

DINAMIKA FLUIDA

U kinematici fluida razvijene su osnovne metode matematičkog opisivanja strujanja fluida kao neprekidne sredine. Pomoću tih metoda u dinamici fluida razrađuju se zakoni održanja za fluid u strujanju, tj. osnovni zakoni dinamike fluida: *zakon održanja mase* (jednadžba kontinuiteta), *zakon održanja količine gibanja* (jednadžba količine gibanja) i *zakon održanja energije* (energetska jednadžba kao poseban izraz prvog zakona termodinamike). Tim zakonima održanja pridružuje se i drugi zakon termodinamike kao uvjet stvaranja entropije. Ako su važni i elektromagnetski učinci, npr. pri strujanju vodljivih fluida u električnim i magnetskim poljima, tada ta polja moraju zadovoljavati grupu fizikalnih zakona izraženih Maxwellovim jednadžbama. Takva strujanja proučava posebna grana dinamike fluida, *magnetohidrodinamika* (MHD).

U klasičnoj mehanici i termodinamici zakoni su održanja empirijski i aksiomatski, a održavaju se zato što ih još nijedan eksperiment nije opovrgao. U dinamici fluida ti su zakoni fundamentalni ili univerzalni, tj. oni moraju biti uvijek zadovoljeni, bez obzira na vrstu fluida i na specifična dinamička i termička svojstva fluida.

Pomoću Reynoldsova transportnog teorema zakoni održanja, primijenjeni na materijalni volumen fluida u strujanju, prikazuju se u integralno-diferencijalnom obliku u Eulerovim varijablama. U tom obliku ti zakoni pružaju informacije o načinu i uvjetima pod kojima konačne mase fluida u strujanju zadovoljavaju zakone održanja. To su globalne i integralne informacije o relevantnim dinamičkim veličinama, što se često jedino i traži. Međutim, u integralno-diferencijalnom obliku ti zakoni ne daju podatke o mikrostrukturnoj razdiobi dinamičkih veličina. Primjenom leme vezane uz proizvoljnost volumena integracije integralno-diferencijalni oblici se jednostavno transformiraju u diferencijalne jednadžbe u Eulerovim varijablama. Integracija tih diferencijalnih jednadžbi daje i razdiobu gustoće dinamičkih veličina u obliku skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja. Tako se npr. i polje brzine strujanja fluida $\vec{v}(\vec{r}, t)$ može u dinamičkom smislu shvatiti kao masena gustoća količine gibanja.

S obzirom na broj nepoznatih funkcija zakoni održanja ipak ne pružaju dovoljno jednadžbi, pa zato nije moguća ni integracija sustava tih jednadžbi. Zato se fundamentalnim zakonima održanja moraju pridružiti i dodatne ili konstitutivne jednadžbe koje opisuju specifična dinamička i termodinamička ponašanja pojedinih vrsta fluida. Takve su jednadžbe npr. Newtonov zakon viskoznosti i njegova generalizacija, te Fourierov zakon toplinske vodljivosti. Pri tom se specifična ponašanja fluida prikazuju različitim teoretskim modelima koji s dovoljnom točnošću predviđaju stvarna ponašanja određene vrste fluida, npr. newtonski fluidi.

Zakoni održanja

Sustavi i kontrolni volumen. U dinamici sustava materijalnih čestica u kojem unutrašnje sile slijede treći Newtonov zakon o jednakosti veličine unutrašnjih sila međusobnog djelovanja čestica i suprotnosti smjera njihova djelovanja formuliran je npr. zakon održanja količine gibanja (drugi Newtonov zakon) u obliku

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}, \quad (373)$$

gdje je $\vec{F}_i^{(e)}$ vanjska sila na i -tu česticu. Pri tom se podrazumijeva: a) da je zakon održanja mase (jednadžba kontinuiteta) automatski zadovoljen pretpostavkom da su mase materijalnih čestica m_i konstantne; b) da granični prijelaz diferencijalnog kvocijenta $\Delta/\Delta t \rightarrow d/dt$ prati svaku pojedinu česticu sustava po njezinu diferencijalnom pomaku Δs tokom gibanja prostorom. Zbog toga uz jednadžbu (373) nije potrebna još dodatna jednadžba kontinuiteta, niti je za operator d/dt potreban poseban simbol.

