ mora biti suprotan smjeru sile $\vec{F}$. Prema tome, rastavljanje sile u dvije komponente obrnuto je zadatak od onog pri sastavljanju dviju sila u njihovu rezultantu.



Sl. 17. Grafičko rastavljanje sile u dvije komponente. a plan položaja, b i c konstrukcija trokuta sila

Statički određeni i statički neodređeni zadaci. Reakcije veza s kojima se operira u statici pri rješavanju zadataka o ravnoteži neslobodne čestice ili tijela u većini slučajeva su nepoznate, bilo po pravcu bilo po intenzitetu. Broj nepoznanica zavisi od broja i karaktera veza. Ako taj broj nije veći od broja jednadžbi ravnoteže koje sadrže reakcije veza, zadatak je statički određen, a pripadni sustav čestica, odnosno tijela, zove se *statički određeni* sustav. U protivnom govori se o *statički neodređenim* zadacima, odnosno sustavima. Statički je neodređen zadatak (sl. 18) kad je teret Q obješen pomoću triju niti koje leže u istoj ravni.



Sl. 18. Primjer statički neodređenog sustava

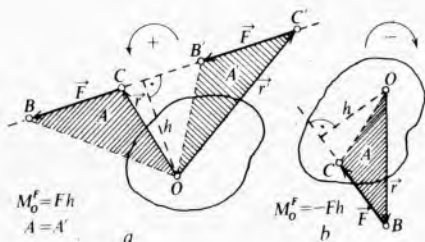
Tada postoje tri nepoznanice (intenziteti sila F_1 , F_2 i F_3 u nitima AB , AC i AD), a samo dvije jednadžbe ravnoteže ($\Sigma X = 0$ i $\Sigma Y = 0$). Prema tome, zadatak je jedanput statički neodređen. Statička neodređenost je posljedica prekobrojne veze. Naime, da bi teret Q bio u ravnoteži u položaju određenom kutovima α i β , dovoljno je teret objesiti samo pomoću dviju niti (npr. AB i AD). Treća nit (AC) je suvišna (prekobrojna veza). Za rješavanje statički neodređenih zadataka mora se napustiti hipoteza o krutosti tijela i uzeti u obzir njegova deformacija. Takvi se zadaci razmatraju u statici deformabilnih tijela (v. *Nauka o čvrstoći*).

Statički moment sile. Pojam statičkog momenta sile temelji se na djelovanju *poluge* kao jednog od osnovnih prostih strojeva mehanike. Taj je pojam u mehanici isto tako važan kao i pojam sile. Statičkim momentom M_O sile $\vec{F}$ s obzirom na

točku O zove se umnožak intenziteta sile i njezina kraka h , mjenjenog u pravcu okomice spuštene na pravac sile $\vec{F}$ iz točke O (sl. 19). To se izražava u obliku jednadžbe:

$$M_O^F = Fh \quad (18)$$

Obično se uzima da je M pozitivan ako sila nastoji okretati tijelo oko točke O u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu (sl. 19a), a u protivnom je slučaju M negativan (sl. 19b). Jedinica statičkog momenta sile u SI jest njutnmetar (Nm).



Sl. 19. Određivanje statičkog momenta sile. a) pozitivni, b) negativni moment

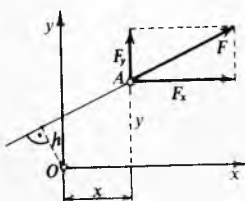
Jednake dimenzije imaju mehanički rad, kinetička i potencijalna energija, samo se tada njutnmetar naziva džul (J). Statički moment sile ima sljedeća svojstva: a) moment sile se ne mijenja pri pomaku hvatišta sile uzduž njezine linije djelovanja, b) moment sile s obzirom na točku O jednak je nuli ako je sila jednaka nuli ili ako pravac djelovanja sile prolazi kroz točku O i c) intenzitet statičkog momenta sile može se prikazati dvostrukom ploštinom trokuta OBC ili $OB'C'$, (sl. 19).

Analitički izraz za statički moment sile. Ako je zadana samo sila $\vec{F}$ koja djeluje u točki $A(x,y)$ (sl. 20), analitički je izraz statičkog momenta sile $\vec{F}$ s obzirom na točku O

$$M_O^F = -Fh = F_y x - F_x y. \quad (19)$$

Ako je zadano više sila koje djeluju na točku $A(x,y)$, onda je

$$\Sigma M_O^F = \Sigma F_y x - \Sigma F_x y. \quad (20)$$



Sl. 20. Uz određivanje analitičkog izraza za statički moment sile

Iz tih dviju jednadžbi slijedi da statički moment rezultante može biti jednak nuli: 1) ako je po apsolutnoj vrijednosti

$$F_x y = F_y x, \text{ odnosno } \Sigma F_x y = \Sigma F_y x, \quad (21)$$

2) ako je

$$F_x = 0 \text{ i } F_y = 0, \text{ odnosno } \Sigma F_x = 0 \text{ i } \Sigma F_y = 0. \quad (22)$$

i 3) ako je $x = 0$ i $y = 0$. Kad su zadovoljeni uvjeti pod 1) i 3), rezultanta mora prolaziti kroz početak koordinatnog sustava, a kad je zadovoljen uvjet pod 2), rezultanta je jednaka nuli.

Vektorski izraz za statički moment sile. Ako je hvatište vektora sile $\vec{F}$ određeno vektorom položaja $\vec{r}$, onda je statički moment sile $\vec{F}$ s obzirom na točku O određen vektorskom jednadžbom

$$\vec{M}_O^F = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (23)$$

tj. statički moment sile $\vec{F}$ s obzirom na točku O jednak je vektorskom umnošku vektora položaja $\vec{r}$ i vektora sile $\vec{F}$. Taj vektor je upravljen okomito na ravninu E (sl. 21) što je određuju vektori $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a njegov je intenzitet:

$$|\vec{M}_O^F| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha. \quad (24)$$

Za određivanje smjera vektora $\vec{M}_O^F$ obično se primjenjuje *pravilo desnog vijka* ili *pravilo desne ruke*. Krak vektora sile $\vec{F}$ jest okomica h povučena iz O na pravac vektora $\vec{F}$:

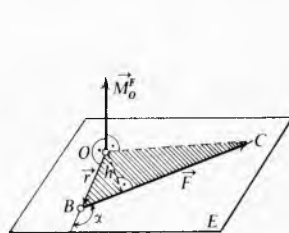
$$|\vec{h}| = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha. \quad (25)$$

Prema tome, intenzitet vektora $\vec{M}_O^F$ može se izraziti ovako:

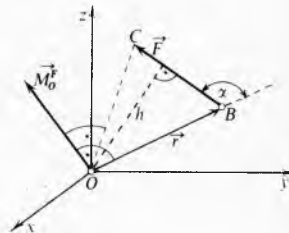
$$|\vec{M}_O^F| = |\vec{F}| \cdot |\vec{h}|, \quad (26)$$

odnosno

$$M_O^F = Fh. \quad (27)$$



Sl. 21. Vektorski prikaz statičkog momenta sile s obzirom na točku u ravnini



Sl. 22. Vektorski prikaz statičkog momenta sile s obzirom na točku u prostoru

Odatle se izvodi već navedena definicija da je intenzitet statičkog momenta sile s obzirom na točku jednak dvostrukoj ploštini trokuta kojega je osnovica vektor sile, a visina krak sile. Ako je hvatište sile $\vec{F}$ određeno koordinatama x, y, z i ako su F_x, F_y, F_z projekcije sile $\vec{F}$ na koordinatne osi (sl. 22), a točka O nalazi se u ishodištu koordinatnog sustava $Oxyz$, onda je statički moment sile $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O^F = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (F_y z - F_z y) \vec{i} + (F_z x - F_x z) \vec{j} + (F_x y - F_y x) \vec{k}. \quad (28)$$

Odatle slijedi da su projekcije vektora momenta sile na koordinatne osi određene formulama:

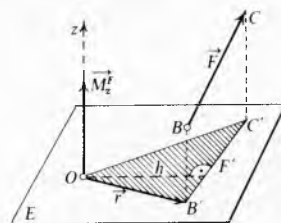
$$\begin{aligned} M_{Ox}^F &= F_y z - F_z y \\ M_{Oy}^F &= F_z x - F_x z \\ M_{Oz}^F &= F_x y - F_y x \end{aligned} \quad (29)$$

Moment sile s obzirom na os. Ako je zadana sila $\vec{F}$ i pravac osi z , koja je upravljena okomito na ravninu E , i ako se sila $\vec{F}$ projicira na tu ravninu, onda se statički moment sile $\vec{F}$ s obzirom na točku O u kojoj os z probija ravninu E može izraziti u obliku:

$$M_z^F = F' h, \quad (30)$$

gdje je F' projekcija $B'C'$ sile $\vec{F}$ na ravninu E , a krak h okomica iz točke O na projekciju $B'C'$ (sl. 23). Odatle slijedi da je moment sile $\vec{F}$ s obzirom na os z jednak umnošku projekcije sile $\vec{F}$ i kraka h . Tada je umnožak jednak dvostrukoj površini trokuta OBC' , pa vrijedi relacija

$$M_z^F = 2 \Delta OBC'. \quad (31)$$



Sl. 23. Vektorski prikaz statičkog momenta sile s obzirom na os z

Varignonov poučak o momentu rezultante. Ako u jednoj ravnini djeluje konkurentni sustav sila, onda za određivanje statičkog momenta rezultante zadanih sila s obzirom na proizvoljnu točku te ravnine vrijedi jednadžba

$$Rh = F_1 h_1 + F_2 h_2 + \dots + F_n h_n, \quad (32)$$

ili općenito

$$M_O^R = \sum_{i=1}^n M_O^{F_i}, \quad (33)$$

gdje je

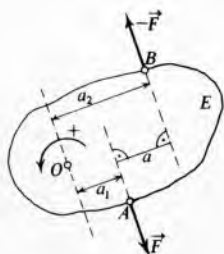
$$K = |\vec{R}| = \left| \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right|, \quad (34)$$

tj. statički moment rezultante ravninskog sustava sila s obzirom na proizvoljnu točku O ravnine jednak je algebarskom zbroju momenata komponentnih sila s obzirom na istu točku. To je tzv. *momentno pravilo* ili *Varignonov poučak*.

Spreg sila. Spregom sila naziva se sustav od dvije jednake, ali suprotno usmjerene sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ koje leže na paralelnim linijama djelovanja. Rezultanta takvih dviju sila jednaka je nuli, tj.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \quad (35)$$

Prema tome, spreg sila ne može se nadomjestiti, odnosno uravnotežiti jednom silom. Pored pojma sile i pojma statičkog momenta sile, spreg sila je treći osnovni element statike. Ne smije se shvatiti kao slučajna kombinacija dviju međusobno nezavisnih sila, nego kao statička cjelina koja ima posebna svojstva. Budući da su sile što čine spreg sila jednakog intenziteta, a suprotna smjera, obilježavaju se obično sa $\vec{F}$ i $-\vec{F}$, a njihov međusobni razmak sa a (krak sprega sila). Spreg sila obično se predodređuje simbolički u obliku $(\vec{F}, -\vec{F})$ ili jednostavno $(\vec{F}, \vec{F})$.



Sl. 24. Spreg sila koji djeluje na ravnu krutu ploču

Na sl. 24 prikazan je takav sustav sila što djeluje na ravnu krutu ploču koja se može okretati oko točke O . Očito je da je rezultatni moment tih dviju sila s obzirom na točku O te ravnine različit od nule, tj. da je

$$M_O^F = F a_2 - F a_1 = F(a_2 - a_1) = F a. \quad (36)$$

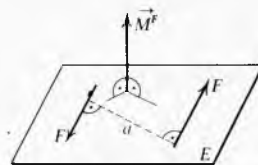
Moment sile $\vec{F}$ s obzirom na točku A bit će $M_A^F = F a$, a s obzirom na točku B je $M_B^F = F a$. To vrijedi za bilo koju točku ravnine E , jer su točke O , A i B izabrane po volji. Odatle slijedi da spreg sila pobuđuje rotaciju krute ploče E , a ne pobuđuje translaciju, jer je $\vec{R} = 0$. Prema tome, za moment sprega sila vrijedi

$$M^F = \pm F a, \quad (37)$$

što znači da je nastojanje sprega sila da pobudi rotaciju konstantno, jednako umnošku intenziteta jedne sile i *kraka* a sprega sila. Slijedi da moment sprega sila ima istu dimenziju kao i statički moment sile, tj. jedinica mu je njutnmetar. Predznak momenta sprega sila obično se određuje ovako: nastoji li spreg sila okrenuti ravninu slike (promatranu odozgo) u smislu suprotnom gibanju kazaljke na satu, izraz momenta sprega sila dobiva pozitivni predznak, a u protivnom negativni predznak.

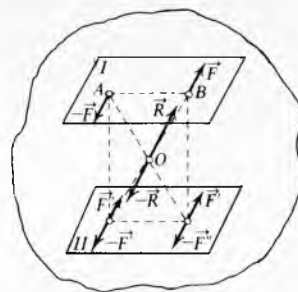
Spreg sila kao vektor. Moment sprega sila može se prikazati i vektorski. Ako npr. spreg sila djeluje u ravnini E (sl. 25), vektor momenta sprega sila upravljen je okomito na ravninu sprega sila, intenzitet mu je jednak umnošku intenziteta jedne sile i kraka sprega sila, a njegov smjer zavisi od smisla rotacije sprega sila. Prema tome, kod sprega sila valja razlikovati: a) intenzitet sile, b) krak sprega sila, c) smisao rotacije i d) rav-

ninu sprega sila. Budući da moment sprega sila ne zavisi od izbora momentnog pola (točka O), vektor $\vec{M}^F$ je *slobodan* vektor, koji je određen sa četiri navedena podatka.



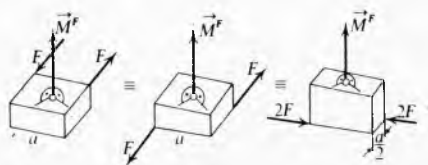
Sl. 25. Vektorski prikaz momenta sprega sila

Svojstva spregova sila i njihova ekvivalentnost. 1) djelovanje spregova sila na ravnu krutu ploču neće se promijeniti ako se hvatišta sila koje čine spreg sila pomaknu u pravcu njihova djelovanja — to se svojstvo temelji na drugom aksiomu statike; 2) spreg sila može se po volji pomicati u pravcu njegova kraka, tj. okomito na pravac djelovanja njegovih sila; 3) spreg sila može se i po volji pomicati u ravnini sprega sila pod uvjetom da pojedine sile međusobno ne mijenjaju svoj položaj; 4) spreg sila može se nadomjestiti drugim spregom sila pod uvjetom da su im momenti jednaki i da imaju isti smisao okretanja;



Sl. 26. Pomak sprega sila iz jedne u drugu, paralelnu ravninu

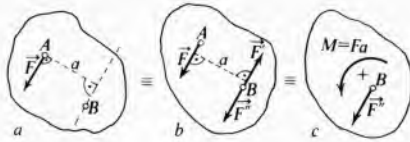
5) spreg sila može se pomaknuti iz jedne ravnine u drugu, paralelnu ravninu krutog tijela bez promjene njegova mehaničkog djelovanja (sl. 26). Npr., ako je u ravnini I krutog tijela zadan spreg sila $(\vec{F}, -\vec{F})$ i ako se u paralelnoj ravnini II ucertaju dva sprega sila $(\vec{F}', -\vec{F}')$ i $(\vec{F}'', -\vec{F}'')$, koji se međusobno poništavaju, pa se jednake i paralelne sile istog smjera $\vec{F}$ i $\vec{F}''$ sastave u njihovu rezultantu $\vec{R}$ i isto se tako postupi sa silama $-\vec{F}$ i $-\vec{F}''$, dobit će se druga rezultanta $-\vec{R}$. Obje te rezultante imaju zajedničko hvatište O , jednakog su intenziteta i suprotno usmjerene. To znači da se one međusobno poništavaju, a ostaje samo spreg sila $(\vec{F}', -\vec{F}')$ u ravnini II . Prema tome, zadani spreg sila u ravnini I ekvivalentan je po svojem djelovanju na kruto tijelo spregu sila $(\vec{F}', -\vec{F}')$. Oba ta sprega sila nastoje pobuditi rotaciju krutog tijela u istom smislu i imaju jednake momente. Odatle slijedi da se vektor $\vec{M}^F$ sprega sila može pomicati u pravcu svoje linije djelovanja. Kako se on može pomicati i paralelno samom sebi, zaključuje se da je vektor sprega sila doista *slobodan vektor*. Pri određivanju mehaničkog djelovanja sprega sila na kruto tijelo može se, dakle, vektor momenta sprega sila prenositi u bilo koju točku. Na sl. 27 prikazana su tri sprega sila s jednakim momentom $M^F = F a$, koji djeluje u paralelnim ravninama. U sva tri primjera vektor momenta sprega sila $\vec{M}^F$ ima isti intenzitet, pravac i smjer.



