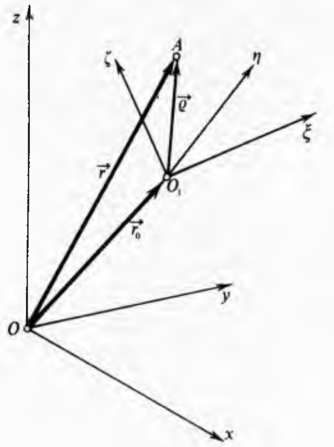
i prijenosnog, ali se ne mora svako apsolutno gibanje tako matematički opisivati.

Složeno gibanje čestice. Takvo gibanje nastaje kad se čestica relativno giba s obzirom na pomični (relativni) koordinatni sustav ξ, η, ζ koji se s obzirom na nepomični (apsolutni, inercijski) x,y,z giba kao kruto tijelo (sl. 37). Gibanje čestice u sustavu x,y,z (apsolutno gibanje) određeno je radijvektorom $\vec{r}$, kojega prva i druga derivacija po vremenu daju vektor apsolutne brzine i vektor apsolutnog ubrzanja. Često je utvrđivanje vektora $\vec{r}$ otežano, pa se gibanje čestice opisuje sastavljanjem gibanja sustava ξ,η,ζ (prijenosno gibanje) i relativnog gibanja čestice unutar tog sustava. Prijenosno gibanje, prema Chaslesovu poučku, može biti u općem slučaju translacija koju određuje radijvektor ishodišta $\vec{r}_0$ i sferno gibanje oko ishodišta.



Sl. 37. Nepomični koordinatni sustav x,y,z i pomični ξ,η,ζ unutar kojeg se giba čestica A. Radijvektor $\vec{r}$ određuje apsolutno gibanje čestice s obzirom na sustav x, y, z, a sastoji se od vektora $\vec{r}_0$ (translacija sustava ξ,η,ζ) i vektora položaja čestice $\vec{\varrho}$ unutar pomičnog sustava

Unutar pomičnog sustava položaj čestice određen je vektorom $\vec{\varrho}$ koji ima dvojaku promjenu s vremenom: mijenja se zbog relativnog gibanja čestice unutar sustava ξ,η,ζ i neovisno o tome mijenja se zbog sferne komponente prijenosnog gibanja. Dio prirasta vektora $\vec{\varrho}$ dovodi, dakle, do relativne brzine $\vec{v}_r$ kojom se čestica giba s obzirom na pomični sustav, dok preostali dio i cijeli prirast vektora $\vec{r}_0$ određuje vektor prijenosne brzine $\vec{v}_p$. Apsolutna je brzina čestice vektorski zbroj tih dviju komponenata

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p. \tag{137}$$

Apsolutno ubrzanje čestice dobije se deriviranjem vektora apsolutne brzine, a uz jednaku predodžbu o relativnom i prijenosnom gibanju vektor ubrzanja ima tri komponente:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c. \tag{138}$$

Osim relativne $\vec{a}_r$ i prijenosne $\vec{a}_p$ komponente, vektor apsolutnog ubrzanja $\vec{a}$ sadrži i dopunsku komponentu $\vec{a}_c$ (Coriolisovo ubrzanje), koja je jednaka

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{139}$$

U tom izrazu $\vec{\omega}$ je vektor kutne brzine prijenosnog gibanja, te, prema tome, dopunsko ubrzanje leži okomito na ravninu koju tvori os rotacije prijenosnog gibanja i pravac relativne brzine. Iznos dopunskog ubrzanja određuje se prema izrazu

$$a_c = 2\omega v_r \sin\alpha, \tag{140}$$

gdje je α kut između vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_r$. Dopunskog ubrzanja neće biti kada prijenosno gibanje ne sadrži rotaciju (prijenosno gibanje je translacija), te kada se relativno gibanje čestice odvija na pravcu koji je paralelan s osi prijenosne rotacije ili se s njom poklapa ($\alpha = 0$ ili 180°). Za praktično određivanje apsolutnog ubrzanja najpogodnije su prirodne komponente, te se prijenosno i relativno ubrzanje prikazuju pomoću tangencijalne i normalne komponente. Tada se apsolutno ubrzanje dobije kao vektorski zbroj od pet komponenata.

Bez dopunskog ubrzanja ne mogu se promatranjem unutar pomičnoga koordinatnog sustava objasniti pojave vezane uz relativna gibanja. Točnijim mjerenjem padanja tijela na Zemlju može se ustanoviti otklon od pravocrtne putanje (vertikala) prema istoku. Zbog rotacije Zemlje djeluje dopunsko ubrzanje pri padanju prema Zemlji u smjeru zapada, kojemu suprotno usmjerena inercijska sila otklanja tijelo prema istoku.

Već prema geografskoj širini φ i visini h s koje tijelo pada, određuje se taj otklon prema formuli

$$x = \frac{h\omega\cos\varphi}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{141}$$

gdje je $\omega = 0{,}00007272\,\mathrm{s}^{-1}$ kutna brzina rotacije Zemlje, a g ubrzanje Zemljine teže, koje prosječno iznosi $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Za $h = 100\,\mathrm{m}$ i $\varphi = 0°$ (ekvator) taj otklon iznosi 1,1 cm. Slična je pojava vidljiva na velikim rijekama koje na Sjevernoj polutki Zemlje teku od juga prema sjeveru. Zbog dopunskog ubrzanja i suprotno usmjerene inercijske sile otklanjaju se čestice vode prema istočnim obalama pa su one na potpuno ravnim dijelovima toka više potkopane (Berov zakon).

S. Jecić

DINAMIKA

Dinamika (prema grčkom δύναμις dinamis *sila*) proučava zakone gibanja čestica ili tijela, uvažavajući pri tome djelovanje sila na njih. U novijoj se literaturi često smatra da dinamika sadrži dva dijela, i to kinematiku (geometriju gibanja bez djelovanja sila) i kinetiku pod kojim se pojmom razumijeva ono što se u ovom članku smatra dinamikom.

Povijesno gledajući, dinamika je relativno mlađa u usporedbi sa statikom. Početak se racionalnog shvaćanja dinamike može vezati uz G. Galileja (1564—1642), koji je vrlo temeljito proučavao slobodni pad tijela, gibanje na kosini i gibanje njihala. Kao posljedica tih proučavanja smatra se bitna izmjena pogleda na shvaćanja starogrčkih filozofa. Tako je npr. izmijenjeno Aristotelovo shvaćanje da teža tijela padaju brže od laganih. I. Newton (1642—1727) nastavio je Galilejevo djelo formuliranjem zakona gibanja, postavljajući temelje suvremene dinamike i mehanike uopće. Svoje je poglede Newton objavio u djelu Matematički principi prirodne filozofije (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687). Osim njih, doprinijeli su razvitku dinamike L. Euler, J. d'Alembert, J. L. Lagrange, P. Laplace, L. Poinsot, G. Coriolis, A. Einstein i mnogi drugi.

U smislu inženjerske primjene, dinamika se može smatrati vrlo mladom. Naime, tek od početka proizvodnje brzih strojeva i mehanizama bilo je potrebno proračune temeljiti na dinamičkim za razliku od statičkih načela. Međutim, suvremeni razvoj tehnike, a posebno strojarstva, svakodnevno zahtijeva povećanje primjene načela mehanike, a posebno dinamike. Ta su načela temeljna u analizi udarnih opterećenja različitih konstrukcija, prometnih vozila, turbina, pumpa, alatnih strojeva itd.

Temeljni pojmovi i zakoni

Prostor je trodimenzijsko geometrijsko područje koje, naravno, može imati svoje dvodimenzijske ili jednodimenzijske oblike (ravnina i pravac).

Koordinatni sustav. Položaj promatranog predmeta u prostoru određen je relativno prema koordinatnom sustavu, koji se odabire kao pravokutni desni Descartesov koordinatni sustav. U tzv. klasičnoj mehanici primaran je inercijski sustav ili astronomski referentni sustav, koji je stvoren od zamišljenih osi pravokutnog sustava i koji nema niti translacija niti rotacija. Mjerenjima je dokazano da zakoni mehanike vrijede u takvu sustavu ako su brzine gibanja zanemarljive s obzirom na brzinu svjetlosti. Veličine utvrđene prema takvu sustavu nazivaju se apsolutnim veličinama, a koordinatni se sustav smatra nepomičnim u prostoru. Što više, ako se pričvrsti koordinatni sustav za površinu Zemlje, tada se u brojnim dinamičkim zadacima može smatrati takav sustav također nepomičnim, jer se odstupanje od temeljnih dinamičkih jednadžbi zanemaruje. Međutim, ako se proučava gibanje balističkih raketa ili svemirskih letjelica, tada apsolutno gibanje Zemlje, a time i koordinatnog sustava, postaje važno i mora se uzeti u obzir.

Vrijeme se u klasičnoj mehanici smatra univerzalnim, tj. ono nepovratno teče na potpuno isti način bez obzira na izbor referentnog koordinatnog sustava. Prema tome, vrijeme je skalarna veličina koja se stalno mijenja, pa se zbog toga u jednadžbama obično uzima kao argument (nezavisna varijabla).

Masa. Uz pojmove prostora i vremena u dinamici se uvodi kao dopunska značajka tijela — njegova masa.

Newtonovi zakoni. Polazeći od spomenutih načela, tj. od definicije prostora, vremena i mase. Newton je prvi, u već spomenutom djelu, postavio temeljne zakone koji glase:

I zakon: Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok neka sila koja na njega djeluje to stanje ne promijeni. Taj se zakon često naziva zakonom inercije.

II zakon: Promjena je gibanja proporcionalna sili što djeluje na tijelo, a zbiva se u smjeru djelovanja sile.

III zakon: Akciji je uvijek jednaka i suprotno usmjerena reakcija. Taj se zakon često naziva i principom jednakosti akcije i reakcije.

Upotrijebljeni su neki pojmovi koji se obično čine jasnim sami po sebi. To su pojmovi: sila, ubrzanje, akcija i reakcija. Te su veličine definirane u prethodnim poglavljima mehanike (statika i kinematika). Međutim, sada se proširuje pojam sile, uz uvjet da je prvim zakonom uvjetovano postojanje sile. U drugom se zakonu govori o ubrzanju, tj. promjeni gibanja, uz uvjet da se pod tim razumijeva količina gibanja, a to je umnožak mase tijela (m) i njegove brzine (v). Prema tome, drugi se zakon može izraziti sljedećim jednadžbama

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \quad \text{ili} \quad m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

koje definiraju silu kao vektorsku veličinu. Jednadžba (1) obično se naziva temeljnom vektorskom jednadžbom dinamike. Iz nje slijedi da je sila jednaka promjeni količine gibanja u vremenu, a istodobno je jednaka umnošku mase i ubrzanja.

Treći je zakon temelj za shvaćanje pojma sile. Iz tog zakona proistječe da sve sile, promjenljive ili stalne vrijednosti, već prema njihovu izvoru, ostaju cijelo vrijeme jednake i suprotno usmjerene. I upravo taj pristup dovodi do tzv. principa izolacije tijela koji omogućuje stvaranje jasne predodžbe o djelovanju sila.

Inercija. Svojstvo materije da se odupire promjeni gibanja zove se inercija (tromost, ustrajnost). Mjera je inercije karakterizirana masom tijela i njezinim rasporedom.

Čestica. Stvarna su tijela često složena, a opisivanje gibanja opterećeno je mnogim sporednim utjecajima. Zbog toga se uvijek teži isticanju samo bitnih elemenata, pa se umjesto promatranog tijela proučava neko zamišljeno tijelo i pojava koji su modeli prirodnog zbivanja.

U tom je smislu osobito važan pojam čestice u dinamici. Uvijek kad se gibanje može opisati gibanjem jedne točke promatranog tijela (obično središte masa) kojoj se pridružuje sva masa, tijelo se može promatrati kao čestica. Tako npr. pri translacijskom gibanju uvijek se gibanje tijela može proučavati kao gibanje bilo koje točke tijela u kojoj je koncentrirana njegova masa. Znači, tijelo kojemu se mogu zanemariti dimenzije naziva se česticom. Često se čestica promatra kao diferencijalni element tijela. U literaturi se mogu naći još i nazivi materijalna točka ili sitno tijelo pod kojima se razumijeva pojam što ga ovdje nazivamo česticom.

Gravitacija. I zakon gravitacije jasno je formulirao I. Newton, a može se izraziti jednadžbom

$$\vec{F} = K\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2}$$

gdje je F privlačna sila između dviju čestica, K univerzalna gravitacijska konstanta, m_1 i m_2 mase tih dviju čestica, a r udaljenost između središta čestica. Iz toga slijedi da privlačna sila zadovoljava zakon akcije i reakcije sve dok su sile jednake i suprotnog smjera uzduž pravca što spaja težišta promatranih čestica. Iz pokusa je utvrđeno da gravitacijska konstanta ima vrijednost $K = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$. Gravitacijske sile postoje između bilo kojeg para tijela. Na površini Zemlje je utjecajna privlačna sila Zemlje, tzv. sila teže ili teža. Sila gravitacijske privlačnosti Zemlje na pojedina tijela zavisi od relativnog položaja tijela prema središtu Zemlje (v. *Gravitacija*, TE 6, str. 260). Prema općem zakonu gravitacije međusobni je utjecaj dvaju tijela, budući da je zavisan od mase tijela, obično malen u usporedbi s privlačnom silom Zemlje, koja ima mnogo veću masu, pa se međusobni utjecaj tijela može najčešće zanemariti. Teža djeluje na tijelo bez obzira da li ono miruje ili se giba. Sila kojom zbog teže tijelo tlači na podlogu ili napinje nit o koju je obješeno zove se težina. Ta se sila izražava u njutnima (N) u Međunarodnom sustavu jedinica. Međutim, uobičajeno je u praktičnom životu da se težina upotrebljava kao sinonim za masu i izražava u kilogramima. Da bi se izbjegli eventualni nesporazumi, treba pod pojmom težine smatrati silu izraženu u njutnima.

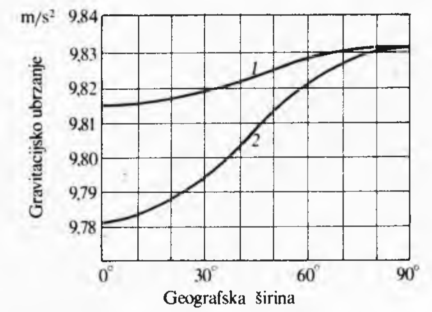
Svako tijelo ispušteno na određenoj visini od morske razine padat će u zrakopraznom prostoru s jednakim gravitacijskim ubrzanjem, koje slijedi ako se izjednače jednadžbe (1) i (2):

$$g = \frac{K m_0}{r^2}, \tag{3}$$

gdje je masa Zemlje $m_0 = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg, polumjer Zemlje $r = 6{,}371 \cdot 10^6$ m, a K gravitacijska konstanta. Odatle se dobiva da je $g = 9{,}824\,\mathrm{m/s^2}$. Međutim, budući da Zemlja nije kugla, već ima zbog vlastite rotacije spljoštene polove, gravitacijska se akceleracija računa pomoću Međunarodne gravitacijske formule:

$$g = 9{,}78049(1 + 0{,}0052884 \sin\gamma - 0{,}0000059 \sin^2 2\gamma), \tag{4}$$

gdje je γ geografska širina mjesta na Zemlji. Usporedba između apsolutnog gravitacijskog ubrzanja Zemlje koja rotira i koja ne rotira, prema geografskoj širini, prikazana je na sl. 1. Apsolutna se gravitacijska akceleracija može izračunati dovoljno točno ako je relativnom ubrzanju (4) dodana vrijednost $3{,}387 \cdot 10^{-2} \cos^2\gamma\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.



Sl. 1. Gravitacijsko ubrzanje u ovisnosti o geografskoj širini: *1* za nerotirajuću, *2* za rotirajuću Zemlju

U većini se inženjerskih zadataka za vrijednost gravitacijskog ubrzanja odabire vrijednost od $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, što približno odgovara geografskoj širini od $\gamma = 45°$.

Keplerovi zakoni. Gibanje se čestice pod djelovanjem sile što stalno prolazi kroz čvrsto središte naziva središnjim ili centralnim gibanjem. Gibanje planete i satelita primjer je središnjeg gibanja. Zakoni koji opisuju takva gibanja utvrđeni su promatranjem gibanja nebeskih tijela što ih je provodio J. Kepler (1571—1630) (v. *Astronautika*, TE 1, str. 428). Ti zakoni glase: I. svaka se planeta u našem Sunčevu sustavu giba oko Sunca u eliptičnoj orbiti, a Sunce se nalazi u jednom od žarišta; II. pri gibanju planeta radijvektor u bilo kojim jednakim vremenskim razdobljima prebriše jednake površine (Zakon površina); III. kvadrati ukupnih ophodnih vremena τ_i (jednog punog obilaska) za različite planete proporcionalni su s trećom potencijom njihovih srednjih udaljenosti a_i od Sunca:

$$\frac{\tau_1^2}{a_1^3} = \frac{\tau_2^2}{a_2^3} = \cdots \tag{5}$$

Dinamika čestice

Kad na slobodnu česticu djeluje neuravnotežen skup sila, čestica se giba ubrzanim gibanjem. Odnosi između neuravnoteženih skupova sila i gibanja čestica što ih oni uzrokuju proučavaju se u dinamici čestica. Svojstva skupova sila proučavaju se u statici, dok se geometrija gibanja čestice proučava u kinematici.

Temeljna je veza između sila i ubrzanja definirana II Newtonovim zakonom (1). Dokaz se tog zakona temelji na pokusima, a njegovo se fundamentalno značenje opisuje idealnim pokusom u kojemu se pretpostavljaju mjerena ubrzanja i sile bez ikakve pogreške. Naime, smatra se da je proučavana čestica potpuno izdvojena u primarnom inercijskom koordinatnom sustavu i da je pod djelovanjem sile F_1. Tada je omjer F_1/a_1 jednak C_1 kojemu vrijednost ovisi o odabranim jedinicama mjera. Ponovljenim pokusom s istom česticom, ali s drugom silom F_2, dobiva se ubrzanje a_2. Omjer F_2/a_2 jednak je C_2. Taj se pokus može ponoviti bezbroj puta, pa se dobiva da je

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{a}_1} = \frac{\vec{F}_2}{\vec{a}_2} = \dots \frac{\vec{F}_n}{\vec{a}_n} = C = \text{const.} \tag{6}$$

To je konstanta inercije čestice koja se ne mijenja, i ona se odupire promjeni brzine čestice. Znači, za česticu s velikom inercijom (veliko C) ubrzanje će biti malo za zadanu silu $\vec{F}$, odnosno ako je masa malena, ubrzanje će biti veliko.

