a kako je obujam $V = \pi \int x^2 \mathrm{d}z$, slijedi da je

$$V = 2\pi x_C A. \qquad (105)$$

Ta formula izražava pravilo za izračunavanje obujma rotacijskih tijela: obujam rotacijskog tijela koje nastaje okretanjem neke ravne plohe ploštine A oko osi što leži u njezinoj ravnini jednak je umnošku ploštine A i puta što ga njezino težište opiše pri jednom okretaju. Ako se izvodna linija ili ploha okrene samo za kut $\alpha < 360°$, vrijednosti prema formulama (103) i (105) treba pomnožiti još omjerom $\alpha/360°$.

Ta pravila omogućuju brzo izračunavanje oplošja i obujma rotacijskih tijela, ako su poznata težišta pripadnih linija, odnosno ploha. I obratno, pomoću istih formula mogu se odrediti težišta linija i ploha, ako su poznata pripadna oplošja, odnosno obujmi.

D. Bazjanac

KINEMATIKA

Kinematika proučava geometrijska svojstva gibanja. Kinematika (prema grčkom κίνημα kinema *gibanje*) potreban je uvod u dinamiku i temelj kinematičke analize u teoriji mehanizama. Budući da je gibanje promjena položaja tijela u prostoru, često se kinematika naziva *geometrijom gibanja.* U koordinatnom sustavu koji nije vezan uz tijelo što se giba položaj tijela zavisi od vremena. Stoga su prostor i vrijeme osnovni pojmovi od kojih se polazi u kinematici. Kao mjerljive veličine, prostor ima tri dimenzije, a vrijeme jednu. Prema J. L. Lagrangeu kinematika je geometrija u četverodimenzionalnom prostoru u kojem pored tri prostorne koordinate dolazi vrijeme kao četvrta. U klasičnoj mehanici prostor i vrijeme smatraju se apsolutnim veličinama. A. Einstein uveo je drugačiji način gledanja koji dolazi do izražaja kad se brzine približavaju brzini svjetlosti. Tehničke zadatke, gdje su brzine tijela mnogo manje od brzine svjetlosti, zadovoljavaju u potpunosti postavke klasične mehanike. Vrijeme se smatra pozitivnom promjenljivom veličinom koja se za sve promatrače, bez obzira na način kojim se gibaju, mijenja jednako. Sva gibanja tijela promatraju se s obzirom na koordinatni sustav koji može biti pomičan ili se pretpostavlja da je nepomičan. Često se nepomični sustav vezuje uz Zemlju, te se takvo mirovanje treba shvatiti samo uvjetno. U kinematici se upotrebljavaju različiti pravokutni koordinatni sustavi. Već prema gibanju, odabire se najpovoljniji, npr. Descartesov sustav, polarni, cilindrični i sferni, a posebno je važan u mehanici prirodni koordinatni sustav. Točka pri gibanju iz jednog položaja u drugi opisuje u odabranom koordinatnom sustavu zakrivljenu ili pravu liniju koja se naziva putanjom. Položaj točke na putanji određen je orijentiranom dužinom s obzirom na neki odabrani pol. Takav radijvektor položaja funkcija je vremana te ima prirast po duljini i smjeru. Taj prirast, podijeljen pripadnim vremenom, jest vektor brzine točke. Dijeleći ukupni prirast vektora brzine pripadnim vremenom, dobiva se vektor ubrzanja točke koji pokazuje kako se mijenja brzina po iznosu i smjeru. Poznavanje vektora položaja, brzine i ubrzanja pojedinih točaka tijela ključni je problem kinematike. U nekim posebnim slučajevima dovoljno je poznavati gibanje samo jedne točke na tijelu, ili se dimenzije tijela s obzirom na promatrani problem mogu zanemariti, pa se tada položaj tijela poistovjećuje s položajem točke u prostoru.

Stoga se u kinematici, radi lakšeg razumijevanja, razlikuje *kinematika čestice* (materijalne točke) i *kinematika krutog tijela.* Prema obliku putanje kinematika čestice razmatra pravocrtno i krivocrtno gibanje. U kinematici tijela razlikuju se dva osnovna načina gibanja: translacija i rotacija. Kao posebni slučajevi gibanja tijela, koji su česti u tehnici, proučavaju se ravninsko (ravansko) ili planarno gibanje, te sferno gibanje ili gibanje oko nepomične točke. Sva gibanja krutog tijela mogu se zamisliti sastavljena od osnovnih načina gibanja. Tako su komponente ravninskog gibanja translacija i jedna rotacija, a sfernoga tri rotacije. Opće gibanje tijela opisuje se radi jednostavnosti pomoću translacije i sfernog gibanja (Chaslesov poučak). Gibanja koja nastaju tako da se na osnovno gibanje prenosi gibanje nekoga drugog tijela promatraju se kao sastavljena gibanja. Pri tom se razlikuje relativno i prijenosno gibanje koje rezultira apsolutnim. Da li se radi o takvom slaganju gibanja ili o gibanju koje se zamišlja sastavljeno od osnovnih načina gibanja, više je pitanje fizikalne slike, a manje principijelnog pristupa.

U mehanici tijela promjenljivog oblika (v. *Mehanika fluida*; v. *Teorija elastičnosti*) određuje se također položaj pojedinih čestica tijela u prostoru, bilo pri gibanju ili pri promjeni oblika. Pri tom čestice tijela mijenjaju međusobni položaj, što se ne događa s krutim tijelom, pa se kinematičke pojave takvih tijela posebno proučavaju.

Kinematika čestice

Pravocrtno gibanje. Ako pri gibanju čestica opisuje pravu crtu, njezina je putanja pravac, a gibanje se naziva pravocrtnim. Položaj čestice najjednostavnije se određuje pri takvu gibanju udaljenošću od proizvoljno odabranog pola na putanji.

Sl. 1. Gibanje čestice po pravocrtnoj putanji. Put s predstavlja udaljenost čestice od ishodišta O (pol)

Ta udaljenost zove se put s čestice (sl. 1) koji se mijenja s vremenom, a prema predznaku određuje smjer gibanja na pravcu.

Od pojma *put*, koji u mehanici u određenom smislu znači koordinatu položaja čestice, treba razlikovati pojam *prijeđeni put* ili *ukupni put*, koji se kraće također naziva putom. Te dvije veličine ne moraju imati jednake iznose. Tako će npr. tijelo koje se iz ishodišta giba po pravcu u jednom smjeru 100 m, a zatim se po istom pravcu vrati 20 m, biti udaljeno od ishodišta 80 m, pa će put u kinematičkom smislu biti $s = 80$ m, ali je prijeđeni put 120 m. Prijeđeni put je veličina koja rjeđe dolazi u mehanici, pa za tu veličinu nema dogovorenog naziva i znaka. O prijeđenom putu ovisi npr. rad nekonzervativnih sila (v. *Mehanika, Dinamika*), kao što su sile trenja, otpori gibanju i sl.

Svakom trenutku t odgovara određeni put s, kao mjera udaljenosti od odabranog pola O. U intervalu vremena Δt promijeni čestica svoj položaj na putanji za razliku puta Δs. Omjer puta Δs i intervala vremena Δt prema definiciji jednak je srednjoj ili prosječnoj brzini

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (1)$$

koja ima jedinicu metar u sekundi (m/s). Što je interval Δt manji, približuje se vrijednost srednje brzine nekoj brzini v koja odgovara trenutku t (trenutna brzina). U graničnom slučaju, kada Δt teži k nuli, prelazi kvocijent srednje brzine u derivaciju puta po vremenu

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}. \qquad (2)$$

Prema tome, brzina je u nekom trenutku vrijednost prve derivacije puta po vremenu i u općem je slučaju funkcija vremena. Osim osnovnih jedinica Međunarodnog sustava (SI), za duljinu metar i za vrijeme sekunda, upotrebljavaju se u izvođenju jedinice za brzinu i neki višekratnici metra i sekunde. Tako se često brzina izražava u kilometrima na sat (km/h). U pomorstvu se upotrebljava čvor kao jedinica brzine s kojom se u jednom satu prevali jedna međunarodna morska milja (1852 m). Prema tome vrijedi da je čvor = 1,852 km/h = = 0,514 m/s. Brzina nadzvučnih aviona izražava se Machovim brojem Ma, koji je omjer brzine aviona i brzine širenja zvuka u zraku na morskoj razini. Tako brzina $Ma = 1$ odgovara brzini od 1198,8 km/h, odnosno brzini zvuka u spomenutim uvjetima koja iznosi 333 m/s.

Razlika brzina Δv na kraju i na početku intervala vremena Δt određuje srednje ili prosječno ubrzanje (akceleraciju) koje je definirano kvocijentom

$$a_s = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Jedinica ubrzanja jest metar u sekundi na kvadrat (m/s^2). Graničnim prijelazom, gdje interval Δt teži k nuli, dobije se vrijednost ubrzanja a u trenutku t

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}. \tag{4}$$

Budući da je brzina prva derivacija puta po vremenu, proizlazi da je ubrzanje njegova druga derivacija

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}. \tag{5}$$

Uobičajeno je da se derivacija po parametru (ovdje vrijeme t) označuje točkom iznad veličine koju treba derivirati, tako da vrijedi sljedeća veza između puta s, brzine v i ubrzanja a

$$a = \dot{v} = \ddot{s}. \tag{6}$$

Ako su put i brzina istog predznaka, čestica se udaljuje od polaznog pola O na putanji ili u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Tablica 1
PRIMJERI NEKIH BRZINA

	Brzina v	
	km/h	km/s
Putnički automobil	140	
Automobil, svjetski rekord (1970)	1014	
Helikopter	150	
Avion putnički, elisni	400···600	
Avion putnički, turbomlazni	850	
Avion pri polijetanju	150···300	
Putnički brodovi (15···20 čv)	30	
Podmornica	30	
Podmornica, nuklearna	60	
Zec	60	
Leopard	110	
Delfin	70	
Sabljarka	95	
Jastreb	45	
Orao	90	
Prva kozmička brzina (najmanja brzina satelita pri kruženju oko Zemlje)	$28{,}44 \cdot 10^3$	7,9
Druga kozmička brzina (najmanja brzina odvajanja od Zemlje)	$40{,}32 \cdot 10^3$	11,2
Treća kozmička brzina (najmanja brzina pri napuštanju Sunčeva sustava)	$60{,}12 \cdot 10^3$	16,7
Puščano zrno	2520	0,7
Zvuk u zraku (0 °C, 101 325 Pa)	$1{,}193 \cdot 10^3$	0,331 46
Zvuk u vodi (25 °C)	$5{,}39 \cdot 10^3$	1,497
Svjetlost u vakuumu	$1{,}079 \cdot 10^9$	299 792,5
Zemlja na putanji oko Sunca	$107{,}1 \cdot 10^3$	~29,76

Tablica 2
PRIMJERI NEKIH UBRZANJA

Predmet	Ubrzanje (odnosno usporenje) m/s^2
Tijelo pri slobodnom padanju na Zemlju	9,81
Automobil, putnički na startu	0,5···2,5
Automobil, putnički pri naglom kočenju (usporenju)	5···7
Dizalo	0,9···1,6
Avion, putnički pri slijetanju	1,5···2,5
Puščani metak u cijevi	72000
Kozmički brod pri povratku na Zemlju	30···40

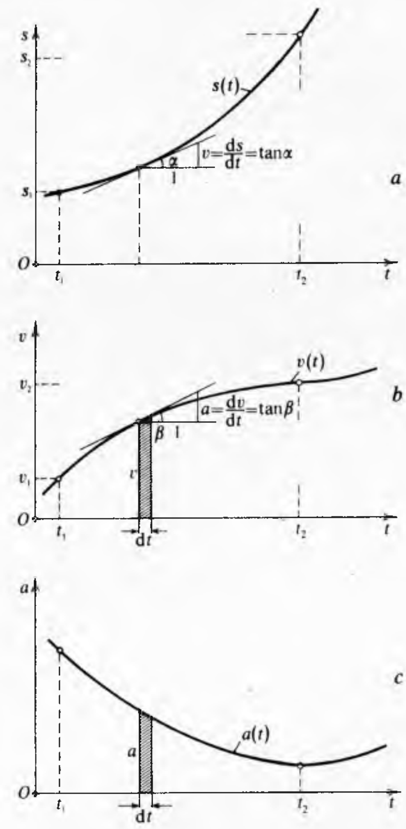
Kad su brzina i ubrzanje istog predznaka, čestica se ubrzava u jednom ili u drugom smjeru; iznos brzine se povećava. U intervalima vremena u kojima brzina i ubrzanje imaju različite predznake smanjuje se iznos brzine, a čestica se usporava. Prema tome, ubrzanje (akceleracija) ubrzava ili usporava česticu. Rjeđe se za usporavanje prva derivacija brzine naziva usporenje (retardacija).

Obrnutim postupkom mogu se iz zadanog ubrzanja odrediti brzina i put

$$v = \int a\,\mathrm{d}t + C_1 \tag{7}$$

$$s = \int v\,\mathrm{d}t + C_2, \tag{8}$$

pri čemu se za određivanje integracijskih konstanti C_1 i C_2 moraju poznavati brzina i put u nekom određenom trenutku. Obično su to brzina i put na početku gibanja, pa se tada nazivaju početnim uvjetima. Radi preglednosti crtaju se put, brzina i ubrzanje nekog gibanja u obliku dijagrama, u kojima se prikazuje vremenska promjena tih triju veličina. Ti osnovni kinematički dijagrami (sl. 2) vezani su međusobno preko nagiba tangente. Tako je vrijednost tangensa kuta što ga čini tangenta na krivulju u dijagramu puta u nekom trenutku t s apscisnom osi vrijednost brzine u istom trenutku u određenom mjerilu.