Sl. 27. Moguće transformacije sprega sila uz uvjet da se moment sprega sila ne mijenja

Odatle slijedi da je moment sprega sila veličina koja kvantitativno karakterizira mehaničko djelovanje sprega sila na kruto tijelo. Mogu se po volji mijenjati sile i krak sprega sila, premještati spreg sila u svojoj ravnini i paralelno pomicati ravnina sprega sila, pod uvjetom da se kod tih transformacija ne mijenja moment sprega sile. Prema tome, moment sprega sila u potpunosti određuje djelovanje sprega sila na kruto tijelo.

Pravilo o paralelnom pomaku sile. Ako hvatište A sile $\vec{F}$ treba premjestiti u točku B zadane krute ploče (sl. 28a) tako da se stanje ploče pri tome ne promijeni, onda treba u točki B dodati dvije jednake i suprotno usmjerene sile $\vec{F}'$ i $\vec{F}''$, koje su međusobno u ravnoteži, a jednake su po intenzitetu i paralelne sa silom $\vec{F}$. Tada zadana sila $\vec{F}$ u točki A i sila $\vec{F}'$ u točki B čine spreg sila, pa umjesto sile $\vec{F}$ u točki A djeluje sila $\vec{F}''$ u točki B , jednaka i istog smjera, i još jedan spreg sila (sl. 28b). Taj spreg sila zajedno sa zadanom silom $\vec{F}$ ima isto djelovanje na krutu ploču kao i prvobitna sila $\vec{F}$ sama.



Sl. 28. Prikaz pravila o paralelnom pomaku sile u ravnini

Odatle slijedi da se sila ne može odmah pomicati paralelno samoj sebi. Njeno djelovanje ostaje tada bez promjene samo onda ako joj se doda još spreg sila kojega je moment po intenzitetu i smjeru jednak statičkom momentu zadane sile $\vec{F}$ s obzirom na novo hvatište B . Taj postupak ujedno pokazuje kako se jedna zadana sila može rastaviti u drugu silu i spreg sila. Taj se zadatak u statici naziva *svođenjem* ili *redukcijom* sile na zadanu točku. Pri tom se druga sila $\vec{F}''$ s hvatištem u točki B zove *redukcijaska sila*, a spreg sila $(\vec{F}, \vec{F}')$ s krakom a zove se još i *redukcijaski spreg sila*. Rezultat koji daje ovo pravilo može se prikazati i tako kao na sl. 28c. Sličnim postupkom, primjenjujući svojstva spregova sila, može se pokazati da se sastavljanjem sile i sprega sila dobiva sila koja je po pravcu, smjeru i intenzitetu jednaka zadanoj sili, ali je paralelno pomaknuta za razmak koji je jednak kvocijentu momenta zadanog sprega sila i intenziteta zadane sile. Pri tom moment sile u novom položaju za bilo koju njezinu točku u prijašnjem položaju mora imati isti smjer kao i zadani spreg sila.

Sastavljanje spregova sila u ravnini. Spregovi sila u ravnini sastavljaju se tako da se njihovi momenti algebarski zbroje, a zatim se odredi bilo koji spreg sila kojem je moment jednak tom zbroju. Npr. ako je zadano n spregova sila kojih su momenti $M_1, M_2, \dots, M_n$, onda je ekvivalentni rezultatni moment

$$M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (38)$$

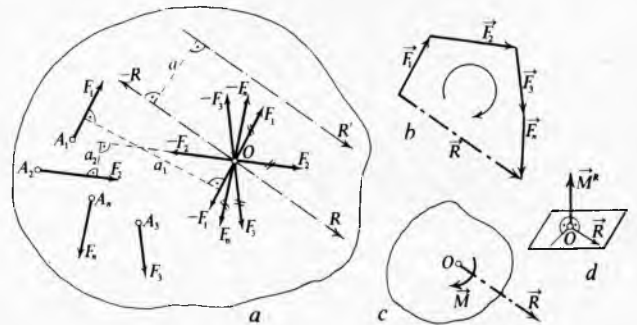
Očito je da je za ravnotežu sustava spregova sila potrebno i dovoljno da algebarski zbroj momenata tih spregova sila bude jednak nuli, tj. mora biti

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (39)$$

Redukcija ravninskog sustava sila s obzirom na zadanu točku.

Sustav sila različitog pravca $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ djeluje na ravnu krutu ploču u točkama $A_1, A_2, \dots, A_n$ (sl. 29a). Odgovor na pitanje čemu je ekvivalentan taj sustav sila daje *Poinsotova metoda redukcije*, koja se sastoji u tome da se na sve zadane sile primijeni pravilo o paralelnom pomaku sile i da se reduciraju s obzirom na bilo koju točku O krute ploče (redukcijaska točka). U tu svrhu dodaju se u točki O po dvije suprotne sile, jednako intenziteta kao i pripadne zadane sile. Stanje ploče time se ne mijenja, jer se dodane sile međusobno poništavaju. Prema tome, tada u zajedničkom hvatištu O djeluju sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$

koje su istog pravca, smjera i intenziteta kao i zadane sile (to su tzv. redukcijске sile, na slici označene dvjema crticama).



Sl. 29. Redukcija ravninskog sustava sila na zadanu točku. a plan položaja, b poligon sila, c rezultanta i moment resultantnog sprega sila, d vektorski prikaz dinamike sustava sila

Crtaњem poligona sila dobiva se njihova redukcijaska rezultanta $\vec{R}$ (sl. 29b), koja također djeluje u točki O . Osim toga, na ploču sada djeluje isto toliki broj spregova sila $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1), (\vec{F}_2, -\vec{F}_2), \dots, (\vec{F}_n, -\vec{F}_n)$. Momenti tih spregova sila jednaki su statičkim momentima zadanih sila s obzirom na točku O . Ti spregovi sila mogu se na poznat način sastaviti u jedan redukcijaski spreg sila kojem se moment naziva *redukcijaskim momentom*. Njegov intenzitet određen je jednađbom

$$M^R = -F_1 a_1 + F_2 a_2 + \dots + F_n a_n, \quad (40)$$

a može se predstaviti kao spreg sila $(\vec{R}', -\vec{R}')$ s krakom a , pa je $\vec{R}'$ *redukcijaska rezultanta* sprega sila. Tako je zadani sustav sila reduciran na rezultantu $\vec{R}$ i na rezultatni spreg sila kojem je moment $M^R = \vec{R}' \cdot \vec{a}$. Vektor rezultante $\vec{R}$ i vektor momenta resultantnog sprega sila $\vec{M}^R$ čine tzv. *dinamu* promatranog sustava sila. Prvi vektor pobuđuje translaciju, a drugi rotaciju krute ploče. U općem slučaju ravninskog sustava sila ta dva vektora zatvaraju međusobno kut od 90° (sl. 29d). Odatle slijedi da se svaki ravninski sustav sila koji djeluje na kruto tijelo, pri svođenju ili redukciji na proizvoljnu točku O u toj ravnini, može zamijeniti jednom silom $\vec{R}$ koja je jednaka redukcijaskoj rezultanti ili glavnom vektoru zadanog sustava sila, s hvatištem u točki O , i rezultatnim spregom sila kojem je moment M_O^R jednak resultantnom momentu ili glavnom momentu sila s obzirom na točku O . Budući da intenzitet redukcijске rezultante $\vec{R}$ ne zavisi od izbora točke O , ta je sila *statička invarijanta*. Pri redukciji ravninskog sustava sila može nastupiti sljedeće:

1) Ako je u zadanom sustavu $\vec{R}' \neq 0$ i $M^R \neq 0$, onda se s pomoću pravila o sastavljanju sile i sprega sila dobivena rezultanta $\vec{R}'$ i moment resultantnog sprega sila M^R mogu zamijeniti jednom silom $\vec{R}$ koja je paralelna i jednaka rezultanti $\vec{R}'$ i od nje udaljena za

$$a = \frac{M^R}{R'}. \quad (41)$$

Prema tome, zadani sustav sila može se svesti na jednu silu.

2) Ako je u zadanom sustavu $\vec{R}' \neq 0$ i $M^R = 0$, onda je

$$a = \frac{M^R}{R'} = 0, \quad (42)$$

što znači da se rezultanta $\vec{R}$ zadanog sustava sila poklapa s redukcijaskom rezultantom $\vec{R}'$. Tada se točka O nalazi upravo na liniji djelovanja rezultante $\vec{R}$. Odatle slijedi da se i tada ravninski sustav sila može svesti na jednu silu.

3) Ako je u zadanom sustavu sila $\vec{R} = 0$ i $M^R \neq 0$, sustav je sila reduciran na jedan spreg sila koji nastoji pobuditi okretanje krute ploče (tzv. čista rotacija).

4) Kada je $\vec{R} = 0$ i $M^R = 0$, sustav se nalazi u stanju ravnoteže. Prema tome, ravninski sustav sila različitog pravca može se svesti na jednu silu i na spreg sila, osim kada su oba vektora dinamike jednaka nuli.

Metoda projekcija. Svodenje zadanog ravninskog sustava sila na jednostavniji oblik može se izvesti analitički metodom projekcija, koja se sastoji u tome da se sve zadane sile rastave na komponente u pravcima dviju koordinatnih osi i dalje se postupi na sličan način kao pri sastavljanju sila koje djeluju na jednu točku. Tada za određivanje rezultante ili glavnog vektora služe formule:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2} \\ \cos(x, \vec{R}) &= \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}, \end{aligned} \quad (43)$$

a za određivanje momenta rezultantnog sprega sila ili glavnog momenta u odnosu na ishodište izraz

$$M_O^R = \sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}), \quad (44)$$

gdje su x_i i y_i koordinate hvatišta sile F_i .

Analitički uvjeti ravnoteže ravninskog sustava sila. Iz zaključka da će zadani ravninski sustav sila različitih pravaca biti u ravnoteži ako su oba vektora diname jednaka nuli, tj. $\vec{R} = 0$ i $\vec{M}^R = 0$, mogu se izvesti tri različita analitička uvjeta ravnoteže: a) Za ravninski sustav sila različitih pravaca potrebno je i dovoljno da su zadovoljeni uvjeti:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n X_i = 0, \\ R_y &= \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \\ M_O^R &= \sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = \sum_{i=1}^n (Y_i x_i - X_i y_i) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Te jednadžbe izražavaju da za ravnotežu ravninskog sustava sila različitog pravca algebarski zbrojevi projekcija svih zadanah sila na dvjema koordinatnim osima (pravokutnim ili kosim) i algebarski zbroj svih momenata tih sila s obzirom na bilo koju točku ravnine sila moraju biti jednaki nuli. Prve dvije jednadžbe nazivaju se komponentnim jednadžbama, a treća momentnom jednadžbom ravnoteže. b) Drugi oblik uvjeta ravnoteže glasi: za ravnotežu ravninskog sustava sila različitog pravca potrebno je i dovoljno da su zbrojevi momenata zadanah sila s obzirom na dvije točke O i O_1 ravnine sila jednaki nuli, i da je zbroj projekcija sila na os koja nije okomita na OO_1 jednak nuli, što je izraženo jednadžbama:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{O_1}^{F_i} = 0. \quad (46)$$

c) Treći oblik analitičkih uvjeta ravnoteže (tri momentne jednadžbe):

$$\sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{O_1}^{F_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{O_2}^{F_i} = 0. \quad (47)$$

izražava da ravninski sustav sila različitih pravaca može biti u ravnoteži ako su zbrojevi momenata svih sila s obzirom na tri točke O , O_1 i O_2 , koje ne leže na istom pravcu, jednaki nuli.

Odatle slijedi da za ravnotežu ravninskog sustava sila moraju biti ispunjena po tri uvjeta ravnoteže. Uvjeti pod a) smatraju se osnovnim, jer ako se oni primjenjuju, onda nema nikakvih ograničenja ni u izboru koordinatnih osi ni u izboru momentnog pola.

Uvjeti ravnoteže paralelnih sila u ravnini. Ako na ravnu krutu ploču djeluje ravninski sustav paralelnih sila, dovoljno je i potrebno da budu ispunjena samo dva uvjeta:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \text{i} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0. \quad (48)$$

U skalarnom obliku ti uvjeti glase:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = 0, \quad (49)$$

tj. algebarski zbroj svih sila i algebarski zbroj njihovih momenata s obzirom na bilo koju točku ravnine sila moraju biti jednaki nuli. Uvjeti ravnoteže mogu se izraziti i u drugom obliku, ali samo ako OO_1 nije paralelan sa zadanim silama:

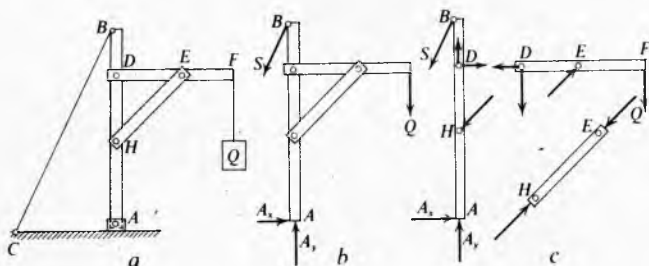
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0, \quad \vec{M}_{O_1} = (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0, \quad (50)$$

ili skalarnim jednadžbama

$$\sum_{i=1}^n M_O = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{O_1} = 0, \quad (51)$$

koje izražavaju da algebarski zbrojevi momenata svih sila s obzirom na dvije točke ravnine sila moraju biti jednaki nuli. Prema tome, i za ravninski sustav paralelnih sila potrebna su i dovoljna samo dva analitička uvjeta ravnoteže.

Ravnoteža sustava krutih tijela. Kad se promatra ravnoteža sustava koji se sastoje od nekoliko međusobno vezanih krutih tijela, kao što su npr. mehanizmi, strojevi i njihovi sastavni dijelovi, mogu se primijeniti različite metode. Jedna se sastoji u tome da se sustav rastavi na sastavne dijelove i postave jednadžbe ravnoteže za svaki dio, promatrajući ga kao oslobođeno tijelo. Pri tom će dvije i dvije reakcije unutrašnjih veza biti jednake po intenzitetu i suprotnog smjera. Kad je sustav od n tijela, pri čemu na svako od njih djeluje kakav god ravninski sustav sila, dobivaju se $3n$ jednadžbe pomoću kojih se mogu naći $3n$ nepoznanice. Ako je broj nepoznanica u jednadžbama ravnoteže veći od broja jednadžbi ravnoteže, zadatak je statički neodređen. Na sl. 30a prikazan je kao primjer nosač koji se sastoji od tri kruta štapa AB , DF i EH koji su međusobno vezani zglobovima, pri čemu je nosač opterećen teretom Q . Štap AB oslanja se donjim krajem na nepomični oslonac u A , a na gornjem kraju je privezan užetom za nepomičnu točku C . Sl. 30b prikazuje oslobođeni sustav s teretom koji osim aktivne sile Q djeluju još i vanjske reakcije veza u ležaju

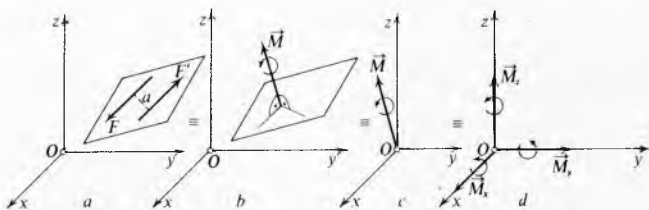


Sl. 30. Primjer rastavljanja sustava krutih tijela u sastavne dijelove. a) nosač od tri kruta štapa vezana zglobovima, b) oslobođeni sustav s teretom, silom u užetu i reakcijama u ležaju A , c) sile u dijelovima sustava

A i sila u užetu S . Unutrašnje sile sustava koje djeluju na njegove sastavne dijelove nisu pokazane na sl. 30b. Ako se nosač rastavi na svoje sastavne dijelove i svaki dio promatra kao oslobođeno tijelo, dobiva se predodžba o unutrašnjim silama nosača. Tim silama dijelovi nosača djeluju jedni na druge i za svaki pojedini dio to su vanjske sile (sl. 30c). Da bi sustav krutih tijela bio u ravnoteži, potrebno je da i svaki njegov dio bude u ravnoteži. Prema tome, kada se razmatra ravnoteža takvih sustava krutih tijela, mogu se postavljati uvjeti ravnoteže za čitav sustav krutih tijela i uvjeti ravnoteže za svako od krutih tijela sustava. U prvom slučaju sve reakcije unutrašnjih veza međusobno se poništavaju, jer su jednake po intenzitetu i suprotno usmjerene. Zbog toga u te jednadžbe ravnoteže ulaze samo reakcije vanjskih veza i zadane sile. Prema tome, iz

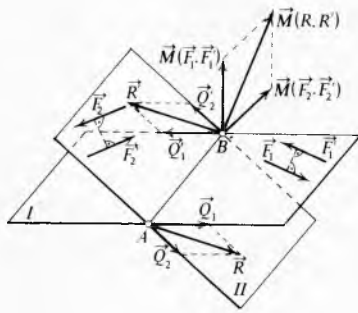
uvjeta ravnoteže za čitav sustav ne mogu se odrediti reakcije unutrašnjih veza, nego samo reakcije vanjskih veza.