Odstupanja rezultata stvarnog prema idealiziranom pokusu tumači se činjenicom da se izvedeni pokus obavlja na površini Zemlje gdje je pričvršćen koordinatni sustav. Odstupanja nestaju ako se uvrste primjerene korekcije na komponente ubrzanja. Međutim, za većinu su inženjerskih zadataka te korekcije toliko male da se mogu zanemariti. Kad se proučavaju balističke rakete i svemirska vozila, komponente su gravitacijskog ubrzanja od primarnog značenja i u tim se razmatranjima točne komponente apsolutnog gravitacijskog ubrzanja moraju uzeti u obzir.

Uvođenjem teorije relativnosti, i to koncepcijom o različitom tijeku vremena prema brzini gibanja čestice, A. Einstein je učinio klasičnu mehaniku posebnim slučajem jedne općenitije mehanike. U relativističkoj su mehanici brzine gibanja bliske brzini svjetlosti. U teoriji relativnosti ne postoji nešto poput primarnog koordinatnog sustava, te mjerena vremena u dva koordinatna sustava, u kojima su brzine relativne jedna prema drugoj, daju različite rezultate.

Jednadžbe gibanja. Zadaci dinamike za slobodnu i vezanu česticu čine dvije skupine: *a)* zadaci u kojima su poznate sile što djeluju na česticu, a treba odrediti zakon gibanja i *b)* poznat je zakon gibanja, a treba odrediti sile što djeluju na česticu.

Ti se zadaci rješavaju pomoću II Newtonova zakona, ali u tehničkoj praksi često se proučava gibanje vezane čestice kojoj je gibanje unaprijed određeno (prisilno ili prinudno gibanje). Tada se II zakon proširuje tako što se veza čestica nadomješta reaktivnom silom pa jednadžba gibanja poprima oblik

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{N}, \tag{7}$$

gdje su $\vec{F}_i$ aktivne sile, a N reakcije veza.

Krivocrtno gibanje u prostoru. Na sl. 2 prikazana je čestica mase m koja se giba po naznačenoj putanji zbog djelovanja sila $F_1, F_2, F_3 \cdots F_n$. Za izabrani nepomični koordinatni sustav, imajući u vidu da su komponente ubrzanja

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z}, \tag{8}$$

projekcija sila F_i u smjeru koordinatnih osi x, y i z ima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= m\ddot{x} = ma_x = \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= m\ddot{y} = ma_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= m\ddot{z} = ma_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i, \end{aligned} \tag{9}$$

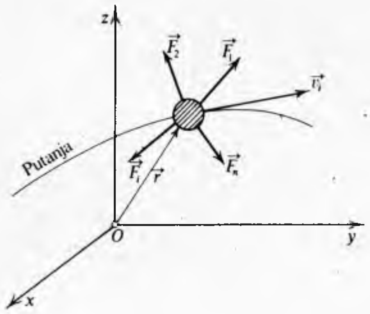
gdje su X_i, Y_i i Z_i projekcije sila F_i. Te se jednadžbe nazivaju diferencijalnim jednadžbama krivocrtnog gibanja čestice u prostoru. U općem obliku jednadžbe (9) glase:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{y} &= Y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{z} &= Z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \end{aligned}\right\} \quad m\vec{a} = F(\vec{r},\vec{v},t). \tag{10}$$

Opće rješenje tih jednadžbi daje zakone gibanja kao funkciju vremena sa šest konstanti integracije u obliku:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots C_6). \end{aligned} \tag{11}$$

Znači, diferencijalne jednadžbe gibanja opisuju bezbroj oblika gibanja koja sva odgovaraju istoj sili, te određuju višeparametarsku skupinu putanja. Taj zadatak dinamike je potpuno određen ako su poznati svi početni uvjeti gibanja, pa se može odrediti svih šest konstanti $C_1 \cdots C_6$. Početni su uvjeti, npr., početni položaj čestice, njezina brzina itd. Partikularno je rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi (10), dakle, izraženo početnim uvjetima.



Sl. 2. Čestica se mase m pod djelovanjem skupa sila F_i giba putanjom s brzinom v_i

Uz linearnu zavisnost sila i ubrzanja u dinamici vrijedi princip superpozicije, tj. može se zamisliti da sile djeluju nezavisno, a zbroj je svih parcijalnih ubrzanja jednak ukupnom ubrzanju, tj.

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1, \qquad \vec{F}_2 = m\vec{a}_2, \qquad \vec{F}_3 = m\vec{a}_3, \tag{12a}$$

odakle je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3), \tag{12b}$$

odnosno

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}. \tag{13}$$

Obrnuti se zadatak sastoji u poznavanju zakona gibanja u pravcima koordinatnih osi, koje dvostrukim deriviranjem određuju ubrzanja a_x, a_y, a_z, pomoću kojih se određuju vektori sila što djeluju na česticu. Takav se postupak često naziva i direktnim zadatkom dinamike čestice.

Pri proučavanju gibanja posebno značenje ima i izbor koordinatnog sustava unutar kojeg se analizira gibanje. Priroda zadatka uvjetuje obično taj izbor, jer je od toga često zavisan put matematičkog rješavanja. To se ističe zbog toga što promjenljiva sila može ovisiti o vremenu, o položaju tijela i o brzini gibanja. Tako opće gibanje čestice u prostoru ima tri stupnja slobode gibanja, što zahtijeva tri nezavisne koordinate da se odredi položaj u prostoru u svakom trenutku. Tada se upotrebljavaju cilindrične ili sferne koordinate (v. *Kinematika*).

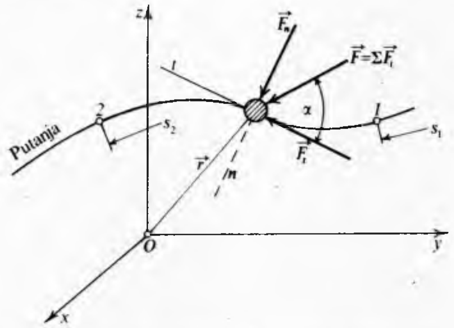
Dvije su, dakle, opće skupine zadataka dinamike čestice posebno važne. Tu se pojavljuje integracija funkcije sile prema vremenu i integracija funkcije sile prema pomaku čestice.

Rezultati dobiveni integriranjem funkcije sile mogu se izravno uključiti u jednadžbe zakona gibanja. Tako postaje nepotrebno izravno izračunavanje ubrzanja. Integracija s obzirom na pomak vodi prema jednadžbama u kojima se pojavljuju mehanički rad i energija.

Mehanički rad. Za definiranje pojma mehaničkog rada promatra se gibanje čestice mase m koja se giba uzduž putanje (sl. 3). Položaj je čestice mase m određen vektorom položaja $\vec{r}$ i njezin pomak uzduž putanje u vremenu dt određen je promjenom $d\vec{r}$ vektora položaja. Elementarni rad je veličina koja je definirana skalarnim umnoškom vektora sile $\vec{F}$ i prirasta vektora položaja $d\vec{r}$, pa je

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{14}$$

Taj se izraz može prikazati skalarnom veličinom $F_t|d\vec{r}| = F_t ds = F\cos\alpha ds$, gdje je s skalarna veličina mjerena uzduž putanje. Prema tome je rad skalarna veličina. Ako je smjer od $\vec{F}_t$ isti kao i od $d\vec{r}$, rad je pozitivan. Ako su $\vec{F}_t$ i $d\vec{r}$ suprotnog smjera, rad je negativan. Normalna je komponenta $\vec{F}_n$ okomita na putanju, pa je skalarni umnožak jednak ništici i ona, prema tome, ne obavlja rad.



Sl. 3. Rastavljanje rezultante $\vec{F}$ na tangencijalnu i normalnu komponentu

Rad je sile $\vec{F}$ u razdoblju nekog konačnog gibanja od točke *1* do točke *2*:

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}_t d\vec{s}, \tag{15}$$

gdje su granice integracije početna i konačna točka na putanji gibanja.

Za skupinu sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ što djeluju na česticu za vrijeme njezina pomaka $d\vec{r}$ rad će biti

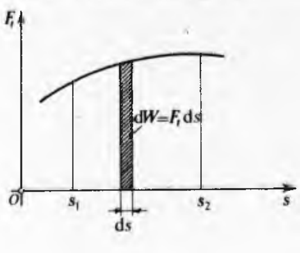
$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \cdots \vec{F}_n d\vec{r} = \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r}, \end{aligned} \tag{16}$$

odakle slijedi da je

$$W = \int \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}. \tag{17}$$

Jedinica za rad sastavljena je od jedinice za silu i jedinice za pomak, dakle njutnmetar (Nm). Ta jedinica ima posebno ime džul (joule, J), a definirana je kao rad sile od 1 N na putu od 1 m u smjeru djelovanja sile.

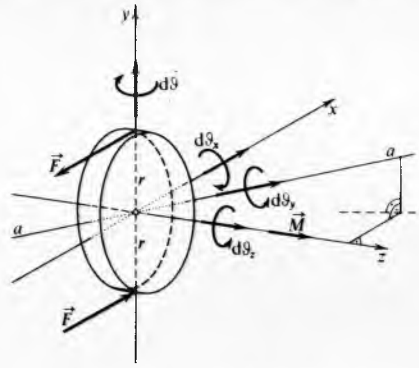
Funkcijska veza između tangencijalne sile F_t i puta s uzduž putanje omogućuje izračunavanje rada W. Međutim, ako



Sl. 4. Grafičko značenje pojma elementarnog rada

funkcija nije poznata u analitičkom obliku, rad se može utvrditi iz pokusnih podataka numeričkom ili grafičkom integracijom, jer je rad proporcionalan površini ispod funkcije $F_t = F_t(s)$ (sl. 4).

Iako za promatranje dinamike čestica ne treba definicija rada vezanog uz djelovanje sprega sila, ipak će se to djelovanje prikazati radi potpunosti definiranja pojma rada.



Sl. 5. Djelovanje sprega sila $\vec{M}$ na disk polumjera r

Na sl. 5 prikazano je djelovanje momenta sprega sila M na disk polumjera r. Infinitezimalna je rotacija diska oko bilo koje osi što prolazi središtem diska

$$d\vartheta = \vec{i} d\vartheta_x + \vec{j} d\vartheta_y + \vec{k} d\vartheta_z. \tag{18}$$

Na sl. 5 to je os *a—a*. Iz slike je očito da nema nikakva rada zbog rotacije $d\vartheta_x$ i $d\vartheta_y$. Međutim, rotacija $d\vartheta_z$ uzrokuje rad koji iznosi

$$dW = 2Frd\vartheta_z = Md\vartheta_z. \tag{19}$$

što se može vektorski pisati u obliku

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta}. \tag{20}$$

Ukupni je rad za vrijeme rotacije

$$W = \int \vec{M} d\vec{\vartheta} = \int (M_x d\vartheta_x + M_y d\vartheta_y + M_z d\vartheta_z). \tag{21}$$

Kinetička energija. Čestica mase m (sl. 3) giba se zbog djelovanja sile F uzduž putanje, pa je prema drugom Newtonovu zakonu

$$F_t = ma_t \quad \text{ili} \quad F_t = m\frac{dv}{dt}, \tag{22}$$

gdje je v brzina čestice. Ako se upotrijebi jednadžba $v = ds/dt$, slijedi da je

$$F_t = m\frac{dv\,ds}{ds\,dt} = mv\frac{dv}{ds}, \tag{23}$$

odnosno

$$F_t ds = mv dv. \tag{24}$$

Integriranjem te jednadžbe od položaja *1* do položaja *2* dobije se

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{25}$$

Veličine na desnoj strani jednadžbe skalarne su veličine i definirane su kao kinetička energija. Kinetička je energija

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}. \tag{26}$$

Jedinica je kinetičke energije džul (J), što je naziv za njutnmetar (Nm). Kinetička energija uvijek ima pozitivnu vrijednost.

Potencijalna energija. Ako sila, koja načelno može zavisiti od položaja, brzine i vremena, zavisi samo od položaja, prostor u kojem ta sila djeluje zove se polje sila, pa za česticu vrijedi jednadžba

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \tag{27}$$

odnosno u sklarnom obliku

$$F_x = F_x(x,y,z), \qquad F_y = F_y(x,y,z), \qquad F_z = F_z(x,y,z). \tag{28}$$

Rad što ga može izvršiti ta sila iznosi

$$W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z. \tag{29}$$

Integral $\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ općenito je zavisan od putanje čestice u intervalu od *1* do *2*. Ako je $\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ totalni diferencijal neke skalarne funkcije V, tada se može pisati da je

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -\,\mathrm{d}V = -(V_2 - V_1), \tag{30}$$

kojoj veličina zavisi samo od konačnih stanja gibanja i ne zavisi od putanje čestice. Znak minus uzet je zato što je uobičajeno da se računa s obzirom na gravitacijski potencijal u polju Zemljine teže. Prema tome, ako V postoji, tada je diferencijal

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z. \tag{31}$$

Uspoređujući s relacijom (29) dobiva se

$$-\mathrm{d}V = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z,$$

slijedi da su

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{i} \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{32}$$

pa se može pisati da je

$$\vec{F} = -\nabla V = \operatorname{grad} V. \tag{33}$$

Prema tome V je potencijalna funkcija ili potencijalna energija, a izraz ∇V naziva se gradijentom potencijalne funkcije.

Iz izraza za elementarni rad (14) te iz izraza (25) i (29) slijedi da je

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}} = -\,\mathrm{d}V, \tag{34}$$

pa se poslije integracije u intervalu (t_0, t) dobiva

$$E_{\mathrm{kin}} - E_{0\mathrm{kin}} = -(V - V_0), \tag{35}$$

gdje je $E_{0\mathrm{kin}}$ kinetička energija u početku gibanja, a $V_0 = V(x_0, y_0, z_0)$.

Prema tome

$$E_{\mathrm{kin}} + V = E_{0\mathrm{kin}} + V_0 = \text{const.}, \tag{36a}$$

odnosno

$$E_{\mathrm{kin}} + V_{\mathrm{pot}} = \text{const.} \tag{36b}$$

Iz jednadžbe (36b) slijedi da je zbroj kinetičke i potencijalne energije stalan i jednak zbroju tih energija na početku gibanja. To se naziva zakonom o održanju mehaničke energije. Gibanje koje je u skladu s tim zakonom naziva se konzervativnim, a sile koje uzrokuju takvo gibanje jesu konzervativne sile.

Međutim, uvjeti (32), odnosno (33), bit će ispunjeni, a funkcija sile V može se odrediti, ako je

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = \operatorname{rot}\vec{F} = 0, \tag{37}$$

odnosno ako je

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

To znači da je funkcija V takva da su njene druge derivacije po varijablama x, y, z kontinuirane, pa tako ne zavise od redoslijeda deriviranja.

Rad konzervativnih sila ne zavisi od pređenog puta, već samo od početnog i konačnog položaja čestice, jer vrijedi

$$\oint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{39}$$

Ako funkcija V ne zavisi samo od položaja već i od vremena, tj. $V = V(x,y,z,t)$, tada se sila koja zadovoljava uvjete (32) i (33) naziva potencijalnom silom, ali tada nije konzervativna.

Konzervativni sustavi. Kao tipičan primjer konzervativnog sustava uzima se često deformacija elastičnog tijela. Na elastičnu oprugu krutosti c (sl. 6) djeluje sila uz bilo kakvu deformaciju opruge. Iz nedeformiranog položaja opruge slijedi da je $F = cx$. Mehanički je rad elastične opruge za vrijeme rastezanja ili sabijanja

$$\int F\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} cx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}c(x_2^2 - x_1^2), \tag{40}$$

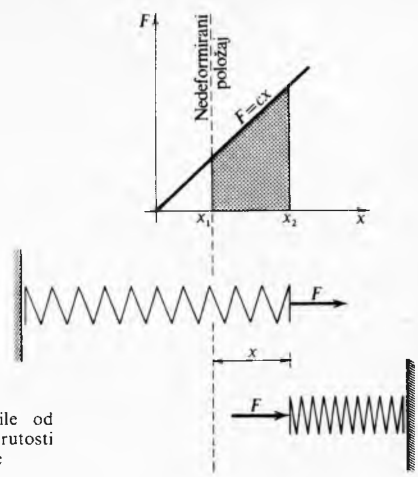
što predstavlja crtkanu ploštinu trapeza na sl. 6. Očito je da je u oba primjera izvršen pozitivan rad, odakle slijedi da je rad reaktivne sile podloge negativan. Izvršeni rad deformacije opruge za neki pomak naziva se elastičnim potencijalom opruge i iznosi

$$V_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}cx^2. \tag{41}$$

Sila $\vec{F}$ uzrokovana tlakom ili vlakom opruge na tijelo koje se deformira iznosi

$$F = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}cx^2\right) = -cx, \tag{42}$$

koja je negativna s obzirom na silu $\vec{F}$ što djeluje na oprugu.



Sl. 6. Zavisnost iznosa sile od deformacije i konstante krutosti kod linearne opruge

Uvođenjem gravitacijskog potencijala energije i elastičnog potencijala energije pogodno je zamijeniti izvršeni rad od gravitacijske sile i rad sile opruge s negativnim promjenama njihove potencijalne energije. Ako se uzme da je W rad svih sila, izuzev silu gravitacije i silu opruge, tada će vrijediti da je

$$W = \Delta E + \Delta V_{\mathrm{g}} + \Delta V_{\mathrm{e}}. \tag{43}$$

Taj oblik jednadžbe često bolje odgovara, jer su izdvojeni dijelovi prema izvoru njihova uzroka. To je osobito pogodno pri raščlanjivanju sustava koji nisu konzervativni.

Količina gibanja. Ponovno će se razmotriti gibanje čestice mase m u prostoru prikazanom na sl. 2, gdje je $\vec{r}$ vektor položaja mjeren od ishodišta O. Brzina je $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ i tangencijalna je na putanju čestice. Rezultanta je svih sila što djeluju na česticu mase m sila $\sum \vec{F}_i$ i ona djeluje u smjeru ubrzanja $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. Gibanje se tada može opisati relacijom

$$\sum \vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) \tag{44a}$$

ili

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{B}}, \tag{44b}$$

gdje je umnožak mase i brzine vektorska veličina koja se naziva količinom gibanja čestice. Jedinica je količine gibanja kilogrammetar u sekundi (kgm/s), što je ekvivalentno jedinici njutnsekunda (Ns). Jednadžbom se potvrđuje da je rezultanta svih sila što djeluju na česticu jednaka vremenskoj derivaciji količine gibanja. Budući da je količina gibanja vektorska veličina, proistječe da je vektor ukupne sile linearan s pravcem vektora derivirane količine gibanja.