Sl. 2. Kinematički dijagrami: a ovisnost puta o vremenu, dijagram $s(t)$; b ovisnost brzine o vremenu, dijagram $v(t)$; c ovisnost ubrzanja o vremenu, dijagram $a(t)$. Tangens kuta nagiba tangente na krivulju odgovara brzini u dijagramu $s(t)$, a ubrzanju u dijagramu $v(t)$ u trenutku t

Slično vrijedi za ubrzanje i dijagram brzine. Površina ispod krivulje u dijagramu ubrzanja u intervalu t_1—t_2 odgovara razlici brzina v_2 i v_1, jer je

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Analogno vrijedi i za dijagram brzine i za putove u trenucima t_1 i t_2:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

U složenijim slučajevima određuju se kinematički dijagrami grafičkim deriviranjem i grafičkim integriranjem.

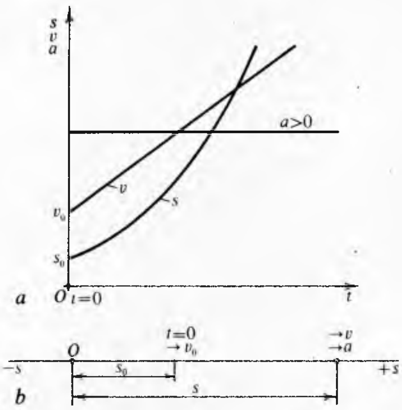
Jednoliko promjenljivo gibanje poseban je slučaj općega pravocrtnog gibanja. Pri takvu gibanju ubrzanje ima stalnu vrijednost koje ako se uzastopno integrira daje promjenu brzine i puta. Uz pretpostavku da se točka na početku gibanja ($t = 0$)

nalazila na udaljenosti s_0 od pola O, te da je u tom trenutku imala brzinu v_0, dobiju se integriranjem ubrzanja zakoni puta i brzine koji glase:

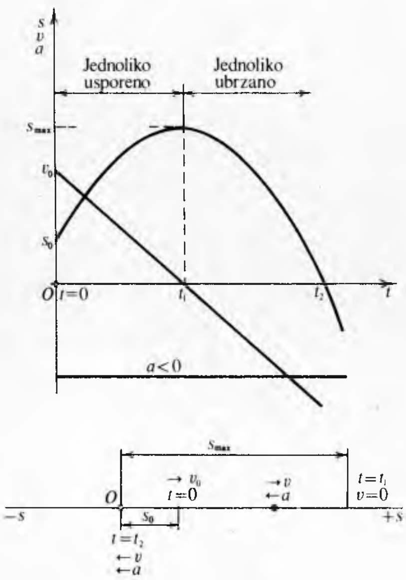
$$s = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0, \quad a = \text{const.} \tag{11}$$

$$v = at + v_0, \quad a = \text{const.} \tag{12}$$

Ako su v_0 i s_0 pozitivne veličine, te ako je ubrzanje veće od nule, čestica se udaljuje od ishodišta O, brzina se u jednakim vremenskim razmacima povećava za isti iznos, a gibanje je jednoliko ubrzano (sl. 3). Kad je ubrzanje negativno, brzina u prvom dijelu gibanja jednoliko opada, te se u nekom trenutku čestica zaustavlja i nastavlja gibanje u suprotnom smjeru, povećavajući brzinu jednoliko. Čestica se uz takvo ubrzanje do zaustavljanja usporavala putujući do mjesta koje je najudaljenije od ishodišta. U tom razdoblju čestica se gibala jednoliko usporeno (sl. 4). Nakon promjene smjera gibanja, čestica se ubrzava, prođe ishodištem i putuje u negativnom smjeru, pa je taj drugi dio gibanja jednoliko ubrzavanje.



Sl. 3. Kinematički dijagrami jednoliko promjenljivog gibanja s pozitivnim ubrzanjem i pozitivnim početnim uvjetima s_0 za put i v_0 za brzinu. Čestica se na putanji udaljuje od ishodišta O povećavajući jednoliko brzinu, pa je gibanje na svakom dijelu putanje jednoliko ubrzano



Sl. 4. Kinematički dijagrami jednoliko promjenljivog gibanja s negativnim ubrzanjem i pozitivnim početnim uvjetima s_0 za put i v_0 za brzinu. U vremenskom intervalu $t = 0$ do $t = t_1$ čestica se udaljuje od ishodišta jednoliko usporeno. Na mjestu $s = s_{max}$ čestica se zaustavlja, odakle se vraća jednoliko ubrzano k ishodištu i dalje prema negativnoj strani putanje

Jednoliko gibanje znači da se brzina ne mijenja, ubrzanje je jednako nuli, a put se jednoliko povećava ili smanjuje, što ovisi o predznaku brzine v_0 i o početnom položaju s_0 na putanji. Tada vrijede sljedeći izrazi (za $a = 0$):

$$s = v_0 t + s_0, \tag{13}$$

$$v = v_0. \tag{14}$$

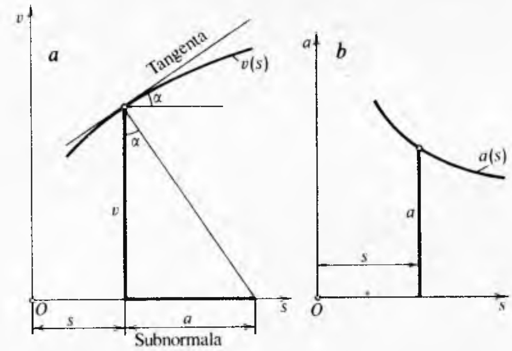
U posebnu grupu svrstani su u kinematici zadaci u kojima put, brzina i ubrzanje nisu izravne funkcije vremena, već je zadana njihova uzajamna zavisnost. Tako su često brzina i ubrzanje funkcije puta (npr. dijagrami vožnje gdje se želi pokazati kolika je brzina na pojedinim dijelovima puta) ili je ubrzanje funkcija brzine. Rjeđe se javljaju ostale zavisnosti i mješovite zavisnosti u kojima jedna od kinematičkih veličina zavisi od preostalih dviju ili se osim njih javlja još i vrijeme kao varijabla. Obično takve zavisnosti slijede iz dinamičkih jednadžbi gibanja (v. *Mehanika, Dinamika*). Tada nije moguće iz jedne kinematičke veličine dobiti preostale dvije neposredno deriviranjem ili integriranjem po vremenu, već se takve jednadžbe prije rješavanja preuređuju ili se primjenjuju uobičajeni postupci za rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Kad je brzina funkcija puta, $v = v(s)$, izračunava se u prvom koraku vrijeme t

$$v(s) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

$$t = \int \frac{\mathrm{d}s}{v(s)} + C_3 = t(s). \tag{16}$$

Ako je moguća inverzija, određuje se put s prema vremenu t, te dalje deriviranjem v i a, čime je kinematički zadatak riješen. Kad inverzija nije moguća, zadatak se rješava grafički.



Sl. 5. Grafičko određivanje ubrzanja a iz dijagrama $v(s)$ zasniva se na određivanju subnormale u nekoj točki dijagrama. S mjerilom L_s za apscisnu i L_v za ordinatnu os vrijedi da je $a = (L_v^2/L_s) v \tan\alpha$, gdje je $v \tan\alpha$ duljina subnormale

Iz dijagrama $v(s)$ može se grafički, ako je potrebno, odrediti i dijagram ubrzanja kao funkcija puta (sl. 5). Iz poznate zavisnosti ubrzanja i puta $a = a(s)$ određuju se analitički izrazi za osnovne kinematičke dijagrame pomoću relacije

$$a\,\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}v. \tag{17}$$

Ako se uvrsti u lijevu stranu zadana zavisnost $a(s)$, mogu se obje strane integrirati, iz čega slijedi brzina kao funkcija puta $v(s)$, te dalje $s(t)$, $v(t)$ i $a(t)$. Treba li iz analitičkog izraza $a = a(v)$ odrediti put, brzinu i ubrzanje kao funkcije vremena, tada se prvo izračuna vrijeme t:

$$a(v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

$$t = \int \frac{\mathrm{d}v}{a(v)} + C_4 = t(v), \tag{19}$$

iz čega slijedi $v(t)$, te dalje deriviranjem i integriranjem $s(t)$ i $a(t)$.

Jednostavno harmonijsko gibanje takvo je pravocrtno gibanje pri kojem je ubrzanje proporcionalno s putom i uvijek mu je suprotno usmjereno. Takvo gibanje često se javlja u tehničkoj praksi (npr. neka oscilatorna gibanja, gibanje noža blanjalice, mehaničko sito), a definirano je izrazom

$$a = -\omega^2 s. \tag{20}$$

Prema definiciji tog gibanja ω je realan broj, veći od nule, pa se integriranjem ubrzanja kao funkcije puta dobiju zakoni puta, brzine i ubrzanja u obliku:

$$s = A\cos(\omega t - \alpha), \tag{21}$$

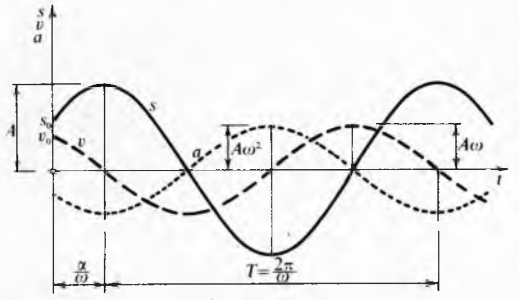
$$v = \dot{s} = -A\omega \sin(\omega t - \alpha), \tag{22}$$

$$a = \ddot{s} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \alpha), \tag{23}$$

gdje su A i α integracijske konstante koje se izračunavaju iz poznatog položaja čestice na putanji i njezine brzine u nekom trenutku t (sl. 6). Uz zadane uvjete s_0 i v_0 na početku gibanja ($t = 0$), te uz zadani ω, konstante A i α bit će:

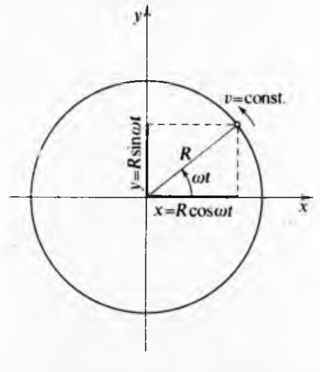
$$A = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \tag{24}$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_0}{\omega s_0} \tag{25}$$



Sl. 6. Kinematički dijagrami harmonijskog gibanja s početnom fazom α i periodom $T = 2\pi/\omega$. Maksimalni put odgovara amplitudi A, u kojem je položaju i ubrzanje $A\omega^2$ maksimalno i suprotno usmjereno putu. Pri prolazu čestice kroz nulti položaj ($s = 0$, $a = 0$) brzina je maksimalna i iznosi $A\omega$

Kad je $\cos(\omega t - \alpha) = \pm 1$, što odgovara vremenima $t = (n\pi + \alpha)/\omega$ uz $n = 0, 1, 2, \ldots$, nalazi se čestica u položajima $s = \pm A$, najudaljenijim od ishodišta O, pa je to vrijednost maksimalnog puta. Stoga se A zove amplituda harmonijskog gibanja. U trenucima $t = t_0 + 2n\pi/\omega$, uz $n = 0, 1, 2, \ldots$, čestica se ponovno nalazi na istom mjestu gdje se nalazila u trenutku t_0, nakon što je obavila puni ciklus gibanja. Razlika među tim vremenima $T = 2\pi/\omega$ zove se *perioda*, a recipročna vrijednost periode $f = 1/T = \omega/2\pi$ *frekvencija* harmonijskog gibanja. Frekvencija ima jedinicu herc u značenju recipročne sekunde ($\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$), a pokazuje koliko puta u sekundi prijeđe čestica puni ciklus. Veličina ω zove se *kružna frekvencija*, s jedinicom radijan u sekundi (rad/s).



Sl. 7. Gibanje čestice po kružnici konstantnom brzinom v sastavljeno je od dvaju jednostavnih harmonijskih gibanja $x = R\cos\omega t$ i $y = R\sin\omega t$, s amplitudom R i kružnom frekvencijom $\omega = v/R$

Harmonijsko gibanje osnovni je element mnogih periodičkih procesa u tehnici (sl. 7). Većina periodičkih gibanja sastavljena su od harmonijskih gibanja, pa se mogu analizirati promatranjem svake od ovih komponenata, čime se bavi harmonijska analiza.