Sastavljanje spregova sila u prostoru. Pri određivanju sprega sila u prostoru potrebno je znati ravninu sprega sila (sl. 31a).



Sl. 31. Speg sila u prostoru. *a* ravnina sprega sila, *b* vektor momenta sprega sila, *c* pomak vektora momenta sprega sila u ishodište koordinatnog sustava, *d* rastavljanje vektora momenta sprega sila u komponente

Pripadni vektor momenta sprega sila jest vektor $\vec{M}$ upravljen okomito na ravninu sprega sila (sl. 31b). Njegov se smjer obično određuje pomoću pravila desne ruke. Budući da je moment $\vec{M}$ slobodan vektor, može se on pomaknuti paralelno u ishodište O koordinatnog sustava (sl. 31c). Vektor $\vec{M}$ može se rastaviti u komponente M_x , M_y i M_z (sl. 31d). Komponentni vektor upravljen u pravcu osi x moment je sprega sila koji djeluje u ravnini yz , dok ostale dvije komponente predaju spregove sila što djeluju u ravninama xz i xy .



Sl. 32. Sastavljanje spregova sila u prostoru koji ne leže u paralelnim ravninama

Pri sastavljanju spregova sila što leže u ravninama koje nisu međusobno paralelne u prostoru postupa se ovako: u ravninama I i II što se sijeku zadana su dva sprega sila ($\vec{F}_1, \vec{F}'_1$) i ($\vec{F}_2, \vec{F}'_2$) (sl. 32). Redukcijom tih spregova sila na zajednički krak AB (presječna ravnina I i II) dobiju se transformirani spregovi sila ($\vec{Q}_1, \vec{Q}'_1$) i ($\vec{Q}_2, \vec{Q}'_2$). Pri tom moraju biti zadovoljeni izrazi:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{M}(\vec{Q}_1, \vec{Q}'_1) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \\ \vec{M}_2 &= \vec{M}(\vec{Q}_2, \vec{Q}'_2) = \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2). \end{aligned} \quad (52)$$

Sastavljanjem sila u točkama A i B dobiju se rezultante

$$\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 \quad \text{ i } \quad \vec{R}' = \vec{Q}'_1 + \vec{Q}'_2. \quad (53)$$

Odatle slijedi da je $\vec{R} = -\vec{R}'$, što znači da je sustav zadanih spregova sila ekvivalentan jednom spregu sila ($\vec{R}, \vec{R}'$). Moment je tog sprega sila $\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{BA} \times \vec{R}$, a kako je $\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$, slijedi da je

$$\begin{aligned} \vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') &= \vec{BA} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{BA} \times \vec{Q}_1 + \vec{BA} \times \vec{Q}_2 = \\ &= \vec{M}(\vec{Q}_1, \vec{Q}'_1) + \vec{M}(\vec{Q}_2, \vec{Q}'_2) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \end{aligned} \quad (54)$$

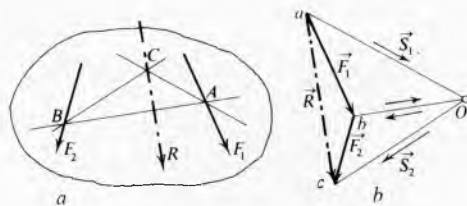
a odatle je vektor rezultantnog sprega sila

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (55)$$

Na isti način postupa se ako je zadano više od dva sprega sila. Prema tome, sastavljanjem dvaju ili više spregova sila što leže u različitim ravninama koje se sijeku u prostoru dobije se novi spreg sila s momentom jednakim vektorskom zbroju vektora momenata zadanih spregova sila.

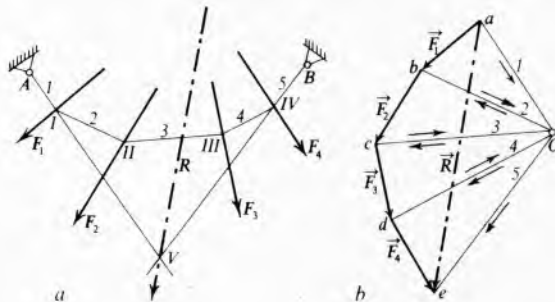
Osnovni pojmovi grafostatike. Dio statike u kojem se izlažu grafičke metode za rješavanje zadataka iz statike ravninskih sustava zove se grafostatika. Grafičke metode imaju široku primjenu u tehničkoj praksi. U usporedbi s analitičkim metodama manje su točne, jer točnost rezultata zavisi od točnosti crteža, ali su često u prednosti jer daju brža i preglednija rješenja zadataka. Zasnivaju se na konstrukciji *poligona sila* i *verižnog poligona*.

Ako su, npr., zadane dvije sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ koje se ne sijeku na listu crteža (sl. 33a), onda se iznos, pravac i smjer njihove rezultante određuje pomoću plana sila (sl. 33b), pa se zatim u planu sila po volji izabere točka O , koja se naziva polom i taj se pol spoji s točkom b . Spajanjem pola O s točkama a i c dobiju se pomoćne sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ koje u planu položaja moraju prolaziti kroz točke A i B što leže na paraleli sa Ob . Produženjem njihovih linija djelovanja dobije se u planu položaja točka C kroz koju mora prolaziti rezultanta $\vec{R}$ zadanih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Treba još samo kroz točku C povući paralelu s rezultantom $\vec{R}$ iz plana sila i zadatak je riješen. Takvo određivanje položaja rezultante naziva se *metodom verižnog poligona*.



Sl. 33. Određivanje rezultante dviju sila metodom verižnog poligona. *a* plan položaja, *b* plan sila

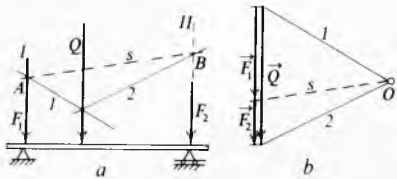
Slično se postupa pri grafičkom sastavljanju više sila različitih pravaca u ravnini. Ako je, npr., zadan sustav od četiri sile $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ (sl. 34a), crta se najprije poligon sila, pa se po volji odabere pol O i spoji se s točkama $a, b, \dots, e$ (sl. 34b). Linije $Oa, Ob, \dots, Oe$ nazivaju se polnim zrakama i obično se obilježavaju brojkama $1, 2, \dots$. Zatim se u planu položaja na sili $\vec{F}_1$ po volji uzme točka I i povuče paralele s polnim zrakama 1 i 2 . Time se dobije točka II , kroz koju se povuče paralela sa 3 do presjeka sa silom $\vec{F}_3$ itd., i konačno kroz točku IV paralela sa 5 . Paralele s krajnjim polnim zrakama 1 i 5 sijeku se u točki V , kroz koju mora prolaziti rezultanta zadanih sila. Izlomljena linija $A-I-II-III-IV-B$ zove se *verižni poligon*. Taj naziv dolazi odatle što njezin oblik odgovara obliku koji bi zauzele verige (lanac), ili uža, obješene u A i B , kada na njih djeluju zadane sile i kad su one u ravnoteži. Polne zrake predaju napetost dijelova užeta, odnosno dijelova lanca. Pojam verižnog poligona uveo je Varignon.



Sl. 34. Određivanje rezultante više sila metodom verižnog poligona. *a* plan položaja, *b* plan sila

Metoda verižnog poligona najčešće se primjenjuje kad se radi s paralelnim silama, npr. teretima kojima su opterećeni ravni nosači. Pri grafičkom rastavljanju paralelnih sila postupa se ovako: neka je horizontalna greda oslonjena na krajevima i opterećena silom Q (sl. 35a). Ako treba naći koliki dio tereta otpada na jedan, a koliki na drugi oslonac, primjenjuje se obrnut postupak od onog pri sastavljanju dviju paralelnih

sila metodom verižnog poligona. U planu sila odabere se pol O i povuku polne zrake 1 i 2 (sl. 35b). Zatim se u planu položaja ucrtaju paralele s polnim zrakama koje sijeku vertikalne pravce I i II u točkama A i B . Spajanjem tih točaka tzv.



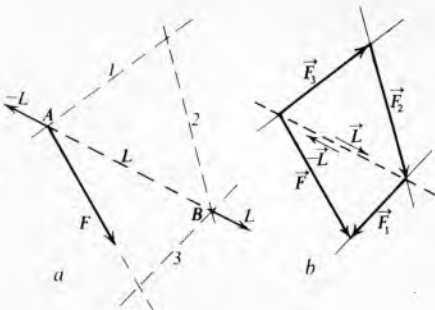
Sl. 35. Određivanje rezultante paralelnih sila metodom verižnog poligona. a plan položaja, b plan sila

završnom stranicom ili zaključnicom verižnog poligona ($AB = s$) i povlačenjem paralele s kroz pol O u poligonu sila dobiju se intenziteti traženih komponenta $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Sličan je postupak kada je greda opterećena s više takvih sila (tereta), pa treba odrediti kolikim će silama tako opterećena greda djelovati na svoje oslonce.

Grafički uvjeti ravnoteže. Za ravnotežu konkurentno-koplanarnog sustava sila jedini je grafički uvjet da poligon sila bude zatvoren i da sve sile imaju isti smisao obilaženja. Za ravninski sustav sila što djeluju u različitim točkama ravne krute ploče taj uvjet nije dovoljan, već je potrebno da i verižni poligon bude zatvoren. Prema tome da li su poligon sila i verižni poligon za promatrani ravninski sustav sila otvoreni ili zatvoreni, mogu nastati sljedeći slučajevi: a) ako su poligon sila i verižni poligon otvoreni, sustav sila svodi se (reducira) na jednu silu, tj. na njihovu rezultantu, b) ako je poligon sila zatvoren, a verižni poligon otvoren, sustav sila svodi se na spreg sila i c) ako su poligon sila i verižni poligon zatvoreni, promatrani je sustav sila u ravnoteži.

Rastavljanje sile u tri komponente u ravni. Sila se može rastaviti u tri komponente u ravni ako su poznati njihovi pravci djelovanja, pod uvjetom da se ti pravci ne sijeku u jednoj točki i da nisu međusobno paralelni. Nijedno sjecište tih pravaca djelovanja ne smije ležati na pravcu djelovanja zadane sile.

Grafički postupak (Culmannova metoda). Po dva pravca djelovanja treba produžiti da se sijeku, npr., u točkama A i B (sl. 36a) i spojiti te točke linijom L (Culmannova linija), pa u tim točkama dodati dvije pomoćne sile L i $-L$. Sada se sila $\vec{F}$ u planu sila može rastaviti u silu $\vec{F}_1$ i jednu pomoćnu silu $\vec{L}$, a ta zatim u sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$. Prema tome, tražene komponente $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ statički su ekvivalentne zadanoj sili $\vec{F}$ (sl. 36b).

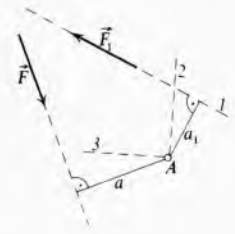


Sl. 36. Rastavljanje sile u tri komponente Culmannovom metodom. a plan položaja, b plan sila

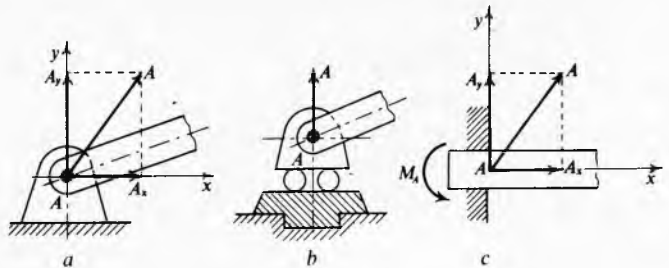
Grafoanalitički postupak (Ritterova metoda). Primjenom momentnog pravila (Varignonov poučak) postavljaju se momentne jednačbe s obzirom na sjecište linija djelovanja zadane sile $\vec{F}$ i linija djelovanja traženih komponenta, pa s obzirom, npr., na točku A (sl. 37) vrijedi relacija $Fa = F_1 a_1$, odatle je $F_1 = \frac{a}{a_1} F$.

Intenziteti komponenta F_2 i F_3 određuju se iz momentnih jednačbi s obzirom na ostala sjecišta ili pomoću poligona sila. Ta se metoda, dakle, sastoji u tome da se kao momentni pol uvijek odabere točka za koju su momenti dviju sila s obzirom na tu točku jednaki nuli, da bi se tako dobila jedna jednačba s jednom nepoznicom. Glavna je primjena tih metoda pri određivanju sila u štapovima rešetkastih nosača.

Sl. 37. Grafoanalitičko rastavljanje sile u tri komponente (Ritterova metoda)



Ravnoteža ravnih nosača. Nosačima se nazivaju kruta tijela koja nose terete i prenose ih na oslonce. Nosači mogu biti ravni i prostorni. Ako os nosača i njegova opterećenja (tereti) leže u istoj ravni, nosač je ravan, u protivnom je prostoran. Osim toga, nosači mogu biti puni ili gredni nosači (grede), rešetkasti nosači (rešetke) i okvirni nosači. Da bi se kruto tijelo moglo upotrijebiti kao nosač, ono mora biti nepomično. To se postiže vezivanjem za nepomične točke ili oslanjanjem na oslonce. U praksi se najčešće primjenjuju sljedeće tri vrste oslanjanja nosača: 1) nepomični oslonac (sl. 38a), veza krute ploče (grede) za nepomičnu točku A . Time su ukinuta oba translacijska pomaka i ploča se može samo okretati oko zgloba A u ravni slike. Tada reakcija oslonca prolazi kroz geometrijsko središte zglobnog čepa i može zauzeti bilo koji pravac u ravni ploče. Takav je oslonac, dakle, statički dvovalentan, jer može proizvoditi otpore u dva pravca. Prema tome, za određivanje reakcije nepomičnog oslonca potrebno je odrediti dvije nepoznate veličine A_x i A_y , 2) Pomični oslonac obično se izvodi na valjcima koji se mogu kotrljati po glatkoj podlozi (sl. 38b).



Sl. 38. Glavne vrste oslonaca ravnih nosača: a nepomični oslonac, b pomični oslonac, c uklještenje kraja grede

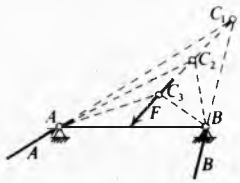
Reakcija takva oslonca okomita je na podlogu. Stoga pomični oslonac omogućuje uzdužno pomicanje, tj. širenje i skupljanje nosača pod utjecajem temperaturnih promjena i iznenadnih opterećenja. 3) Uklještenje jednog kraja grede oduzima joj sva tri stupnja slobode gibanja (sl. 38c). Tada su nepoznate tri veličine: pravac i intenzitet reakcije A , odnosno njezina horizontalna A_x i vertikalna komponenta A_y , i moment uklještenja M_A . Prema tome, takva je veza statički trovalentna. Sila A jednaka je vektorskom zbroju svih sila koje opterećuju nosač, samo je suprotnog smjera. Ona sprečava translacijske pomake nosača, dok moment uklještenja M_A sprečava okretanje nosača u vertikalnoj ravni. Njegov je intenzitet jednak algebarskom zbroju momenata svih sila koje opterećuju nosač s obzirom na točku A , ali je suprotnog smjera.