U dinamici fluida kao neprekidne sredine formulira se zakon održanja količine gibanja (373) za materijalni volumen $V_m(t)$ koji se uvijek sastoji od istih čestica. U dinamičkom smislu

taj je materijalni volumen sustav beskonačnog broja beskonačno malih materijalnih čestica, pa suma u izrazu (373) prelazi u integral po materijalnom volumenu

$$\vec{p}(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV, \quad (374)$$

a zakon održanja količine gibanja (373), uz vanjske masene sile definirane izrazom (23) i površinske sile definirane izrazom (24), koje kao unutrašnje sile prema izrazu (30) zadovoljavaju treći Newtonov zakon, poprima oblik

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \vec{f} dV + \int_{S_m(t)} \sigma_n dS. \quad (375)$$

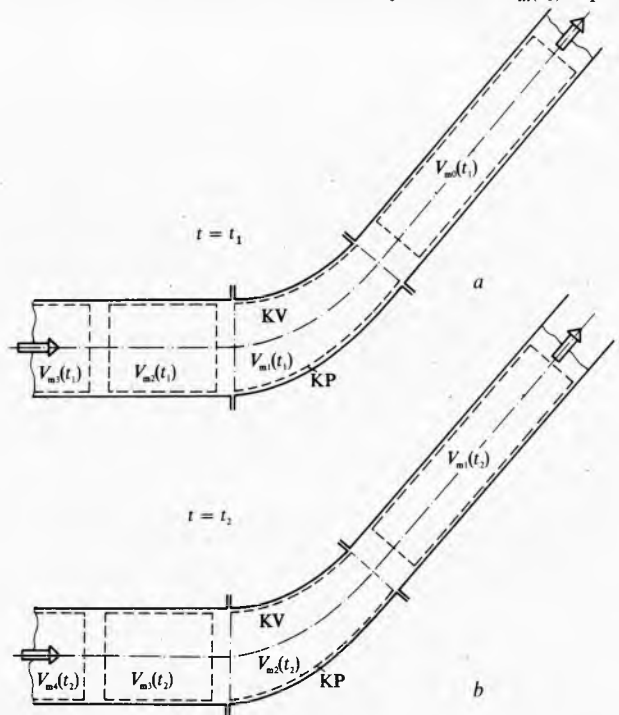
Tako formuliranom zakonu održanja količine gibanja pridružuje se i zakon održanja mase koji i definira materijalni volumen

$$m(t) = \int_{V_m(t)} \rho dV = \text{const.} \quad (376)$$

Zakoni održanja količine gibanja i mase u oblicima (375) i (376) formulirani su koncepcijom sustava. Sustav je identificirana masa tvari u materijalnom volumenu i općenito je u dinamici fluida jedno od mogućih sredstava formulacije zakona održanja. Takav je pristup analogan Lagrangeovu opisu strujanja fluida pomoću individualizacije čestica fluida.

Ponekad je potrebno odrediti dinamičke i termodinamičke učinke fluida u određenom ograničenom dijelu prostora, tzv. *kontrolnom volumenu* (KV), kroz koji tokom vremena prolaze različiti materijalni volumeni. Kontrolni je volumen dio prostora, a nepromjenljivog je položaja, veličine, oblika i orijentacije relativno prema nekom promatraču. Površina koja ograničava kontrolni volumen zove se *kontrolna površina* (KP). Taj je pristup analogan Eulerovu opisu strujanja fluida individualizacijom točaka prostora, a ne točaka (čestica) fluida. Tako se npr. pri određivanju sile kojom fluid djeluje na koljeno cijevi zbog skretanja strujanja u cjevovodnom sustavu (sl. 78) unutrašnji prostor koljena uzima kao kontrolni volumen, ograničen kontrolnom površinom (KP), i tokom vremena se različiti materijalni volumeni poklapaju s kontrolnim volumenom, kao što je to prikazano na sl. 78 za vremena $t = t_1$ i $t = t_2$.