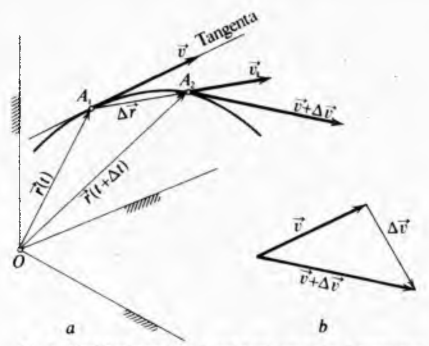
Krivocrtno gibanje. Položaj točke na putanji opisuje se pri takvu gibanju radijvektorom $\vec{r}$ koji je funkcija vremena t. U nekom konačnom vremenu Δt točka promijeni položaj na putanji (sl. 8), čime se i vektor $\vec{r}$ promijenio za vektorsku veličinu $\Delta\vec{r}$. Srednja ili prosječna brzina određena je umnoškom vektora $\Delta\vec{r}$ i recipročne vrijednosti pripadnog vremena Δt:

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{26}$$

što je novi vektor koji se poklapa po smjeru s vektorom $\Delta\vec{r}$. Granična vrijednost srednje brzine, kad Δt teži k nuli, daje vektor trenutne brzine ili kraće brzinu $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \tag{27}$$

a dobije se kao derivacija vektora $\vec{r}$ po vremenu t. Vektor brzine $\vec{v}$ leži na pravcu tangente na putanju u točki koja odgovara njenom položaju u trenutku t, što slijedi iz definicije tangente (v. *Diferencijalna geometrija*, TE 3, str. 256). Bez obzira na to giba li se točka s konstantnim iznosom brzine ili ne, postoji pri krivocrtnom gibanju uvijek prirast vektora brzine.



Sl. 8. Radijvektor $\vec{r}(t)$ i vektori srednje i trenutne brzine $\vec{v}_s$ i $\vec{v}$ pri krivocrtnom gibanju točke (*a*) i konačni prirast $\Delta\vec{v}$ vektora brzine (*b*)

U konačnom vremenskom intervalu Δt odgovara tom prirastu vektor $\Delta\vec{v}$, koji određuje srednje ili prosječno ubrzanje

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{28}$$

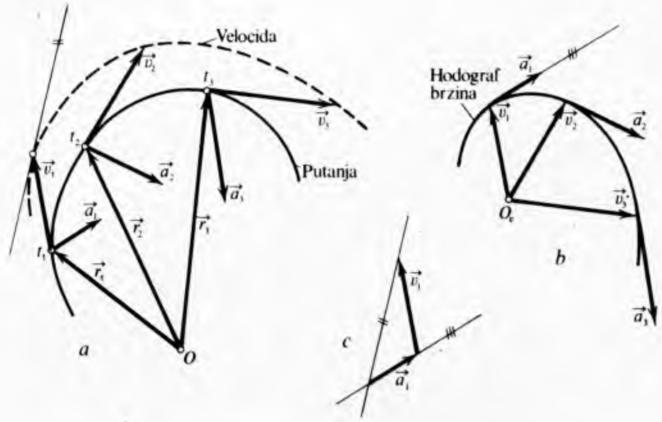
Graničnim prijelazom, kad interval vremena teži k nuli, dobije se vektor trenutnog ubrzanja $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \tag{29}$$

koji je prva derivacija vektora brzine po vremenu ili druga derivacija vektora položaja $\vec{r}$

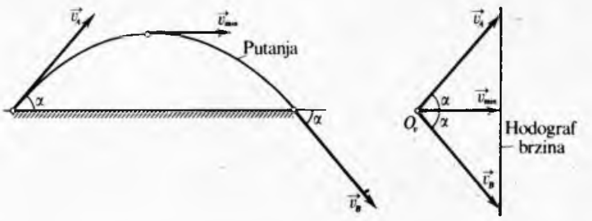
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \tag{30}$$

Pri pravocrtnom gibanju, kad se početak vektora $\vec{r}$ odabere na putanji, prelazi ova jednakost u izraz (6). Smjer vektora ubrzanja uvijek je takav da šiljak vektora ubrzanja leži na konkavnoj strani putanje.



Sl. 9. Putanja, velocida i hodograf brzina. Paralela s tangentom na velocidu i pravac ubrzanja (tangenta na hodograf brzina) čine s vektorom brzine trokut u kojem jedna stranica daje vektor ubrzanja

Prva derivacija ubrzanja po vremenu daje ubrzanje drugog reda ili trzaj ($\vec{a}_{\mathrm{II}} = \dot{\vec{a}} = \dddot{\vec{r}}$), koje se upotrebljava u kinematici štapnih mehanizama i u dinamičkoj analizi vozila. Svakom trenutku t odgovara određeni radijvektor položaja $\vec{r}$, vektor brzine $\vec{v}$ i vektor ubrzanja $\vec{a}$ (sl. 9). Kod grafičke predodžbe šiljci svih vektora brzina u pojedinim točkama putanje leže na krivulji koja se zove *velocida*. Vektori brzina, preneseni paralelno u zajednički početak, određuju svojim šiljcima krivulju koja se zove *hodograf brzina* kojega su tangente pravci pripadnih vektora ubrzanja. Svi šiljci vektora ubrzanja, pomaknutih paralelno u zajednički početak, opisuju *hodograf ubrzanja*. Kad je putanja krivulja u ravnini, može se grafički pomoću vektora brzine odrediti vektor ubrzanja, crtajući iznad vektora brzine trokut kojemu su preostale dvije stranice paralelne s tangentom na velocidu i s tangentom na hodograf brzina. Stranica trokuta paralelna s tangentom na hodograf brzina predstavlja vektor ubrzanja.



Sl. 10. Hodograf brzina za kosi hitac, uz zanemarenje otpora zraka, jest pravac paralelan s ubrzanjem

Prikazivanje elemenata gibanja. Za praktično izračunavanje vektora brzine i ubrzanja prikazuje se vektor $\vec{r}$ u različitim koordinatnim sustavima, već prema tome koji je pogodniji za promatrano gibanje.

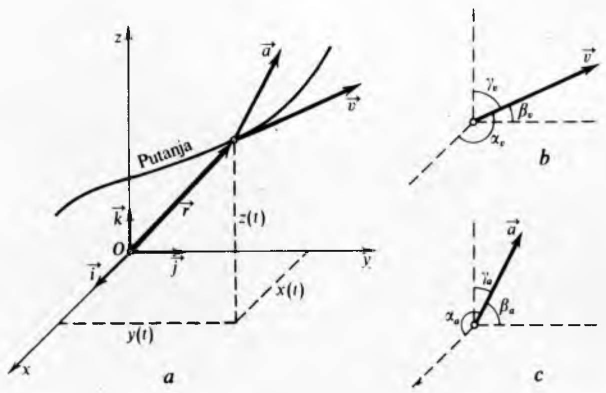
Descartesov koordinatni sustav. U Descartesovu koordinatnom sustavu (sl. 11), u kojem smjerove osi x, y, z određuju jedinični vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, određen je položaj čestice koordinatama $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$, koje su ujedno parametarske jednadžbe putanje, gdje je parametar t vrijeme. Eliminacijom parametra t prikazuje se putanja i pomoću dviju jednadžbi u obliku $F_1(x,y,z) = 0$, $F_2(x,y,z) = 0$. Vektor $\vec{r}$ ima komponente

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{31}$$

a kako $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ pripadaju nepomičnim osima, bit će brzina $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ i ubrzanje $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \tag{32}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \tag{33}$$



Sl. 11. Prikaz gibanja čestice u pravokutnom (Descartesovu) koordinatnom sustavu

Apsolutni iznos i smjer vektora brzine određuje se iz komponenata $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ i $v_z = \dot{z}$, pa je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{34}$$

$$\cos\alpha_v = \frac{\dot{x}}{v}, \tag{35}$$

$$\cos\beta_v = \frac{\dot{y}}{v}, \tag{36}$$

gdje su α_v i β_v kutovi koje pravac vektora brzine zatvara s osima x i y. Kut γ_v prema osi z određuje se iz uvjeta da je $\cos^2\alpha_v + \cos^2\beta_v + \cos^2\gamma_v = 1$. Slično vrijedi i za ubrzanje:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \tag{37}$$

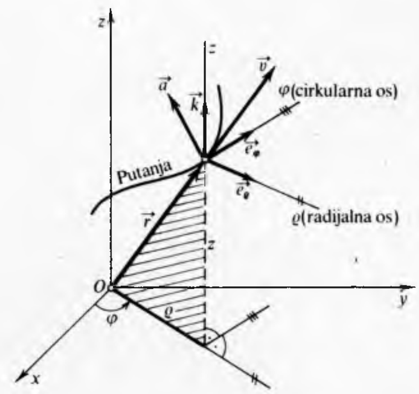
$$\cos\alpha_a = \frac{\ddot{x}}{a}, \tag{38}$$

$$\cos\beta_a = \frac{\ddot{y}}{a}. \tag{39}$$

Kad se čestica giba u ravnini, dovoljne su samo dvije koordinate za prikazivanje gibanja (npr. x i y), a vektori brzine i ubrzanja imaju tada samo po dvije komponente.

Cilindrični koordinatni sustav. U cilindričnom koordinatnom sustavu određuje se položaj čestice dvjema dužinama i jednim kutom (sl. 12). Tri međusobno okomite osi nose oznake ϱ, φ (radijalna i cirkularna os) i z. Koordinate položaja funkcije su vremena $\varrho = \varrho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $z = z(t)$, a jedinični vektori $\vec{e}_\varrho$ i $\vec{e}_\varphi$, zbog promjene smjera u prostoru u toku gibanja, imaju priraste po smjeru, te prema tome i derivacije po vremenu. Jedinični vektor $\vec{k}$ ne mijenja smjer, pa su mu derivacije po vremenu jednake nuli. Vektor položaja čestice sastoji se od dviju komponenata

$$\vec{r} = \varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{k}. \tag{40}$$



Sl. 12. Prikaz gibanja čestice u cilindričnom koordinatnom sustavu, kojem je radi usporedbe docrtan i sustav x,y,z

Deriviranjem po vremenu dobije se vektor brzine s komponentama

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v_\varrho\vec{e}_\varrho + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_z\vec{k}, \tag{41}$$

gdje je

$$v_\varrho = \dot{\varrho}, \tag{42}$$

$$v_\varphi = \varrho\dot{\varphi}, \tag{43}$$

$$v_z = \dot{z}. \tag{44}$$

Komponente su ubrzanja

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = a_\varrho\vec{e}_\varrho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{k}, \tag{45}$$

gdje je

$$a_\varrho = \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2, \tag{46}$$

$$a_\varphi = \varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi}, \tag{47}$$

$$a_z = \ddot{z}. \tag{48}$$

Pri uzastopnom deriviranju vektora $\vec{r}$ deriviraju se jedinični vektori $\vec{e}_\varrho$ i $\vec{e}_\varphi$ prema pravilu da je $\dot{\vec{e}}_\varrho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ i $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\varrho$. Iz komponenata izračunavaju se apsolutni iznosi brzine i ubrzanja te njihovi smjerovi prema postupku za vektore. Za gibanje čestice u ravnini dovoljne su za opisivanje gibanja samo dvije koordinate ϱ i φ. Vektor $\vec{r}$ poklapa se tada s radijalnim pravcem ϱ, te se za radijalni pravac upotrebljava oznaka r. Radijalna os r i cirkularna φ tvore tada ***polarni koordinatni sustav*** **(sl. 13). Vektori brzine i ubrzanja glase**

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi \tag{49}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi, \tag{50}$$

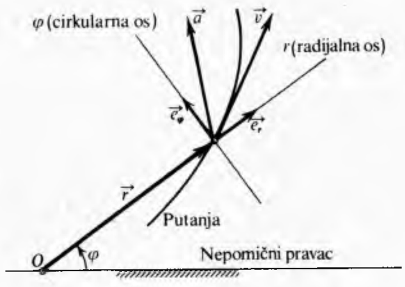
a komponente se izračunavaju prema izrazima:

$$v_r = \dot{r} \tag{51}$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} \tag{52}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \tag{53}$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{54}$$



Sl. 13. Prikaz gibanja u polarnom koordinatnom sustavu

Sferni koordinatni sustav. Položaj čestice u sfernom koordinatnom sustavu (sl. 14) određen je jednom dužinom i s dva kuta, čemu pripadaju koordinate $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $\vartheta = \vartheta(t)$. Pripadni jedinični vektori $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ i $\vec{e}_\vartheta$ određuju smjerove radijalne osi r i dviju cirkularnih osi, φ i ϑ. Vektori brzine i ubrzanja imaju sljedeće komponente:

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_\vartheta\vec{e}_\vartheta, \tag{55}$$

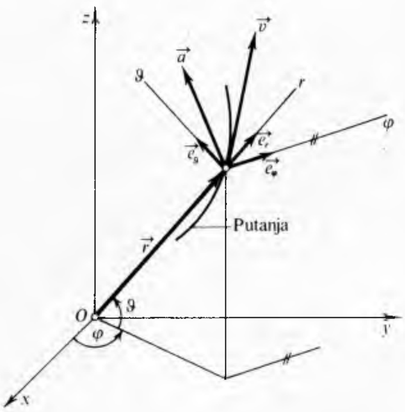
$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta. \tag{56}$$

Komponente se određuju pomoću koordinata r, φ i ϑ i njihovih derivacija po vremenu. Komponente brzine izračunavaju se prema izrazima:

$$v_r = \dot{r} \tag{57}$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi}\cos\vartheta \tag{58}$$

$$v_\vartheta = r\dot{\vartheta}. \tag{59}$$



Sl. 14. Prikaz gibanja u sfernom koordinatnom sustavu, kojemu je radi usporedbe docrtan i sustav x,y,z

Za komponente ubrzanja vrijedi da je

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\cos^2\vartheta \tag{60}$$

$$a_\varphi = \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) - 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \tag{61}$$

$$a_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\vartheta}) + r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{62}$$

Ako je u toku cijelog gibanja $\vartheta = 0$, čestica se giba u ravnini $r\varphi$, pa su svi izrazi za brzinu i ubrzanje identični onima u polarnom koordinatnom sustavu.