Statički određeni i statički neodređeni nosači. Ako se greda AB , opterećena kosom silom F , oslanja na dva nepomična oslonca, onda su u tim osloncima moguće reakcije u svim pravcima (sl. 39). Grafički uvjet ravnoteže zahtijeva da se sile F , A i B sijeku u jednoj točki. Iz slike se vidi da je ravnoteža grede moguća ako se točka C odabere bilo gdje na pravcu djelovanja sile F . To znači da u osloncima A i B postoji beskonačno mnogo pari reakcija koje bi mogle biti u ravnoteži

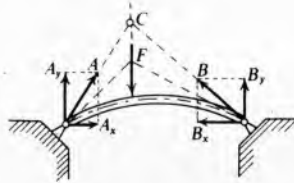
sa silom F . Zbog toga je zadatak određivanja reakcija statički neodređen. Da li je neki nosač i koliko puta statički neodređen, može se najlakše ustanoviti pomoću analitičkih uvjeta ravnoteže:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0. \quad (56)$$

U te jednadžbe ulaze tereti koji su poznati i reakcije koje se smatraju nepoznatim veličinama. Ako se u njima pojave samo tri nepoznate komponente reakcija, zadatak će biti statički određen i njegovo rješenje moguće. U protivnom nosač je statički neodređen, i to onoliko puta koliko ima više od tri nepoznate komponente reakcija, tj. koliko jednadžbi nedostaje za analitičko određivanje reakcija. Odatle slijedi pravilo ako u nekom jednostavnom nosaču ima n nepoznatih reakcija, gdje je $n > 3$, onda je nosač $n - 3$ puta statički neodređen. Tako, npr., za jednostavnu gredu (sl. 15) postoje uvijek samo po tri nepoznate reakcije u osloncima, koje se mogu odrediti pomoću tri jednadžbe ravnoteže.



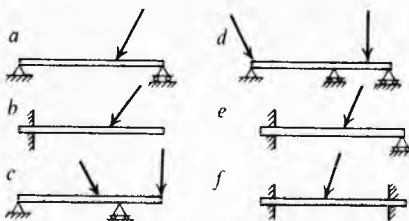
Sl. 39. Primjer statički neodređenog nosača (grede oslonjena na dva nepomična ležaja)



Sl. 40. Primjer jedanput statički neodređenog nosača (lučni nosač oslonjen na dva zgloba)

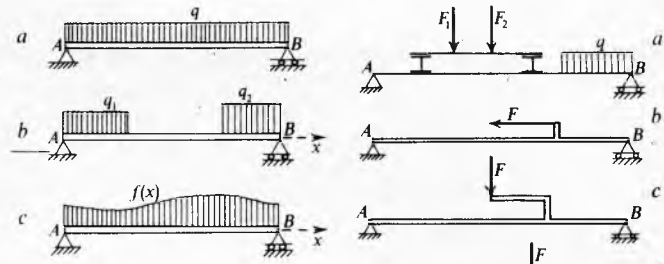
Za lučni nosač na dva zgloba (sl. 40) reakcije su A_x , A_y , B_x i B_y , nosač je, dakle, $n - 3 = (4 - 3) = 1$ puta statički neodređen. Tada se pomoću uvjeta ravnoteže mogu odrediti komponente A_y i B_y , dok se za komponente A_x i B_x zna samo da su međusobno jednake i suprotno usmjerene. Njihovi se iznosi ne mogu odrediti pomoću uvjeta ravnoteže i zato se kaže da je lučni nosač na dva zgloba statički neodređen. Rješavanjem takvih zadataka bavi se nauka o čvrstoći ili otpornost materijala, pri čemu se napušta hipoteza o krutosti nosača i uzima u obzir njihova elastičnost.

Glavni tipovi ravnih nosača i njihova opterećenja. Na sl. 41 pod a, b i c prikazana su tri glavna tipa statički određenih nosača, pod d i e nosači jedanput, a pod f tri puta statički neodređeni.



Sl. 41. Glavni tipovi ravnih nosača. Statički određeni nosači: a jednostavna ili prosta greda, b ukliještena greda ili konzola, c greda s prepustom; jedanput statički neodređeni nosač: d greda na tri oslonca, e poduprta konzola; f tri puta statički neodređena obostrano ukliještena greda

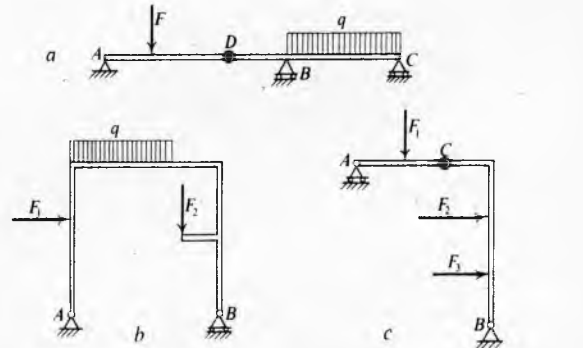
Po obliku, opterećenja nosača mogu biti koncentrirana kad djeluju u jednoj točki, a mogu biti vertikalna ili kosa (sl. 41), ili kontinuirana kad su neprekidno raspodijeljena po cijelom nosaču (sl. 42a) ili po nekoj duljini njegova raspona (sl. 42b). Ako je opterećenje jednoliko raspoređeno, predstavljeno je površinom u obliku pravokutnika. Za nejednoliko raspodjelu (sl. 42c) predstavljeno je površinom omeđenom tzv. linijom opterećenja $f(x)$. Specifičnim opterećenjem q naziva se opterećenje po jedinici duljine raspona nosača i mjeri se u njutnima po metru ili kilonjutnima po metru. Osim toga, opterećenja nosača mogu biti neposredna, koja na nosač djeluju neposredno (sl. 41 i 42) i posredna, koja se preko pomoćnih ili sekundarnih nosača



Sl. 42. Kontinuirano opterećenje horizontalne grede: a jednoliko kontinuirano opterećenje po cijeloj gredi, b jednoliko kontinuirano opterećenje na dijelu grede, c nejednoliko kontinuirano opterećenje

Sl. 43. Specijalna opterećenja horizontalne grede: a posredno, b i c ekscentrično, d pomično opterećenje

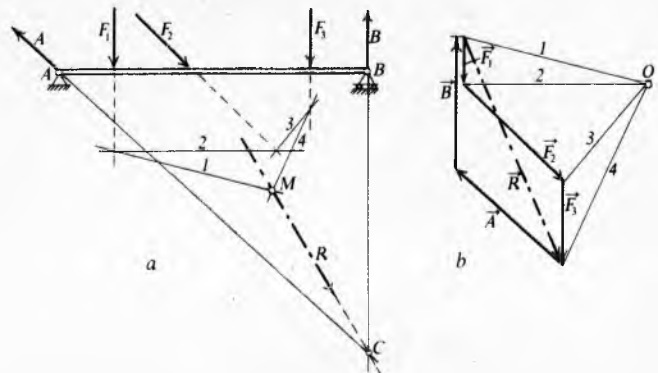
prenose na glavni nosač (sl. 43a). Ovamo pripadaju i tzv. ekscentrična opterećenja, koja mogu biti horizontalna (sl. 43b) i vertikalna (sl. 43c). I najzad, razlikuju se stalna i promjenljiva opterećenja. Prva djeluju neprekidno (npr. težina nosača), a druga samo povremeno (npr. gibanje vozila preko mosta, sl. 43d).



Sl. 44. Složeni nosači: a greda sa zglobovima (Gerberova greda), b prosti okvirni nosač, c složeni nosač sa zglobovima (Gerberov okvir)

Osim jednostavnih ili prostih nosača (sl. 41) postoje i složeni nosači, kao npr. grede sa zglobovima, tzv. Gerberove grede (sl. 44a), i okvirni nosači koji su sastavljeni od više prostih nosača što mogu biti pričvršćeni pod određenim kutom. Okvirni nosači mogu biti prosti (sl. 44b) ili složeni sa zglobovima, tzv. Gerberovi okviri (sl. 44c).

Grafičko određivanje reakcija u osloncima ravnih nosača. Ako je nosač opterećen vertikalnim i kosim silama, npr. silama $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ (sl. 45a), reakcije se u osloncima određuju na sljedeći način: najprije se s pomoću poligona sila odredi rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ (sl. 45b), koja je s reakcijama u A i B u ravnoteži, a zatim se u planu položaja ucrtava veržni poligon. Sile $\vec{R}$, $\vec{A}$ i $\vec{B}$ moraju se sjeći u sjecištu C pravaca djelovanja sila $\vec{R}$ i $\vec{B}$ koje su poznate. Iz trokuta sila $\vec{R}$, $\vec{A}$ i $\vec{B}$ rastavljanjem



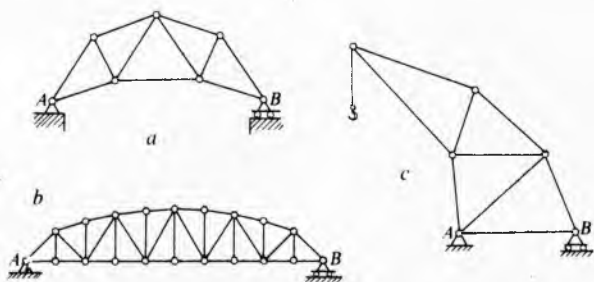
Sl. 45. Grafičko određivanje reakcija u osloncima ravnih nosača. a plan položaja, b plan sila

sile $\vec{R}$ u komponente $\vec{A}$ i $\vec{B}$ određene su tražene reakcije u osloncima.

Struktura i karakteristike ravnih rešetkastih nosača. Nosači sastavljeni od ravnih štapova koji su na svojim krajevima spojeni zglobovima (čvorovi) zovu se rešetkasti nosači. To su zapravo zatvoreni štapni poligoni koji osim štapova po svojem opsegu ili konturi imaju i poprečne štapove što takav poligon pretvaraju u niz trokuta, a svaki trokut je kruta figura. Prema tome, takav sustav štapova ima svojstva krute ploče, što znači da je geometrijski nepromjenljiv, tj. upotrebljiv kao nosač. Najmanji broj štapova od kojih se može sastaviti ravna rešetka određen je relacijom

$$s = 1 + 2(n - 2) = 2n - 3, \quad (57)$$

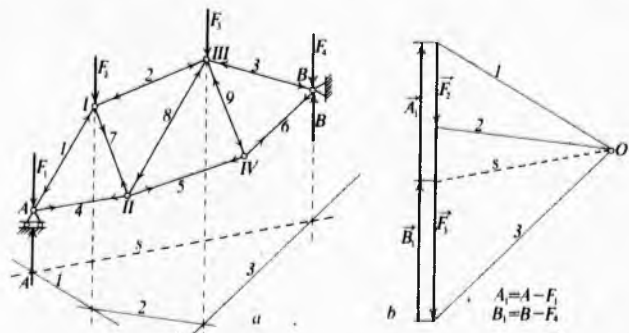
gdje je s broj štapova, a n broj čvorova. Ako neka rešetka ima n čvorova, onda su prva dva čvora 1 i 2 krajevi jednog štapa. Za sve ostale čvorove ($n - 2$) potrebna su po dva štapa, da se vežu za prvi štapa. Ako je $s = 2n - 3$, rešetka je statički određena, a ako je $s > 2n - 3$, rešetka je statički neodređena.



Sl. 46. Glavni tipovi ravnih rešetkastih nosača: a) krovni, b) parabolični nosač, c) lučka dizalica

Kada je $s < 2n - 3$, rešetka je promjenljiva ili labilna, dakle neupotrebljiva kao nosač. Rešetkasti nosači mogu biti ravni i prostorni. Primjer ravne rešetke je krovni nosač, a takav je nosač prikazan na sl. 46a. Za mostove manjeg raspona najčešće se upotrebljavaju rešetkasti nosači u obliku paralelne grede, a za veće raspone parabolični nosač (sl. 46b). Rešetkasti nosači upotrebljavaju se i za veće dizalice (sl. 46c), zatim za avionske konstrukcije, antenske stupove itd.

Sile u štapovima rešetkastih nosača. Određivanje sila u štapovima rešetkastih nosača temelji se na uvjetu da sve sile (vanjske i unutrašnje) koje djeluju na jedan čvor moraju biti u ravnoteži ako je i cio nosač u ravnoteži. Neka je zadan rešetkasti nosač (sl. 47) na koji u čvorovima djeluju sile

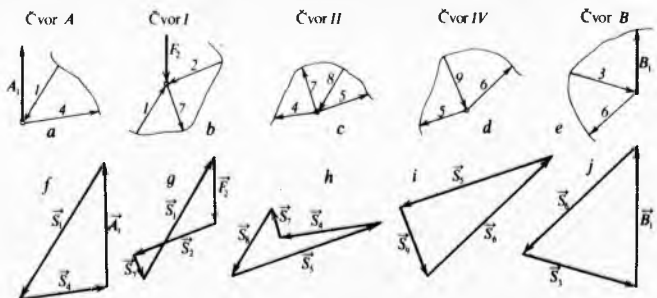


Sl. 47. Određivanje reakcija u osloncima rešetkastog nosača metodom verižnog poligona

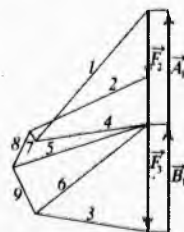
$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_4$. Uobičajeno je da se čvorovi obilježavaju rimskim, a štapovi arapskim brojkama. Ako se reakcije u osloncima A i B odrede s pomoću poligona sila i verižnog poligona, onda su poznate i sve vanjske sile što djeluju na nosač. Sile u štapovima rešetke mogu se odrediti na više načina. Postupak pri grafičkom određivanju tih sila metodom ravnoteže čvorova jest sljedeći: sile se određuju postupnim izdvajanjem (izrezivanjem) iz rešetke svakog pojedinog čvora i promatranjem ravnoteže sila

što djeluju u tom čvoru. Počinje se čvorom u kojem su spojena samo dva štapa, tj. u kojem djeluju samo dvije nepoznate sile u štapovima. Ako se odrede pomoću poligona sila i verižnog poligona reakcije A_1 i B_1 , zamišlja se da je čvor A izrezan (sl. 48a), a u njemu djeluje poznata sila $\vec{A}_1 = \vec{A} - \vec{F}_1$ i nepoznate sile u štapovima 1 i 4. Crtanjem pripadnog trokuta sila dobiju se tražene sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_4$ (sl. 48f). Dobivene smjerove sila iz poligona sila treba zatim ucrtati u čvoru na pripadne štapove. Ako je strelica upravljena prema čvoru, štapa je napregnut na vlak ili rastezanje, a u protivnom na tlak ili sabijanje. U čvoru A štapa 1 je opterećen na tlak, a štapa 4 na vlak. Tada se određuju sile u čvoru I , jer su u njemu nepoznate samo dvije sile (u štapovima 2 i 7). Pri tom treba zadržati isti red nizanja sila koji je uzet za čvor A , tj. u smjeru kazaljke na satu. Počinje se uvijek poznatim silama, a to vrijedi i za sve ostale čvorove. Prema tome, sile u čvoru I sastavljaju se redom 1, F_2 , 2 i 7 (sl. 48b). Kad je štapa 1 opterećen na tlak, strelica je uperena prema čvoru. S pomoću poligona sila (sl. 48g) dobiju se sile u štapovima 2 (tlak) i 7 (vlak). U čvoru II (sl. 48c) poznate su sada sile u štapovima 4 i 7, a nepoznate u štapovima 8 i 5. Sastavljanjem sila redom 4, 7, 8 i 5 (sl. 48h) dobije se intenzitet i smjer sila u štapovima 8 (tlak) i 5 (vlak). U čvoru III poznate su sile u štapovima 8 i 2 i sila F_3 , a nepoznate u štapovima 3 i 9, pa konstruiranjem pripadnog poligona sila slijedi da se u štapovima 3 i 9 pojavljuje tlačno opterećenje. Sl. 48d predstavlja čvor IV , u kojem su sile u štapovima 5 i 9 poznate, a u štapa 6 sila je nepoznata. Iz slike se vidi da je taj štapa napregnut na vlak. Konačno u čvoru B djeluju sile u štapovima 6 i 3 i sila $\vec{B}_1 = -\vec{F}_4 + \vec{B}$ (sl. 48e), koje daju zatvoren trokut sila.