Snaga (ili efekt) nekog mehaničkog sustava ocjenjuje se brzinom kojom on može obaviti rad ili predati energiju. Ukupni rad ili ukupna predana energija nije mjerilo snage ili kapaciteta stroja, jer i mali radni sustav može prenijeti veliku energiju ako mu se da dovoljno vremena. Samo veliki, snažni sustavi mogu predati veliku količinu energije u kratkom vremenu.

Snaga P definirana je kao brzina rada ako je taj rad kontinuirano promjenljiv, pa je

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{45}$$

Geometrijski snaga je koeficijent smjera tangente na krivulju koja predočuje zavisnost veličine rada od vremena.

Za pravocrtno gibanje snaga je

$$P = F\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = Fv, \tag{46}$$

a za kružno gibanje, ako je $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$,

$$P = F\frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{47}$$

Snaga je skalarna veličina. Jedinica je snage vat (W), što je naziv za džul u sekundi (J/s).

Stupanj djelovanja (koeficijent korisnog djelovanja) nekog stroja omjer je energije koju stroj predaje u određenom razdoblju i energije koju prima u tom istom razdoblju. Stupanj djelovanja uvijek ima vrijednost manju od jedan. Svaki stroj radi s nekim gubitkom energije, a ujedno se u stroju ne može stvarati energija ni iz čega. U mehaničkim strojevima najviše gubitaka energije nastaje zbog kinetičkog trenja. Rad se silâ trenja pretvara u toplinsku energiju.

Stupanj je mehaničkog djelovanja, dakle, omjer izlaznih i ulaznih energija, odnosno snaga:

$$\eta_m = \frac{E_i}{E_u} = \frac{P_i}{P_u}. \tag{48a}$$

Ako ima više vrsta gubitaka, ukupni je stupanj djelovanja umnožak mehaničkog (η_m) i ostalih stupnjeva djelovanja) (η_e, η_t):

$$\eta = \eta_m \eta_e \eta_t. \tag{48b}$$

Uređaj kojim se mjeri izlazna snaga stroja naziva se dinamometrom. Apsorpcijski su dinamometri oni kojima se predana energija nepovratno troši u mehaničkom smislu i na kraju pretvara u toplinu. Transmisijski su dinamometri oni u kojima se predana energija prenosi u nepromijenjenom obliku na drugi sustav.

Primjer je apsorpcijskog dinamometra tzv. Pronyjeva kočnica (sl. 7). Snaga se troši na rad trenja kočnice. Iz slike se može postaviti vrlo jednostavan uvjet ravnoteže: $\sum M_O = 0$, a to znači

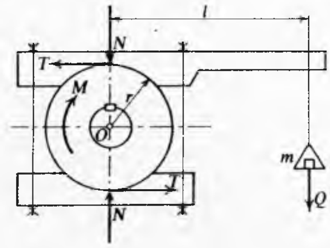
$$Ql - 2Tr = 0, \tag{49}$$

gdje je T sila trenja. Snaga kočnice je uz n okretaja u minuti

$$P = M\omega = 2Tr\frac{2\pi n}{60}, \tag{50a}$$

pa se uz $Tr = \frac{1}{2}Ql$ dobiva

$$P = Ql\frac{\pi n}{30} = mgl\frac{\pi n}{30}. \tag{50b}$$



Sl. 7. Shema Pronyjeve kočnice

Ako se krak poluge kočnice radi dobivanja jednostavnijeg izraza odabere tako da je $l = \frac{30}{\pi g} = 0{,}974$ m, tada je snaga u kilovatima dana brojčanom jednadžbom

$$P = \frac{mn}{1000}, \tag{50c}$$

gdje je m masa utega u kilogramima, a n brzina vrtnje u minuti.

Zakon količine gibanja. Prema Newtonovoj formulaciji sile, koja je vremenska derivacija količine gibanja, slijedi da je

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \quad \text{ili} \quad \mathrm{d}(m\vec{v}) = \vec{F}\,\mathrm{d}t. \tag{51}$$

Integracijom tog izraza u vremenskom razdoblju od t_1 do t_2 dobiva se

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{J}_{1,2}, \tag{53}$$

odnosno zakon količine gibanja glasi

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{J}_{1,2}, \tag{54}$$

što znači da je promjena količine gibanja u intervalu od t_1 do t_2 jednaka impulsu sile $J_{1,2}$ u tom istom intervalu. U diferencijalnom obliku zakon je količine gibanja

$$\mathrm{d}\vec{J} = \mathrm{d}\vec{B}. \tag{55}$$

U skalarnom obliku zakon količine gibanja glasi:

$$\begin{aligned} (mv_x)_2 - (mv_x)_1 &= \int_1^2 F_x \mathrm{d}t \\ (mv_y)_2 - (mv_y)_1 &= \int_1^2 F_y \mathrm{d}t \\ (mv_z)_2 - (mv_z)_1 &= \int_1^2 F_z \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{56}$$

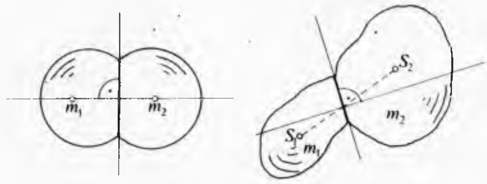
a kad je masa konstantna, ona se može izlučiti, pa je

$$\begin{aligned} m(v_{x2} - v_{x1}) &= \int_1^2 F_x \mathrm{d}t \\ m(v_{y2} - v_{y1}) &= \int_1^2 F_y \mathrm{d}t \\ m(v_{z2} - v_{z1}) &= \int_1^2 F_z \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{57}$$

Sudar tijela. Sudar je kratkotrajan dodir dviju čestica (tijela) različitih brzina. Pri tom se na mjestima dodira pojavljuju velike sile i za kratko vrijeme promijene se brzine tijela za konačan iznos.

Vrste sudara. Prema geometrijskom odnosu razlikuje se središnji ili centralni i ekscentrični sudar (sl. 8). Središnji sudar može biti ravan i kos. Za vrijeme sudara na čestice (tijela) ne djeluju nikakve vanjske sile, već se one zbližuju i udaljuju zbog kontaktnih sila koje čitavu sustavu ne daju nikakav impuls. Ukupna količina gibanja ostaje sačuvana, tj.

$$\sum \vec{B} - \sum \vec{B}_0 = 0. \tag{58}$$

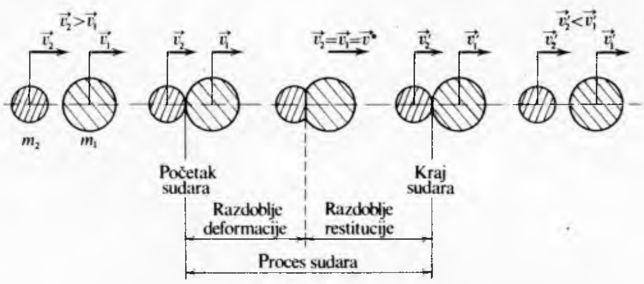


Sl. 8. Geometrijski odnosi pri središnjem i ekscentričnom sudaru

Sudar se može razvrstati prema prikazu na sl. 9. Sudar se sastoji od dva razdoblja, i to od razdoblja deformacije i razdoblja restitucije. Ukupna količina gibanja ostaje nepromijenjena, pa je

$$m_2 v_2 + m_1 v_1 = m_2 v_2' + m_1 v_1'. \tag{59}$$

Razdoblje deformacije ne mora biti vremenski jednako razdoblju restitucije. Odnos tih vremena zavisi od elastičnih svojstava tijela.



Sl. 9. Prikaz faza središnjeg sudara dviju masa m_1 i m_2

Ravni središnji sudar. Polazna jednadžba za određivanje odnosa jest zakon količine gibanja, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i - \sum_{1}^{n} \vec{B}_{0i} = \sum_{1}^{n} \int_{0}^{t} \vec{F}_i \, dt = 0. \tag{60}$$

Sudar se sastoji od dva dijela. Granica je između jednog i drugog dijela trenutak kada oba tijela (čestice) imaju jednaku brzinu v^*. Tada je prema sl. 10

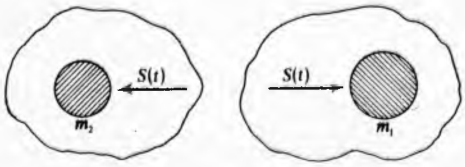
$$\begin{aligned} m_1 v^* - m_1 v_1 &= \int_0^{t_1} S \, dt = -(m_2 v^* - m_2 v_2) = J_1 \\ m_1 v_1' - m_1 v^* &= \int_{t_1}^{t} S \, dt = -(m_2 v_2' - m_2 v^*) = J_2. \end{aligned} \tag{61}$$

Ukupni je impuls $J = J_1 + J_2$.

Prema Newtonovoj hipotezi slijedi da je

$$J_2 = k J_1, \quad 0 \leq k \leq 1. \tag{62}$$

Znači kada je $k = 0$, onda je $J_2 = 0$, odnosno nema elastičnog



Sl. 10. Primjena principa izolacije pri sudaru

sudara, ili kada je $k = 1$, onda je $J_1 = J_2$, tj. razdoblje deformacije jednako je razdoblju restitucije.

Na temelju te hipoteze slijedi da je

$$k(m_1 v^* - m_1 v_1) = m_1 v_1' - m_1 v^*, \tag{63a}$$

odnosno

$$k(m_2 v^* - m_2 v_2) = m_2 v_2' - m_2 v^*, \tag{63b}$$

pa je

$$k = \frac{\Delta v'}{\Delta v} = \frac{v_1' - v_2'}{v_2 - v_1}. \tag{64}$$

Veličina k naziva se koeficijentom restitucije. Iz izraza (64) slijedi da je omjer razlike brzina poslije sudara i razlike brzina prije sudara jednak koeficijentu restitucije. Iz jednadžbi (59) i (64) dobivaju se vrijednosti brzina nakon sudara

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2(1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \tag{65a}$$

i analogno

$$v_2' = v_2 + \frac{m_1(1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \tag{65b}$$

Gubitak je kinetičke energije pri sudaru

$$\sum_{i=1}^{n} E_i - \sum_{i=1}^{n} E_{0i} = \Delta E, \tag{66}$$

pa se uvrštavanjem izraza za brzine v_1' i v_2' dobiva

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)(v_1 - v_2)^2. \tag{67}$$

Iz tog izraza slijedi da je pri savršeno elastičnom sudaru ($k = 1$) gubitak energije jednak ništici, a pri idealno plastičnom sudaru je $k = 0$, i tada će biti

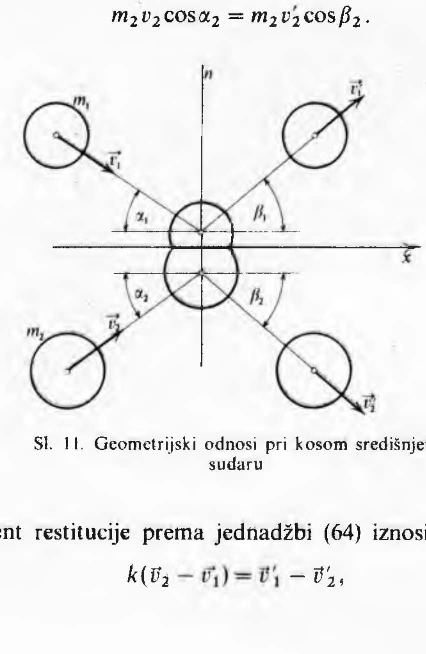
$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \tag{68}$$

Kosi središnji sudar. Ako je pri kosom sudaru zadano: $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, k, v_1, v_2$, a nepoznato je v_1', v_2', β_1 i β_2, tada je opet polazna jednadžba (58), uz uvjet da se zadatak promatra u dva pravca. U pravcu normale (sl. 11) dobiva se jednadžba

$$-m_1 v_1 \sin\alpha_1 + m_2 v_2 \sin\alpha_2 = m_1 v_1' \sin\beta_1 - m_2 v_2' \sin\beta_2, \tag{69}$$

a u pravcu osi x vrijedi, budući da nema sila,

$$\begin{aligned} m_1 v_1 \cos\alpha_1 &= m_1 v_1' \cos\beta_1 \\ m_2 v_2 \cos\alpha_2 &= m_2 v_2' \cos\beta_2. \end{aligned} \tag{70}$$



Sl. 11. Geometrijski odnosi pri kosom središnjem sudaru

Koeficijent restitucije prema jednadžbi (64) iznosi

$$k(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_1' - \vec{v}_2', \tag{71}$$

pa se uvrštavanjem dobiva

$$k(v_2 \sin\alpha_2 + v_1 \sin\alpha_1) = v'_1 \sin\beta_1 + v'_2 \sin\beta_2. \tag{72}$$

Iz jednadžbi (69), (70), (71) i (72) mogu se odrediti spomenute nepoznanice.

Zakon kinetičke energije. Iz izraza (25) slijedi da je

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}W, \tag{73}$$

te ako je $E_{\mathrm{kin}} = \frac{mv^2}{2}$, bit će

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}} = \mathrm{d}W. \tag{74}$$

Taj se izraz naziva zakonom kinetičke energije u diferencijalnom obliku. Prema (25) bit će u intervalu od *1* do *2*

$$\int_1^2 \mathrm{d}E = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = W, \tag{75a}$$

odnosno

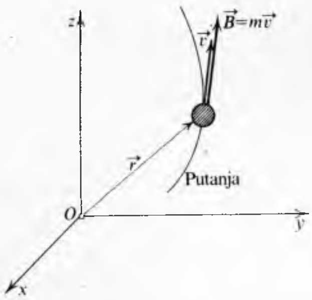
$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}, \tag{75b}$$

što je zakon kinetičke energije u integralnom obliku. Iz tog zakona slijedi da je ukupna razlika kinetičke energije čestice za vrijeme gibanja iz stanja *1* u stanje *2* jednaka ukupnom radu svih vanjskih sila koje djeluju na česticu za vrijeme gibanja u promatranom razdoblju.

Zakon kinetičkog momenta. Analogno definiciji statičkog momenta sile definiran je i kinetički moment. Promatra se gibanje čestice mase m prikazane na sl. 12, na koju u promatranom trenutku djeluje vektor količine gibanja $\vec{B}$. Kinetički je moment definiran kao vektorski umnožak

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{76}$$

Jedinica je kinetičkog momenta njutnmetarsekunda (Nms).



Sl. 12. Deformacija vektora količine gibanja B

Deriviranjem kinetičkog momenta po vremenu dobiva se

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_O}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{77}$$

Prvi je član na desnoj strani zbog kolinearnosti vektora jednak ništici, a drugi je član statički moment sile pa je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O, \tag{78}$$

tj. derivacija kinetičkog momenta po vremenu jednaka je momentu sile koja djeluje na česticu s obzirom na istu os. To je tzv. jednadžba momenata.

Posebni su primjeri: *a*) ako je statički moment sila prema nekoj osi jednak ništici, kinetički je moment za sve vrijeme gibanja stalan; *b*) ako sile što djeluju na česticu prolaze kroz nepomičnu točku O za sve vrijeme gibanja, također je $\vec{M} = \vec{0}$. Tada je riječ o sredinšnjim ili centralnim silama.

Jednadžba (78) kad se proširi na sustav krutih ili čvrstih čestica jedan je od najefektivnijih pristupa u bilo kojoj analizi u dinamici. Skalarni je oblik jednadžbe (78)

$$\begin{aligned} \sum M_{Ox} &= \dot{K}_x \\ \sum M_{Oy} &= \dot{K}_y \\ \sum M_{Oz} &= \dot{K}_z. \end{aligned} \tag{79}$$

Skalarne se komponente mogu izračunati iz izraza

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m(v_z \cdot y - v_y \cdot z) \cdot \vec{i} + m(v_x \cdot z - v_z \cdot x) \cdot \vec{j} + + m(v_y \cdot x - v_x \cdot y) \cdot \vec{k}, \tag{80a}$$

ili

$$\vec{K}_O = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \tag{80b}$$

pa je

$$\begin{aligned} K_x &= m(v_z y - v_y z) \\ K_y &= m(v_x z - v_z x) \\ K_z &= m(v_y x - v_x y). \end{aligned} \tag{81}$$

Da se odredi efekt momenta $\sum \vec{M}_O$ koji nastaje od kinetičkog momenta, integrira se jednadžba (78) u razdoblju od t_1 do t_2, pa je

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O \,\mathrm{d}t = \vec{K}_{O2} - \vec{K}_{O1}, \tag{82}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \vec{K}_{O2} &= \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \\ \vec{K}_{O1} &= \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1. \end{aligned} \tag{83}$$

Umnožak momenta i vremena t definira se kao rotacijski impuls. Iz jednadžbe (82) slijedi da je totalni rotacijski impuls jednak razlici pripadnih kinetičkih momenata. I tu je, kao i za linearni impuls, jednadžba rotacijskog impulsa vektorska jednadžba u kojoj se promjene smjera i iznosa mogu dogoditi za vrijeme gibanja unutar kojeg se integrira. Tada treba $\vec{M}_O$ i $\vec{K}_O$ izraziti u obliku komponenata. Tako je npr. komponenta jednadžbe (82) za pravac x

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_{Ox} \mathrm{d}t = (K_{Ox})_2 - (K_{Ox})_1 = = m\left[(v_z y - v_y z)_2 - (v_z y - v_y z)_1\right], \tag{84}$$

gdje indeksi 1 i 2 odgovaraju vremenima t_1 i t_2. Komponente u pravcima y i z potpuno su analogne.

Jednadžbe gibanja i d'Alembertov princip. Često je zadatak mehanike utvrđivanje odnosa između sila što djeluju na česticu za vrijeme njezina relativnog gibanja prema nekom pomičnom ili nepomičnom koordinatnom sustavu. (Brzina i ubrzanje pri složenom gibanju; v. *Kinematika*.)

Ako se gibanje čestice A mase m promatra iz koordinatnog sustava xyz (s ishodištem S) koji translatira s ubrzanjem a_S, tada je jednadžba gibanja

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_S + \vec{a}_{\mathrm{rel}}), \tag{85}$$

gdje je $a_{\mathrm{rel}} = a_{SA}$ ubrzanje čestice A mjereno od promatrača koji se relativno giba.

Za mjerenje ubrzanja iz referentnog koordinatnog sustava xyz što rotira s kutnom brzinom ω i u kojemu je a_S ubrzanje ishodišta, zbroj je sila

$$\sum \vec{F} = m[\vec{a}_S + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{\mathrm{rel}} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)], \tag{86}$$

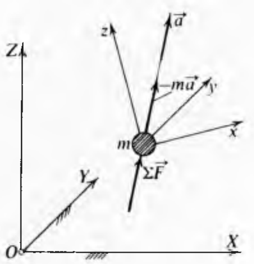
gdje je $\vec{r} = \vec{r}_{AS}$ vektor položaja čestice A u sustavu xyz, a $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$ brzina čestice relativnog gibanja s obzirom na osi tog sustava.