Transformacija koordinata. Između komponenata vektora brzine i ubrzanja u Descartesovu, cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu postoje veze pomoću kojih se komponente iz jednog sustava mogu transformirati u pripadne komponente u drugome koordinatnom sustavu. Iz komponenata brzine v_x i v_y određuju se komponente v_ϱ i v_φ cilindričnog koordinatnog sustava prema izrazima (komponenta v_z ostaje nepromijenjena):

$$v_\varrho = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \tag{63}$$

$$v_\varphi = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi. \tag{64}$$

Ti izrazi, prilagođeni matričnom načinu izražavanja, ako se uzme u obzir i komponenta v_z, glase:

$$\begin{Bmatrix} v_\varrho \\ v_\varphi \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}, \tag{65}$$

ili kraće pisano, uvođenjem oznaka $\{v_{\varrho\varphi z}\}$ i $\{v_{xyz}\}$ za vektore brzina i $[T_\varphi]$ za matricu transformacije:

$$\{v_{\varrho\varphi z}\} = [T_\varphi]\{v_{xyz}\}. \tag{66}$$

Obrnuto, iz komponenata ϱ,φ,z prelazi se u komponente x,y,z pomoću izraza:

$$\{v_{xyz}\} = [T_\varphi]^{-1}\{v_{\varrho\varphi z}\}, \tag{67}$$

gdje je $[T_\varphi]^{-1}$ inverzna matrica s članovima:

$$[T_\varphi]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{68}$$

Iz cilindričnih komponenata v_ϱ i v_z prelazi se u sferne v_r i v_ϑ pomoću izraza (komponenta v_φ ostaje nepromijenjena):

$$v_r = v_\varrho\cos\vartheta + v_z\sin\vartheta \tag{69}$$

$$v_\vartheta = -v_\varrho\sin\vartheta + v_z\cos\vartheta, \tag{70}$$

što u matričnom načinu izražavanja, ako se uzme i komponenta v_φ, glasi

$$\begin{Bmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ v \\ v_z \end{Bmatrix}, \tag{71}$$

odnosno

$$\{v_{r\varphi\vartheta}\} = [T_\vartheta]\{v_{\varrho\varphi z}\}. \tag{72}$$

Prijelaz iz koordinata r,φ,z u cilindrični sustav ϱ,φ,z određen je matričnom jednadžbom

$$\{v_{\varrho\varphi z}\} = [T_\vartheta]^{-1}\{v_{r\varphi\vartheta}\}, \tag{73}$$

u kojoj je matrica $[T_\vartheta]^{-1}$ oblika:

$$[T_\vartheta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix}. \tag{74}$$

Ako se iz poznatih komponenata v_x,v_y,v_z Descartesova koordinatnog sustava određuju komponente $v_r,v_\varphi,v_\vartheta$ u cilindričnom koordinatnom sustavu, transformira se pomoću izraza:

$$\{v_{r\varphi\vartheta}\} = [T_\vartheta][T_\varphi]\{v_{xyz}\}. \tag{75}$$

Umnožak matrica transformacije daje novu matricu s članovima

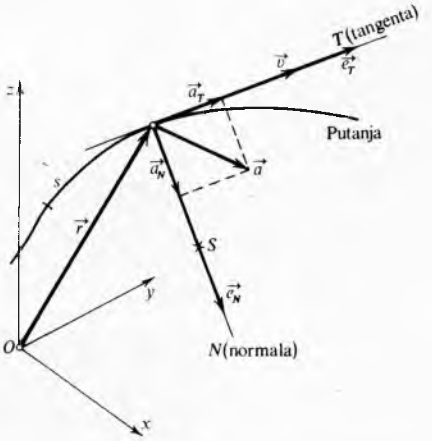
$$[T_\vartheta][T_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Komponente ubrzanja transformiraju se na potpuno jednak način, pa se u svim jednadžbama za transformaciju može oznaka v zamijeniti oznakom a za ubrzanje.

Prirodne komponente. Prikazivanje ubrzanja preko prirodnih komponenata često se primjenjuje u mehanici, a napose pri prinudnom gibanju čestice. Takav je način prikazivanja zoran, jer svaka komponenta ubrzanja dobiva određen fizikalni smisao. Svakoj točki putanje pripadaju tri karakteristična pravca: tangenta, glavna normala i binormala. Ta tri međusobno okomita pravca tvore prirodni trobrid, a smjerovi im u prostoru ovise o prirodi, odnosno o obliku putanje. Iz definicije vektora brzine proizlazi da se smjer brzine poklapa sa smjerom tangente. Vektor ubrzanja, bez obzira da li se radi o gibanju čestice u ravnini ili prostoru, leži uvijek u ravnini koju tvore tangenta T i glavna normala N (oskulatorna ravnina), pa prema tome ima dvije komponente: tangencijalnu a_T i normalnu a_N. Stoga se za prikazivanje brzine i ubrzanja pomoću prirodnih komponenata upotrebljavaju pravci tangente i glavne normale kao osi prirodnoga koordinatnog sustava (sl. 15) s jediničnim vektorima $\vec{e}_T$ i $\vec{e}_N$. Pozitivan smjer osi T bira se po volji, dok je pozitivan smjer osi N onaj koji gleda prema središtu zakrivljenosti S, odnosno prema konkavnoj strani putanje. Takav koordinatni sustav vezan je uz česticu koja se giba po putanji, a njegova je primjena moguća kad je putanja poznata i kad je položaj čestice na putanji određen duljinom luka putanje s obzirom na neko početno stanje. Ta duljina luka funkcija je vremena

$$s = s(t) \tag{77}$$

i, osim poznatog geometrijskog oblika putanje, temelj je za određivanje vektora brzina i ubrzanja.



Sl. 15. Prirodne koordinatne osi i prirodne komponente ubrzanja. a_T tangencijalna komponenta, a_N normalna komponenta

Beskonačno mali prirast radijvektora $\vec{r}$ jednak je po apsolutnom iznosu prirastu luka s, tako da je $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}s\vec{e}_T$. Tada je vektor brzine

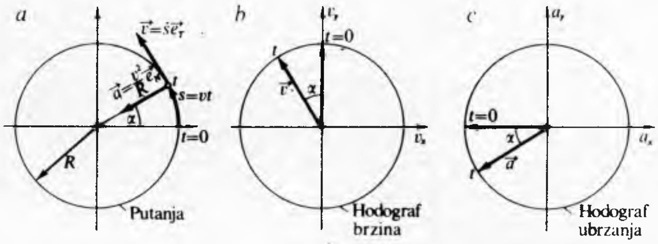
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\vec{e}_T, \tag{78}$$

koji, ako se derivira po vremenu, daje vektor ubrzanja

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_T + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_N. \tag{79}$$

Pri tom se deriviranju primjenjuje za jedinični vektor $\vec{e}_T$ pravilo da je $\dot{\vec{e}}_T = \frac{v}{R}\vec{e}_N$. R je polumjer zakrivljenosti putanje na onom mjestu gdje se čestica nalazila u trenutku t. Tangencijalna komponenta ubrzanja $a_T = \ddot{s} = \dot{v}$ pokazuje kako se mijenja brzina po apsolutnom iznosu. Ako su predznaci prve i druge derivacije luka po vremenu jednaki, čestica se giba ubrzano u pozitivnom ili negativnom smislu gibanja po putanji. Taj smisao određuje smjer tangencijalne osi. Kad su predznaci prve i druge derivacije luka različiti, čestica se usporava. Normalna komponenta ubrzanja $a_N = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{v^2}{R}$ utječe na promjenu smjera vektora brzine; uvijek je pozitivna i prema tome usmjerena prema središtu zakrivljenosti putanje. Ako je brzina po iznosu konstantna, bit će tangencijalna komponenta ubrzanja jednaka nuli, dok je normalna komponenta različita od nule. Normalna komponenta ubrzanja može biti jednaka nuli samo na mjestima gdje je polumjer zakrivljenosti putanje beskonačan. To je na mjestima infleksije putanje ili pri pravocrtnom gibanju.

Kružno gibanje čestice poseban je slučaj krivocrtnog gibanja. Putanja je kružnica, pa prema tome, kako se mijenja brzina, gibanje može biti promjenljivo (uz a_T bilo kakva funkcija vremena), jednoliko promjenljivo ($a_T = \text{const.}$) i jednoliko ($a_T = 0$).



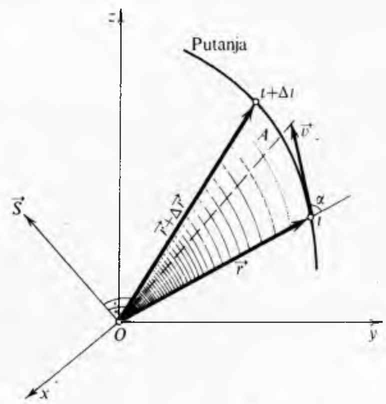
Sl. 16. Prikaz jednolikog gibanja čestica po kružnici gdje su iznosi brzine i ubrzanja konstantni. *a* putanja, *b* hodograf brzina, *c* hodograf ubrzanja

Pri jednolikom gibanju iznos je brzine konstantan, a ubrzanje ima samo normalnu komponentu koja je također konstantna po iznosu (sl. 16).

Sektorska brzina. Pri gibanju čestice ocrtava vektor položaja $\vec{r}$ površinu A, koja je geometrijsko mjesto položaja svih vektora $\vec{r}$ unutar nekog perioda vremena Δt (sl. 17). Brzina kojom se stvara ta površina određena je vektorskim umnoškom

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}, \tag{80}$$

koja ima dimenziju m^2/s i naziva se sektorskom brzinom. Služi za proučavanje središnjih gibanja, a uveo ju je J. Kepler promatrajući gibanje planeta (v. *Astronautika*, TE 1, str. 428). Kad su putanje u ravnini, sektorska brzina je vektor okomit na ravninu putanje koji ima prirast samo po iznosu. Tada je $\dot{S}$ direktna mjera promjene površine A u jedinici vremena:



Sl. 17. Vektor sektorske brzine $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$ okomit je na ravninu što je tvore vektori $\vec{r}$ i $\vec{v}$, a znači brzinu kojom vektor $\vec{r}$ ocrtava površinu A

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha, \tag{81}$$

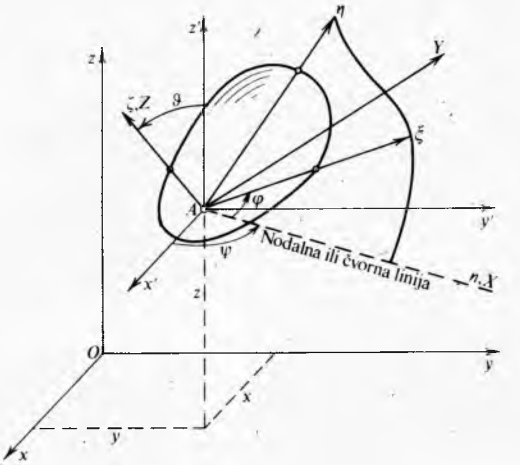
gdje je α kut što ga čine vektori $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Pri gibanjima koja se opisuju u polarnom koordinatnom sustavu $v\sin\alpha$ odgovara cirkularnoj komponenti brzine $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, pa je iznos sektorske brzine određen izrazom

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2. \tag{82}$$

Prva derivacija vektora $\dot{\vec{S}}$ po vremenu daje sektorsko ubrzanje $\ddot{\vec{S}} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a}$, koje za proučavanje gibanja nema većeg značenja.

Kinematika krutog tijela

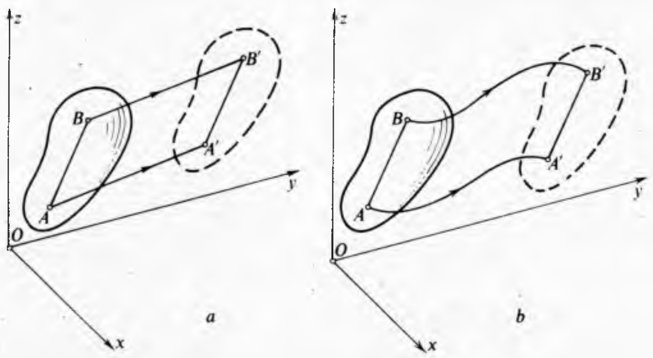
Položaj krutog tijela u prostoru određen je sa šest podataka, šest koordinata položaja. To je najmanji broj potrebnih podataka kojim se može jednoznačno opisati opće gibanje tijela u prostoru, a prema definiciji taj broj odgovara broju stupnjeva slobode gibanja slobodnog krutog tijela. Kako u krutom tijelu, ne ulazeći u mikrostrukturu, pojedine čestice ne mijenjaju međusobni položaj, to je uz zadani geometrijski oblik tijela s ovih šest podataka određen i položaj svih čestica tijela, pa prema tome i njihovo gibanje.