Zakon održanja primjenjuje se na kontrolni volumen pomoću Reynoldsova transportnog teorema (366). Naime, u određenom su vremenskom trenutku $t = t_0$ volumen $V_m(t_0)$ i povr-



Sl. 78. Koncepcija kontrolnog volumena KV i kontrolne površine KP

šina $S_m(t_0)$ na desnoj strani izraza (366) nepromjenljivi u Eulerovim varijablama $(\vec{r}, t)$. Ako se taj volumen $V_m(t_0)$ poklopi u $t = t_0$ s izabranim kontrolnim volumenom (KV), Reynoldsov transportni teorem može se napisati u obliku

$$\left[\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV \right]_{t=t_0} = \int_{V_m(t_0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=t_0} dV + \int_{S_m(t_0)} \Phi(\vec{r}, t_0) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{KV} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=t_0} dV + \int_{KP} \Phi(\vec{r}, t_0) \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (377)$$

Pri dinamičkoj analizi strujanja tokom vremena će se različiti materijalni volumeni poklapati s kontrolnim volumenom, pa za proizvoljni vremenski trenutak t izraz (377) prelazi u

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \Phi dV = \int_{KV} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{KP} \Phi(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (378)$$

Ako se u Reynoldsov transportni teorem stavi $\Phi = \rho \vec{v}$, može se zakon održanja količine gibanja (375), primijenjen na kontrolni volumen, izraziti u obliku

$$\int_{KV} \rho \vec{f} dV + \int_{KP} \vec{\sigma}_n dS - \int_{KV} \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dV - \int_{KP} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (379)$$

To je jednačba količine gibanja za kontrolni volumen koja je univerzalno valjana kad je kontrolni volumen nepromjenljiv s obzirom na promatrača čvrsto vezanog za inercijalni koordinatni sustav. Naime, ako je kontrolni volumen čvrsto vezan uz neinerijalni sustav, moraju se u masenu silu $\vec{f}$ uključiti različite inercijalne sile, ovisno o uzrocima neinerijalnosti sustava.

Zakon održanja mase ili jednačba kontinuiteta. Izraz (376) jedan je od matematičkih opisa zakona održanja mase u klasičnoj nerelativističkoj mehanici fluida. Individualna (materijalna) vremenska derivacija tog izraza daje

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0. \quad (380a)$$

Primjenom Reynoldsova transportnog teorema, uz $\Phi = \rho(\vec{r}, t)$, dobiva se

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (380b)$$

što je integralno-diferencijalni oblik zakona održanja mase. U mehanici fluida izraz (380b) naziva se *jednačbom kontinuiteta*. Očito je da oba člana lijeve strane izraza (380b) ne mogu biti istog predznaka. Npr. količina sekundnog masenog istjecanja iz kontrolnog volumena $V_m(t)$ preko kontrolne površine $S_m(t)$, u određenom trenutku vremena (ako je drugi član lijeve strane (380b) > 0), jednaka je brzini smanjenja količine mase unutar kontrolnog volumena (tj. prvi član mora biti manji od nule).

Primjenom teorema Gauss-Ostrogradskoga (46c) na drugi član lijeve strane izraza (380b) dobiva se alternativni integralno-diferencijalni oblik jednačbe kontinuiteta

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (380c)$$

Budući da je u (380c) volumen integracije proizvoljan, lema definirana izrazima (372a) i (372b) pokazuje da u svakoj točki područja strujanja fluida mora biti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (380d)$$

To je diferencijalni oblik jednačbe kontinuiteta. Ako se u izrazu (380d) razvije divergencija produkta skalarne i vektorske funkcije

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \vec{v},$$

gdje je prvi član desne strane konvektivni član individualne vremenske derivacije skalarne funkcije (225), tada se zajedno s lokalnim članom u (380d) dobiva alternativni diferencijalni oblik jednačbe kontinuiteta

$$\text{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (380e)$$

Zakon održanja količine gibanja (drugi Newtonov zakon) ili jednačba količine gibanja. Stavi li se u Reynoldsov transportni teorem $\Phi = \rho \vec{v}$ i primijeni na lijevu stranu izraza (375), dobiva se

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V_m(t)} \rho \vec{f} dV + \int_{S_m(t)} \vec{\sigma}_n dS. \quad (381a)$$

To je integralno-diferencijalni oblik zakona održanja količine gibanja koji se u mehanici fluida naziva *jednačbom količine gibanja*. Za kontrolni volumen piše se i u obliku (379).