Ako se gibanje čestice m promatra iz nepomičnog koordinatnog sustava $x_0 y_0 z_0$ (sl. 13), njezino je apsolutno ubrzanje $\vec{a}$, a sila što na nju djeluje

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{87}$$

Ako se gibanje promatra iz pomičnog koordinatnog sustava xyz (koji rotira ili ne rotira) i kojem se u ishodištu nalazi čestica m, promatrač vidi da čestica m relativno miruje prema tom koordinatnom sustavu, pa on može zaključiti da zamišljena sila $-m\vec{a}$ uravnotežuje sile $\sum\vec{F}$. Tako se zadatak dinamike pretvara u zadatak statike. Taj je pristup postavio d'Alembert u radu *Traité de dynamique* (1743), koji je, zapravo, drugačije pisan drugi zakon mehanike, i to u obliku

$$\sum\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}. \tag{88}$$



Sl. 13. Prikaz pomičnog koordinatnog sustava xyz u nepomičnom koordinatnom sustavu XYZ

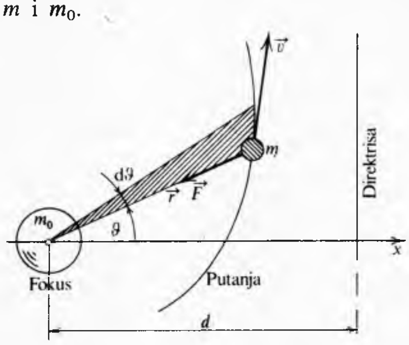
Takvo je promatranje poznato kao d'Alembertov princip. Njegovo je značenje više povijesnog karaktera, budući da se razvio u doba kada je dinamika bila još nerazvijena, čime se opravdava primjena umjetnog za opisivanje realnog stanja. Navedena se fiktivna sila naziva inercijskom silom, a zamišljeno se stanje ravnoteže naziva dinamičkom ravnotežom.

Središnje gibanje. Središnje ili centralno gibanje takvo je gibanje kojemu za sve vrijeme sila što uzrokuje to gibanje prolazi kroz nepomično središte. Najpoznatiji primjer takva gibanje jest gibanje planeta i satelita. To gibanje opisuju Keplerovi zakoni.

Razmatra se gibanje čestice mase m kako je prikazano na sl. 14, koje je posljedica djelovanja gravitacijske sile F, pa je

$$\vec{F} = K\frac{mm_0}{r^2}, \tag{89}$$

gdje je m_0 masa čvrstog tijela za koje se pretpostavlja da miruje, K gravitacijska konstanta, a r udaljenost između središta masa m i m_0.



Sl. 14. Geometrijski elementi središnjeg gibanja čestice m oko nepomične čestice m_0

Za opisivanje navedenog gibanja najbolje odgovara polarni koordinantni sustav. Tada će biti

$$\begin{aligned} -K\frac{mm_0}{r^2} &= m(\ddot{r} + r\dot{\vartheta}^2) \\ 0 &= m(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}). \end{aligned} \tag{90}$$

Posljednja se od tih dviju jednadžbi množenjem sa r/m, i uzevši u obzir da je $\mathrm{d}(r^2\dot{\vartheta})/\mathrm{d}t = 0$, a nakon integracije, pretvara u izraz

$$r^2\dot{\vartheta} = b = \text{const.} \tag{91}$$

Fizikalno je značenje jednadžbe (91) u tome da moment količine gibanja $\vec{r}\times m\vec{v}$ mase m oko mase m_0 ima stalan iznos mr^2. Odatle očito slijedi da je kinetički moment stalan, tj. da je sustav konzervativan. Iz toga se zaključuje da su vektori $\vec{r}$ i $\vec{v}$ u istoj ravnini, što znači da je putanja ravninska krivulja.

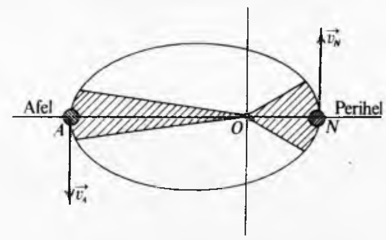
Nadalje je iz geometrijskih odnosa očito da radijvektor $\vec{r}$ u razdoblju od $\mathrm{d}t$ prebriše neku površinu (crtkano označenu na sl. 14) kojoj je ploština jednaka

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r(r\,\mathrm{d}\vartheta). \tag{92a}$$

Derivacija je te ploštine po vremenu

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta}, \tag{92b}$$

što je, u skladu s jednadžbom (91), konstantna veličina. Taj se zaključak u potpunosti slaže s drugim Keplerovim zakonom koji kaže da radijvektor položaja čestice prebriše jednake površine u jednakim vremenskim razdobljima.

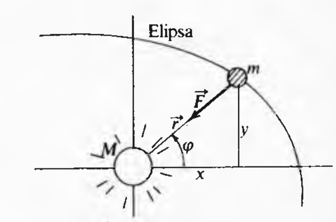


Sl. 15. Grafički prikaz jednakosti prebrisanih površina pri središnjem gibanju

Ako je putanja čestice elipsa, a nepomična točka u žarištu O (sl. 15), tada će masa m, kada se bude nalazila u točki N, koja se zove *perihel*, imati najveću, a u točki A, koja se zove *afel*, najmanju brzinu. To je zbog toga što su površine koje briše radijvektor u jednakim vremenskim razdobljima jednake. Odnos se brzina može definirati iz tzv. momenta brzine, tj. da je $v_N\cdot\overline{ON} = v_A\cdot\overline{OA}$.

Gibanje planeta i satelita. Gibanje planeta najilustrativniji je primjer središnjeg gibanja. To se proučavanje veže uz tzv. nebesku mehaniku. Potvrdu je općeg zakona gravitacije dao Newton, pokazavši da se iz tog zakona mogu izvesti Keplerovi zakoni, te da se njime mogu objasniti i mnoge nejednakosti gibanja Mjeseca, pojave precesije, plime i oseke, te planetske spljoštenosti.

Na temelju je Keplerovih zakona bio i utvrđen točan povratak Halleyjeva kometa još 1759. godine. Nebeska se mehanika u početku razvijala radi izradbe kalendara i za navigacijske potrebe. Ta se mehanika sastoji od tri temeljna zadatka: proučavanja translacijskog i rotacijskog gibanja te utvrđivanja oblika nebeskih tijela.



Sl. 16. Geometrijski odnosi pri gibanju planeta oko Sunca

Navest će se primjer gibanja jednog od planeta oko Sunca. Pri tom će se zanemariti privlačne sile drugih planeta i uzimat će se u obzir privlačna sila Sunca. Prema sl. 16 bit će u skladu s općim zakonom gravitacije

$$F = K\frac{Mm}{r^2}, \tag{93}$$

gdje je K konstanta, M masa Sunca, m masa planeta, a r udaljenost. Komponente su sile $\vec{F}$ u pravcima x i y uz $\mu = Km$, $\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$ i $r^2 = x^2 + y^2$

$$m\ddot{x} = -\frac{\mu m x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad m\ddot{y} = -\frac{\mu m y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{94}$$

Množenjem prve jednadžbe sa y, a druge sa x i oduzimanjem slijedi da je

$$m(\ddot{y}x - \ddot{x}y) = 0\,, \tag{95a}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y}x - \dot{x}y) = 0\,. \tag{95b}$$

Odatle slijedi da je

$$\dot{y}x - \dot{x}y = \mathrm{const.} \tag{96}$$

Uvođenjem oznaka $x = -\mu x/r^3$ i $y = -\mu y/r^3$, te uz određene koordinate bit će

$$\dot{y}r\cos\varphi - \dot{x}r\sin\varphi = k\,, \tag{97}$$

odakle je

$$r^2\dot{\varphi} = k, \tag{98}$$

što nakon određenih supstitucija rezultira jednadžbama

$$x = -\frac{\mu}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{r}\right), \qquad y = -\frac{\mu}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{r}\right). \tag{99}$$

Integracijom tih jednadžbi, te množenjem prve sa $y = r\sin\varphi$, a druge sa $x = r\cos\varphi$, i oduzimanjem prve od druge slijedi jednadžba putanje u polarnim koordinatama:

$$\dot{y}x - \dot{x}y = r\left(\frac{\mu}{k} + d\cos\varphi - c\sin\varphi\right) = k, \tag{100}$$

gdje su c i d konstante utvrđene integriranjem. Uvedu li se dalje oznake $-c = b\sin\alpha$ i $d = b\cos\alpha$, gdje su b i α nove konstante, tada slijedi jednadžba

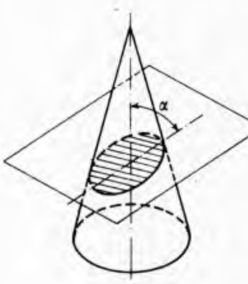
$$r = \frac{\dfrac{k^2}{\mu}}{1 + \left(\dfrac{bk}{\mu}\right)\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{101}$$

Ako se na kraju uvedu oznake

$$l = \frac{k^2}{\mu} \quad \text{i} \quad e = \frac{bk}{\mu}, \tag{102}$$

dobiva se

$$r = \frac{l}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{103}$$



Sl. 17. Prikaz krivulja što nastaju presijecanjem stošca pod različitim kutovima α (čunjosječnice)

To je polarna jednadžba putanje planeta (čunjosječnice) koja ima parametar l i ekscentričnost e, uz uvjet da joj je os nagnuta za kut α prema osi x, kako je prikazano na sl. 17. Ako je u jednadžbi $e < 1$, presječna je krivulja elipsa, ako je $e = 1$, presječna je krivulja parabola, te ako je $e > 1$, tada je presječna krivulja hiperbola. Međutim, ako je $e = 0$, presječna krivulja postaje kružnica. Pol se krivulja nalazi u fokusu (žarištu).

Takvo se gibanje čestice zove keplerovsko gibanje, i tako se približno gibaju planeti i druga prirodna i umjetna nebeska tijela kada se uzima u obzir samo djelovanje središnjeg tijela, Sunca.

Ako se radi o kružnici, tj. kada je $e = 0$, mora u početnom trenutku normalno ubrzanje v_0^2/ϱ_0 biti jednako ubrzanju Newtonove gravitacijske sile KM/ϱ_0^2, pa je

$$\frac{v_0^2}{\varrho_0} = \varrho_0\dot{\vartheta}_0^2 = K\frac{M}{\varrho_0^2}, \tag{104}$$

što omogućuje da se izračuna vrijednost početne kutne brzine

$$\dot{\vartheta}_0 = \pm\sqrt{K\frac{M}{\varrho_0^3}}. \tag{105}$$

Početna je brzina kružne putanje time potpuno određena. Budući da je početna brzina tangenta na putanju, radijalna brzina u ovom primjeru mora biti jednaka ništici ($\dot{\varrho}_0 = 0$).

Kozmičke brzine svemirskih letjelica. Ako je u središtu Zemlje i središte privlačne sile, u blizini Zemlje vrijedi

$$g = \frac{KM}{R^2}, \tag{106}$$

gdje je polumjer Zemljine kugle $R = 6370$ km. Početna je kutna brzina (105)

$$\dot{\vartheta}_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{107}$$

Tada je algebarska vrijednost v_0 početne brzine

$$v_0 = R\dot{\vartheta}_0 = \sqrt{gR}, \tag{108}$$

što uz $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ daje vrijednost $v_{01} = 7{,}91$ km/s.

To je tzv. *prva kozmička brzina* ili kružna brzina svemirske letjelice koju ona mora imati da bi lansirano tijelo obilazilo oko Zemlje kao njen umjetni satelit, i to po kružnoj putanji, uz pretpostavku da nema otpora gibanju ili da je taj otpor zanemarljiv.

Budući da je ubrzanje gravitacije zavisno od njezine udaljenosti od Zemlje, ubrzanje γ na nekoj udaljenosti od površine Zemlje bit će

$$\gamma = \frac{R^2}{x^2}g, \tag{109}$$

gdje je x udaljenost od središta Zemlje, pa je kružna brzina umjetnog satelita određena izrazom

$$v_{01} = \sqrt{\gamma x}. \tag{110}$$

Početna brzina v_0 što je potrebna za izbacivanje letjelice s površine Zemlje do neke određene visine $x = H$ (uz pretpostavku da se radi o zrakopraznom prostoru) određuje se najlakše pomoću zakona o kinetičkoj energiji, tj.

$$\frac{mv_0^2}{2} = m\int_R^x \gamma\,\mathrm{d}x. \tag{111}$$

Ako se uzme u obzir jednadžba (109), bit će

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gHR}{H+R}}, \tag{112a}$$

a ako $x \to \infty$, tada je, s obzirom na $v_0 = \sqrt{gR}$,

$$v_{02} = \sqrt{2Rg} = v_{01}\sqrt{2} \approx 11{,}19\ \mathrm{km/s}, \tag{112b}$$

što je tzv. *brzina oslobađanja od Zemljine teže* ili *druga kozmička brzina.*

Za određivanje *treće kozmičke brzine* ili brzine oslobađanja od Sunčeve gravitacije pri lansiranju letjelice sa Zemlje treba uzeti u obzir da je srednja brzina kruženja Zemlje oko Sunca $v_{ZS} = 29{,}77$ km/s, te da je zbog toga brzina oslobađanja od Sunčeve gravitacije na razini Zemljine putanje $\sqrt{2}$ puta veća od brzine njenog kruženja, pa iznosi $v_{ZS} = 42{,}10$ km/s. Zbog toga, a prema zakonu o održanju energije, za letjelicu mase m vrijedi

$$\frac{m v_{03}^2}{2} = k^2 \frac{m M_Z}{R^2} R + k^2 \frac{m M_S}{r^2} r, \tag{113}$$

gdje je v_{03} treća kozmička brzina, M_Z masa Zemlje, R polumjer Zemlje, M_S masa Sunca, a r polumjer Zemljine putanje. Uz te jednadžbe slijedi

$$v_{03}^2 = 2k^2\left(\frac{M_Z}{R^2} R + \frac{M_S}{r^2} r\right) = 2(gR + Gr), \tag{114a}$$

gdje je g ubrzanje Zemljine teže, a G ubrzanje Sunčeve teže na Zemljinoj putanji. Prema (112b) brzina oslobađanja od Zemlje je $v_{0Z} = \sqrt{2gR}$, a brzina oslobađanja od Sunca na Zemljinoj putanji $v_{0S} = \sqrt{2GR}$, pa je treća kozmička brzina

$$v_{03} = \sqrt{v_{0Z}^2 + v_{0S}^2}. \tag{114b}$$

Ako se letjelica izbaci u smjeru gibanja Zemlje oko Sunca, tada je relativno prema Zemlji za oslobađanje od Sunca potrebna samo dopunska brzina $v_{0S} = (42{,}10 - 29{,}77)$ km/s = = 12,33 km/s, pa je vrijednost treće kozmičke brzine

$$v_{03} = \sqrt{11{,}19^2 + 12{,}33^2}\ \text{km/s} = 16{,}65\ \text{km/s}.$$

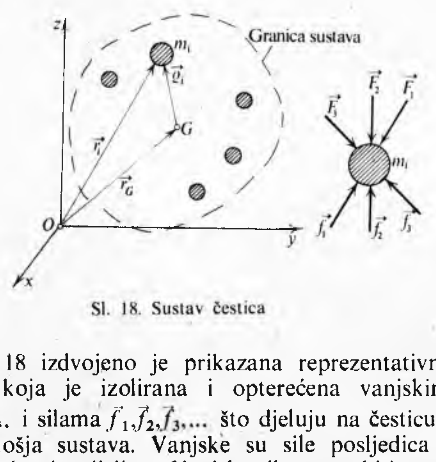
Dinamika sustava čestica

Do sada je razmatrana dinamika jedne čestice proučavanjem njezina gibanja. Međutim, i u dijelu vezanom uz rad i energiju, pri sudaru, zatim gibanju svemirskih letjelica i tijela promatrali su se i parovi čestica, koje su u nekom smislu uvod u sustav čestica. Proširenja koja se uvode sastoje se u definiranju nekih dopunskih pojmova koji se pojavljuju pri proučavanju skupa čestica.

Prema tome, smatrat će se da je sustav čestica skup čestica koje djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila čine jednu mehaničku cjelinu. Tako, npr., ako se promatra jato ptica i pri tom se zanemare međusobne privlačne sile koje slijede iz općeg zakona gravitacije (jer su vrlo male s obzirom na njihovu težinu), ono se ne smatra sustavom čestica. Međutim, ako se privežu međusobno, jato ptica postaje sustavom čestica. Sunčev sustav je najilustrativniji primjer sustava čestica. Unutrašnje su sile tog sustava privlačne sile između planeta, satelita i Sunca, a vanjske su sile u tom sustavu djelovanja nepokretnih zvijezda. Takav se sustav naziva slobodnim sustavom čestica.

Za razliku od takvih sustava, u inženjerskoj se praksi pojavljuju tzv. vezani sustavi čestica kojima je unutrašnja veza obično ostvarena materijalno.

Svojstva mehaničkih sustava čestica. Drugi Newtonov zakon gibanja za česticu može se proširiti za opći sustav od n čestica, koje su ograničene u prostoru konturom, sl. 18. Ta granica obuhvaća cijeli sustav, poput oplošja nekog po volji izabranog krutog tijela. Uvijek se, naime, sustav razmatra kao masa koja ima svoje vanjsko ograničenje, uz uvjet da masa mora biti jasno definirana i izolirana.



Sl. 18. Sustav čestica

Na sl. 18 izdvojeno je prikazana reprezentativna čestica mase m_i, koja je izolirana i opterećena vanjskim silama $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ i silama $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots$ što djeluju na česticu iz izvora unutar oplošja sustava. Vanjske su sile posljedica vanjskog kontakta s drugim tijelima. Vanjske sile mogu biti gravitacijske, električne i magnetske sile. Unutrašnje su sile reakcije među česticama unutar granične konture. Čestica m_i definirana je vektorom položaja $\vec{r}_i$ s početkom u ishodištu nepomičnoga pravokutnoga koordinatnog sustava. Središte je mase G sustava čestica određeno vektorom $\vec{r}_G$ koji proistječe iz tzv. momentnog pravila

$$m\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{115}$$

gdje je $m = m_i$ ukupna masa. Drugi zakon mehanike poprimit će za česticu m_i oblik

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \cdots = m_i \ddot{\vec{r}}_i, \tag{116}$$

gdje je $\ddot{\vec{r}}_i$ ubrzanje mase m_i. Za cjelokupni će sustav čestica biti

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i, \tag{117}$$

gdje je $\sum \vec{F}_i$ vektorska suma svih vanjskih sila koje djeluju na čestice cijelog sustava, a $\sum \vec{f}_i$ vektorska suma svih unutrašnjih sila, tj. akcija i reakcija među česticama sustava. Suma je unutrašnjih sila jednaka ništici ako se unutrašnje sile pojavljuju u parovima jednake vrijednosti i suprotnog smjera. Deriviranjem jednadžbe (115) dobiva se

$$m\ddot{\vec{r}}_G = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i. \tag{118}$$

Uvrštenjem u jednadžbu (116) jednadžba je gibanja

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_G \quad \text{ili} \quad \sum \vec{F} = m\vec{a}_G, \tag{119}$$

gdje je $\vec{a}_G$ ubrzanje $\ddot{\vec{r}}_G$ središta masa sustava čestica.