Sl. 18. Nepomični koordinatni sustav x,y,z i pomični koordinatni sustav vezan uz tijelo ξ,η,ζ pomoću kojih se opisuje gibanje slobodnog krutog tijela. Koordinatni sustav X,Y,Z vezan je uz tijelo, a za promjene kuta φ predstavlja nepomičan sustav. Koordinate x,y,z točke A i Eulerovi kutovi ψ,φ,ϑ određuju položaj tijela s obzirom na nepomični sustav

Kad se opisuje gibanje slobodnoga krutog tijela, primjenjuju se dva koordinatna sustava, od kojih se jedan odabire kao nepomični, a drugi se vezuje uz tijelo (sl. 18). Položaj tijela je potpuno određen ako su u svakom trenutku poznate koordinate položaja x,y,z jedne točke tijela i orijentacija osi ξ,η,ζ pomičnoga koordinatnog sustava vezanoga uz tijelo. Orijentacija tih osi određuje se preko kutova ψ, φ i ϑ (Eulerovi kutovi), od kojih je ψ kut precesije, φ kut rotacije i ϑ kut nutacije. Ravnina $x'y'$ položena paralelno ravnini xy kroz ishodište A koordinatnog sustava ξ,η,ζ ima presječnicu s ravninom $\xi\eta$ u nodalnoj ili čvornoj liniji n. Kut ψ pokazuje otklon nodalne linije od pomoćne osi x', kut φ određuje orijentaciju osi ξ s obzirom na nodalnu liniju, dok kut ϑ predstavlja otklon osi ζ s obzirom na pomoćnu os z'. Koordinate x,y,z i kutovi ψ,φ,ϑ predstavljaju šest međusobno nezavisnih veličina i, u općem slučaju gibanja krutog tijela, funkcije su vremena. Neka gibanja jednostavnije se opisuju u koordinatnom sustavu X,Y,Z u kojemu se os X poklapa s nodalnom linijim, os Z je identična s osi ζ, a os Y leži u ravnini $\xi\eta$.

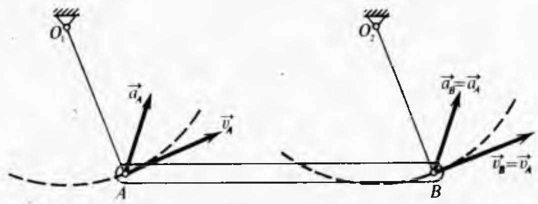
U tehničkoj praksi dijelovi strojeva i mehaničkih konstrukcija ili sustavi međusobno povezanih tijela (mehanizmi) gibaju se kao vezana ili neslobodna tijela. Da bi se ostvarilo željeno gibanje nekog elementa stroja ili mehanizma, izvode se veze s ostalim tijelima u sustavu (kinematičke veze) koje ograničuju mogućnost gibanja elementa. Tada se broj potrebnih koordinata



Sl. 19. Pravocrtna (*a*) i krivocrtna (*b*) translacija

za određivanje položaja tijela smanjuje, a tijelo ima manje stupnjeva slobode gibanja.

Translacija krutog tijela. Ako za vrijeme gibanja ostaju kutovi ψ, φ i ϑ nepromijenjeni, tijelo će se gibati tako da bilo koji pravac na tijelu ostaje paralelan svome prvobitnom položaju. Takvo gibanje naziva se translacijom. Sve točke na tijelu opisuju sukladne putanje i gibaju se međusobno jednakim brzinama i ubrzanjima. Prema obliku putanja točaka razlikuje se krivocrtna i pravocrtna translacija (sl. 19 i 20). Pri takvu gibanju dovoljno je odrediti gibanje jedne točke tijela, pa se, prema tome, kinematika translacije tijela svodi na kinematiku čestice.

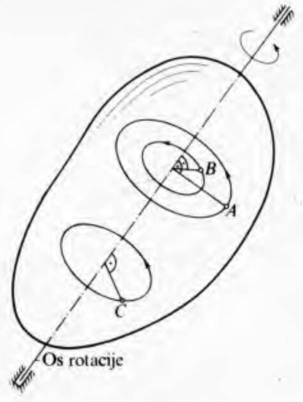


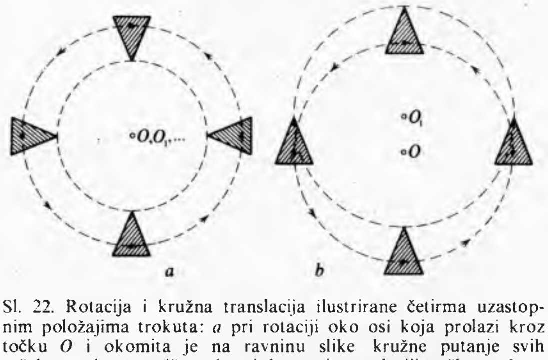
Sl. 20. Krivocrtna translacija štapa ostvaruje se paralelnim ovješenjem na jednakim krakovima O_1A i O_2B

Rotacija oko nepomične osi. Sve točke tijela pri rotaciji oko nepomične osi opisuju kružne putanje sa središtem na istom pravcu koji se zove os rotacije. Pri tom su putanje koncentrične kružnice ili leže u međusobno paralelnim ravninama (sl. 21). Mnogi se dijelovi mehanizama i strojeva tako gibaju (rotori motora, ručice mehanizama, zupčanici), pa je to jedno od najčešćih gibanja u tehnici. Iz definicije tog gibanja proizlazi da os rotacije ne mora neizbježno prolaziti kroz tijelo (sl. 22) a da se ipak radi o rotaciji oko nepomične osi.

Za određivanje položaja tijela pri takvu gibanju dovoljna je jedna koordinata. To je kut što ga bilo koji pravac vezan uz tijelo i okomit na os rotacije zatvara s početnim položajem (sl. 23). Taj je kut funkcija vremena $\varphi = \varphi(t)$ i u konačnom intervalu Δt ima konačni prirast $\Delta\varphi$. Taj prirast, podijeljen intervalom vremena, daje prosječnu ili srednju kutnu brzinu

Sl. 21. Rotacija tijela oko nepomične osi. Putanje točaka tijela su ili koncentrične kružnice (A i B) ili leže u paralelnim ravninama (C). Središta su svih kružnih putanja na osi rotacije





Sl. 22. Rotacija i kružna translacija ilustrirane četirma uzastopnim položajima trokuta: *a* pri rotaciji oko osi koja prolazi kroz točku O i okomita je na ravninu slike kružne putanje svih točaka su koncentrične: *b* pri kružnoj translaciji točke trokuta opisuju kružnice koje nemaju zajedničkog središta

$$\omega_s = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{83}$$

koja ima dimenziju radijan u sekundi (rad/s) ili recipročna sekunda (s^{-1}). Prirast kuta u beskonačno malom intervalu vremena daje trenutnu kutnu brzinu

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{84}$$

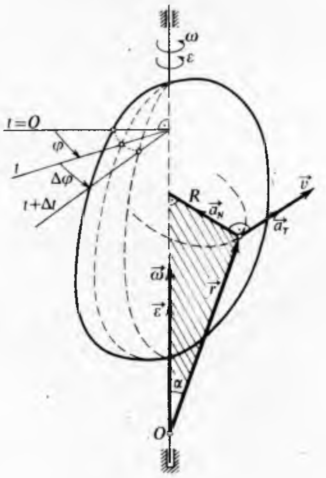
Kao mjera brzine kojom tijelo rotira služi i veličina koja pokazuje koliko punih okretaja (2π radijana) učini tijelo u minuti (tzv. brzina vrtnje). Vezu između tog broja okretaja n u minuti i kutne brzine ω u radijanima u sekundi daje formula

$$\omega = \frac{n\pi}{30}. \tag{85}$$

Tablica 3

PRIMJERI NEKIH BRZINA VRTNJE I KUTNIH BRZINA

Predmet	*Brzina vrtnje n* min^{-1}	*Kutna brzina* ω $rad s^{-1}$
Radilica automobilskog motora	2500···6000	262···628
Elisa aviona	1200···1500	126···157
Turbina turbomlaznih aviona	12200···18000	1257···1885
Rotor helikoptera	250···400	26···42
Rotor velike vodne turbine	60···125	6,3···125
Rotor veće parne turbine	3000	314
Rotor asinhronog elektromotora snage do 100 kW	600; 750; 1000; 1500; 3000	63; 79; 105; 157; 314
Rotor ultracentrifuge	≧100000	≧10472
Zubarsko svrdlo (turbinski pogon)	350000	36652
Gramofonska ploča	33,3; 45; 78	3,5; 4,7; 8,2
Zemlja oko svoje osi	0,0006944	0,00007272



Sl. 23. Kut φ, kutna brzina ω i kutno ubrzanje ε pri rotaciji tijela oko nepomične osi. Brzina $\vec{v}$ i komponente ubrzanja $\vec{a}_T$ i $\vec{a}_N$ neke točke tijela leže u ravnini okomitoj na os rotacije (ravnina putanje)

Promjena kutne brzine u konačnom intervalu vremena određuje prosječno ili srednje kutno ubrzanje

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{86}$$

kojemu je dimenzija radijan u sekundi na kvadrat (rad/s^2), odnosno recipročna sekunda na kvadrat (s^{-2}). Graničnim prijelazom na beskonačno mali interval vremena dobije se trenutno kutno ubrzanje

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \tag{87}$$

Veza između kuta φ, kutne brzine ω i kutnog ubrzanja ε određena je, prema tome, izrazom

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}, \tag{88}$$

pa postoji potpuna analogija između tih veličina te puta, brzine i ubrzanja pri pravocrtnom gibanju [v. (6)].

Svakoj točki tijela odgovara kružna putanja određenog polumjera R, koji ujedno predstavlja udaljenost točke od osi rotacije. Luk s koji točka prijeđe po putanji u vremenu t izračunava se iz kuta φ prema izrazu

$$s = R\varphi, \tag{89}$$

tako da je iznos vektora brzine

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega. \tag{90}$$

Ubrzanje je određeno s dvije prirodne komponente, od kojih je tangencijalna

$$a_T = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon, \tag{91}$$

a normalna komponenta

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \tag{92}$$

Apsolutni je iznos vektora ubrzanja

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{93}$$

Kutnoj brzini i ubrzanju može se dati i vektorski smisao. Budući da je os rotacije nepomična, vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ leže na osi rotacije, imaju priraste samo po iznosu, a vezani su preko prve derivacije po vremenu: $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. Smjer vektora $\vec{\omega}$ određen je smislom rotacije tijela prema pravilu o gibanju desnog vijka. Kad se smjer vektora $\vec{\omega}$ poklapa sa smjerom vektora $\vec{\varepsilon}$, gibanje je ubrzano. Ako su smjerovi suprotni, rotacija se usporava.

Radijvektor $\vec{r}$ s početkom u nepomičnoj točki O (npr. na osi rotacije), koji određuje položaj neke točke tijela u prostoru, vektorski pomnožen s lijeva s kutnom brzinom, daje vektorski izraz za brzinu točke (Eulerova formula):

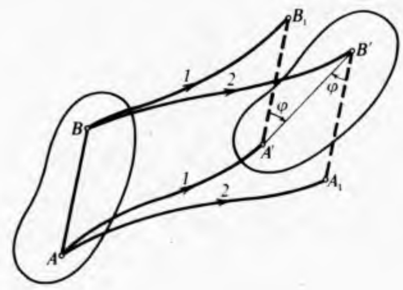
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{94}$$

Deriviranjem tog izraza po vremenu dobije se vektor ubrzanja

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{95}$$

kojemu je $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ tangencijalna komponenta, a $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ normalna komponenta ubrzanja. Izrazi za apsolutne iznose vektora brzine i komponente vektora ubrzanja odgovaraju izrazima (90) do (92), jer je $v = \omega r \sin\alpha = \omega R$; $a_T = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon R$ i $a_N = \omega^2 r \sin 90° \sin\alpha = \omega^2 R$.

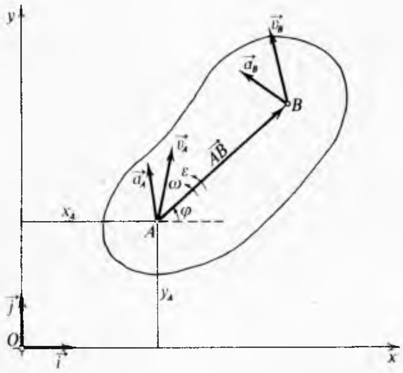
Ravninsko (planarno) gibanje tijela. U takvu se gibanju sve točke tijela gibaju u istim ili u međusobno paralelnim ravninama. Pri tom je dovoljno poznavati gibanje bilo kojeg presjeka tijela s ravninom u kojoj se taj presjek giba (referentna ravnina).



Sl. 24. Ravninsko gibanje. Iz položaja AB dolazi presjek tijela u položaj $A'B'$ translacijom s točkom A (krivulje *1*) i rotacijom oko A' za kut φ ili translacijom s točkom B (krivulje *2*) i suprotnom rotacijom za jednaki kut φ

Ravninsko gibanje može se zamisliti da se sastoji od ravninske translacije, s nekom odabranom točkom na presjeku, i od rotacije oko osi koja prolazi kroz tu točku i stoji okomito na referentnu ravninu. Takva predodžba omogućuje jednostavnije opisivanje tog gibanja, jer se svi zakoni zasnivaju na superpoziciji translacije presjeka tijela i rotacije oko točke u ravnini (sl. 24). Kad nema translacije, ravninsko gibanje prelazi u rotaciju oko nepomične osi, koja je poseban slučaj ravninskog gibanja.

Položaj presjeka tijela u ravnini određen je najmanje trima podacima: koordinatama jedne točke presjeka i jednim kutom. Prema tome, slobodnom ravnom liku odgovaraju u ravnini tri stupnja slobode gibanja.