Do istog rezultata dolazi se preglednije i brže ako se pojedinačni poligoni sila sastave u jedan zajednički poligon sila, tako da se u njemu svaka sila pojavi samo jedanput (sl. 49). Takav zajednički plan sila zove se *recipročni* ili *Cremonin plan sila* (L. Cremona, talijanski matematičar, 1830—1903). Svakom čvoru rešetke odgovara u planu sila zatvoren poligon kojemu su stranice paralelne sa štapovima i silama koje pripadaju promatranom čvoru, i obratno: svakom zatvorenom poligonu jednog lika odgovara u drugom liku čvor koji čine pripadne paralelne linije. Plan rešetke i plan sila imaju isti broj stranica (linija), jer svakoj liniji u jednom planu odgovara paralelna



Sl. 48. Određivanje sila u štapovima rešetkastog nosača na sl. 47 metodom ravnoteže čvorova



Sl. 49. Recipročni plan sila za rešetkasti nosač na sl. 47

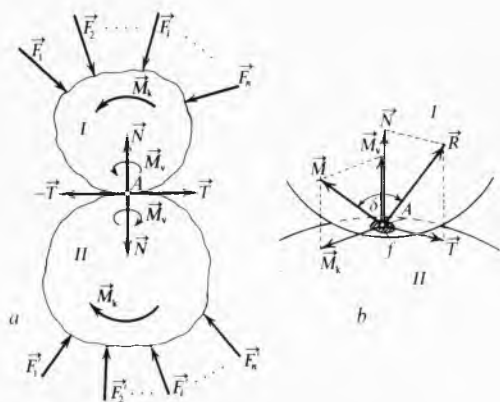
linija u drugom planu. Zbog toga se za takva dva lika kaže da su recipročni. Kod crtanja Cremonina plana sila treba se držati ovih pravila: 1) vanjske sile treba nanizati u zatvoren poligon onim redom kako ih se nalazi obilazeći rešetku u smjeru kazaljke na satu, ili obrnuto, i 2) istim redom treba sastavljati i sile koje djeluju na svaki pojedini čvor. Pri tom treba paziti da su vanjske sile u planu rešetke uvijek ucrtane izvan konture

rešetke. Strelice za unutrašnje sile u pojedinim štapovima rešetke obično se ne unose u Cremonin plan sila, ali se zato odmah ucrtaavaju u svaki čvor rešetke na njenu osnovnom crtežu.

Kad nije potrebno da se odrede sile u svim štapovima rešetke već samo u pojedinim, obično se primjenjuju tzv. metode ravnoteže presjeka. Jedna od tih metoda je *Culmannova grafička metoda*, a druga *Ritterova grafoanalitička metoda*. Princip tih metoda sastoji se u tome da se rešetka presiječe na dva dijela preko štapova u kojima treba odrediti sile, pa se zatim razmatra ravnoteža bilo kojeg dijela lijevo ili desno od presjeka. Svaki od tih dijelova bit će u ravnoteži ako sve sile što djeluju na njega čine zatvoren poligon sila. Pri tom se kod grafičke metode određuje Culmannova linija koja prolazi kroz dvije točke, od kojih se prva nalazi u presjeku linije djelovanja rezultante vanjskih sila što djeluju na dio rešetke kojoj se ravnoteža ispituje i pravca jednog od presječenih štapova. Kod Ritterove metode najčešće se primjenjuje treća grupa analitičkih uvjeta ravnoteže za proizvoljan ravninski sustav sila, tj. tri momentne jednadžbe, pri čemu se kraci za pojedine sile ne moraju odrediti analitički, već se mogu izmjeriti s crteža u mjerilu za duljine.

Osnovni pojmovi teorije trenja čvrstih tijela

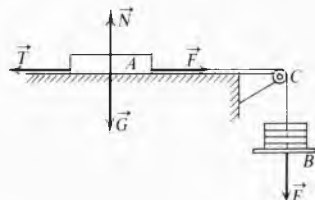
S obzirom na agregatno stanje tijela koja se dodiruju pod pritiskom i kada postoji težnja za relativnim pomakom razlikuje se trenje čvrstih, tekućih i plinovitih tijela. Između trenja prvih i ostalih dvaju trenja postoje bitne razlike. Ovdje se ukratko izlažu fizikalne osnove samo teorije trenja čvrstih tijela.



Sl. 50. Dodir dvaju tijela. a sile i momenti koji djeluju na tijela koja se dodiruju, b sile i momenti na elementarnu dodirnu plohu

Hipoteza o krutosti čvrstih tijela nije u skladu sa svagdašnjim iskustvom, jer prirodna čvrsta tijela nisu ni apsolutno čvrsta (kruta) ni savršeno glatka. U tehničkoj se, pak, praksi nailazi na niz pojava koje se ne mogu objasniti samo pomoću normalnih reakcija pri dodiru dvaju tijela pod pritiskom, već se mora uzeti u obzir njihova hrapavost i deformabilnost. Kad se dva takva tijela dodiruju pod pritiskom, taj se dodir zapravo ne zbiva u geometrijskoj točki, nego na maloj elementarnoj plohi (zbog male deformacije obaju tijela). Ako se pri tom tijela gibaju jedno prema drugom, te su deformacije promjenljive. Te komplicirane pojave mogu se uzeti u obzir pri računanju ako se pretpostavi da se osim normalne reakcije pojavljuje i jedna tangencijalna sila, odnosno i momenti, što slijedi iz razmatranja dodira dvaju prirodnih čvrstih tijela I i II na koja djeluju dva prostorna sustava sila (sl. 50a). Zbog djelovanja tih sila pojaviti će se u točki A, u općem slučaju, osim normalnih reakcija, sile i momenti kojih se djelovanje naziva *otporom trenja* u širem smislu riječi. Zapravo, oba se tijela dodiruju na elementarnoj plohi f oko točke A, i prema tome djeluju jedno na drugo na površini te plohe. Ako se zamisli da su sve sile što djeluju na tu elementarnu plohu reducirane s obzirom na točku A (sl. 50b), dobiva se kao rezultat redukcije, u općem slučaju, dinam, tj. rezultanta $\vec{R}$ i moment $\vec{M}$ rezultantnog sprega sila. Podigne li se okomica u točki A, mogu se vektori $\vec{R}$ i $\vec{M}$ rastaviti u komponente u pravcu te okomice i pripadne linije u tangenci-

jalnoj ravnini. Reakcije tijela II na tijelo I svode se, dakle, na ove elemente: 1) silu $\vec{N}$ koja djeluje u A na tijelo I i stoji okomito na dodirnoj plohi. To je *normalna reakcija* kojom se tijelo II opire prodiranju tijela I u njegovu površinu; 2) silu $\vec{T}$ koja djeluje u istoj točki i leži u tangencijalnoj ravnini kroz točku A. To je tzv. *otpor trenja klizanja* kojim se tijelo II opire klizanju tijela I po njegovoj površini; 3) spreg sila kojega je moment predodčen vektorom $\vec{M}_v$ što stoji okomito na dodirnoj plohi i kojim se tijelo II opire uvrćanju tijela I u njegovu površinu. To je tzv. *otpor trenja vrtanja*; 4) spreg sila kojega vektor momenta $\vec{M}_k$ leži u tangencijalnoj ravnini kroz točku A i kojim se tijelo II opire kotrljanju tijela I po njegovoj površini. Taj se otpor naziva *otporom trenja kotrljanja*.



Sl. 51. Sile na tijelo na horizontalnoj hrapavoj podlozi kad sila F nastoji tijelo pomaknuti udesno

U tehničkoj je praksi najčešće da sve sile što djeluju na tijela u dodiru leže u vertikalnoj ravnini. Neka se tijelo A težine G nalazi na horizontalnoj hrapavoj podlozi, pri čemu na tijelo posredovanjem konopca prebačenog preko kotura C djeluju utezi na zdjelici B (sl. 51). Postupnim dodavanjem utega povećavat će se sila F u konopcu koja će nastojati da pomakne tijelo udesno, ali ono će ostati u miru sve dok sila F ne dostigne graničnu vrijednost $F_{\max}$. To dokazuje da na tijelo osim težine G , koja je uravnotežena normalnom reakcijom podloge N , djeluje u ravnini dodira tijela s horizontalnom podlogom još i *sila trenja* ili *otpor trenja*, $\vec{T} = -\vec{F}$, pri čemu je intenzitet sile $\vec{F}$ jednak težini utega sa zdjelicom. Sila trenja $\vec{T}$ predstavlja reakciju hrapave podloge pri pomicanju tijela. Odatle slijedi da se intenzitet sile trenja može mijenjati od nule do neke granične vrijednosti. Sve dok tijelo A miruje, sili F u konopcu suprotstavlja se sila trenja pri mirovanju ili *otpor statičkog trenja* $\vec{T}_0$. Eksperimentalno je utvrđeno da je najveća vrijednost otpora trenja pri mirovanju proporcionalna pritisku tijela okomito na podlogu, odnosno okomitoj reakciji podloge N , pa vrijedi relacija

$$(T_0)_{\max} = \mu_0 N, \quad (58)$$

gdje je μ_0 koeficijent proporcionalnosti koji se zove *koeficijent statičkog trenja mirovanja*. Njegov iznos zavisi od materijala tijela u dodiru i od karaktera dodirnih površina, temperature, vlažnosti, podmazivanja itd. (za materijale koji se upotrebljavaju u tehnici taj je koeficijent $\mu_0 < 1$). Kod statičkog trenja uvijek je zadovoljen uvjet $T_0 \leq \mu_0 N$.

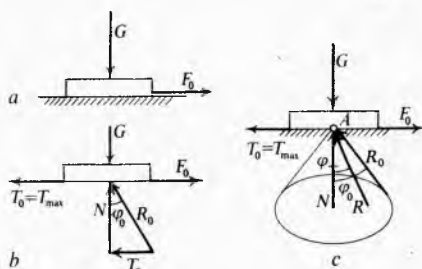
Ako sila F dodavanjem utega postane veća od $(T_0)_{\max}$, tijelo će se početi gibati i tada će na njega djelovati sila trenja pri klizanju T (otpor dinamičkog trenja) koja je također proporcionalna okomitom pritisku: $T = \mu N$, gdje je μ *koeficijent dinamičkog trenja pri klizanju*. Taj koeficijent zavisi donekle još i od brzine gibanja tijela. Numeričke vrijednosti μ_0 i μ mogu se za različite materijale naći u tehničkim priručnicima. Npr. pri trenju drvo o drvo je $\mu_0 = 0,4 \dots 0,7$, metal o metal $\mu_0 = 0,15 \dots 0,25$ i čelik o led $\mu_0 = 0,027$.

Coulombovi zakoni trenja klizanja glase: 1) sila trenja klizanja usmjerena je suprotno relativnoj brzini klizanja i ne zavisi od veličine dodirnih površina tijela u dodiru, a proporcionalna je normalnom pritisku, 2) vrijednost koeficijenta dinamičkog trenja pri klizanju zavisi od materijala i stanja dodirnih površina tijela i uvijek je manja od statičkog koeficijenta trenja pri mirovanju, tj. $\mu < \mu_0$.

Kut trenja i konus trenja. Neka na tijelo u obliku pravokutnog paralelepipeda težine G , koje leži na hrapavoj horizontalnoj podlozi, djeluje sila F_0 koja nastoji da ga pomiče udesno (sl. 52a). Ona je upravo tolika da je dovoljan najmanji vanjski impuls da pobudi gibanje tijela. Iz slike 52b, koja prikazuje oslobodeno tijelo, vidi se da osim sila G i F_0 na tijelo djeluje normalna reakcija podloge N i sila statičkog trenja T_0 kojom

je smjer suprotan smjeru sile F_0 . Sile N i T_0 komponente su sile R_0 koja prikazuje totalnu reakciju podloge. Kut φ_0 koji rezultanta R_0 zatvara s pravcem normalne reakcije N zove se *kut statičkog trenja*. Iz slike slijede relacije:

$$R_0 \cos \varphi_0 = N, R_0 \sin \varphi_0 = T_0, \tan \varphi_0 = \frac{T_0}{N} = \mu_0. \quad (59)$$



Sl. 52. Granična ravnoteža krutog tijela. a plan položaja, b kut trenja, c konus trenja

Ako se zamisli da sila F_0 , konstantna po iznosu, mijenja svoj pravac djelovanja rotirajući polagano oko točke A u horizontalnoj ravnini, rezultanta R_0 opisivat će konusnu plohu u prostoru (sl. 52c), održavajući pri tom tijelo u ravnoteži. Taj se konus naziva *konusom trenja*. Budući da on predstavlja granični slučaj, znači da će rezultanta R_0 uvijek ležati na površini tog konusa ako sila F ima graničnu vrijednost F_0 koja je upravo potrebna da bi nastupilo gibanje tijela. Ako je $F < F_0$, rezultanta R nalaziti će se unutar konusa trenja ($\varphi < \varphi_0$), tijelo miruje, a ako je izvan tog konusa, tijelo se giba.

Otpor trenja pri kotrljanju nastaje kada se tijelo valjkasta oblika kotrlja po površini drugog tijela. Npr. kotrljanje kružne ploče po horizontalnoj podlozi (sl. 53a) moguće je samo zbog postojanja statičkog trenja između ploče i podloge. Ako u točki A postoji statičko trenje, u idealnom slučaju dovoljan je i najmanji vanjski impuls da se valjak pokrene na horizontalnoj podlozi. Zapravo, zbog elastičnosti materijala podloge (uz pretpostavku da je valjak od vrlo čvrstog materijala) pojaviti će se lokalna deformacija podloge, pri čemu se ona, u općem slučaju, malo ulekne (sl. 53b). Prema tome, oba se tijela ne dodiruju u točki A , već se djelovanjem težine G i sile F dodiruju uzduž male površine $AA' \approx e$. Naime, povećanjem sile F smanjuje se pritisak valjka u točki A i pomiče se prema točki A' u smjeru djelovanja sile F . Reakcija podloge R može se rastaviti u horizontalnu komponentu $T_0 = \mu_0 N$ i vertikalnu komponentu, tj. okomitu reakciju N , pa slijedi da je moment sprega sila (F, T_0) uravnotežen momentom sprega sila (N, G). Prema tome, na valjak djeluje moment $M_k = Ne$, koji se naziva momentom otpora trenja pri kotrljanju. Horizontalna vučna sila F s hvatištem u O daje s tangencijalnom reakcijom T_0 pogonski spreg sila (F, T_0) kojega je moment $M_p = Fr$. Iz uvjeta $\Sigma M = 0$ slijedi da je $Ne = Fr$, što znači da za jednoliko kotrljanje valjka mora biti $M_k = M_p$, a iz uvjeta $\Sigma X = 0$ slijedi da je $T_0 = F$. Konačno iz uvjeta $\Sigma Y = 0$ slijedi da je $N = G$. Redukcijom sile R s obzirom na točku A (sl. 53c) dobije se u A normalna reakcija N , tangencijalna komponenta T_0 i spreg sila kojega je moment $M_k = Ne$, gdje je e koeficijent otpora trenja pri kotrljanju ili

krak otpora protiv kotrljanja. Taj koeficijent ima dimenziju duljine i obično se mjeri u centimetrima. Vrijednosti e za različite materijale mogu se naći u tehničkim priručnicima.