Jednadžba (119) generalizacija je drugog Newtonova zakona za gibanje sustava čestica. Iz te jednadžbe slijedi da je rezultanta vanjskih sila bilo kojeg sustava čestica jednaka umnošku zbroja masa i ubrzanja središta tih masa. To je zakon o gibanju središta masa koji glasi: Središte se sustava čestica giba kao čestica kojoj je masa jednaka zbroju pojedinih masa na koju djeluju sve vanjske sile sustava.

Značenje je toga zakona višestruko, jer on pruža obrazloženje za primjenu metoda dinamike sustava čestica. Naime, iz jednadžbe (119) slijedi da rješenja za gibanje tijela koje se promatra kao čestica određuje zakon gibanja središta masa. Tako, npr., ako se tijelo giba translacijski, tada je njegovo gibanje u potpunosti određeno gibanjem središta masa. Osim toga, taj zakon omogućuje da se u sustavu čestica mogu iz razmatranja isključiti sve unaprijed nepoznate unutrašnje sile.

Iz zakona se o održanju gibanja središta masa može izvesti sljedeći važan zaključak:

Ako je u promatranom sustavu zbroj vanjskih sila jednak ništici, tj. $\sum \vec{F}_i = 0$, tada je i ubrzanje središta masa $\vec{a}_G = 0$ ili $\vec{v} = \text{const.}$, pa je prema tome gibanje središta masa jednoliko i pravocrtno.

Isto se dobiva ako zbroj vanjskih sila nije jednak ništici, ali su sile takve da je zbroj njihovih projekcija na jednu os jednak ništici, npr. na os x:

$$\sum F_{ix}^S = R_x^S = 0, \tag{120}$$

pa je tada

$$\frac{d^2 x_S}{dt^2} = 0, \tag{121}$$

odnosno

$$\frac{dx_S}{dt} = v_{Sx} = \dot{x}_S = \text{const.}, \tag{122}$$

tj. brzina središta masa u pravcu osi x ima konstantnu vrijednost. To znači ako je u početnom trenutku brzina $v_{Sx} = 0$, ona i u bilo kojem drugom trenutku ostaje jednaka ništici, tj. središte se mase neće gibati uzduž osi x, pa je x_S konstantno.

Mehanički rad i energija sustava čestica. Temeljne su veze i definicije vezane uz mehanički rad i energiju prikazane već u poglavlju o dinamici čestice. Međutim, sada će se ti zaključci poopćiti na sustav čestica koji je prikazan na sl. 18.

Ukupni je rad koji izvršava jedna čestica m_i prema definiciji

$$W_i = \int(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{r}_i, \tag{123}$$

gdje je $d\vec{r}$ infinitezimalni pomak čestice m_i. Za sustav čestica ukupni je ili totalni rad za vanjske i unutrašnje sile

$$W = \sum W_i = \sum\int(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{r}_i, \tag{124}$$

što se prema sl. 18, jer je $\vec{r}_G = \vec{r} = \vec{r}_i - \vec{\varrho}_i$, može pisati

$$W = \sum\int(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{r} + \sum\int(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{\varrho}_i. \tag{125}$$

Međutim, budući da je zbroj unutrašnjih sila $\sum \vec{f}_i$ nužno jednak ništici, te da je vektorski zbroj vanjskih sila $\sum\vec{F}_i = \sum\vec{F}$, ukupni je rad

$$W = \int\sum\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\sum\{(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{\varrho}_i\}. \tag{126}$$

Za određivanje kinetičke energije sustava čestica izrazit će se kvadrat brzine sljedećim izrazom $v_i^2 = \dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i$, pa će biti

$$E_{kin} = \sum E_{i\,kin} = \sum\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i = \sum\frac{1}{2}m_i(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\varrho}}_i)\cdot(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\varrho}}_i). \tag{127}$$

Nakon množenja i sređivanja, uzevši u obzir da je

$$\sum m_i\dot{\vec{\varrho}}_i = \frac{d(\sum m_i\vec{\varrho}_i)}{dt} = 0, \tag{128}$$

jer je $\sum m_i\vec{\varrho}_i = 0$ (ϱ_i je, naime, mjereno od središta masa), slijedi da je

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m_i|\dot{\vec{\varrho}}_i|^2. \tag{129}$$

Prema tome, ukupna je kinetička energija sustava čestica jednaka kinetičkoj energiji translacije središta masa kao cjeline i energije što nastaje zbog relativnog gibanja svih čestica s obzirom na središte masa.

Očito je da je kinetička energija sustava čestica skalarna veličina koja je uvijek pozitivna. Ona je jednaka zbroju kinetičkih energija svih čestica od kojih se sastoji sustav. Slijedi i to da je kinetička energija značajka kako translacijskog tako i rotacijskog gibanja sustava. Osim toga, vrijednost je kinetičke energije nezavisna od smjera gibanja i smisla rotacije.

Zakon se kinetičke energije sustava čestica može sada postaviti izjednačivanjem izraza za rad W i razliku kinetičkih energija, pa je

$$\int\sum\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\sum\{(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{\varrho}_i\} = \Delta\left\{\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right\} + \Delta\left\{\frac{1}{2}m_i|\dot{\vec{\varrho}}_i|^2\right\}. \tag{130}$$

Taj se izraz može podijeliti na dva nezavisna izraza, i to

$$\int\sum\vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) \tag{131}$$

$$\int\sum\{(\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{\varrho}_i\} = \Delta\left(\frac{1}{2}m_i|\dot{\vec{\varrho}}_i|^2\right). \tag{132}$$

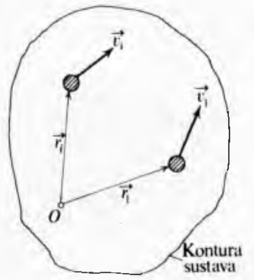
Jednadžba (131) je evidentno zakon kinetičke energije gibanja središta masa, u kojem se tvrdi da je razlika kinetičkih energija između dva stanja gibanja središta masa jednaka radu svih vanjskih sila što djeluju na to središte masa za cijelo promatrano gibanje.

Jednadžba (132) opisuje relativno gibanje s obzirom na središte gibanja, i to kao funkciju rada i vanjskih i unutrašnjih sila. Prema tome, na promjenu kinetičke energije sustava mogu utjecati i vanjske i unutrašnje sile. U primjeru krutog tijela, kao ekstrema sustava čestica, kojemu su udaljenosti između pojedinih čestica stalne, sve su unutrašnje sile i spregovi sila međusobno uravnoteženi pa je rad unutrašnjih sila jednak ništici. Iz toga slijedi da se jednadžba (132) reducira na oblik

$$\int\sum\vec{F}_i\cdot d\vec{\varrho}_i = \Delta\left(\frac{1}{2}m|\dot{\vec{\varrho}}_i|^2\right). \tag{133}$$

Zakon količine gibanja. Da se utvrdi zakon količine gibanja, razmotrit će se opći sustav od n čestica koje su ograničene prostornom konturom. Prema analogiji vektor $\vec{B}$ definira se količinom gibanja sustava čestica koja je jednaka zbroju količina gibanja pojedinih čestica

$$\vec{B} = \sum_i^n m_i\vec{v}_i. \tag{134}$$



Sl. 19. Utvrđivanje vektora količine gibanja sustava čestica

Za jednu česticu vrijedi II Newtonov zakon

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_i) = F_i + S_{ij}, \tag{135}$$

gdje su F_i vanjske sile, a S_{ij} unutrašnje sile što djeluju na česticu. Uz pretpostavku da je $m = \text{const.}$, za sustav čestica bit će

$$\sum_i^n\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_i^n F_i + \sum_{ij}^n S_{ij}. \tag{136}$$

Ako je $\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$, drugi je član u jednadžbi (136) jednak ništici, pa je

$$\frac{d}{dt}\sum_i^n(m_i\vec{v}_i) = \sum_i^n\vec{F}_i. \tag{137}$$

Primjenom izraza (134) bit će

$$d\sum_i^n\vec{B}_i = \sum_i^n\vec{F}_i dt = \sum_i d\vec{J}_i, \tag{138}$$

što je zakon količine gibanja u diferencijalnom obliku.

Integralni je oblik zakona količine gibanja za sustav čestica

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \sum_{i=1}^n\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt, \tag{139}$$

što pokazuje da je razlika količina gibanja sustava čestica na kraju i na početku vremenskog razdoblja jednaka impulsu rezultante vanjskih sila u tom istom razdoblju.

Zakon količine gibanja sustava čestica u sklarnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} B_{2x} - B_{1x} &= \sum_1^n\int_{t_1}^{t_2}X_i dt \\ B_{2y} - B_{1y} &= \sum_1^n\int_{t_1}^{t_2}Y_i dt \\ B_{2z} - B_{1z} &= \sum_1^n\int_{t_1}^{t_2}Z_i dt. \end{aligned} \tag{140}$$

Ako se promatra gibanje središta masa sustava čestica, tada je

$$(\sum m_i)\vec{v}_{S2} - (\sum m_i)\vec{v}_{S1} = \sum(m_i)(\vec{v}_{S2} - \vec{v}_{S1}) = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt, \tag{141}$$

pa je ukupna količina gibanja sustava čestica jednaka količini gibanja mase, koja je po vrijednosti jednaka masi cijelog sustava, smještenoj u središtu masa promatranog sustava. To omogućuje izračunavanje količine gibanja u krutim tijelima. Iz jednadžbe (141) slijedi i to da će količina gibanja biti ništica ako središte sustava miruje. Tako je pri rotaciji oko nepomične osi koja prolazi središtem masa sustava čestica.

Međutim, ako je gibanje sustava čestica sastavljeno, količinom se gibanja ne može karakterizirati rotacija sustava, jer količina gibanja karakterizira samo translacijski dio gibanja.

Ako na sustav ne djeluje nikakva vanjska sila, količina će gibanja ostati nepromijenjena, tj. sačuvana. To se naziva principom održavanja količine gibanja, odnosno tada vrijedi

$$m(\vec{v}_{S2} - \vec{v}_{S1}) = \text{const.} \tag{142}$$

Zakon kinetičkog momenta. Kinetički je moment čestice veličina definirana izrazom

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \tag{143}$$

Ako se proširi na sustav čestica, mora se odabrati referentna točka O sustava. Tada je kinetički moment sustava čestica

$$\sum \vec{K}_i^O = \vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \tag{144}$$

Deriviranjem toga izraza dobije se

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_1^n \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m\vec{v}_i + \sum_1^n \vec{r}_i \times m \frac{d\vec{v}_i}{dt}. \tag{145}$$

Zbog kolinearnosti prvi je član na desnoj strani jednak ništici, pa je

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_i^O. \tag{146}$$

Prema tome, derivacija je kinetičkog momenta za bilo koju točku sustava česticâ jednaka zbroju momenata vanjskih sila što djeluju na sustav s obzirom na tu točku.

Uz pretpostavku da kroz referentnu točku prolazi os x, skalarni je oblik izraza (144)

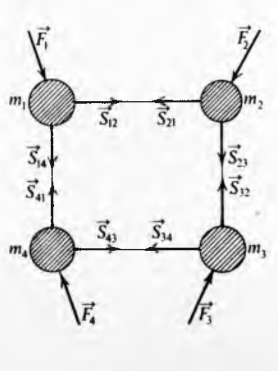
$$K_x = |\vec{K}_x| = \sum_1^n r_i m_i v_i \sin\alpha_i, \tag{147}$$

gdje je α_i kut što ga zatvaraju vektor položaja i vektor brzine. Za rotaciju čestica oko nepomične osi kad je r_i udaljenost čestica od osi rotacije, jer je brzina okomita na polumjer r_i, bit će $\sin\alpha = 1$, pa uz $v_i = r_i$ iz (147) slijedi

$$K_x = \sum_i^n r_i m_i r_i \omega = \omega \sum_i^n m_i r_i^2. \tag{148}$$

Konzervativni sustavi čestica. Sustav je čestica konzervativan ako u njemu nema gubitaka energije zbog djelovanja unutrašnjih sila trenja ili zbog neelastičnosti dijelova sustava, što uzrokuje rasipanje energije. Ako na konzervativni sustav tokom gibanja djeluju vanjske sile i ako nema izvršenog rada, tada nema ni gubitaka energije unutar sustava, pa će biti

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta V_e + \Delta V_g = 0, \tag{149}$$



Sl. 20. Djelovanja vanjskih i unutrašnjih sila u sustavu čestica

što izražava zakon o održanju dinamičke energije. Taj zakon vrijedi u idealiziranom obliku samo kada se unutrašnje kinetičko trenje može zanemariti.

Za konzervativne se sustave može postaviti da je

$$E_1 + V_1 = E_2 + V_2, \tag{150}$$

pa se u skladu s već utvrđenim vanjskim i unutrašnjim silama može za sustav čestica pisati, prema sl. 20,

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} &= W_{F_1} + W_{S_{12}} + W_{S_{14}} \\ &\vdots \\ \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} &= W_{F_n} + W_{S_{43}} + W_{S_{14}} \end{aligned} \tag{151}$$

odnosno nakon zbrajanja

$$\frac{1}{2}\sum_1^4 m_i v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^4 m_i v_{0i}^2 = \sum_1^4 W_{F_i} + \sum_{ij}^4 W_{S_{ij}}. \tag{152}$$

Ako je sustav konzervativan, nema trenja među česticama, pa je

$$W_{S_{ij}} = -W_{S_{ji}}.$$

Zbog toga je u jednadžbi (152) član $\sum_{ij}^4 W_{S_{ij}} = 0$, pa je kinetička energija sustava općenito

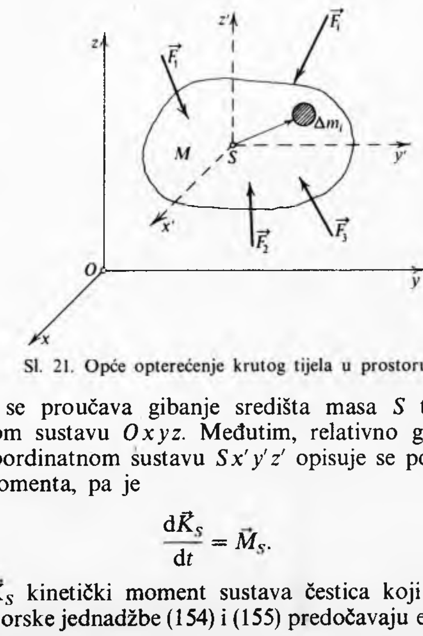
$$\frac{1}{2}\sum_1^n m_i v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^n m_i v_{0i}^2 = \sum_1^n W_{F_i}. \tag{153}$$

Prema tome, primjenom zakona za kinetičku energiju sustava čestica, a kad su veze sustava bez trenja, eliminirane su sve unaprijed nepoznate reakcije veza sustava.

Dinamika krutih tijela

Sile i ubrzanja. Za proučavanje i opisivanje gibanja krutih tijela u prostoru i uzroka tih gibanja primjenjuje se i prostorna i ravninska dinamika. Posebno je važna u tehničkoj praksi ravninska dinamika. Za općenit pristup razmatrat će se kruto tijelo opterećeno vanjskim silama $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_i$ (sl. 21). Pretpostavlja se da je tijelo sastavljeno od mnogo čestica mase Δm_i ($i = 1, 2, \ldots n$). Ako se tijelo promatra kao sustav čestica, može se napisati da je

$$\vec{F} = m\vec{a}_S. \tag{154}$$



Sl. 21. Opće opterećenje krutog tijela u prostoru

Pri tom se proučava gibanje središta masa S tijela u koordinatnom sustavu $Oxyz$. Međutim, relativno gibanje tijela prema koordinatnom sustavu $Sx'y'z'$ opisuje se pomoću kinetičkog momenta, pa je

$$\frac{d\vec{K}_S}{dt} = \vec{M}_S. \tag{155}$$

gdje je $\vec{K}_S$ kinetički moment sustava čestica koji čine kruto tijelo. Vektorske jednadžbe (154) i (155) predočavaju ekvivalentnu skupinu sila koje djeluju na to tijelo silom $m\vec{a}_S$, koja djeluje u središtu masa S, i spregom $\dot{\vec{K}}_S$. Prema tome, općenito gibanje krutog tijela u prostoru može se opisati kao zbroj translacijskog i rotacijskog gibanja. Kinetički je moment oko točke S

$$K_S = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i \Delta m_i), \tag{156}$$

gdje je $\vec{r}'_i$ vektor položaja čestice M, a $\vec{v}'_i$ brzina čestice relativno prema koordinatnom sustavu $Sx'y'z'$. Ako tijelo rotira oko trenutne osi kutnom brzinom $\vec{\omega}$, tada je

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i, \tag{157}$$

pa je uvrštenjem u (146) kinetički moment

$$\vec{K}_S = \sum [\vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \Delta m_i]. \tag{158}$$

Za utvrđivanje npr. komponente u pravcu osi x primjenjuje se pravilo za izračunavanje pravokutnih komponenata vektorskog umnoška, pa je

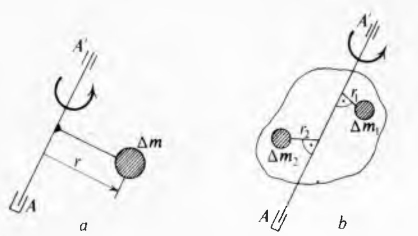
$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)_z - z_i(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)_y] \Delta m_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)] \Delta m_i = \\ &= \omega_x \sum_1^n (y_i^2 + z_i^2) \Delta m_i - \omega_y \sum_1^n x_i y_i \Delta m_i - \omega_z \sum_1^n z_i x_i \Delta m_i. \end{aligned} \tag{159}$$

Ako se znakovi zbrajanja zamijene znakovima integriranja, a konačni elementi diferencijalima, uz potpuno analogan postupak i za osi y i z, komponente su kinetičkog momenta

$$\begin{aligned} K_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2) \mathrm{d}m - \omega_y \int xy \mathrm{d}m - \omega_z \int zx \mathrm{d}m \\ K_y &= -\omega_x \int xy \mathrm{d}m + \omega_y \int (z^2 + x^2) \mathrm{d}m - \omega_z \int yz \mathrm{d}m \\ K_z &= -\omega_x \int xy \mathrm{d}m - \omega_y \int yz \mathrm{d}m + \omega_z \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{160}$$

U jednadžbama (160) integralne se funkcije nazivaju dinamičkim momentima inercije.