Sl. 25. Koordinate x_A, y_A i kut φ određuju položaj tijela s obzirom na ravninu xy pri ravninskom gibanju

Ako su poznate koordinate točke A, $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, i kut $\varphi = \varphi(t)$ nekog pravca AB na tijelu prema osi x (sl. 25), određeni su vektori brzine $\vec{v}_A$ i ubrzanja $\vec{a}_A$ točke A te kutna brzina ω i kutno ubrzanje ε tijela:

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j} \qquad (96)$$

$$\vec{a}_A = \ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{y}_A \vec{j} \qquad (97)$$

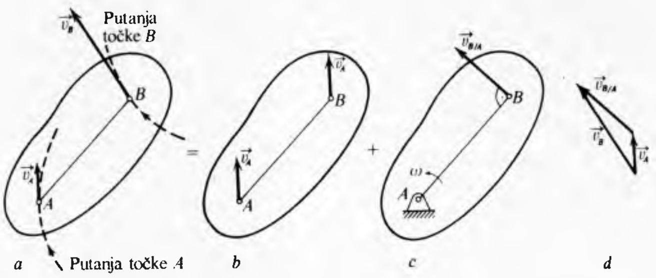
$$\omega = \dot{\varphi} \qquad (98)$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}. \qquad (99)$$

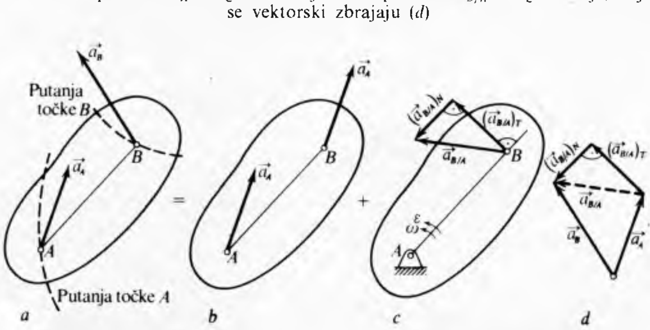
Vektor brzine neke druge točke B određen je vektorskom jednadžbom

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}, \qquad (100)$$

gdje je $\vec{v}_A$ komponenta brzine $\vec{v}_B$ zbog translacije tijela s točkom A, a $\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ komponenta brzine točke B zbog rotacije oko A (sl. 26). Brzina $\vec{v}_{B/A}$ okomita je uvijek na pravac AB, a kako su $\vec{\omega}$ i $\overrightarrow{AB}$ međusobno okomiti, iznos je te komponente jednak umnošku kutne brzine i udaljenosti točke B od



Sl. 26. Ravninsko gibanje (a) sastavljeno je od translacije s odabranom točkom A (b) i od rotacije tijela oko A (c). Vektor brzine neke druge točke B sadrži komponentu $\vec{v}_A$ zbog translacije i komponentu $\vec{v}_{B/A}$ zbog rotacije, koje se vektorski zbrajaju (d)

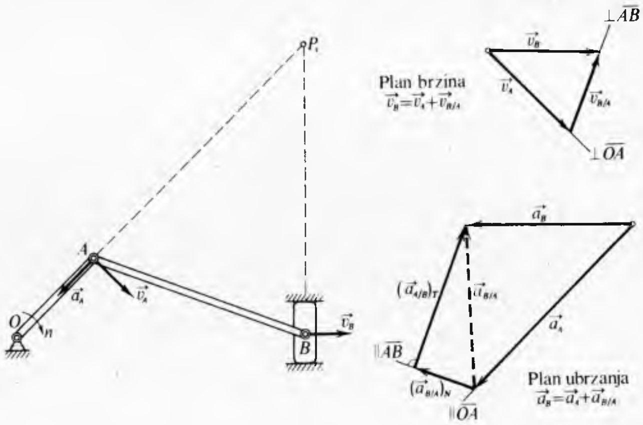


Sl. 27. Ubrzanja pri ravninskom gibanju vektorski su zbroj komponente zbog translacije $\vec{a}_A$ i tangencijalne i normalne komponente $(\vec{a}_{B/A})_T$ i $(\vec{a}_{B/A})_N$ zbog rotacije. a ravninsko gibanje, b translacija, c rotacija oko točke A, d vektorski dijagram ubrzanja

točke A, pa je $v_{B/A} = \omega AB$. Vektor ubrzanja točke B derivacija je vektora brzine $\vec{v}_B$ po vremenu, a sastoji se jednako kao i brzina od dviju komponenata (sl. 27):

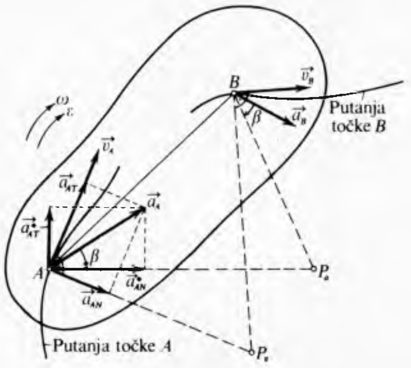
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}. \qquad (101)$$

Ubrzanje $\vec{a}_{B/A} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB})$ posljedica je rotacije presjeka tijela oko točke A. Tangencijalna $(\vec{a}_{B/A})_T = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}$ i normalna komponenta $(\vec{a}_{B/A})_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB})$ imaju isto značenje kao i pri rotaciji tijela oko nepomične osi, pa im se iznosi izračunavaju prema formulama $(a_{B/A})_T = \varepsilon AB$ i $(a_{B/A})_N = \omega^2 \overline{AB}$. Vektorske jednadžbe (100) i (101) rješavaju se računski ili grafički crtanjem plana brzina i plana ubrzanja (sl. 28).



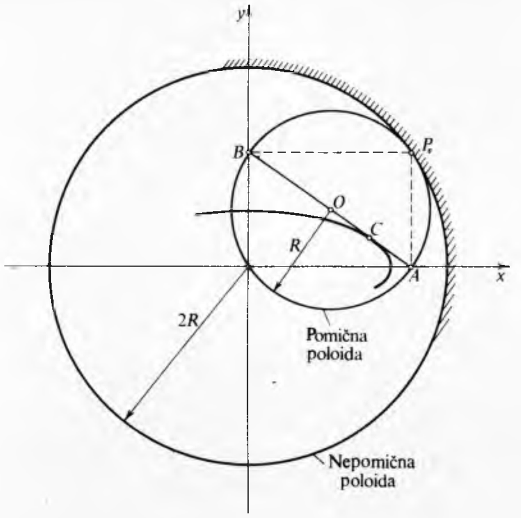
Sl. 28. Plan brzina i plan ubrzanja motornog mehanizma s omjerom 1:2 ručice OA prema ojnici AB i s konstantnom brzinom vrtnje n ručice

Okomice na vektore brzina svih točaka presjeka, koje su ujedno normale na putanje, sijeku se za promatrani položaj tijela u trenutnom polu (središtu) brzina. Brzina tog pola, koji može biti na presjeku tijela ili se može zamisliti da je vezan uz presjek, jednaka je nuli. Koincidentna točka s trenutnim polom vezana uz ravninu gibanja zove se trenutno središte rotacije. Ravninsko gibanje može se, prema tome, predočiti i kao rotacija oko trenutnog središta rotacije, koja s vremenom mijenja položaj u ravnini, pa se tada radi o nizu uzastopnih rotacija oko pripadnih središta rotacije. Takva predodžba vrijedi samo za promatranje brzina koje su tada jednake umnošku kutne brzine ω i udaljenosti od trenutnog pola P_v. Tako za neku točku A brzina iznosi $v_A = \omega \overline{AP_v}$ (sl. 29).

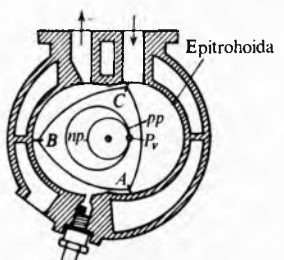


Sl. 29. Trenutni pol brzina P_v i trenutni pol ubrzanja P_a pri ravninskom gibanju tijela

Geometrijsko mjesto svih trenutnih središta rotacije jest krivulja vezana uz nepomičnu ravninu i naziva se nepomičnom poloidom. Toj krivulji odgovara pomična poloida koja je geometrijsko mjesto svih trenutnih polova brzina, a vezana je uz presjek tijela s kojim se zajedno giba. Pomična i nepomična poloida (centroide, rulete) određuju se matematički tako da se koordinate trenutnog pola brzina promatraju u dvama koordinatnim sustavima: pomičnom ξ,η vezanim uz tijelo i nepomičnom x, y vezanim uz ravninu gibanja. Ravninsko gibanje tumači se tada kao kotrljanje bez međusobnog klizanja pomične po nepomičnoj poloidi. Tehnika se često služi tom spoznajom, pa se tako ostvaruju mnoga ravninska gibanja. Kotrljanje valjka po horizontalnoj podlozi primjer je ravninskog gibanja ostvarenog pomoću poloida. Pri tom obod svakog presjeka valjka (kružnica) predstavlja pomičnu, a pripadni pravac po kojem se odvija kotrljanje nepomičnu poloidu. Trenutni pol brzina dodirna je točka kružnice i pravca. Posebno su važna gibanja koja se ostvaruju izvedbom pomične i nepomične poloide u obliku kružnica. Kotrljanje jedne kružnice po drugoj izvodi se ozubljenjem. Putanje koje nastaju, već prema tome da li se pomična poloida kotrlja po nepomičnoj izvana ili iznutra, te prema udaljenosti točke tijela od središta pomične poloide, mogu biti epicikloide, hipocikloide, trohoide itd. (sl. 30). Na tom principu ostvaruje se gibanje klipa u rotacijskom eksplozijskom motoru prema Wankelovoj konstrukciji (sl. 31).



Sl. 30. Cardanov problem. Pomična poloida polumjera R kotrlja se bez klizanja unutar nepomične poloide polumjera $2R$. Točke A i B gibaju se pravocrtno po osima x i y. Sve točke na obodu pomične poloide opisuju također pravocrtne putanje. Središte O giba se po kružnici, a svaka druga točka C na pravcu AB opisuje elipsu s poluosima BC i AC (princip elipsografa)



Sl. 31. NSU-Wankelov motor. Rotor motora izveden kao pomična poloida (pp) kotrlja se po pogonskoj osovini, koja je nepomična poloida, te svojim vrhovima A, B i C opisuje epitrohoidu. Kotrljanje bez klizanja ostvareno je ozubljenjem

Trenutni pol ubrzanja je ona točka presjeka tijela ili točka vezana uz presjek kojoj je u promatranom trenutku ubrzanje jednako nuli te u smislu ubrzanja predstavlja točku oko koje u tom trenutku tijelo rotira s kutnom brzinom ω i kutnim ubrzanjem ε. Iz poznatog ubrzanja $\vec{a}_A$ neke točke A, kutne brzine ω i kutnog ubrzanja ε dobije se udaljenost trenutnog pola ubrzanja P_a (sl. 29) prema izrazu

$$\overline{AP_a} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (102)$$

Pravac $\overline{AP_a}$ zatvara kut β s pravcem vektora ubrzanja $\vec{a}_A$ koji iznosi

$$\beta = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (103)$$

To je otkloni kut prema pravcu koji vezuje točku tijela s trenutnim polom ubrzanja, a jednak je za sve točke tijela. Smisao otklona odgovara smislu kutnog ubrzanja ε, odnosno smislu koji diktira tangencijalna komponenta ubrzanja.

Trenutni pol ubrzanja ne poklapa se u općem slučaju s trenutnim polom brzina. Kad se vektor ubrzanja neke točke A tijela određuje preko trenutnog pola ubrzanja, izračunava se komponenta ubrzanja usmjerena prema polu P_a iz izraza

$$a_{AN}^* = \omega^2 \overline{AP_a}. \qquad (104)$$

Druga komponenta koja je okomita na pravac AP_a ima iznos

$$a_{AT}^* = \varepsilon \overline{AP_a}. \qquad (105)$$

Smisao te komponente određen je smislom kutnog ubrzanja ε. Obje komponente podsjećaju na prirodne komponente ubrzanja, ali se od njih razlikuju i po iznosu i po smjeru. Normalna komponenta vektora $\vec{a}_A$ usmjerena je prema središtu zakrivljenosti putanje točke A, koje leži na istom pravcu kao i pol brzina P_v, a iznosi

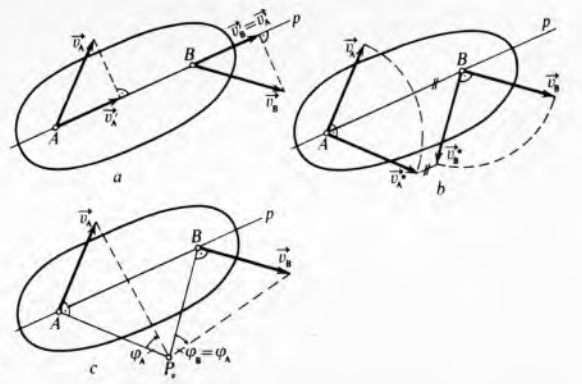
$$a_{AN} = \frac{v_A^2}{R}. \qquad (106)$$

U tom je izrazu R polumjer zakrivljenosti putanje točke A koji odgovara onom trenutku u kojem se promatraju brzine i ubrzanja. Tangencijalna komponenta bit će tada

$$a_{AT} = \frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t}. \qquad (107)$$

Obje komponente ne mogu se izračunati neposredno iz kutne brzine ω i kutnog ubrzanja ε, osim kad se polovi P_v i P_a poklapaju. Tada je to rotacija tijela bez translacije.