Pokusima je utvrđeno da M_k pri kotrljanju raste s povećanjem M_p sve do određene granice, tj. do trenutka kada nastupa $F = F_{\max}$. Sve dok je $F < F_{\max}$, valjak miruje, a kotrljanje počinje u trenutku kada je $F > F_{\max}$. Iz uvjeta ravnoteže valjka u graničnom slučaju slijedi da je

$$e = \frac{F_{\max}}{N} r = \frac{(T_0)_{\max}}{N} r \quad (60)$$

i odatle

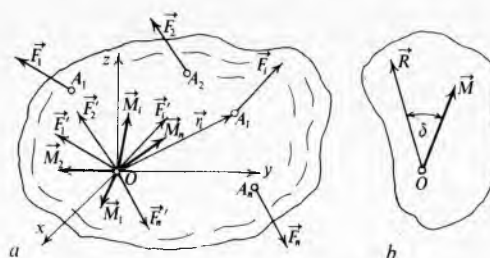
$$\frac{e}{r} = \frac{(T_0)_{\max}}{N} \quad (61)$$

Omjer e/r za većinu je materijala znatno manji od koeficijenta statičkog trenja, pa se time objašnjava težnja u tehničkoj praksi da se, kad god je to moguće, klizanje zamijeni kotrljanjem.

Prostorni sustavi sila

Redukcija prostornog sustava sila s obzirom na jednu točku analogna je onoj u ravninskom sustavu sila, uz primjenu pravila o paralelnom pomaku sile. Neka, npr., na kruto tijelo djeluje prostorni sustav sila različitih pravaca $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, pri čemu su $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ vektori položaja hvatišta $A_1, A_2, \dots, A_n$ zadanih sila, i neka je točka O centar redukcije na koju treba svesti zadane sile (sl. 54a). Prema pravilu o paralelnom pomaku sile svaka se od zadanih sila, npr. sila $\vec{F}_i$, može zamijeniti silom $\vec{F}'_i$ u točki O i momentom sprega sila $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. Primjenom tog postupka na sve zadane sile dobije se u točki O prostorni sustav konkurentnih sila $\vec{F}'_1, \dots, \vec{F}'_n$, koje se mogu sastaviti u rezultantu

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i \quad (62)$$



Sl. 54. Redukcija prostornog sustava sila na sustav s obzirom na jednu točku. a plan položaja, b glavni vektor i glavni moment sustava sila (vektori dinamike)

Osim toga, pri tom se dobije n spregova sila, kojih se momenti također mogu sastaviti u moment rezultantnog sprega sila

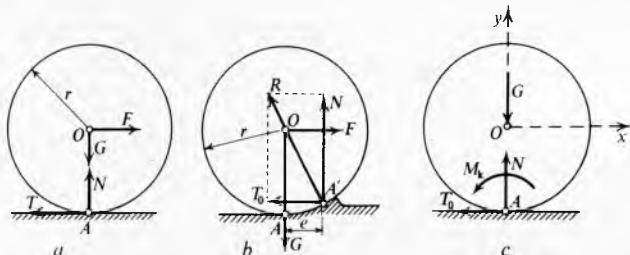
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i, \quad (63)$$

koji se može napisati i u obliku

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i). \quad (64)$$

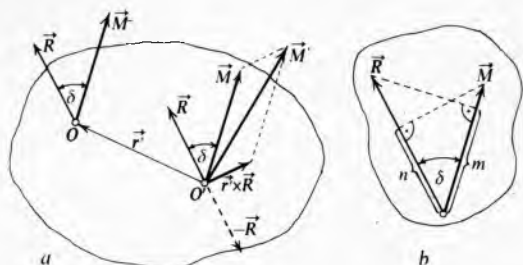
Slijedi da je zadani prostorni sustav sila različitog pravca, što djeluju u različitim točkama krutog tijela, ekvivalentan jednoj sili $\vec{R}$ (62) u bilo kojoj točki tijela i jednom spregu sila kojega je moment $\vec{M}$ (64). Sila $\vec{R}$ naziva se rezultantom ili glavnim vektorom zadanog sustava sila, a vektor $\vec{M}$ je moment rezultantnog sprega sila ili glavni moment. Oba vektora zajedno čine *dinamu prostornog sustava sila*. U općem slučaju vektori dinamike zatvaraju međusobno kut δ (sl. 54b).

Može se pokazati da i za prostorni sustav sila dinamika zavisi od izbora redukcijske točke O , ali da tada postoje dvije invarijante zadanog sustava sila. Promjena dinamike s obzirom na redukcijsku točku prikazana je na sl. 55a, gdje je kao nova redukcijska točka izabrana točka O' , pri čemu je r' vek-



Sl. 53. Moment otpora trenja pri kotrljanju valjkastog tijela. a plan položaja, b lokalna deformacija podloge, c sile i moment reducirani na točku A

torska koordinata točke O s obzirom na točku O' . Za određivanje dinamike zadanog sustava sila $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ s obzirom na točku O' dovoljno je da se dobiveni ekvivalentni sustav vektora dinamike $\vec{R}, \vec{M}$ u točki O reducira s obzirom na točku O' .



Sl. 55. Prikaz ovisnosti vektora dinamike o izboru točke redukcije

Hvatište vektora $\vec{M}$ može se odmah premjestiti u O' , jer je $\vec{M}$ slobodan vektor. Međutim, ako se sila $\vec{R}$ iz O premjesti u O' , mora se u O' dodati spreg sila $\vec{r}' \times \vec{R}$, pa se dobije novi moment rezultantnog sprega sila

$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{r}' \times \vec{R}. \quad (65)$$

Prema tome, tada u O' djeluje ista sila $\vec{R}$, ali je prijašnji moment $\vec{M}$ rezultantnog sprega sila u novoj redukciskoj točki promijenio svoj pravac i intenzitet. To znači da rezultanta $\vec{R}$ ne zavisi od izbora redukciske točke (prva invarijanta), dok se vektor $\vec{M}$ mijenja, jer je on funkcija vektora položaja $\vec{r}'$. Prema definiciji skalarnog umnoška vektora dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ slijedi (sl. 55b) da je

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = RM \cos \delta = Rn = Mm, \quad (66)$$

Ako se takav skalarni umnožak izrazi s obzirom na novu redukciskju točku O' , bit će

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{M}' &= \vec{R} \cdot (\vec{M} + \vec{r}' \times \vec{R}) = \\ &= \vec{R} \cdot \vec{M} + \vec{R} \cdot (\vec{r}' \times \vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{M}. \end{aligned} \quad (67)$$

Budući da je mješoviti vektorski umnožak vektora dinamike $\vec{R} \cdot (\vec{r}' \times \vec{R})$ jednak nuli, jer vektor $\vec{r}' \times \vec{R}$ stoji okomito na vektoru $\vec{R}$, slijedi da je $\vec{R} \cdot \vec{M}' = \vec{R} \cdot \vec{M}$, tj. skalarni umnožak vektora dinamike također ne zavisi od izbora redukciske točke (druga invarijanta). Prema tome, u općem slučaju prostornog sustava sila postoje dvije invarijante dinamike. Odatle slijedi da se u općem slučaju prostornog sustava sila takav sustav ne može zamijeniti jednom jedinom silom, kao u ravninskom sustavu sila.

Vektori dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ obično se određuju analitički, tj. njihovim projekcijama na koordinatne osi. Projekcije su vektora $\vec{R}$:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (68)$$

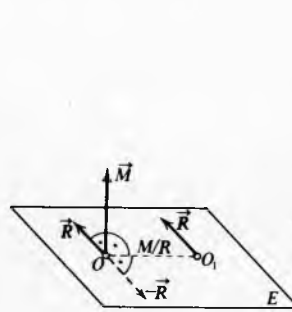
a projekcije momenta $\vec{M}$:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (Z_i Y_i - Y_i Z_i), \\ M_y &= \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (X_i Z_i - Z_i X_i), \\ M_z &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (Y_i X_i - X_i Y_i). \end{aligned} \quad (69)$$

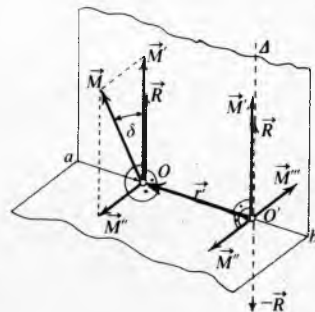
Te jednadžbe izražavaju analitičke karakteristike vektora dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ prostornog sustava sila. Iz tog razmatranja slijedi da su dva prostorna sustava sila među sobom ekvivalentna ako im se poklapaju glavni vektor $\vec{R}$ i glavni moment $\vec{M}$. Tada je dovoljno znati samo vektore dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ s obzirom na izabranu točku, odnosno samo šest veličina koje su određene jednadžbama (68) i (69).

Posebni slučajevi redukcije. Prostorni sustav sila može se svesti na jednostavnije oblike, pri čemu se može pojaviti: 1) ako

je $\vec{R} = 0$ i $\vec{M} = 0$, zadani je prostorni sustav sila u ravnoteži, tj. oba vektora dinamike moraju biti jednaka nuli. U statičkim zadacima ti su uvjeti vrlo važni; 2) ako je $\vec{R} = 0$, a $\vec{M} \neq 0$, sustav sila svodi se na rezultantni spreg sila s obzirom na točku O ; 3) ako je $\vec{R} \neq 0$ i $\vec{M} = 0$, sustav sila svodi se na jednu silu u točki O ; 4) sustav se svodi također na jednu silu u točki O kada je $\vec{R} \neq 0$ i $\vec{M} \neq 0$, a vektori dinamike stoje međusobno okomito. Tada se može vektor $\vec{M}$ zamijeniti dvjema jednakim paralelnim silama: silom $\vec{R}$ u O_1 i silom $-\vec{R}$ u O , koje leže u ravnini okomitoj na vektor $\vec{M}$. Te sile čine spreg sila s krakom M/R (sl. 56) i međusobno se poništavaju u točki O . Zadan sustav sila svodi se, dakle, tada na jednu silu $\vec{R}$ kojoj pravac djelovanja prolazi kroz točku O_1 , a to je onda ravninski sustav sila.



Sl. 56. Prikaz slučaja kad vektori dinamike stoje međusobno okomito



Sl. 57. Uz definiciju centralne osi prostornog sustava sila

Centralna os prostornog sustava sila. Neka se za opći slučaj kada je $\vec{R} \cdot \vec{M} \neq 0$ pretpostavi da je prostorni sustav sila $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ reduciran na dinamiku $\vec{R}, \vec{M}$ u točki O (sl. 57) i da je vektor $\vec{M}$ rastavljen u ravnini kroz $\vec{R}$ i $\vec{M}$ u dvije komponente $\vec{M}'$ i $\vec{M}''$ tako da se prva poklapa s pravcem rezultante $\vec{R}$, a druga stoji okomito na tom pravcu. Ako se zatim na okomici ab kroz O izabere nova točka redukcije O' na udaljenosti $OO' = M''/R$, u O' dobiju se vektori $\vec{M}'$ i $\vec{M}''$ bez promjene (slobodni vektori), dok se sila $\vec{R}$ u O transformira u silu $\vec{R}$ u točki O' i u spreg sila kojeg je moment $\vec{M}''' = \vec{r}' \times \vec{R}$, gdje je $\vec{r}'$ vektorska koordinata točke O' s obzirom na točku O . Iz sl. 57 slijedi da je $\vec{M}''' = -\vec{M}''$, jer je

$$|\vec{M}'''| = r' \cdot R \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{M''}{R} \cdot R \cdot 1 = |\vec{M}''|. \quad (70)$$

Vektori se $\vec{M}'''$ i $\vec{M}''$, dakle, poništavaju, i u točki O' ostaju samo vektori $\vec{R}$ i $\vec{M}'$, pri čemu je $\vec{R} \parallel \vec{M}'$. Tada točka O' ima svojstvo da oba vektora dinamike leže na istom pravcu A koji se zove centralna os prostornog sustava sila. To svojstvo imaju sve točke te osi. Za sve ostale točke koje ne leže na toj osi vektori dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ zatvaraju međusobno kut δ . Prema tome, geometrijski je mjesto točaka u prostoru za koje oba vektora dinamike $\vec{R}$ i $\vec{M}$ imaju zajednički pravac djelovanja centralna os prostornog sustava sila. Iz sl. 57 vidi se da je $\vec{M}' < \vec{M}$, što znači da intenzitet momenta rezultantnog sprega sila ima najmanju vrijednost za točke centralne osi. Svakoju točku u prostoru odgovara posve određeni pravac vektora $\vec{M}$. Može se dokazati da su putanje tih pravaca zavojnice kojih je uzdužna os centralna os zadanog sustava sila. Zbog toga se promatrani specijalni slučaj dinamike zove *vijak sila* ili *dinamički vijak*.

Uvjeti ravnoteže prostornih sustava sila. Da bi proizvoljan prostorni sustav sila što djeluje na slobodno kruto tijelo bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da oba vektora dinamike budu istodobno jednaka nuli, tj. da je $\vec{R} = 0$ i $\vec{M} = 0$ (uvjeti ravnoteže u vektorskom obliku), odnosno da su sve njihove projekcije na koordinatne osi jednake nuli:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
 R_y &= \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \\
 R_z &= \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \\
 M_x &= \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0 \\
 M_y &= \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (X_i z_i - Z_i x_i) = 0 \\
 M_z &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (Y_i x_i - X_i y_i) = 0.
 \end{aligned} \quad (71)$$

Te jednadžbe izražavaju analitičke uvjete ravnoteže prostornog sustava sila, tj. za ravnotežu je potrebno i dovoljno da zbrojevi projekcija svih sila na svaku od triju koordinatnih osi i zbroj momenata za te osi budu jednaki nuli.

Posebni slučajevi: a) Ako sve sile što djeluju na slobodno kruto tijelo leže u jednoj ravnini, onda se uvjeti ravnoteže mogu napisati u poznatom obliku:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \quad (72)$$

b) Ako na slobodno kruto tijelo djeluje prostorni sustav paralelnih sila i ako se os z upravlja paralelno sa zadanim silama, moment svake sile s obzirom na tu os bit će jednak nuli. Tada su uvjeti ravnoteže prvi, drugi i šesti u (71) zadovoljeni bez obzira na intenzitete zadanih sila, pa su za ravnotežu potrebna i dovoljna samo tri uvjeta:

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad (73)$$

što znači da je potrebno i dovoljno da zbroj njihovih projekcija paralelnih s tim silama bude jednak nuli i da zbroj njihovih momenata s obzirom na svaku od dviju koordinatnih osi koje stoje okomito na zadanim silama bude također jednak nuli. c) Ako sve sile zadanog sustava paralelnih sila što djeluju na slobodno kruto tijelo leže u istoj ravnini, npr. u ravnini Oxz , onda su za ravnotežu takva sustava sila potrebna i dovoljna samo dva uvjeta ravnoteže:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0. \quad (74)$$

d) I konačno, djeluje li na slobodno kruto tijelo prostorni sustav sila koje se sijeku u jednoj točki, uvjeti ravnoteže mogu se napisati u poznatom obliku:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (75)$$

Tada su zadovoljena posljednja tri uvjeta iz općih uvjeta ravnoteže (71) bez obzira na intenzitet i pravac zadanih sila, jer svaka od tih sila siječe sve tri koordinatne osi.

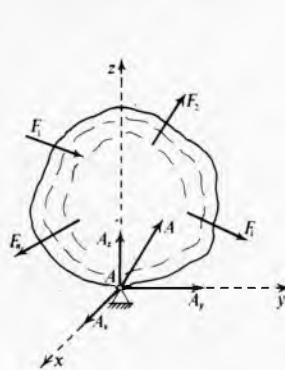
Ravnoteža vezanog krutog tijela. Ako zadani prostorni sustav sila djeluje na vezano (neslobodno) kruto tijelo, pojavit će se reakcije nametnutih veza, kao posljedica djelovanja zadanih aktivnih sila. Dodaju li se zadanim silama $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ reakcije veza $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_m$, zadano kruto tijelo može se smatrati slobodnim. Tada jednadžbe ravnoteže glase:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m N_{ix} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{ix}^{F_i+N_i} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^m N_{iy} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iy}^{F_i+N_i} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n Z_i + \sum_{i=1}^m N_{iz} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iz}^{F_i+N_i} &= 0.
 \end{aligned} \quad (76)$$

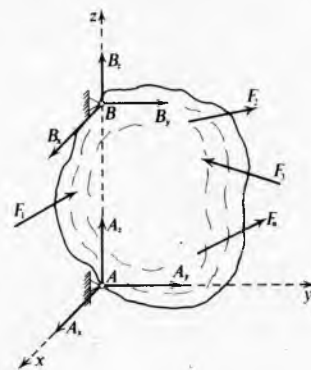
Kad je kruto tijelo vezano za nepomičnu točku, npr. sfernim zglobov (sl. 58), uz pretpostavku da na tijelo djeluju zadane sile i reakcija veze u A koje ne leže u istoj ravnini i ne sijeku se u istoj točki, onda uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n X_{ix} + A_x &= 0, & \sum_{i=1}^n Y_{iy} + A_y &= 0, & \sum_{i=1}^n Z_{iz} + A_z &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n M_{Ax}^{F_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{Ay}^{F_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{Az}^{F_i} &= 0.
 \end{aligned} \quad (77)$$

Posljednje tri jednadžbe ne sadrže komponente reakcije, jer pravac djelovanja te sile prolazi kroz točku A . Prema tome, te jednadžbe izražavaju zavisnost među aktivnim silama koja je potrebna za ravnotežu tijela, pri čemu se prve tri jednadžbe mogu upotrijebiti za određivanje komponenta reakcije. Odatle slijedi zaključak da za ravnotežu krutog tijela s jednom nepomičnom točkom zbroj momenata svih aktivnih sila s obzirom na tri koordinatne osi kojih početak leži u točki A mora biti jednak nuli. U kinematici se pokazuje da je položaj krutog tijela tada određen trima nezavisnim parametrima, npr. Eulerovim kutovima φ, ψ, θ . Zbog toga se kaže da takvo tijelo ima tri stupnja slobode gibanja.