Dinamički momenti inercije. Čestica Δm pričvršćena je na štap zanemarljive mase i polumjera r koji je učvršćen za osovinu AA' (sl. 22). Djelovanjem sprega na taj sustav, a uz pretpostavku da je on prije djelovanja mirovao, nastupit će rotacija. Vrijeme potrebno da čestica dostigne zahtijevanu brzinu vrtnje proporcionalno je s masom Δm i kvadratom njezine udaljenosti r od osi rotacije. To je razlog da je umnožak $r^2 \Delta m$ mjera inercije sustava, te se naziva dinamičkim momentom inercije čestice mase Δm s obzirom na os AA'.



Sl. 22. Model i original krutog tijela koje rotira oko nepomične osi AA'

Tijelo mase m koje rotira oko osi AA' (sl. 22) podijeljeno je u elemente $\Delta m_1, \Delta m_2, \Delta m_3, \ldots$ Može se pokazati da je mjera otpora tijela prema gibanju (ili zaustavljanju) jednaka zbroju elementarnih momenata inercije, pa je

$$r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i. \tag{161}$$

Povećanjem broja elemenata bit će moment inercije

$$I = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m, \tag{162}$$

gdje je r najmanja udaljenost promatrane elementarne mase od osi AA'. To je tzv. aksijalni moment inercije s obzirom na os AA'. Taj izraz predstavlja vrlo važno svojstvo tijela ako se ono giba oko neke osi s nekim kutnim ubrzanjem. I upravo kao što je masa m tijela mjera njegova otpora translacijskom gibanju, tako je i moment inercije mjera otpora tijela rotacijskom gibanju.

Ako je gustoća tijela ϱ stalna u cijelom tijelu, aksijalni je moment inercije s obzirom na jednu izabranu os

$$I = \varrho \int_{(V)} r^2 \mathrm{d}V, \tag{163}$$

gdje je $\mathrm{d}V$ elementarni volumen tijela. Očito je da je tada moment inercije geometrijsko svojstvo tijela. Ako gustoća nije stalna, ali se može izraziti u funkciji koordinata tijela, ne može se staviti ispred integrala i mora se uključiti u integraciju. Veze između te funkcije i elemenata volumena, a time i toka integracije, često mogu olakšati izračunavanje momenta inercije, npr. u ljuskastim tijelima i sl. Dimenzije su momenta inercije umnožak mase i kvadrata udaljenosti, dakle izražava se u kilogramima puta kvadratni metar ($\mathrm{kg\,m^2}$).

Polumjer inercije. Polumjer inercije i mase m oko neke osi, za koju je moment inercije I, definiran je relacijom

$$i = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{ili} \quad I = i^2 m. \tag{164}$$

Polumjer inercije mjera je raspodjele mase tijela. To znači da bi se moglo smatrati da je sva masa m koncentrirana na udaljenosti i od osi. Takav je postupak često vrlo praktičan, jer se moment inercije nekog tijela oko neke osi može izraziti polumjerom inercije oko te iste osi.

Steinerovo pravilo. Ako je poznat moment inercije s obzirom na jednu od osi tijela, može se jednostavno odrediti moment inercije tog tijela s obzirom na neku drugu paralelnu os. Tada je moment inercije

$$I = I_S + md^2, \tag{165}$$

gdje je I_S moment inercije tijela s obzirom na os što prolazi središtem masa, m masa čestice, a d udaljenost među osima. Valja naglasiti da se moment inercije ne može prenijeti ako jedna od osi ne prolazi središtem masa i ako joj druga os nije paralelna.

Uvrštavanjem izraza za polumjer inercije (164) u jednadžbu (165) dobiva se

$$i^2 = i_S^2 + d^2, \tag{166}$$

gdje je i polumjer inercije oko osi koja je na udaljenosti d od osi kroz središte masa, a i_S polumjer inercije s obzirom na središnju os

Ako su osi koordinatnog sustava xyz u tijelu kojemu je gustoća ϱ stalna, tada su aksijalni momenti inercije

$$\begin{aligned} I_x &= \varrho \int_{(V)} (y^2 + z^2) \mathrm{d}V \\ I_y &= \varrho \int_{(V)} (z^2 + x^2) \mathrm{d}V \\ I_z &= \varrho \int_{(V)} y^2 + z^2) \mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{167}$$

gdje su x, y, z koordinate elementa volumena, a integrira se preko cijelog volumena.

Slično su definirani i centrifugalni ili devijacijski momenti inercije, pa su oni za tijela stalne gustoće

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \varrho \int_{(V)} xy \mathrm{d}V \\ I_{yz} &= \varrho \int_{(V)} yz \mathrm{d}V \\ I_{zx} &= \varrho \int_{(V)} zx \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{168}$$

Steinerovo pravilo za centrifugalne momente inercije potpuno je analogno pravilu za aksijalne momente inercije, uvažavajući razliku u definiciji, pa je

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} + mab, \tag{169}$$

gdje su xy osi kroz središte masa, a $\xi\eta$ osi paralelne s osima kroz središte masa, i to su

$$\begin{aligned} \xi &= x - a \\ \eta &= y - b, \end{aligned} \tag{170}$$

gdje je a udaljenost između osi ξ i osi kroz središte masa x, a b udaljenost između osi η i osi kroz središte masa b. I_{xy} i $I_{\xi\eta}$ su centrifugalni momenti inercije za navedene osi, a m je sveukupna masa tijela.

Središnje i glavne osi inercije. U svakoj se točki krutog tijela osi koordinatnog sustava, koje su međusobno okomite, mogu postaviti u takav položaj da su centrifugalni momenti I_{xy}, I_{zx}, I_{zy} s obzirom na osi xyz jednaki ništici. Osi u takvu položaju nazivaju se glavnim osima inercije.

Ako je ishodište koordinatnog sustava ujedno i središte masa tog tijela, glavne se osi inercije nazivaju središnjim (ili centralnim) glavnim osima inercije. Kada se osi nalaze u navedenom položaju, aksijalni su momenti inercije s obzirom na te osi glavni momenti inercije i imaju ekstremne vrijednosti, a obično se označuju sa I_1, I_2, I_3.

Polarni moment inercije. U polarnom koordinatnom sustavu moment inercije definiran je izrazom

$$I_{\mathrm{p}} = \int_{(m)} r_0^2 \mathrm{d}m, \tag{171}$$

gdje je r_0 u koordinatnom sustavu xyz

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{172}$$

pa je

$$I_p = \int_{(m)} \frac{x^2}{2}\mathrm{d}m + \int \frac{y^2}{2}\mathrm{d}m + \int \frac{z^2}{2}\mathrm{d}m + \ldots.$$

$$= \frac{1}{2}\left| \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m + \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m + \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m \right|. \tag{173}$$

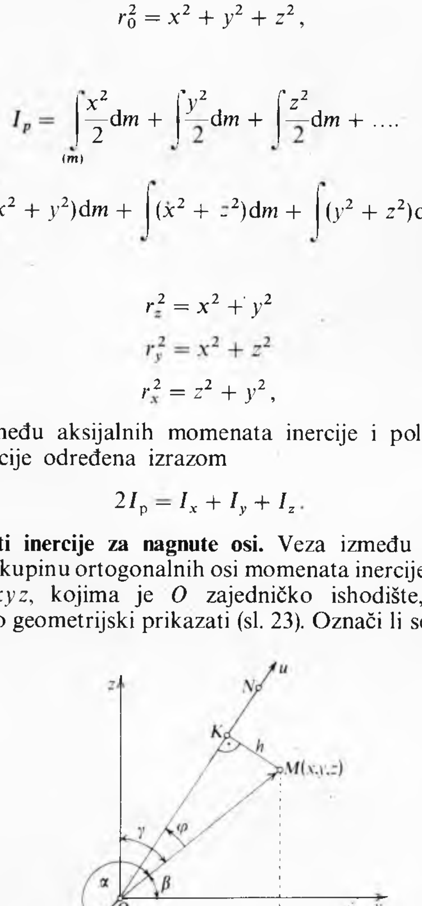
Ako su

$$\begin{aligned} r_z^2 &= x^2 + y^2 \\ r_y^2 &= x^2 + z^2 \\ r_x^2 &= z^2 + y^2, \end{aligned} \tag{174}$$

veza je između aksijalnih momenata inercije i polarnog momenta inercije određena izrazom

$$2I_{\mathrm{p}} = I_x + I_y + I_z. \tag{175}$$

Momenti inercije za nagnute osi. Veza između momenata inercije za skupinu ortogonalnih osi momenata inercije s obzirom na osi $Oxyz$, kojima je O zajedničko ishodište, može se jednostavno geometrijski prikazati (sl. 23). Označi li se $\lambda = \cos\alpha$,



Sl. 23. Geometrijske značajke nagnute osi u za određivanje dinamičkog momenta inercije

$\mu = \cos\beta$, a $\nu = \cos\gamma$, tada se za izabranu točku M tijela kojemu se određuje moment inercije s obzirom na os u dobiva $\overline{OK} = H$, $\overline{OM} = r$, $\overline{MK} = h$, $\measuredangle\, OMK = \varphi$, tj. uz

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ H &= r\cos\varphi = \lambda x + \mu y + \nu z \\ \lambda^2 &+ \mu^2 + \nu^2 = 1, \end{aligned} \tag{176}$$

pa odatle slijedi da je

$$\begin{aligned} h^2 = \lambda^2(y^2 + z^2) + \mu^2(z^2 + x^2) + \nu^2(x^2 + y^2) - \\ - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx. \end{aligned} \tag{177}$$

Ako se prema spomenutim definicijama uvedu oznake

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m \qquad & I_{xy} &= \int xy\mathrm{d}m \\ I_y &= \int (z^2 + x^2)\mathrm{d}m & I_{yz} &= \int yz\mathrm{d}m \\ I_z &= \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m & I_{zx} &= \int zx\mathrm{d}m, \end{aligned} \tag{178}$$

ako se moment inercije za os u postavi

$$I_u = \int h^2 \mathrm{d}m \tag{179}$$

i ako se u (179) uvrste izrazi (177) i (178), aksijalni je moment inercije tijela s obzirom na os Ou

$$\begin{aligned} I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned} \tag{180}$$

To je linearna transformacija, što znači da se radi o tenzorskim veličinama, pa se tenzor inercije može pisati u obliku

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{zy} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \tag{181}$$

Elipsoid inercije. Zakon promjene iznosa momenta inercije s obzirom na os I_u (180) u vezi s promjenama parametara λ, μ, ν omogućuje relativno jednostavnu geometrijsku interpretaciju u obliku elipsoida inercije. Naime, ako se izabere na osi Ou (sl. 23) neka po volji točka N koja je udaljena od ishodišta za iznos d, dobiva se

$$\overline{ON} = d = \frac{1}{\sqrt{I_u}}, \tag{182}$$

a koordinate su te točke $x = \lambda d$, $y = \mu d$, $z = \nu d$, odakle je $\lambda = x\sqrt{I_u}$, $\mu = y\sqrt{I_u}$ i $\nu = z\sqrt{I_u}$, pa se uvrštavanjem u jednadžbu (180) dobiva

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1. \tag{183}$$

To je jednadžba elipsoida inercije. Elipsoid inercije može se konstruirati za svaku točku promatranog tijela primjenom Steinerova pravila. Osim toga, u istoj točki može se elipsoid inercije konstruirati za različito orijentirane osi pravokutnih sustava sa zajedničkim ishodištem. Jedan je od tih sustava sustav glavnih osi elipsoida, za koji je jednadžba elipsoida inercije

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \tag{184}$$

Veza između dinamičkih i geometrijskih momenata inercije. Sličnost u definiciji između dinamičkih i geometrijskih momenata inercije omogućuje egzaktna rješenja veza ravnih ploča. Ploča jednake debljine δ prikazana je na sl. 24. Ako se pretpostavi da je gustoća ploče ϱ stalna, dinamički je moment inercije

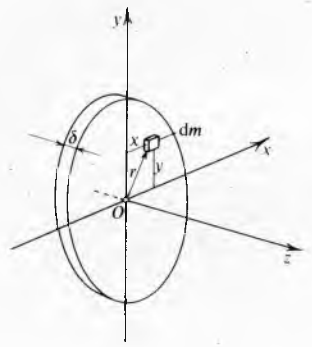
$$I_z = \int r^2 \mathrm{d}m = \varrho\delta \int r^2 \mathrm{d}A = \varrho\delta I_z, \tag{185}$$

gdje je δ debljina ploče, $\mathrm{d}A$ element površine, a r udaljenost elementa od osi z. Ako je debljina δ malena prema ostalim dimenzijama ploče, momenti inercije za druge dvije osi mogu se aproksimirati relacijama:

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \varrho\delta \int y^2 \mathrm{d}A = \varrho\delta I_x$$
$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \varrho\delta \int x^2 \mathrm{d}A = \varrho\delta I_y. \tag{186}$$

Iz jednadžbi (185) i (186) slijedi da je za tanke ploče

$$I_z = I_x + I_y. \tag{187}$$



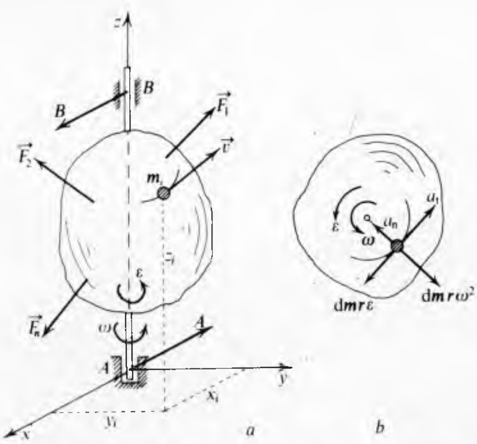
Sl. 24. Geometrijske značajke pri utvrđivanju veze između geometrijskih i dinamičkih momenata inercije

Gibanje krutog tijela. U skupu čestica koji je definiran kao sustav čestica položaj ili gibanje svake čestice zavisi od položaja ili gibanja ostalih čestica. Međutim, kada su čestice na vrlo malim udaljenostima, onda se pretpostavlja da je skup kontinuiran i smatra se tijelom. Ako se udaljenosti između čestica ne mijenjaju zbog djelovanja bilo kakvih sila, tada se taj skup čestica naziva krutim tijelom.

U kinematici krutog tijela utvrđeno je, da se općenito ravninsko gibanje sastoji od translacije i rotacije. Pri translaciji sva se tijela gibaju na isti način. To znači da su putanje svih tijela međusobno jednake, pa su brzine i ubrzanja također jednaki.

Translacija krutog tijela. Pri translaciji se sveukupna masa tijela može zamisliti koncentrirana u jednoj točki, kojoj se tada proučava gibanje. Za pravocrtnu translaciju vrijede iste zakonitosti koje su definirane za pravocrtno gibanje čestica, a za krivocrtnu translaciju zakoni za krivocrtno gibanje čestice.

Rotacija oko nepomične osi. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi prikazana je na sl. 25a.



Sl. 25. Inercijske sile pri rotaciji tijela oko nepomične osi

Odabere li se ravnina paralelna s ravninom xy što prolazi točkom m_i, presjek će u tlocrtu izgledati kao na sl. 25 b. Tada je moment

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_z^{F_i}, \tag{188}$$

dok su ubrzanja

$$a_n = \omega^2 r, \qquad a_t = r\varepsilon, \tag{189}$$

pa su inercijske sile

$$\mathrm{d}F_n = \mathrm{d}m\omega^2 r, \qquad \mathrm{d}F_t = \mathrm{d}mr\varepsilon. \tag{190}$$

Iz slike je očito da je: *1*) zbroj momenata svih sila što djeluju na pojedine čestice tijela oko osi rotacije jednak ništici, inače bi se tijelo razdvojilo; *2*) zbroj vanjskih sila čini moment M_O (188); *3*) nema momenata centrifugalnih sila jer sile prolaze kroz os rotacije.

Dakle, uvjet je ravnoteže

$$M_O - \int_m (\mathrm{d}mr\varepsilon)r = 0, \tag{191a}$$

odnosno

$$M_O - \varepsilon \int_m r^2 \mathrm{d}m = 0. \tag{191b}$$

To je dinamička jednadžba gibanja za tijelo koje rotira oko nepomične osi.

Već je definirano da je

$$\int_m r^2 \mathrm{d}m = I_O \tag{192}$$

dinamički moment inercije, pa je tada

$$M_O = I_O \varepsilon, \tag{193a}$$

odnosno

$$M_O = I_O \ddot{\varphi}. \tag{193b}$$

Ta je jednadžba potpuno analogna s diferencijalnom jednadžbom pravocrtnog gibanja čestice:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = m\ddot{x}. \tag{194}$$

Uspoređivanjem tih dviju jednadžbi vidi se da moment inercije u jednadžbi rotacijskog gibanja ima istu ulogu kao masa u jednadžbi gibanja čestice. Dakle, moment inercije karakterizira tromost tijela pri rotacijskom gibanju.

Iz toga je očito da se prostorna rotacija krutog tijela oko nepomične osi može proučavati i kao planarna rotacija ploče oko te iste osi.

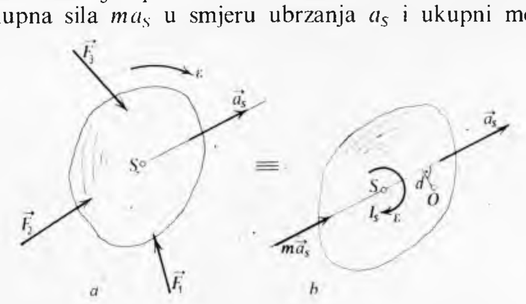
Općenito ravninsko gibanje krutog tijela. Povezujući tako ravninsku translaciju krutog tijela s rotacijom krutog tijela oko nepomične osi, očito slijedi da su time obuhvaćeni elementi ravninskog gibanja krutog tijela. Naime, za opisivanje ravninskog gibanja krutog tijela potrebno je poznavanje triju nezavisnih skalarnih funkcija, i to dviju translacijskih i jedne rotacijske jednadžbe:

$$M_S = I_S \varepsilon$$
$$F_x = m a_x \tag{195}$$
$$F_y = m a_y,$$

gdje su u M_S obuhvaćeni svi momenti nastali i od vanjskih i od unutrašnjih sila što djeluju na tijelo. No kako se radi o krutom tijelu, suma je unutrašnjih sila jednaka ništici, pa se prema tome radi samo o momentima vanjskih sila, i to oko središta masa S.