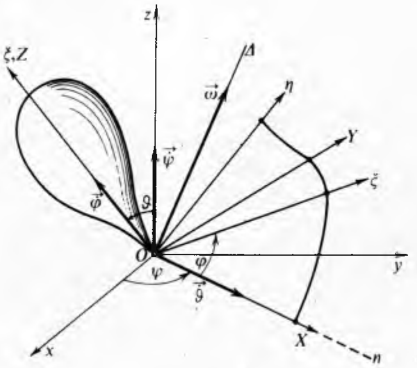
Svi vektori brzina koji pripadaju točkama nekoga zajedničkog pravca p imaju pri ravninskom gibanju jednake projekcije na taj isti pravac (sl. 32). Vektori tih brzina zaokrenuti za 90° u jednom ili drugom smislu dodiruju šiljcima pravac koji je paralelan s pravcem p. Kutovi uz pol brzina P_v koji leže u trokutima što ih tvore vektori brzina s polom P_v međusobno su jednaki. Ta tri svojstva služe za određivanje brzina pri ravninskom gibanju krutog tijela.



Sl. 32. Svojstva vektora brzina pri ravninskom gibanju: a projekcije su vektora brzina točaka na zajednički pravac (v'_A, v'_B) jednake, b šiljci zaokrenutih brzina za 90° (v_A^*, v_B^*) leže na pravcu koji je paralelan zajedničkome, c trokuti koje tvore vektori brzina točaka zajedničkog pravca s trenutnim polom međusobno su slični, te su i kutovi uz pol (φ_A, φ_B) jednaki

Brzine i ubrzanja određuju se pri ravninskom gibanju tijela ili sustava tijela (mehanizmi) analitički ili grafički. Analitički postupci za složenije sustave provode se zbog velikog opsega računanja na digitalnim elektroničkim računalima, koji daju podatke o brzinama i ubrzanjima za sve željene položaje presjeka tijela u ravnini. Grafički postupci (plan brzina, plan ubrzanja, upotreba triju svojstava ravninskog gibanja) provode se za svaki položaj tijela posebno, ali zbog niže cijene još se uvijek pretežno upotrebljavaju u inženjerskoj praksi.

Sferno gibanje (gibanje oko nepomične točke). Takvo gibanje nastaje kad jedna točka na tijelu miruje, a sve se ostale gibaju u prostoru zajedno s tijelom oko te nepomične točke. Sferno gibanje nastaje i kada je tijelo vezano krutom vezom uz nepomičnu točku koja ne pripada tijelu ili se može zamisliti da takva veza postoji. Takvo gibanje izvodi, npr., dječji zvrk, kojemu je šiljak nepomičan s obzirom na stol, a os simetrije stoji nagnuta prema vertikali. Svaka točka krutog tijela ostaje u toku gibanja na jednakoj udaljenosti od točke O oko koje se odvija sferno gibanje. Stoga putanje tih točaka leže na sfernim plohama kojih je središte točka O, otkuda i ime tom gibanju. U svakom je trenutku položaj tijela određen Eulerovim kutovima $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $\vartheta = \vartheta(t)$; tijelo pri takvu gibanju ima tri stupnja slobode gibanja. Koordinate nepomične točke O u nepomičnom koordinatnom sustavu ne mijenjaju se s vremenom (jednadžbe veze), no obično se iz praktičnih razloga uzima da su jednake nuli, pa se ishodište nepomičnoga koordinatnog sustava podudara s točkom oko koje se odvija sferno gibanje (sl. 33).



Sl. 33. Vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ i trenutna os rotacije Δ pri sfernom gibanju

Svaka konačno velika promjena položaja tijela pri sfernom gibanju odgovara rotaciji tijela za neki konačni kut oko točno određene osi koja prolazi kroz nepomičnu točku oko koje se izvodi gibanje (Euler-d'Alembertov poučak). Stvarna promjena položaja ne odvija se prema toj predodžbi, no što je kraći period vremena u kojem se promatra promjena položaja, to je ta predodžba bliža odvijanju stvarnog gibanja. U beskonačno kratkom periodu vremena stvarno gibanje jednako je u potpunosti rotaciji oko osi koja se zove trenutna os rotacije. Svakom trenutku t odgovara jedna trenutna os rotacije Δ na kojoj leži vektor pripadne kutne brzine $\vec{\omega}$. Konačni zakreti za kutove ψ, φ i ϑ ne daju zbrojeni ukupnu rotaciju tijela koja je ostvarena oko osi rotacije u konačnom intervalu vremena. Za beskonačno male vrijednosti tih kutova vrijede zakoni o zbrajanju vektora, pa se i prve derivacije tih kutova po vremenu mogu vektorski zbrojiti u vektor trenutne kutne brzine

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\vartheta}}. \quad (108)$$

Vektor $\vec{\omega}$ promjenljiva je veličina te ima prirast i po apsolutnom iznosu i po smjeru. Prva derivacija vektora kutne brzine daje vektor kutnog ubrzanja

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}, \quad (109)$$

koji se ne poklapa po smjeru s vektorom $\vec{\omega}$, što znači da ne leži na pravcu trenutne osi rotacije (sl. 34).

Brzina neke točke A tijela dobije se kao vektorski umnožak vektora kutne brzine i radijvektora točke A (Eulerova formula)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (110)$$

Vektor brzine okomit je na ravninu koju tvore vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$, a po smislu odgovara smislu trenutne rotacije. Po apsolutnom iznosu brzina je jednaka umnošku iznosa kutne brzine ω i udaljenosti b točke A od osi Δ:

$$v = \omega b. \quad (111)$$

Prva derivacija vektora brzine po vremenu daje vektor ubrzanja točke A:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (112)$$

Prva komponenta $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ okomita je na ravninu u kojoj leže vektori $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{r}$. Druga komponenta $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ siječe os Δ pod pravim kutom i usmjerena je uvijek prema toj osi. U općem slučaju komponente $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ nisu međusobno okomite. Iznos tih komponenata dobije se prema izrazima:

$$a_1 = \varepsilon b_1, \quad (113)$$

$$a_2 = \omega^2 b, \quad (114)$$

gdje je b_1 udaljenost točke A od pravca vektora $\vec{\varepsilon}$. Vektorski izraz (110) za brzinu neke točke tijela podudara se s istim izrazom pri rotaciji tijela oko nepomične osi. Za vektor ubrzanja komponenta $\vec{a}_2$ odgovara centripetalnom ubrzanju, dok se komponenta $\vec{a}_1$ ne može poistovjetiti s tangencijalnom komponentom, te ovdje nema analogije s rotacijom tijela oko nepomične osi.

Izrazi (111), (113) i (114) daju podlogu za fizikalno razumijevanje iznosa brzine i ubrzanja, pa se samo pri jednostavnijim slučajevima upotrebljavaju za izračunavanje vrijednosti tih veličina. Poteškoću čini određivanje udaljenosti b i b_1. Zato se vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ prikazuju u jednom od koordinatnih sustava: nepomičnom x,y,z, pomičnom vezanim uz tijelo ξ,η,ζ ili djelomično pomičnom X,Y,Z. U odabranom sustavu prikazuje se i radijvektor $\vec{r}$, te se zatim rješavaju desne strane izraza (110) i (112), iz čega proizlaze komponente vektora brzine i ubrzanja.

Komponente vektora kutne brzine $\vec{\omega}$ dobiju se kao zbroj projekcija vektora $\vec{\dot{\psi}}$, $\vec{\dot{\varphi}}$ i $\vec{\dot{\vartheta}}$ na osi odabranoga koordinatnog sustava. U svim trima sustavima koji služe za opisivanje sfernog gibanja te komponente glase (Eulerove kinematičke jednadžbe):

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \quad (115)$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi + \dot{\vartheta}\sin\psi \quad (116)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} \quad (117)$$

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi \quad (118)$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi \quad (119)$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} \quad (120)$$

$$\omega_X = \dot{\vartheta} \quad (121)$$

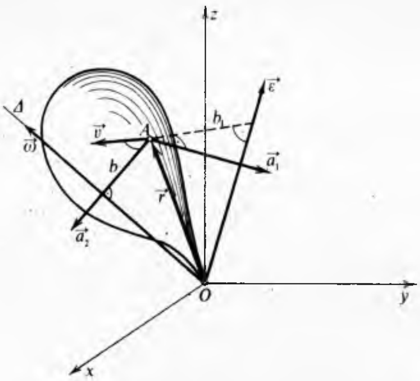
$$\omega_Y = \dot{\psi}\sin\vartheta \quad (122)$$

$$\omega_Z = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \quad (123)$$

Iznos vektora $\vec{\omega}$ jednak je drugom korijenu iz zbroja kvadrata komponenata bilo kojega koordinatnog sustava, pa glasi

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\vartheta}, \quad (124)$$

dok se smjer određuje prema pojedinim osima kao i za svaki drugi vektor.



Sl. 34. Vektori kutne brzine $\vec{\omega}$ i kutnog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$, vektor brzine $\vec{v}$ i komponente $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ vektora ubrzanja proizvoljne točke A pri sfernom gibanju

Komponente kutnog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ u koordinatnim sustavima x,y,z i ξ,η,ζ dobiju se kao derivacije pripadnih komponenata kutne brzine, dok u sustavu X,Y,Z tim derivacijama treba dodati članove zbog promjene smjera koordinatnih osi:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x \tag{125}$$

$$\varepsilon_y = \dot{\omega}_y \tag{126}$$

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z \tag{127}$$

$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi \tag{128}$$

$$\varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta \tag{129}$$

$$\varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta \tag{130}$$

$$\varepsilon_X = \dot{\omega}_X + \omega'_Y \omega_Z - \omega'_Z \omega_Y \tag{131}$$

$$\varepsilon_Y = \dot{\omega}_Y + \omega'_Z \omega_X - \omega'_X \omega_Z \tag{132}$$

$$\varepsilon_Z = \dot{\omega}_Z + \omega'_X \omega_Y - \omega'_Y \omega_X, \tag{133}$$

gdje su $\omega'_X = \dot{\vartheta}$, $\omega'_Y = \dot{\psi}\sin\vartheta$ i $\omega'_Z = \dot{\psi}\cos\vartheta$ komponente vektora kutne brzine $\vec{\omega}'$ koji prikazuje rotaciju koordinatnog sustava X, Y, Z.

Trenutna os rotacije Δ opisuje u prostoru čunjastu plohu s vrhom u nepomičnoj točki oko koje se odvija sferno gibanje. Promatrano iz nepomičnoga koordinatnog sustava x, y, z, trenutna os opisuje nepomičnu aksoidu, kojoj jednadžba slijedi iz uvjeta da je trenutna os rotacije niz točaka na pravcu što u promatranom trenutku imaju brzinu jednaku nuli. Prema tome, vektorska je jednadžba trenutne osi

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \tag{134}$$

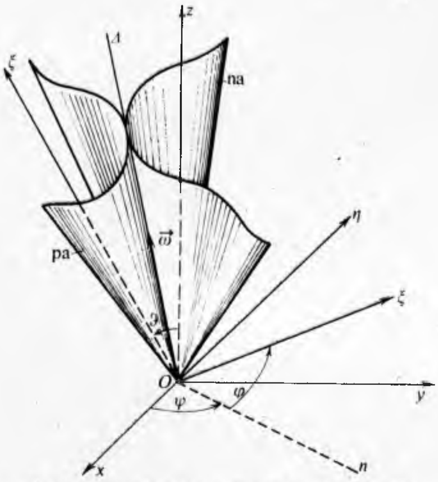
a odatle proizlazi jednadžba nepomične aksoide

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{135}$$

Promatrano iz pomičnog koordinatnog sustava ξ, η, ζ koji se giba zajedno s tijelom, os Δ opisuje pomičnu aksoidu prema jednadžbi

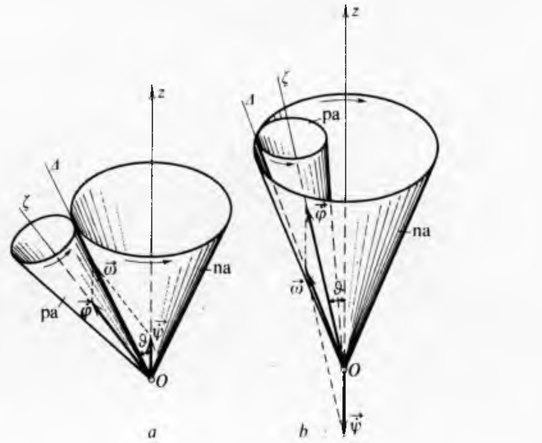
$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \tag{136}$$

Pri sfernom gibanju pomična i nepomična aksoida dodiruju se u izvodnici koju predstavlja trenutna os Δ. U geometrijskom smislu dovoljno je poznavati obje aksoide, pa se tada gibanje može reproducirati kao kotrljanje pomične po nepomičnoj aksoidi bez međusobnog klizanja (sl. 35). U tehnici se dijelovi mehanizama izrađuju kao pomične i nepomične aksoide, čime se ostvaruju različita sferna gibanja (stožasti zupčanici). Da bi bila potpuno određena i kinematika takva gibanja, potrebno je poznavati kutnu brzinu kojom se odvija kotrljanje pomične aksoide. Kad je nepomična točka sfernog gibanja u beskonačnosti, aksoide prelaze u plohe s paralelnim izvodnicama; gibanje je ravninsko, a presjeci ploha s bilo kojom ravninom okomitom na izvodnice daju pomičnu i nepomičnu poloidu.