Sl. 58. Kruto tijelo vezano na sferni zglob



Sl. 59. Kruto tijelo učvršćeno u dvjema nepomičnim točkama

Ako su dvije točke A i B krutog tijela na koje djeluje prostorni sustav sila $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ učvršćene nepomično (sl. 59), pri čemu je linija AB izabrana za os z pravokutnog koordinatnog sustava xyz , tijelo može rotirati samo oko osi z , koja se zbog toga zove *os rotacije*. Položaj takva tijela određen je jednim jedinim parametrom (kut rotacije φ oko nepomične osi), pa tijelo tada ima samo jedan stupanj slobode gibanja. Zbog djelovanja zadanih aktivnih sila pojavit će se u točkama A i B reakcije A i B , kojih su komponente upravljene u pravcima koordinatnih osi. Ako se razmak između točaka A i B označi sa a , jednadžbe se ravnoteže mogu napisati u obliku:

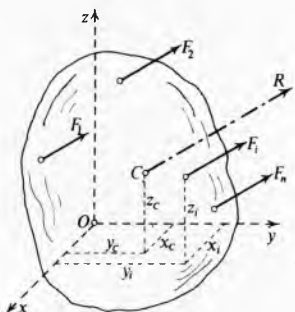
$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n X_i + A_x + B_x &= 0, & \sum_{i=1}^n M_x^{F_i} - B_y a &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n Y_i + A_y + B_y &= 0, & \sum_{i=1}^n M_y^{F_i} + B_x a &= 0, \\
 \sum_{i=1}^n Z_i + A_z + B_z &= 0, & \sum_{i=1}^n M_z^{F_i} &= 0.
 \end{aligned} \quad (78)$$

Posljednja jednadžba ne sadrži komponente reakcija i izražava vezu među aktivnim silama koja je potrebna za ravnotežu tijela. Prema tome, za tijelo s dvjema nepomičnim točkama (s nepomičnom osi) algebarski zbroj momenata svih aktivnih sila s obzirom na nepomičnu os mora biti jednak nuli. Prvih pet jednadžbi (78) služe za određivanje nepoznatih komponenta reakcija $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$. Zadatak je statički neodređen, jer se uzdužne komponente reakcija A_z i B_z ne mogu odrediti svaka posebno. Iz treće jednadžbe može se odrediti samo zbroj $A_z + B_z$. Međutim, ako se u točki B ne nalazi sferni nego cilindrični zglob, koji ne sprečava uzdužno klizanje tijela po osi rotacije, onda je $B_z = 0$, pa zadatak postaje statički određen.

Središte paralelnih sila u prostoru. Ako na kruto tijelo djeluje sustav paralelnih i jednako usmjerenih sila $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, kojih su hvatišta određena koordinatama $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ (sl. 60), očito je da njihova rezultanta $\vec{R}$ i njezine komponente imaju istu orijentaciju u prostoru, pri čemu je intenzitet rezultante

$R = \sum_{i=1}^n F_i$. Hvatište te rezultante C zove se središte (centar) paralelnih sila. Ta točka ima svojstvo da se pri okretanju svih komponentnih paralelnih sila oko njihovih hvatišta za isti kut i u istu stranu i rezultanta okrene oko središta paralelnih sila C za isti taj kut i u istu stranu. Prema tome, ta točka C ne mijenja svoj položaj s obzirom na tijelo, a njezine koordinate određene su formulama:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (79)$$



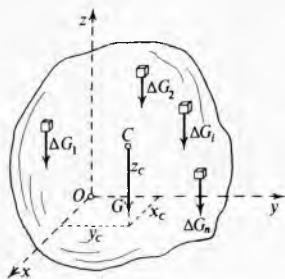
Sl. 60. Središte prostornog sustava paralelnih sila

Izrazi u brojnicih tih jednadžbi zovu se statički momenti zadanog sustava sila s obzirom na ravnine yz , xz , xy . Ako je ishodište koordinata izabrano u središtu paralelnih sila C , onda je $x_C = y_C = z_C = 0$, tj. statički momenti zadanog sustava sila jednaki su nuli.

Težište krutog tijela

Ako sustav paralelnih sila nastaje djelovanjem sile teže, tj. privlačne sile kojom Zemlja privlači sva tijela prema svojem središtu, središte se takva sustava paralelnih sila istog smjera što djeluje na kruto tijelo naziva težištem tijela. Za svako tijelo može se smatrati da je sastavljeno od veoma mnogo čestica mase $m_1 \dots m_n$ u obliku malih paralelepipeda volumena ΔV_i i da na svaku česticu u gravitacijskom polju djeluje elementarna težina ΔG_i . Tada je približno težina tijela $G = \sum_{i=1}^n \Delta G_i$

(sl. 61). Prema tome, sve sile takva sustava zapravo su upravljene prema Zemljinu središtu i čine prostorni konkurentni



Sl. 61. Težište tijela

sustav sila. Međutim, za tijela kojih su dimenzije zanemarljivo male u usporedbi sa Zemljinim polumjerom (≈ 6370 km) može se smatrati da su sve sile ΔG_i među sobom paralelne i da prilikom bilo kakva okretanja tijela imaju za svaku česticu tijela konstantne intenzitete. Polje sile u kojemu su ispunjena ova dva uvjeta zove se homogeno polje sile. Veličina

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G}{\Delta V} \right) \quad (80)$$

zove se *specifična težina* (težina jedinice obujma) u promatranoj točki tijela, pri čemu je u općem slučaju $\gamma = f(x, y, z)$, a veličina $\rho = \gamma/g$ je *gustoća* (specifična masa, masa jedinice volumena)

tijela u promatranoj točki. Prema tome i ρ je funkcija (neprekidna ili prekidna) koordinata točaka tijela. Ako je tijelo homogeno, γ i ρ imaju konstantne vrijednosti. Paralelne elementarne sile ΔG_i imaju svoje središte C kojem su približne vrijednosti koordinata:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i x_i}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i z_i}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i} \quad (81)$$

gdje su x_i, y_i, z_i koordinate hvatišta sile ΔG_i pojedinih čestica tijela. Prema tome, težištem tijela naziva se točka kojoj se položaj ne mijenja prema krutom tijelu, pri čemu kroz tu točku prolazi pravac djelovanja rezultante elementarnih težina pri bilo kojem položaju tijela u prostoru. Težište je zapravo jedna geometrijska točka i ona se može nalaziti i izvan konture promatranog tijela (npr. za prsten).

Težina je bilo koje čestice ΔG_i homogenog tijela proporcionalna elementarnom obujmu ΔV_i te čestice, $\Delta G_i = \gamma \Delta V_i$, a isto tako je i ukupna težina tijela G proporcionalna obujmu V cijelog tijela, $G = \gamma V$. Kad se uvrste vrijednosti za G i ΔG_i u formule (81) i kad se skрати sa γ , mogu se te formule napisati u obliku:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta V_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta V_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta V_i}{V} \quad (82)$$

Odatle slijedi da položaj težišta homogenog tijela zavisi samo od geometrijskog oblika promatranog tijela, a ne zavisi od njegove specifične težine. Zbog toga se točka C , kojoj su koordinate izražene formulama (82), naziva težištem obujma V . Sličnim rasuđivanjem može se zaključiti da je, ako je tijelo u obliku homogene ploče male debljine, položaj težišta određen formulama:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i}{A}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta A_i}{A} \quad (83)$$

gdje je A površina cijele ploče, a ΔA_i površina pojedinog elementa ploče. Točka kojoj su koordinate određene formulama (83) zove se težište površine A . Analognim postupkom dobiju se formule za koordinate težišta linije:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta L_i}{L}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta L_i}{L}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta L_i}{L} \quad (84)$$

gdje je L duljina cijele linije, a ΔL_i duljina elementa linije. Prema tome, težišta homogenih tijela određuju se kao težišta pripadnih obujma, površina i linija. Ako se pretpostavi da broj n čestica tijela raste u beskonačnost, onda točna vrijednost sile G iznosi

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta G_i = \iiint_{(V)} dG = \iiint_{(V)} \gamma dV \quad (85)$$

pri čemu se trostruki integral proteže na cio obujam V tijela. Tada se npr. formula koordinate x_C može napisati u obliku

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta G_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta G_i} = \frac{\iiint_{(V)} x dG}{\iiint_{(V)} dG} = \frac{\iiint_{(V)} x \gamma dV}{\iiint_{(V)} \gamma dV} \quad (86)$$

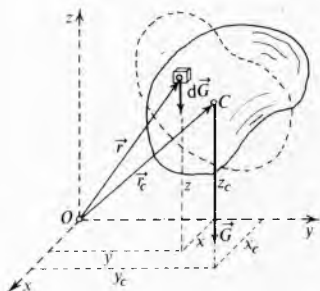
Prema tome, opće točne formule za određivanje težišta tijela glase:

$$x_C = \frac{\iiint_{(V)} x dG}{G} = \frac{\iiint_{(V)} \gamma x dV}{\iiint_{(V)} \gamma dV}, \quad y_C = \frac{\iiint_{(V)} y dG}{G} = \frac{\iiint_{(V)} \gamma y dV}{\iiint_{(V)} \gamma dV} \quad (87)$$

$$z_c = \frac{\iiint_{(V)} z dG}{G} = \frac{\iiint_{(V)} \gamma z dV}{\iiint_{(V)} \gamma dV}. \quad (87)$$

Za homogeno je tijelo $\gamma = \text{const.}$, pa nestaje iz tih jednadžbi, a kako je $\iiint_{(V)} dV = V$, vrijede formule:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV. \quad (88)$$



Sl. 62. Vektorski prikaz određivanja težišta krutog tijela

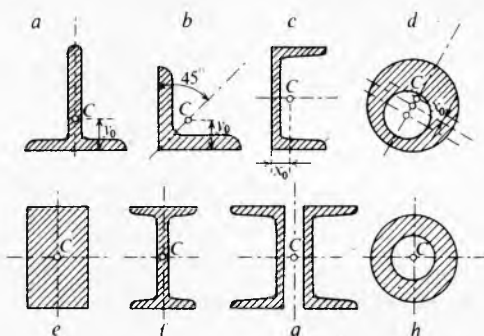
U tim formulama imaju elementarni obujmi dV isto značenje kao i elementarne težine ΔG_i u formulama (81). Ako se vektor položaja točke tijela kojoj su koordinate x, y, z označi sa $\vec{r}$, a vektor položaja težišta tijela sa $\vec{r}_c$ (sl. 62), onda se formule (87) u općem slučaju svode na vektorski oblik

$$\vec{r}_c = \frac{1}{G} \iiint_{(V)} \gamma \vec{r} dV, \quad (89)$$

odnosno za homogeno tijelo na oblik

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{r} dV. \quad (90)$$

Metode određivanja težišta. Može se pokazati da, ako homogeno tijelo ima ravninu simetrije, os simetrije ili središte simetrije, težište tijela leži u pripadnoj ravnini simetrije, na osi simetrije, odnosno u središtu simetrije. Ako ravni lik ima os simetrije, težište lika leži na toj osi. Izabere li se os simetrije za komparativnu os, svakoj čestici lika s pozitivnim razmakom od te osi odgovara jednaka čestica koja leži nasuprot s negativnim razmakom, i prema tome je zbroj statičkih momenata s obzirom na os simetrije jednak nuli. Odatle se zaključuje da je za ravne likove što imaju jednu os simetrije dovoljno odrediti samo jednu koordinatu x_0 ili y_0 težišta C (sl. 63 a, b, c, d).

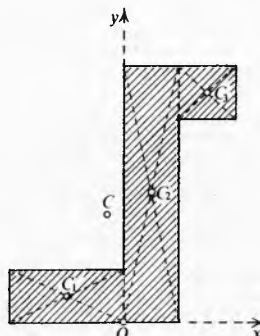


Sl. 63. Položaj težišta ravnih likova. a, b, c, d likovi s jednom osi simetrije, e, f, g, h likovi s dvije osi simetrije

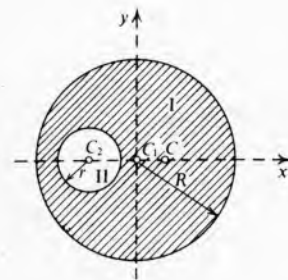
Težište ravnog lika s dvije ili više osi simetrije leži u sjecištu tih osi (sl. 63 e, f, g, h). Za tri međusobno pravokutne ravnine simetrije težište C tijela leži u njihovu sjecištu (npr. kocka ili elipsoid). Točka C naziva se tada još i središtem simetrije.

Metoda rastavljanja. Ako se tijelo može rastaviti na konačan broj takvih dijelova za koje je poznat položaj težišta svakog

od njih, točan položaj težišta promatranog tijela može se izračunati prema formulama (81), (82) i (83). Pri tom će broj komponenta u svakom zbroju biti jednak broju dijelova na koje je tijelo rastavljeno. Npr. pri određivanju koordinata težišta homogene ploče (sl. 64) ploča se podijeli na tri pravokutnika, pa se izračunaju njihove površine i koordinate težišta svakog od njih s obzirom na koordinatne osi x i y . Pomoću (83) dobiju se koordinate težišta C , koje se tada nalazi izvan ploče, kao što je prikazano na crtežu.



Sl. 64. Određivanje težišta homogene ploče podjelom na tri pravokutnika



Sl. 65. Određivanje težišta kružne plohe s izrezom metodom dopunjavanja

Metoda dopunjavanja zapravo je poseban slučaj metode rastavljanja, a primjenjuje se kod tijela koja imaju izreze (šupljine) ako je poznat položaj težišta tijela bez izreza, a također i položaj težišta izrezanih dijelova. Sadrži li ravna figura izreze, odnosno prostorni lik šupljine, s njima treba računati kao s negativnim plošinama, odnosno obujmima. Npr. pri određivanju položaja težišta C kružne plohe polumjera R iz koje je izrezana kružna ploha polumjera r (sl. 65) očito je da točke C , C_1 i C_2 leže na pravoj liniji, jer je ona os simetrije. Zatim se plošina ploče s izrezom dopuni do pune kružne ploče (dio I), pa se od tako dobivene površine oduzme plošina izrezane kružne plohe (dio II). Primjenom (83) izračunaju se koordinate težišta C , pri čemu se plošina dijela II uzima s negativnim predznakom. Nađeno težište C leži desno od točke C_1 .

Za sastavljene likove (sl. 64) položaj težišta određuje se obično grafički pomoću poligona sila i verižnog poligona. U tu svrhu zadani se lik crta u prikladnom mjerilu za duljine (prostorni lik u projekcijama na dvije međusobno okomite ravnine). Zatim se zadana figura rastavlja u jednostavne sastavne dijelove i u parcijalnim težištima tih dijelova dodaju se paralelni vektori kojima su duljine proporcionalne plošinama, odnosno obujmima sastavnih dijelova. U izabranom mjerilu crta se vektorski i verižni poligon. Težište mora ležati na pravcu djelovanja rezultantnog vektora. Ponovi li se taj postupak zaokrenuvši sve vektore za isti kut (najbolje za 90°), dobije se drugi rezultatni vektor kojega sjecište s prvim vektorom daje traženo težište tijela. Za prostorni lik istu konstrukciju treba još jednom ponoviti u tlocrtnoj ravnini. Ako su vektori zaokrenuti za 90° , nije potrebno ponovno crtati novi vektorski poligon, jer su polne zrake upravljene okomito na zrake u prvom vektorskom poligonu, pa se u novom verižnom poligonu mogu neposredno ucrtati pripadne nove verižnice.