Jednadžbe (195) opće su jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela.

Na sl. 26a prikazano je u ravnini tijelo oslobođeno od vanjskih veza s ucrtanim kutnim ubrzanjem ε i ubrzanjem središta masa a_S u promatranom trenutku. Na sl. 26b ucrtane su ukupna sila ma_S u smjeru ubrzanja a_S i ukupni moment



Sl. 26. Identičnost opterećenog tijela (*a*) s modelom oslobođenim veza (*b*)

sprega sila $I_S\varepsilon$ sa smislom koji ima i kutno ubrzanje ε. Ta ekvivalencija omogućuje postavljanje jednadžbi za trenutno stanje između sila i ubrzanja. Navedeni prikaz omogućuje potpunu slobodu u izboru pripadne referentne momentne točke. Ako je, npr., točka O na sl. 26b takva točka, suma je momenata vanjskih sila oko točke O

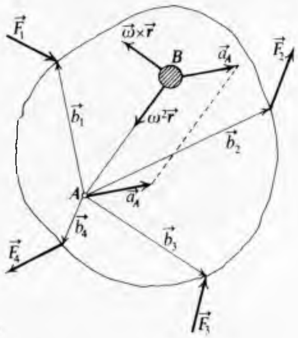
$$M_O = I_S\varepsilon + ma_S d. \tag{196}$$

Ako je referentna točka bila izabrana na drugoj strani od pravca ma_S, očito je da bi dio $ma_S d$ u jednadžbi (196) bio negativan.

D'Alembertov princip. Prethodno je prikazan temeljni odnos između sila, masa i ubrzanja za različite oblike gibanja krutog tijela.

Međutim, moguć je i drugi pristup u traženju spomenitih odnosa, a to je tzv. d'Alembertov princip, kojemu su osnove već prikazane prilikom razmatranja dinamike čestice. Taj se princip može lako proširiti i na ravninsko gibanje krutog tijela.

Ako se krutom tijelu koje se ravninski giba pridruži koordinatni sustav, promatrač koji je također vezan za pomični koordinatni sustav ne opaža gibanje tijela. Promatrač može tada zaključiti da se tijelo nalazi u ravnoteži. Vanjske sile i njihov spreg mogu se uravnotežiti jedino tako da im se dodaju fiktivne sile i fiktivni spregovi. Znači, postavljaju se dva uvjeta. U tom smislu, prema sl. 27, uvjeti su ravnoteže: *1*) zbroj vanjskih sila i zbroj sila inercije jednak je ništici i *2*) zbroj momenata vanjskih sila i zbroj momenata sila inercije također je jednak ništici.



Sl. 27. Proširenje d'Alembertova principa na kruta tijela

Prema sl. 27, prvi je uvjet

$$\sum_{i=1}^{n} \vec F_i - \int_m \vec a_B \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i - \int_m \vec a_A \mathrm{d}m + \int_m \omega^2 \vec r \mathrm{d}m - \int_m (\vec\varepsilon \times \vec r)\mathrm{d}m = 0, \tag{197a}$$

koji nakon sređivanja ima oblik

$$\sum_{i=1}^{n} \vec F_i - m(\vec a_A - \omega^2 \vec r_S + \vec\varepsilon \times \vec r_S) = 0, \tag{197b}$$

a kad je središte masa referentna točka, tada je

$$\sum \vec F_i - m\vec a_S = 0. \tag{198}$$

Prema sl. 27, drugi je uvjet

$$\sum \vec b_i \times \vec F_i - \int_m (\vec r \times \vec a_B)\mathrm{d}m = 0, \tag{199a}$$

odnosno

$$\sum \vec b_i \times \vec F_i - \int_m \vec r \times (\mathrm{d}m\vec a_A - \mathrm{d}m\omega^2\vec r + \mathrm{d}m\vec\varepsilon \times \vec r) = 0, \tag{199b}$$

koji nakon sređivanja poprima oblik

$$\vec M_A = m\vec r_S \times \vec a + I_A \vec\varepsilon. \tag{200}$$

Kad se središte masa izabere za referentnu točku, dobiva se

$$\vec M_S = I_S \vec\varepsilon, \tag{201}$$

što znači da se središte masa giba samostalno bez obzira okreće li se tijelo oko njega ili ne. Dakle, ubrzanje je središta masa određeno samo translacijskom inercijom tijela i rezultantom vanjskih sila koje djeluju na tijelo, bez obzira da li ona prolazi ili ne prolazi kroz središte masa.

To je istodobno i zakon o gibanju središta masa, koji glasi: Središte se masa krutog tijela giba poput čestice na koju djeluju sile jednake i paralelne s vanjskim silama. Gibanje je nezavisno od rotacije tijela.

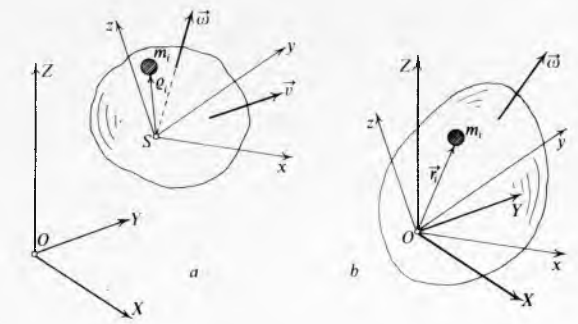
Kinetički moment. Neka su osi x,y,z koordinatnog sustava pričvršćene na tijelo tako da je ishodište u središtu masa kako je prikazano na sl. 28a. Kutna brzina $\vec\omega$ postaje kutnom brzinom sustava xyz ako se promatra s nepomičnog koordinatnog sustava XYZ. Na temelju uvedenih pojmova vezanih uz momente inercije i prema jednadžbama (158) i (160) kinetički je moment s obzirom na točku S

$$\vec K_S = \int \vec\varrho \times (\vec\omega \times \vec\varrho)\mathrm{d}m. \tag{202a}$$

Međutim, za bilo koju točku O kinetički je moment

$$\vec K_O = \int \vec r \times (\vec\omega \times \vec r)\mathrm{d}m. \tag{202b}$$

Iz jednadžbi (202a) i (202b) očito je da vektor položaja $\vec\varrho_i$ ili $\vec r_i$ ima isti izraz $x\vec i + y\vec j + z\vec k$, pa su prema tome i izrazi (202a) i (202b) identična oblika.



Sl. 28. Izbor referentne točke za definiranje kinetičkog momenta krutog tijela

Prema izrazu (160), skalarne su komponente kinetičkog momenta

$$\begin{aligned} K_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ K_y &= -I_{xy}\omega_x - I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ K_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z. \end{aligned} \tag{203}$$

Izrazi vrijede bez obzira na izbor referentne točke, uz uvjet da je kutna brzina $\vec\omega$ konstantna.

Pridruživanjem koordinatnog sustava xyz krutom tijelu dinamički su momenti inercije (178) invarijantni s vremenom. Međutim, ako osi x,y,z rotiraju nezavisno od krutog tijela, inercijski integrali postaju zavisni od vremena, što unosi neželjene teškoće pri izračunavanju kinetičkog momenta. To ne vrijedi kada se pojavi spin u krutom tijelu, i to oko osi simetrije, jer tada integrali momenta inercije ne ovise o kutnom položaju tijela u odnosu na os spina.

Rotacija krutog tijela oko nepomične osi. Oblik i karakteristične dimenzije tijela većih aksijalnih dimenzija koje rotira oko nepomične osi prikazani su na sl. 29. U mehaničkom sustavu čestica se mase m kružno giba oko osi y. Na slici je prikazan položaj te čestice u nekom trenutku T. Na promatranu česticu tijela djeluje elementarna centrifugalna sila $r\omega^2\mathrm{d}m$. Neka koordinatni sustav rotira zajedno s česticom. Elementarna centrifugalna sila rastavlja se na dvije komponente.

Uvjeti su dinamičke ravnoteže za cijelo tijelo

$$\sum M_y = 0 \quad \text{i} \quad \sum Y = 0, \tag{204}$$

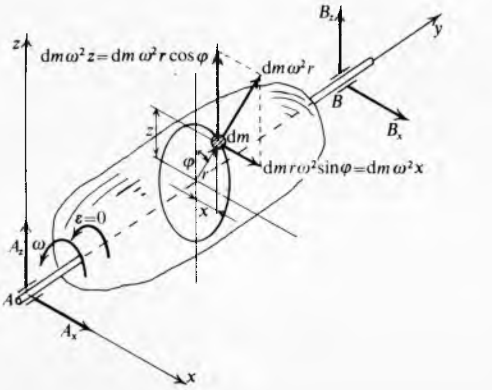
dok su komponente sila, momenata i reakcija s obzirom na osi x i z:

$$\begin{aligned}
\sum X &= 0 \qquad & A_x + B_x + \int_m x\omega^2 \mathrm{d}m &= 0 \\
\sum Z &= 0 \qquad & A_z + B_z + \int_m z\omega^2 \mathrm{d}m &= 0 \\
\sum M_x &= 0 \qquad & B_z l + \int_m zy\omega^2 \mathrm{d}m &= 0 \\
\sum M_z &= 0 \qquad & B_x l + \int_m xy\omega^2 \mathrm{d}m &= 0 .
\end{aligned} \tag{205}$$

Uvrštavanjem središta masa i momenata inercije, dobiva se

$$\begin{aligned}
A_x + B_x + m x_S \omega^2 &= 0 \\
A_z + B_z + m z_S \omega^2 &= 0 \\
B_z l + I_{yz}\omega^2 &= 0 \\
B_x l + I_{xy}\omega^2 &= 0 .
\end{aligned} \tag{206}$$

Reakcije A_x, B_x, A_z, B_z nazivaju se komponentama dinamičkih reakcija.



Sl. 29. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi. Čestica dm kružno se giba oko osi y (prikazan je položaj u trenutku t)

Iz jednadžbi (206) očito je da će stroj imati miran hod ako je $x_S = 0$ i $z_S = 0$, što znači da os y mora biti jedna od glavnih osi inercije.

Ako se središte masa ne nalazi na osi rotacije, tj. $x_S \neq 0$ i $z_S \neq 0$, tijelo nije dinamički uravnoteženo. Stoga se dinamičko uravnotežavanje postiže korekcijom osi i središta masa. To je temeljni princip uravnotežavanja dijelova koji rotiraju.

Zakon kinetičke energije krutog tijela. Neka su pomaci i brzine za sve točke ploče koja se ravninski giba (sl. 30) definirani izrazima:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{s}_B &= \mathrm{d}\vec{s}_A + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r} \\
\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\mathrm{d}\vec{b}_1 &= \mathrm{d}\vec{s}_A + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{b}_1 \\
&\vdots \\
\mathrm{d}\vec{b}_i &= \mathrm{d}\vec{s}_A + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{b}_i ,
\end{aligned} \tag{207}$$

tada je elementarni rad

$$\mathrm{d}W = \sum_1^n \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{b}_i = \sum_1^n \vec{F}_i (\mathrm{d}\vec{s}_A + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{b}_i), \tag{208}$$

što se može preurediti u oblik

$$\mathrm{d}W = \left(\sum_1^n \vec{F}_i\right)\mathrm{d}\vec{s}_A + \left|\sum_1^n (\vec{b}_i \times \vec{F}_i)\right| \mathrm{d}\vec{\varphi} , \tag{209}$$

jer se radi o tzv. vektorskom mješovitom umnošku. Prema tome elementarni je mehanički rad sila što djeluje na kruto tijelo

$$\mathrm{d}W = \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{s}_A + \vec{M}_A \mathrm{d}\vec{\varphi}, \tag{210}$$

gdje je $\vec{R}$ rezultanta svih vanjskih sila, a $\vec{M}$ rezultanta svih vanjskih spregova.

Kinetička energija definirana je relacijom

$$\mathrm{d}E_k = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v}_B\vec{v}_B)}{2}. \tag{211}$$

pa se uvrštavanjem izraza za brzine pojedinih točaka dobiva

$$\mathrm{d}E_k = \frac{\mathrm{d}[m(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r})(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r})]}{2}, \tag{212}$$

iz čega slijedi

$$\mathrm{d}E_k = \frac{\mathrm{d}m}{2}\vec{v}_A\vec{v}_A + \frac{\mathrm{d}m}{2}2\vec{v}_A(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{\mathrm{d}m}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})(\vec{\omega}\times\vec{r}). \tag{213}$$

Kako je pri ravninskom gibanju vektor $\vec{\omega}$ uvijek okomit na vektor $\vec{r}$, apsolutna je vrijednost vektorskog umnoška

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r , \tag{214}$$

pa je kinetička energija

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{v_A^2}{2}\int_m \mathrm{d}m + (\vec{v}_A + \vec{\omega})\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m + \frac{\omega^2}{2}\int_m r^2 \mathrm{d}m, \tag{215}$$

što se može pisati i u obliku

$$E = \frac{m v_A^2}{2} + I_A \frac{\omega^2}{2} + m\vec{r}_S(\vec{v}_A \times \vec{\omega}). \tag{216}$$

To je općenit oblik za kinetičku energiju pri planarnom gibanju.

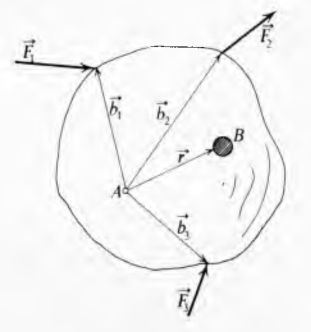
Izabere li se središte masa kao referentna točka, izraz (216) poprima još jednostavniji oblik. Osim toga, za translaciju krutog tijela, kada je $\vec{\omega} = 0$, izraz je za energiju vrlo jednostavan.

Važno je istaći da iz izraza (216) proistječe i to da se kinetička energija tijela može odrediti zbrajanjem translacijske i rotacijske kinetičke energije samo kad je središte masa referentna točka.

U općem slučaju vrijedi

$$E_{\text{kin}} \neq E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}}, \tag{217}$$

tj. kinetička energija nije sastavljena samo od translacijske i rotacijske komponente kinetičke energije.



Sl. 30. Utvrđivanje elementarnog rada krutog tijela

Međutim, kako je promjena kinetičke energije jednaka radu vanjskih sila, prema (25), bit će

$$E_2 - E_1 = W_{1,2}, \tag{218}$$

odnosno

$$\frac{m v_{S2}^2}{2} + \frac{I_S\omega_2^2}{2} - \frac{m v_{S1}^2}{2} + \frac{I_S\omega_1^2}{2} = \\
= \int_1^2 R_S \mathrm{d}s + \int_1^2 M_S \mathrm{d}\varphi , \tag{219}$$

gdje je R_S rezultanta u smjeru pomaka središta masa.

Zakon kinetičke energije za prostorno gibanje krutog tijela. Kinetička je energija sustava čestica opisana jednadžbama (129) do (132). U njima se vidi zaseban utjecaj translacije sustava s obzirom na relativno gibanje prema središtu masa na kinetičku energiju E_k. Translacijski se član može pisati u obliku

$$\frac{1}{2} m v_S^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_S \dot{\vec{r}}_S = \frac{1}{2} \vec{v}_S \vec{B}, \tag{220}$$

gdje je $\dot{\vec{r}}$ brzina središta masa, a $\vec{B}$ količina gibanja tijela. Rotacijski je član

$$\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\varrho}}_i \dot{\vec{\varrho}}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i)(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i), \tag{221}$$

uz uvjet da izraz na desnoj strani vrijedi za sustav u kojemu se ne mijenjaju udaljenosti između čestica, što je svojstvo krutog tijela. Tada $\dot{\vec{\varrho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i$. Nakon jednostavnih vektorskih transformacija može se izraz (221) napisati u obliku

$$\sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i)(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum [m_i \vec{\varrho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i)]. \tag{222}$$

Usporedi li se taj izraz s jednadžbom (158), za desnu stranu izraza (222) može se postaviti

$$\frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{K}_S. \tag{223}$$

Kinetička energija krutog tijela koje se giba s brzinom v i kutnom brzinom $\vec{\omega}$ središta masa iznosi

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{v}_S \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{K}_S, \tag{224}$$

pa je izraz za kinetičku energiju u skalarnom obliku

$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} (I_{Sx} \omega_x^2 + I_{Sy} \omega_y^2 + I_{Sz} \omega_z^2) - - (I_{Sxy} \omega_x \omega_y + I_{Sxz} \omega_x \omega_z + I_{Syz} \omega_y \omega_z). \tag{225}$$

Ako su osi koordinatnog sustava istodobno glavne osi inercije, tada je

$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} (I_{Sx} \omega_x^2 + I_{Sy} \omega_y^2 + I_{Sz} \omega_z^2). \tag{226}$$

Ako rezultanta svih vanjskih sila $\sum \vec{F}$ djeluje u središtu masa tijela a rezultanta sprega $\sum \vec{M}_S$ djeluje također oko središta masa, tada je

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} \vec{v}_S \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \vec{v}_S \vec{B} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M} \vec{\omega} \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{K}_S \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \tag{227}$$

To je zakon promjene translacijske i rotacijske kinetičke energije krutog tijela za vrijeme djelovanja sila $\sum \vec{F}$ i momenata $\sum \vec{M}$.

Zakon količine gibanja za kruto tijelo. S obzirom na izloženo u poglavlju o sustavima čestica, zakon količine gibanja može se primijeniti i na kruta tijela. Tako se gibanje krutog tijela može opisati promjenom količine gibanja mase koja je po iznosu jednaka masi tijela, a smještena je u središtu masa. Iz jednadžbe (141) očito je da se količinom gibanja karakterizira samo translacija tijela, pa se taj zakon u nekom analogijskom smislu nalazi i unutar zakona kinetičkog momenta, bar što se tiče rotacijske komponente kinetičke energije.