Sl. 35. Nepomična (na) i pomična (pa) aksoida

Posebno je važno sferno gibanje pri kojemu su aksoide kružni čunjevi. Takvo gibanje naziva se *precesijom*, a javlja se uvijek kad se jedan od Eulerovih kutova za vrijeme gibanja ne mijenja. Uobičajeno je da se za taj kut odabere kut nutacije ϑ. Ako se pri precesiji preostala dva kuta mijenjaju jednoliko (npr. $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ imaju konstantne vrijednosti, $\dot{\vartheta} = 0$), precesija je regularna, koja, već prema položaju pripadnih vektora kutnih brzina, može biti progresivna ili retrogradna (regresivna) (sl. 36). Pri progresivnoj precesiji kotrlja se pomična aksoida sa svojom vanjskom plohom po vanjskoj plohi nepomične aksoide. Retrogradna precesija nastaje kada se pomična aksoida kotrlja sa svojom vanjskom plohom po unutrašnjoj strani nepomične aksoide (npr. Zemlja s obilaznim vremenom pomične aksoide po nepomičnoj od 25 868 godina, v. *Giroskop*, TE 6, str. 129). Slaganjem dviju rotacija oko osi koje leže pod nekim kutom dobiva se također precesijsko gibanje.



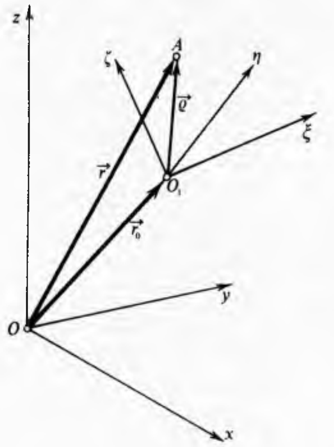
Sl. 36. Progresivna (*a*) i retrogradna (*b*) precesija. Pomična aksoida (pa) kotrlja se pri progresivnoj precesiji po nepomičnoj aksoidi (na) s istim smislom rotacije s kojim i rotira oko vlastite osi

Opće gibanje slobodnog tijela u prostoru. Prema Chaslesovu poučku svako opće gibanje slobodnog tijela u prostoru može se zamisliti da je sastavljeno od jedne translacije s nekom proizvoljno odabranom točkom i sfernog gibanja oko te točke. Takvo gibanje ima šest stupnjeva slobode gibanja. Tri koordinate odabrane točke $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$ određuju vektore brzine i ubrzanja zbog translacije, koji su za sve točke tijela jednaki. Eulerovim kutovima $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ i $\vartheta = \vartheta(t)$ određeno je sferno gibanje. Zbrajanjem vektora brzina zbog translakcije i sfernog gibanja dobiva se ukupna brzina neke točke tijela. Isto vrijedi i za ubrzanje.

Sastavljanje gibanja

Gibanje čestice ili tijela promatra se u kinematici relativno s obzirom na neko drugo kruto tijelo za koje se pretpostavlja da miruje, te se uz njega vezuje koordinatni sustav koji je tada također nepomičan. Takav koordinatni sustav pri rješavanju tehničkih problema vezan je uz postolje nekog stroja, temelje neke konstrukcije ili uz tijela koja s obzirom na Zemlju miruju. To je mirovanje samo prividno, jer se i ta tijela zajedno sa Zemljom gibaju, a rezultati su proračuna u takvim koordinatnim sustavima približni i ne bi se poklapali s precizno izvedenim mjerenjima. Međutim, odstupanja od ispravnih rezultata toliko su mala da se u inženjerskoj praksi zanemaruju, pa se cijela tehnička kinematika zasniva na takvoj pretpostavci o mirovanju. Kad se neko tijelo ili čestica giba s obzirom na neko referentno tijelo koje se s obzirom na mirujući koordinatni sustav također giba (npr. pokretni dijelovi strojeva na brodu, čestica vode na lopatici turbine, putnik koji hoda u vlaku), mora se uzeti u obzir gibanje referentnog tijela kada se donose zaključci o ukupnom gibanju promatranog tijela ili čestice. Gibanje s obzirom na referentno tijelo uz koje se vezuje pomični koordinatni sustav zove se relativno gibanje. Gibanje pomičnoga koordinatnog sustava s obzirom na mirujući naziva se prijenosnim gibanjem, a gibanje koje je rezultanta obaju gibanja promatranog tijela ili čestice daje apsolutno gibanje. Apsolutno gibanje, prema tome, nastaje sastavljanjem relativnog i prijenosnog, ali se ne mora svako apsolutno gibanje tako matematički opisivati.

Složeno gibanje čestice. Takvo gibanje nastaje kad se čestica relativno giba s obzirom na pomični (relativni) koordinatni sustav ξ, η, ζ koji se s obzirom na nepomični (apsolutni, inercijski) x,y,z giba kao kruto tijelo (sl. 37). Gibanje čestice u sustavu x,y,z (apsolutno gibanje) određeno je radijvektorom $\vec{r}$, kojega prva i druga derivacija po vremenu daju vektor apsolutne brzine i vektor apsolutnog ubrzanja. Često je utvrđivanje vektora $\vec{r}$ otežano, pa se gibanje čestice opisuje sastavljanjem gibanja sustava ξ,η,ζ (prijenosno gibanje) i relativnog gibanja čestice unutar tog sustava. Prijenosno gibanje, prema Chaslesovu poučku, može biti u općem slučaju translacija koju određuje radijvektor ishodišta $\vec{r}_0$ i sferno gibanje oko ishodišta.



Sl. 37. Nepomični koordinatni sustav x,y,z i pomični ξ,η,ζ unutar kojeg se giba čestica A. Radijvektor $\vec{r}$ određuje apsolutno gibanje čestice s obzirom na sustav x, y, z, a sastoji se od vektora $\vec{r}_0$ (translacija sustava ξ,η,ζ) i vektora položaja čestice $\vec{\varrho}$ unutar pomičnog sustava

Unutar pomičnog sustava položaj čestice određen je vektorom $\vec{\varrho}$ koji ima dvojaku promjenu s vremenom: mijenja se zbog relativnog gibanja čestice unutar sustava ξ,η,ζ i neovisno o tome mijenja se zbog sferne komponente prijenosnog gibanja. Dio prirasta vektora $\vec{\varrho}$ dovodi, dakle, do relativne brzine $\vec{v}_r$ kojom se čestica giba s obzirom na pomični sustav, dok preostali dio i cijeli prirast vektora $\vec{r}_0$ određuje vektor prijenosne brzine $\vec{v}_p$. Apsolutna je brzina čestice vektorski zbroj tih dviju komponenata

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p. \tag{137}$$

Apsolutno ubrzanje čestice dobije se deriviranjem vektora apsolutne brzine, a uz jednaku predodžbu o relativnom i prijenosnom gibanju vektor ubrzanja ima tri komponente:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c. \tag{138}$$

Osim relativne $\vec{a}_r$ i prijenosne $\vec{a}_p$ komponente, vektor apsolutnog ubrzanja $\vec{a}$ sadrži i dopunsku komponentu $\vec{a}_c$ (Coriolisovo ubrzanje), koja je jednaka

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{139}$$

U tom izrazu $\vec{\omega}$ je vektor kutne brzine prijenosnog gibanja, te, prema tome, dopunsko ubrzanje leži okomito na ravninu koju tvori os rotacije prijenosnog gibanja i pravac relativne brzine. Iznos dopunskog ubrzanja određuje se prema izrazu

$$a_c = 2\omega v_r \sin\alpha, \tag{140}$$

gdje je α kut između vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_r$. Dopunskog ubrzanja neće biti kada prijenosno gibanje ne sadrži rotaciju (prijenosno gibanje je translacija), te kada se relativno gibanje čestice odvija na pravcu koji je paralelan s osi prijenosne rotacije ili se s njom poklapa ($\alpha = 0$ ili $180°$). Za praktično određivanje apsolutnog ubrzanja najpogodnije su prirodne komponente, te se prijenosno i relativno ubrzanje prikazuju pomoću tangencijalne i normalne komponente. Tada se apsolutno ubrzanje dobije kao vektorski zbroj od pet komponenata.

Bez dopunskog ubrzanja ne mogu se promatranjem unutar pomičnoga koordinatnog sustava objasniti pojave vezane uz relativna gibanja. Točnijim mjerenjem padanja tijela na Zemlju može se ustanoviti otklon od pravocrtne putanje (vertikala) prema istoku. Zbog rotacije Zemlje djeluje dopunsko ubrzanje pri padanju prema Zemlji u smjeru zapada, kojemu suprotno usmjerena inercijska sila otklanja tijelo prema istoku.

Već prema geografskoj širini φ i visini h s koje tijelo pada, određuje se taj otklon prema formuli

$$x = \frac{h\omega\cos\varphi}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{141}$$

gdje je $\omega = 0{,}00007272\,\mathrm{s}^{-1}$ kutna brzina rotacije Zemlje, a g ubrzanje Zemljine teže, koje prosječno iznosi $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Za $h = 100\,\mathrm{m}$ i $\varphi = 0°$ (ekvator) taj otklon iznosi 1,1 cm. Slična je pojava vidljiva na velikim rijekama koje na Sjevernoj polutki Zemlje teku od juga prema sjeveru. Zbog dopunskog ubrzanja i suprotno usmjerene inercijske sile otklanjaju se čestice vode prema istočnim obalama pa su one na potpuno ravnim dijelovima toka više potkopane (Berov zakon).

S. Jecić

DINAMIKA

Dinamika (prema grčkom δύναμις dinamis *sila*) proučava zakone gibanja čestica ili tijela, uvažavajući pri tome djelovanje sila na njih. U novijoj se literaturi često smatra da dinamika sadrži dva dijela, i to kinematiku (geometriju gibanja bez djelovanja sila) i kinetiku pod kojim se pojmom razumijeva ono što se u ovom članku smatra dinamikom.

Povijesno gledajući, dinamika je relativno mlađa u usporedbi sa statikom. Početak se racionalnog shvaćanja dinamike može vezati uz G. Galileja (1564—1642), koji je vrlo temeljito proučavao slobodni pad tijela, gibanje na kosini i gibanje njihala. Kao posljedica tih proučavanja smatra se bitna izmjena pogleda na shvaćanja starogrčkih filozofa. Tako je npr. izmijenjeno Aristotelovo shvaćanje da teža tijela padaju brže od laganih. I. Newton (1642—1727) nastavio je Galilejevo djelo formuliranjem zakona gibanja, postavljajući temelje suvremene dinamike i mehanike uopće. Svoje je poglede Newton objavio u djelu Matematički principi prirodne filozofije (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687). Osim njih, doprinijeli su razvitku dinamike L. Euler, J. d'Alembert, J. L. Lagrange, P. Laplace, L. Poinsot, G. Coriolis, A. Einstein i mnogi drugi.

U smislu inženjerske primjene, dinamika se može smatrati vrlo mladom. Naime, tek od početka proizvodnje brzih strojeva i mehanizama bilo je potrebno proračune temeljiti na dinamičkim za razliku od statičkih načela. Međutim, suvremeni razvoj tehnike, a posebno strojarstva, svakodnevno zahtijeva povećanje primjene načela mehanike, a posebno dinamike. Ta su načela temeljna u analizi udarnih opterećenja različitih konstrukcija, prometnih vozila, turbina, pumpa, alatnih strojeva itd.

Temeljni pojmovi i zakoni

Prostor je trodimenzijsko geometrijsko područje koje, naravno, može imati svoje dvodimenzijske ili jednodimenzijske oblike (ravnina i pravac).

Koordinatni sustav. Položaj promatranog predmeta u prostoru određen je relativno prema koordinatnom sustavu, koji se odabire kao pravokutni desni Descartesov koordinatni sustav. U tzv. klasičnoj mehanici primaran je inercijski sustav ili astronomski referentni sustav, koji je stvoren od zamišljenih osi pravokutnog sustava i koji nema niti translacija niti rotacija. Mjerenjima je dokazano da zakoni mehanike vrijede u takvu sustavu ako su brzine gibanja zanemarljive s obzirom na brzinu svjetlosti. Veličine utvrđene prema takvu sustavu nazivaju se apsolutnim veličinama, a koordinatni se sustav smatra nepomičnim u prostoru. Što više, ako se pričvrsti koordinatni sustav za površinu Zemlje, tada se u brojnim dinamičkim zadacima može smatrati takav sustav također nepomičnim, jer se odstupanje od temeljnih dinamičkih jednadžbi zanemaruje. Međutim, ako se proučava gibanje balističkih raketa ili svemirskih letjelica, tada apsolutno gibanje Zemlje, a time i koordinatnog sustava, postaje važno i mora se uzeti u obzir.

Vrijeme se u klasičnoj mehanici smatra univerzalnim, tj. ono nepovratno teče na potpuno isti način bez obzira na izbor referentnog koordinatnog sustava. Prema tome, vrijeme je skalarna veličina koja se stalno mijenja, pa se zbog toga