Težište kružnog luka. Za kružni luk polumjera r sa središnjim kutom $AOB = 2\alpha$ težište luka leži zbog njegove simetričnosti na osi Ox (sl. 66). Duljina je luka $L = 2r\alpha$, a duljina lučnog elementa $dL = r d\varphi$. Koordinata je tog elementa $x = r \cos \varphi$. Ako se u izrazu (88) formalno zamijeni volumen V s duljinom L , dobiva se

$$x_c = \frac{1}{L} \int x dL = \frac{r^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{r^2}{L} \sin \alpha. \quad (91)$$

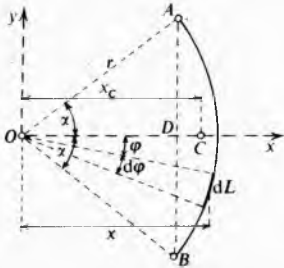
Odatle slijedi da se težište C nalazi na osi simetrije na udaljenosti

$$x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (92)$$

gdje je kut α u radijanima. Kad je $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ (polukružni luk), dobiva se

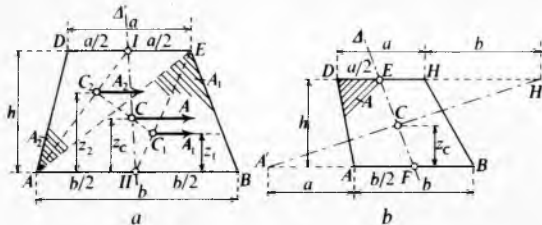
$$x_C = r \frac{2}{\pi} = 0,637r, \quad (93)$$

a za $\alpha = \pi$ je $x_C = 0$ (kružnica).



Sl. 66. Uz određivanje težišta kružnog luka

Težište trapeza i kružnog isječka. Pri određivanju težišta trapezne homogene plohe zamišlja se da je ona rastavljena na elementarne plohe paralelne s osnovicom AB . Težište C plohe leži na raspolovnici $I-II$ trapeza, koja je označena kao os Δ . Položaj težišta C na toj raspolovnici određuje se grafički dijeljenjem plohe u dvije trokutne plohe, AED i ABE , i pronalaženjem parcijalnih težišta C_1 i C_2 (sl. 67a). Spojnica tih težišta C_1 i C_2 drugo je geometrijsko mjesto težišta ukupne plohe, i zbog toga traženo težište C trapezne plohe leži u sjecištu linija $I-II$ i $C_1 C_2$. Položaj težišta C na raspolovnici Δ dobije se analitički ako se zamisli da sila teža djeluje paralelno s osnovicom AB .



Sl. 67. Prikaz dvaju postupaka za određivanje težišta trapezne plohe

U težištima C_1 i C_2 djeluju tada sile A_1 i A_2 na udaljenostima $z_1 = \frac{1}{3}h$ i $z_2 = \frac{2}{3}h$ od osnovice AB . Primjenom Varignonova poučka, s obzirom na neku točku na osnovici AB , može se odrediti visina z_C težišta iznad osnovice AB iz jednadžbe

$$z_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}. \quad (94)$$

Do istog rezultata dolazi se ako se na produžetak osnovice AB nanese odsječak $AA' = a$, a na produžetak stranice DH odsječak $HH' = b$, pri čemu se dobiju točke A' i H' . U sjecištu spojnice tih točaka i raspolovnice Δ trapezne plohe leži težište C (sl. 67b), što slijedi iz geometrijske interpretacije, tj. da je

$$\frac{h}{z_C} = \frac{3(b+a)}{b+2a}, \quad (95)$$

i odatle

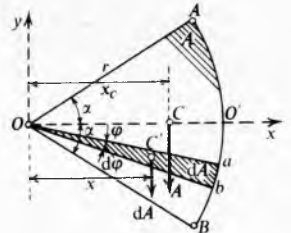
$$z_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}. \quad (96)$$

Pri određivanju položaja težišta materijalne plohe u obliku kružnog isječka $OA'OB$ (sl. 68) zadana se ploha rastavlja u elementarne isječke površine $dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$, kojih težište C' leži na udaljenosti $\frac{2}{3}r$ od točke O , jer se ta površina može smatrati trokutom. Prema tome, apscisa je tog težišta $x_C = \frac{2}{3}r \cos \varphi$, a kako je površina zadane plohe $A = r^2 \alpha$, i ako se primijeni momentno pravilo, slijedi da je

$$A x_C = r^2 \alpha x_C = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} r^2 d\varphi \frac{2}{3} r \cos \varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi, \quad (97)$$

a odatle je

$$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (98)$$



Sl. 68. Uz određivanje težišta plohe u obliku kružnog isječka

Kad je kružni isječak jednak polovici kružne ploče ($\alpha = \pi/2$), dobije se

$$x_C = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,424r, \quad (99)$$

a za četvrtinu kružne ploče ($\alpha = 45^\circ$, $\sin \alpha = \sqrt{2}/2$) vrijedi

$$x_C = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \sqrt{2} = 0,6r, \quad (100)$$

i konačno za $\alpha = \pi$ je $x_C = 0$ (kružna ploča).

Pappus-Guldinova pravila. Pravila su poznata pod tim nazivom jer ih je prvi formulirao Pappus Aleksandrijski (u drugoj polovici III st.), a P. Guldin (1577—1643) objavio u djelu *Centrobaryca*.

Oplošje rotacijskog tijela. Ako se krivulja BD okreće oko osi $z-z$ što leži u njezinoj ravnini (sl. 69a), nastaje rotacijska ploha s oplošjem koje je određeno izrazom

$$A = 2\pi \int x ds. \quad (101)$$

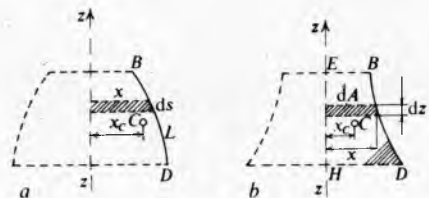
Integral u ovom izrazu predstavlja statički moment krivulje s obzirom na os $z-z$. Ako je L duljina krivulje BD , a x_C udaljenost njezina težišta C od osi $z-z$, onda je

$$\int x ds = L x_C, \quad (102)$$

pa pomoću formule za A slijedi da je

$$A = 2\pi x_C L, \quad (103)$$

tj. oplošje rotacijske plohe A koja nastaje rotacijom neke linije oko osi što leži u njezinoj ravnini jednako je umnošku duljine te linije i puta što ga težište linije opiše pri jednom okretaju oko osi $z-z$.



Sl. 69. Uz određivanje oplošja (a) i obujma (h) rotacijskog tijela prema Pappus-Guldinovima pravilima

Obujam rotacijskog tijela. Kada se neka ravna ploha $BDHE$ ploštine A okreće oko osi koja leži u njezinoj ravnini, nastaje rotacijsko tijelo (sl. 69b). Iz slike se vidi da je $dA = x dz$, a težište tog elementa udaljeno je za $\frac{1}{2}x$ od osi $z-z$. Njegov je statički moment s obzirom na tu os jednak $\frac{1}{2}x^2 dz$, i prema tome ukupni je statički moment zadane plohe

$$A x_C = \frac{1}{2} \int x^2 dz, \quad (104)$$

a kako je obujam $V = \pi \int x^2 dz$, slijedi da je

$$V = 2\pi x_c A. \quad (105)$$

Ta formula izražava pravilo za izračunavanje obujma rotacijskih tijela: obujam rotacijskog tijela koje nastaje okretanjem neke ravne plohe ploštine A oko osi što leži u njezinoj ravnini jednak je umnošku ploštine A i puta što ga njezino težište opiše pri jednom okretanju. Ako se izvodna linija ili ploha okrene samo za kut $\alpha < 360^\circ$, vrijednosti prema formulama (103) i (105) treba pomnožiti još omjerom $\alpha/360^\circ$.

Ta pravila omogućuju brzo izračunavanje oplošja i obujma rotacijskih tijela, ako su poznata težišta pripadnih linija, odnosno ploha. I obratno, pomoću istih formula mogu se odrediti težišta linija i ploha, ako su poznata pripadna oplošja, odnosno obujmi.

D. Bazjanac

KINEMATIKA

Kinematika proučava geometrijska svojstva gibanja. Kinematika (prema grčkom *κίνημα* kinema *gibanje*) potreban je uvod u dinamiku i temelj kinematičke analize u teoriji mehanizama. Budući da je gibanje promjena položaja tijela u prostoru, često se kinematika naziva *geometrijom gibanja*. U koordinatnom sustavu koji nije vezan uz tijelo što se giba položaj tijela zavisi od vremena. Stoga su prostor i vrijeme osnovni pojmovi od kojih se polazi u kinematici. Kao mjerljive veličine, prostor ima tri dimenzije, a vrijeme jednu. Prema J. L. Lagrangeu kinematika je geometrija u četverodimenzionalnom prostoru u kojem pored tri prostorne koordinate dolazi vrijeme kao četvrta. U klasičnoj mehanici prostor i vrijeme smatraju se apsolutnim veličinama. A. Einstein uveo je drugačiji način gledanja koji dolazi do izražaja kad se brzine približavaju brzini svjetlosti. Tehničke zadatke, gdje su brzine tijela mnogo manje od brzine svjetlosti, zadovoljavaju u potpunosti postavke klasične mehanike. Vrijeme se smatra pozitivnom promjenljivom veličinom koja se za sve promatrače, bez obzira na način kojim se gibaju, mijenja jednako. Sva gibanja tijela promatraju se s obzirom na koordinatni sustav koji može biti pomičan ili se pretpostavlja da je nepomičan. Često se nepomični sustav vezuje uz Zemlju, te se takvo mirovanje treba shvatiti samo uvjetno. U kinematici se upotrebljavaju različiti pravokutni koordinatni sustavi. Već prema gibanju, odabire se najpovoljniji, npr. Descartesov sustav, polarni, cilindrični i sferni, a posebno je važan u mehanici prirodni koordinatni sustav. Točka pri gibanju iz jednog položaja u drugi opisuje u odabranom koordinatnom sustavu zakrivljenu ili pravu liniju koja se naziva putanjom. Položaj točke na putanji određen je orijentiranom dužinom s obzirom na neki odabrani pol. Takav radijvektor položaja funkcija je vremena te ima prirast po duljini i smjeru. Taj prirast, podijeljen pripadnim vremenom, jest vektor brzine točke. Dijeleći ukupni prirast vektora brzine pripadnim vremenom, dobiva se vektor ubrzanja točke koji pokazuje kako se mijenja brzina po iznosu i smjeru. Poznavanje vektora položaja, brzine i ubrzanja pojedinih točaka tijela ključni je problem kinematike. U nekim posebnim slučajevima dovoljno je poznavati gibanje samo jedne točke na tijelu, ili se dimenzije tijela s obzirom na promatrani problem mogu zanemariti, pa se tada položaj tijela poistovjećuje s položajem točke u prostoru.

Stoga se u kinematici, radi lakšeg razumijevanja, razlikuje *kinematika čestice* (materijalne točke) i *kinematika krutog tijela*. Prema obliku putanje kinematika čestice razmatra pravocrtno i krivocrtno gibanje. U kinematici tijela razlikuju se dva osnovna načina gibanja: translacija i rotacija. Kao posebni slučajevi gibanja tijela, koji su česti u tehnici, proučavaju se ravninsko (ravansko) ili planarno gibanje, te sferno gibanje ili gibanje oko nepomične točke. Sva gibanja krutog tijela mogu se zamisliti sastavljena od osnovnih načina gibanja. Tako su komponente ravninskog gibanja translacija i jedna rotacija, a sfernoga tri rotacije. Opće gibanje tijela opisuje se radi jednostavnosti pomoću translacije i sfernog gibanja (Chaslesov poučak). Gi-

banja koja nastaju tako da se na osnovno gibanje prenosi gibanje nekoga drugog tijela promatraju se kao sastavljena gibanja. Pri tom se razlikuje relativno i prijenosno gibanje koje rezultira apsolutnim. Da li se radi o takvom slaganju gibanja ili o gibanju koje se zamišlja sastavljeno od osnovnih načina gibanja, više je pitanje fizikalne slike, a manje principijelnog pristupa.

U mehanici tijela promjenljivog oblika (v. *Mehanika fluida*; v. *Teorija elastičnosti*) određuje se također položaj pojedinih čestica tijela u prostoru, bilo pri gibanju ili pri promjeni oblika. Pri tom čestice tijela mijenjaju međusobni položaj, što se ne događa s krutim tijelom, pa se kinematičke pojave takvih tijela posebno proučavaju.

Kinematika čestice

Pravocrtno gibanje. Ako pri gibanju čestica opisuje pravu crtu, njezina je putanja pravac, a gibanje se naziva pravocrtnim. Položaj čestice najjednostavnije se određuje pri takvu gibanju udaljenošću od proizvoljno odabranog pola na putanji.



Sl. 1. Gibanje čestice po pravocrtnoj putanji. Put s predstavlja udaljenost čestice od ishodišta O (pol)

Ta udaljenost zove se put s čestice (sl. 1) koji se mijenja s vremenom, a prema predznaku određuje smjer gibanja na pravcu.

Od pojma *put*, koji u mehanici u određenom smislu znači koordinatu položaja čestice, treba razlikovati pojam *prijedeni put* ili *ukupni put*, koji se kraće također naziva *putom*. Te dvije veličine ne moraju imati jednake iznose. Tako će npr. tijelo koje se iz ishodišta giba po pravcu u jednom smjeru 100 m, a zatim se po istom pravcu vrati 20 m, biti udaljeno od ishodišta 80 m, pa će put u kinematičkom smislu biti $s = 80$ m, ali je prijedeni put 120 m. Prijedeni put je veličina koja rjeđe dolazi u mehanici, pa za tu veličinu nema dogovorenog naziva i znaka. O prijedenu putu ovisi npr. rad nekonzervativnih sila (v. *Mehanika, Dinamika*), kao što su sile trenja, otpori gibanju i sl.

Svakom trenutku t odgovara određeni put s , kao mjera udaljenosti od odabranog pola O . U intervalu vremena Δt promijeni čestica svoj položaj na putanji za razliku puta Δs . Omjer puta Δs i intervala vremena Δt prema definiciji jednak je srednjoj ili prosječnoj brzini

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

koja ima jedinicu metar u sekundi (m/s). Što je interval Δt manji, približuje se vrijednost srednje brzine nekoj brzini v koja odgovara trenutku t (trenutna brzina). U graničnom slučaju, kada Δt teži k nuli, prelazi kvocijent srednje brzine u derivaciju puta po vremenu

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2)$$

Prema tome, brzina je u nekom trenutku vrijednost prve derivacije puta po vremenu i u općem je slučaju funkcija vremena. Osim osnovnih jedinica Međunarodnog sustava (SI), za duljinu metar i za vrijeme sekunda, upotrebljavaju se u izvođenju jedinice za brzinu i neki višekratnici metra i sekunde. Tako se često brzina izražava u kilometrima na sat (km/h). U pomorstvu se upotrebljava čvor kao jedinica brzine s kojom se u jednom satu prevale jedna međunarodna morska milja (1852 m). Prema tome vrijedi da je čvor = 1,852 km/h = 0,514 m/s. Brzina nadzvučnih aviona izražava se Machovim brojem Ma , koji je omjer brzine aviona i brzine širenja zvuka u zraku na morskoj razini. Tako brzina $Ma = 1$ odgovara brzini od 1198,8 km/h, odnosno brzini zvuka u spomenutim uvjetima koja iznosi 333 m/s.

Razlika brzina Δv na kraju i na početku intervala vremena Δt određuje srednje ili prosječno ubrzanje (akceleraciju) koje je definirano kvocijentom

$$a_s = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (3)$$