Zakon kinetičkog momenta za kruto tijelo. Za tijelo koje se ravninski giba (sl. 31) kinetički moment tijela je s obzirom na točku A definiran relacijom

$$\vec{K}_A = \int \vec{r} \times \mathrm{d}m \vec{v}_{BA}. \tag{228}$$

Budući da su ubrzanja

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \tag{229}$$

derivacija je kinetičkog momenta po vremenu

$$\frac{\mathrm{d}\dot{K}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathrm{d}m \vec{v}_{BA} + \int \vec{r} \times \mathrm{d}m \vec{a}_{BA}. \tag{230}$$

Uvrštavanjem (229) u (230) i nakon sređivanja slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A - m\vec{r}_S \times \vec{a}_A, \tag{231}$$

odnosno

$$\vec{M}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{K}_A}{\mathrm{d}t} + m\vec{r}_S \times \vec{a}_A. \tag{232}$$

Izabere li se težište masa kao referentna točka, otpast će drugi član na desnoj strani, pa je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_S}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_S, \tag{233}$$

odakle slijedi da je

$$K_S = I \omega. \tag{234}$$

Kad je, međutim, ubrzanje točke $a_S = 0$, dobiva se

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_A, \tag{235}$$

odnosno

$$K_A = I_A \omega. \tag{236}$$

Zakon kinetičkog momenta za kruto tijelo pri ravninskom gibanju, dakle, kaže da je vremenska derivacija kinetičkog momenta oko središta masa koje se giba jednaka momentu vanjskih sila oko iste točke. Taj zakon nije ograničen samo na kruta tijela, već on općenito vrijedi i za zakone gibanja deformabilnih sredina.

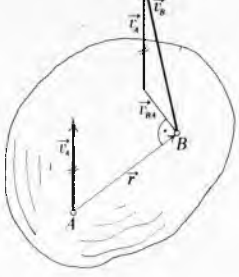
Integralni oblik zakona kinetičkog momenta dobiva se iz jednadžbe (233), jer je

$$\mathrm{d}(I_S \omega) = \vec{M}_S \mathrm{d}t, \tag{237}$$

pa je

$$(I_S \omega)_2 - (I_S \omega)_1 = \int_{t_1}^{t_2} M_S \mathrm{d}t, \tag{238}$$

gdje je $\vec{M}_S \mathrm{d}t$ rotacijski impuls momenta vanjskih sila.



Sl. 31. Definiranje kinetičkog momenta za kruto tijelo u ravnini

Zakon kinetičkog momenta u prostoru temelji se na istom pristupu kao za sustav čestica, pa je kinetički moment prema središtu masa definiran relacijom

$$\vec{K}_S = \vec{r} \times \mathrm{d}m \vec{v}_{BS}. \tag{239}$$

Kako je brzina neke točke s obzirom na središte masa

$$\vec{v}_{BS} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{240}$$

bit će

$$\vec{K}_S = \int \vec{r} \times \mathrm{d}m (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{241}$$

što se s obzirom na poredak članova može napisati u obliku

$$\vec{K}_S = \int_{(m)} (\vec{r}^{\,2} \mathrm{d}m) \vec{\omega} - \int_{(m)} \mathrm{d}m \vec{r} (\vec{\omega} \vec{r}). \tag{242}$$

Budući da je

$$\vec{r}\,\vec{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z, \tag{243}$$

te ako se (243) uvrsti u (242) i upotrijebe izrazi (160), (167) i (168), dobiva se kinetički moment tijela u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} K_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ K_y &= -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ K_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z. \end{aligned} \tag{244}$$

Općenito je

$$\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}. \tag{245}$$

Jednadžba (245) opća je jednadžba kinetičkog momenta krutog tijela koje rotira stalnom kutnom brzinom, i to bez obzira da li je referentna točka središte masa ili bilo koja druga točka tijela.

Opća je momentna jednadžba za tijelo konstantne mase dana izrazom

$$\sum \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}, \tag{246}$$

te ako je kinetički moment $\vec{K}$ izražen u komponentama mjerenim prema pomičnom koordinatnom sustavu xyz koji ima kutnu brzinu $\vec{\Omega}$, tada je

$$\begin{aligned} \sum \vec{M} &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{K} = \\ &= (\dot{K}_x\vec{i} + \dot{K}_y\vec{j} + \dot{K}_z\vec{k}) + \vec{\Omega} \times \vec{K}. \end{aligned} \tag{247}$$

Izraz u zagradi je dio od $\vec{K}$ koji uzrokuje promjenu iznosa vektora $\vec{K}$, dok je vektorski umnožak dio promjene pravca komponente K. Razvijanjem determinante umnoška $\vec{\Omega} \times \vec{K}$ nakon separacije dobiva se

$$\begin{aligned} \sum \vec{M} &= (\dot{K}_x - K_y\Omega_z + K_z\Omega_y)\vec{i} + \\ &+ (\dot{K}_y - K_z\Omega_x - K_x\Omega_z)\vec{j} + \\ &+ (\dot{K}_z - K_x\Omega_y + K_y\Omega_x)\vec{k}. \end{aligned} \tag{248}$$

Učvrste li se koordinatne osi xyz za tijelo, momenti i momenti inercije postat će vremenski nezavisni. Tada je $\Omega = \omega$ i može se napisati u skalarnom obliku:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= \dot{K}_x - K_y\omega_z + K_z\omega_y, \\ \sum M_y &= \dot{K}_y - K_z\omega_x + K_x\omega_z, \\ \sum M_z &= \dot{K}_z - K_x\omega_y + K_y\omega_x. \end{aligned} \tag{249}$$

Ako se referentne osi podudaraju s glavnim osima inercije, a ishodište im je u središtu masa ili u nekoj fiksnoj točki tijela, tada će centrufugalni momenti inercije I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} biti jednaki ništici, pa jednadžba (249) prelazi u oblik:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z, \\ \sum M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x, \\ \sum M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y. \end{aligned} \tag{250}$$

To su Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela.

Približna teorija giroskopa. Rotacija tijela oko bilo koje nepomične točke tijela ili oko njegova središta masa može se opisati pomoću temeljnih dinamičkih jednadžbi. Tako su npr. zvrk, rotor, giroskop, svemirska kapsula i sl. tijela kojima se gibanja mogu opisati jednadžbama rotacije oko jedne točke. Momentne su jednadžbe (249) za opći slučaj takva gibanja dosta složene, jer traže katkada vrlo teške matematičke proračune. Međutim, za neke tehničke zadatke moguće je rotaciju oko jedne točke povezati s rotacijom oko jedne osi simetrije. I upravo simetrija uključuje mnoga pojednostavnjenja koja omogućuju rješavanje tih složenih jednadžbi. Na sl. 32 prikazano je tijelo s potpunom aksijalnom simetrijom koje rotira oko nepomične točke kroz koju prolazi aksijalna os simetrije z. S izborom točke O, osi x i y postaju glavnim osima inercije zajedno s osi z. Na tom se temelji tzv. približna teorija giroskopa.

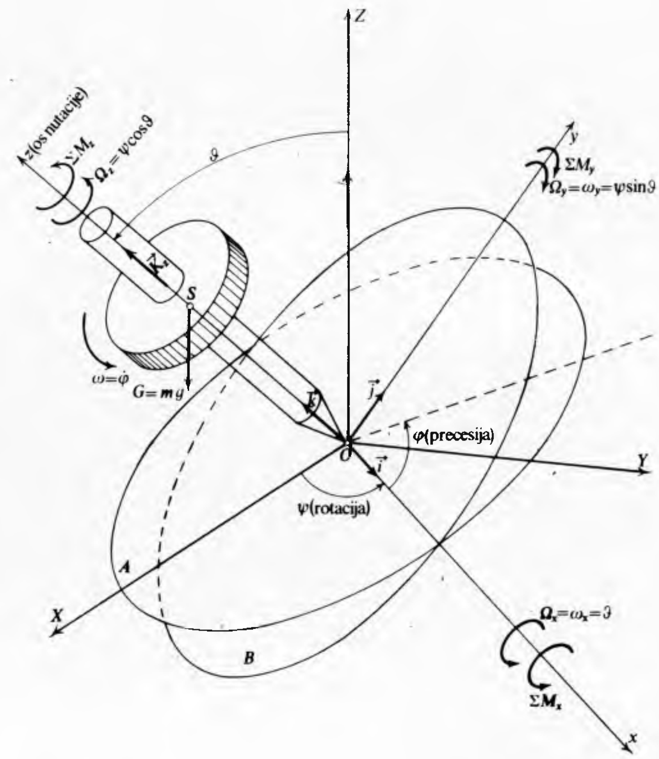
Tada su momenti inercije $I_z = I$ i $I_x = I_y = I_O$, a centrifugalni momenti inercije jednaki su ništici. U skladu s definiranim Eulerovim kutovima φ, ϑ, ψ (v. *Kinematika*), prikazanim na sl. 32, brzine su sustava xyz koji rotira s obzirom na nepomični sustav XYZ

$$\Omega = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k} = \dot{\vartheta}\vec{i} + \dot{\psi}\sin\vartheta\vec{j} + \dot{\psi}\cos\vartheta\vec{k}, \tag{251}$$

a kutna brzina tijela

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} = \dot{\vartheta}\vec{i} + \dot{\psi}\sin\vartheta\vec{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\vec{k}. \tag{252}$$

U ravnini A nalaze se nepomične osi X i Y, dok je ravnina B okomita na os simetrije z. Os x presječnica je ravninâ A i B, a kut je ψ mjera za kut precesije oko vertikalne osi. Rotacija je tijela relativno prema osima xyz određena kutom precesije φ, a nagib je osi nutacije z određen s obzirom na vertikalnu os kutom ϑ.



Sl. 32. Shema giroskopa s geometrijskim značajkama za utvrđivanje približne teorije giroskopa

Važno je istaći da osi i tijelo imaju identične x i y komponente kutne brzine, dok se z komponente razlikuju za relativnu kutnu brzinu $\dot{\varphi}$

Uz kutnu brzinu Ω jednadžbe za kinetički moment (244) glase

$$\begin{aligned} K_x &= I_x\omega_x = I_x\Omega_x \\ K_y &= I_y\omega_y = I_y\Omega_y \\ K_z &= I_z\omega_z = I_z(\Omega_z + \dot{\varphi}), \end{aligned} \tag{253}$$

uz uvjet da je ω_z ukupna kutna brzina tijela oko osi z. Supstitucijom izraza (253) u jednadžbu (248) dobiju se jednadžbe

$$\begin{aligned} M_x &= I_x\dot{\Omega}_x - (I_y - I_z)\Omega_y\Omega_z + I_z\dot{\varphi}\Omega_y \\ M_y &= I_y\dot{\Omega}_y - (I_z - I_x)\Omega_z\Omega_x - I_z\dot{\varphi}\Omega_x \\ M_z &= I_z\dot{\Omega}_z + I_z\ddot{\varphi}. \end{aligned} \tag{254}$$

To su tzv. modificirane Eulerove jednadžbe koje se odnose na ishodište što se nalazi u točki O rotacije (sl. 32). Iste jednadžbe vrijede ako je os rotacije i u središtu masa. Jedino ako se točka rotacije nalazi izvan osi z (os nutacije), jednadžbe treba preurediti.

Uvrste li se pripadne komponente kutnih brzina iz izraza (251) i (252) u modificirane Eulerove jednadžbe (254), bit će

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_O(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta) + I\dot{\psi}\omega_z \sin\vartheta \\ \sum M_y &= \frac{I_O}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\psi}\sin^2\vartheta) - I\dot{\vartheta}\omega_z \qquad (255) \\ \sum M_z &= I\dot{\omega}_z . \end{aligned}$$

To su opće jednadžbe rotacije simetričnog tijela oko nepomične točke O ili oko središta masa.

Kada se simetrično tijelo giba precesijski s konstantnom kutnom brzinom $\dot{\varphi}$ te s konstantnim ϑ i $\dot{\psi}$, iz čega proistječe da je $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ i $\ddot{\psi} = 0$, jednadžbe (255) prelaze u oblik

$$\begin{aligned} \sum M_x &= \dot{\psi}\sin\vartheta(I\omega_z - I_O\dot{\psi}\cos\vartheta) \\ \sum M_y &= 0 \qquad (256) \\ \sum M_z &= 0 . \end{aligned}$$

Iz toga se zaključuje da potrebni moment što djeluje na tijelo koje rotira oko točke O (ili oko G) mora biti u smjeru osi x, dok u smjeru osi y i z ima vrijednost nula. Osim toga, uz stalne komponente veličina φ, $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ i vrijednost je momenta stalna. Moment je s obzirom na os x

$$\sum M_x = mgl_s \sin\vartheta , \qquad (257)$$

odakle se izjednačenjem sa (256) dobiva

$$I\omega_z\dot{\psi} - I_0\dot{\psi}^2\cos\vartheta = Gl_S . \qquad (258)$$

gdje je $l_S = \overline{OS}$.

Budući da su u suvremenim giroskopima brzine vrtnje oko osi z mnogo veće od rotacije oko osi Z, tj.

$$\omega_z \gg \omega_Z \qquad (259)$$

(praktično $\omega_z = 2000 \cdots 5000\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_Z \approx 0{,}001\ \mathrm{s}^{-1}$), izraz (258) mijenja se u oblik

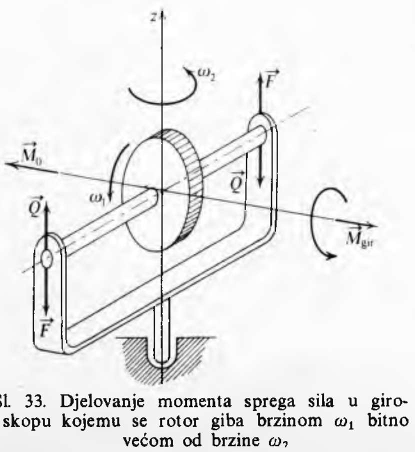
$$I\omega_z\dot{\psi} = Gl_S . \qquad (260)$$

Veličina $I\omega_z\dot{\psi}$ naziva se giroskopskim momentom. Iz tog je izraza očito da je brzina precesije u približnoj teoriji giroskopa

$$\dot{\psi} = \frac{Gl_S}{I\omega_z} . \qquad (261)$$

Budući da je

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \vec{M}_O \quad \text{i} \quad \vec{K}_O = I\omega\vec{k}, \qquad (262)$$



Sl. 33. Djelovanje momenta sprega sila u giroskopu kojemu se rotor giba brzinom ω_1 bitno većom od brzine ω_2

vektor je kinetičkog momenta $\vec{K}$ u smjeru $\vec{\omega}_z$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right)_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega_z)\vec{k}. \qquad (263)$$

Giroskopski efekt. Ako je giroskopu kojemu se rotor okreće velikom brzinom ω_1 s obzirom na brzinu ω_2, kako je prikazano na sl. 33, nametnuto prisilno precesijsko gibanje, u ležajima u kojima se nalazi osovina giroskopa pojavljuje se moment sprega sila M_{gir}, jer je

$$M_{gir} = -M_O = I_z(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) . \qquad (264)$$

Taj spreg teži da odvede os vlastite rotacije giroskopa u takav položaj da ona bude paralelna s osi precesije, tj. da vektori $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ budu kolinearni.

O. Muftić

LIT.: *H. Favre*, Cours de mécanique. Dunod, Paris 1946. — *T. Pöschl*, Lehrbuch der technischen Mechanik I. Springer, Berlin 1948. — *W. Kaufmann*, Einführung in die technische Mechanik. Springer, Berlin 1949. — *А. А. Космодемьянский*, Курс теоретической механики. Госпедиздат, Москва 1955. — *Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье*, Курс теоретической механики I/II, Гостехиздат, Ленинград-Москва, 1948/1955. — *V. M. Faires, S. D. Chambers*, Analytic mechanics. The Macmillan Co., New York 1956. — *S. H. Crandall, N. C. Dahl*, An introduction to the mechanics of solids McGraw-Hill, New York 1959. — *F. Gunder, A. Stuart*, Engineering mechanics. J. Wiley and Sons, New York 1959. — *J. C. Grassie*, Applied mechanics for engineers. Longmans, London 1960. — *S. T. Timošenko, D. H. Jang*, Tehnička mehanika (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1962. — *S. T. Timošenko, D. H. Jang*, Viša dinamika (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1962. — *T. Anđelić, Lj. Radosavljević*, Mehanika I. Tehnička knjiga, Beograd 1964. — *S. M. Targ*, Kratki kurs teorijske mehanike (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd [2]1964. — *S. Pivko*, Mehanika I—III. Naučna knjiga, Beograd: Statika, 1963; Dinamika, 1966; Građevinska knjiga, Beograd: Kinematika, 1964. — *D. Rašković*, Mehanika I—III. Naučna knjiga, Beograd: Statika, 1967; Kinematika, 1964; Dinamika, 1948. — *H. Ziegler*, Vorlesungen über Mechanik. Birkhäuser, Basel 1970. — *J. P. Den Hartog*, Vibracije u mašinstvu (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1972. — *V. Andrejev*, Mehanika I—III. Tehnička knjiga, Zagreb: Statika, 1969; Kinematika, 1971; Dinamika, 1973. — *L. J. Meriam*, Mechanics. J. Wiley and Sons, New York: Part I (Statics), 1966; Part II (Dinamics), 1975. — *B. Vujanović*, Dinamika. Naučna knjiga, Beograd 1976. — *D. Bazjanac*, Tehnička mehanika I—III. Tehnička knjiga, Zagreb: I dio (Statika), [5]1976; II dio (Kinematika), [2]1977; Liber, Zagreb: III dio (Dinamika), [2]1980.

D. Bazjanac S. Jecić O. Muftić

MEHANIKA, ANALITIČKA, dio teorijske ili racionalne mehanike koja, polazeći od općih principa mehanike, analitički izvodi jednadžbe gibanja. Umjesto uobičajenih koordinatnih sustava upotrebljavaju se *poopćene* ili *Lagrangeove koordinate*. Zakoni i principi u analitičkoj mehanici izraženi su pomoću skalarnih veličina: kinetičke i potencijalne energije, virtualnog rada, Lagrangeove i Hamiltonove funkcije itd. Na tim dvjema činjenicama temelji se prednost metoda analitičke mehanike pred klasičnim metodama u kojima se pretežno primjenjuju vektorske veličine: sila, moment, količina gibanja itd., ili njihove skalarne komponente u uobičajenim koordinatnim sustavima.

Prednost analitičkih metoda je to veća što je sustav složeniji, osobito ako se radi o holonomnim sustavima s idealnim vezama. Tada su reakcije veza automatski isključene iz razmatranja, što uvelike pojednostavnjuje problem. Eliminiranje nepoznatih reakcija veza iz jednadžbi gibanja klasičnim postupkom može biti dugotrajno i zamorno. Analitička mehanika lako se može primijeniti na elektromehaničke sustave i druge sustave koji nisu čisto mehanički. Utjecaj je analitičke mehanike na razvoj teorijske fizike velik, posebno na razvoj kvantne mehanike, statističke mehanike i teorije relativnosti.

Naziv *analitička mehanika* potječe od Lagrangea, koji je 1788. objavio svoje djelo *Mécanique analytique*. U tom je djelu obrađena teorijska mehanika strogo sustavno i matematički. Zakone i principe koji su u tom djelu obrađeni već su prije Lagrangea formulirali njegovi prethodnici i suvremenici: G. Galilei, Ch. Huygens, I. Newton, J. R. d'Alembert, L. Euler