Površinski integral na desnoj strani izraza (375) može se pomoću teorema Gauss-Ostrogradskoga (46a) transformirati u volumenski integral

$$\int_{S_m(t)} \vec{\sigma}_n dS = \int_{S_m(t)} \vec{n} T_\sigma dS = \int_{V_m(t)} \text{Div} T_\sigma dV, \quad (381b)$$

gdje je $\text{Div} T_\sigma$ definiran izrazom (43a). Ako se na lijevoj strani (375) operator D/Dt stavi ispod znaka volumenskog integrala, vodeći računa da je za element mase materijalnog volumena zbog kontinuiteta $D(\rho dV)/Dt = 0$, može se izraz (375) napisati u obliku

$$\int_{V_m(t)} \left(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{f} - \text{Div} T_\sigma \right) dV = 0. \quad (381c)$$

Zbog proizvoljnosti volumena integracije

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{Div} T_\sigma, \quad (381d)$$

i ako se razvije prema Euleru individualna vremenska derivacija D/Dt pomoću izraza (226) ili (237), dobiva se

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{f} + \text{Div} T_\sigma. \quad (381e)$$

To je diferencijalni oblik zakona održanja količine gibanja u Eulerovim varijablama $\vec{r}$ i t . U mehanici fluida ta se jednačba zove *jednačba gibanja fluida izražena naprezanjima*.

Zakon održanja kinetičke energije izravno proizlazi iz zakona održanja količine gibanja. Pri diferencijalnoj promjeni konfiguracije sustava materijalnih čestica, definiranoj pomacima čestica

$$d\vec{s}_i = \vec{v}_i dt, \quad (382a)$$

rad vanjske sile $\vec{F}^{(e)}$ i unutrašnje $\vec{F}^{(i)}$ iznosi

$$dW = \sum_{i=1}^N [\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)}] \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt = d \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = dE_k, \quad (382b)$$

gdje je E_k kinetička energija sustava.

Kao zakon održanja kinetičke energije, izraz (382b) piše se u obliku

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N P_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N P_i^{(i)}, \quad (382c)$$

gdje je $P_i^{(e)} = \vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{v}_i$ snaga vanjskih sila, a $P_i^{(i)} = \vec{F}_i^{(i)} \cdot \vec{v}_i$ snaga unutrašnjih sila. Preveden u integralno-diferencijalni oblik, izraz (382c) glasi

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_{V_m(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{S_m(t)} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS + \int_{V_m(t)} p^{(i)} dV, \quad (383a)$$

gdje je $p^{(i)}$ volumenska gustoća snage unutrašnjih sila u fluidu, s dimenzijom $[p^{(i)}] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-3}$, dakle $[p^{(i)}]_{\text{SI}} = \text{W/m}^3$.

Primjenom teorema Gauss-Ostrogradskoga (46c) drugi član desne strane izraza (383a) može se pisati

$$\int_{S_m(t)} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS = \int_{S_m(t)} \vec{n} T_\sigma \cdot \vec{v} dS = \int_{S_m(t)} \vec{n} \cdot (T_\sigma \vec{v}) dS = \int_{V_m(t)} \text{div}(T_\sigma \vec{v}) dV, \quad (383b)$$

gdje je skalarni produkt tenzora i vektora, što daje vektor, definiran izrazima (298a) i (298b). Uvrsti li se (383b) u izraz (383a), uz $D(qdV)/Dt = 0$, dobiva se izraz u kojem su svi članovi volumenski integrali, pa je zbog proizvoljnosti volumena integracije

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(T_\sigma \vec{v}) + p^{(i)}, \quad (383c)$$

ili primjenom izraza (226) za operator D/Dt :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(T_\sigma \vec{v}) + p^{(i)}. \quad (383d)$$

To je diferencijalni oblik zakona održanja kinetičke energije izražen u Eulerovim varijablama.

Pomoću jednadžbe gibanja (381d) može se dobiti izraz za volumensku gustoću snage unutrašnjih sila $p^{(i)}$ u fluidu koji struji. Pomnoži li se skalarno sa $\vec{v}$ čitav izraz (381d), što daje

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{Div} T_\sigma, \quad (384a)$$

i usporedi li se sa (383c), slijedi

$$p^{(i)} = \vec{v} \cdot \text{Div} T_\sigma - \text{div}(T_\sigma \vec{v}). \quad (384b)$$

Transformacijom

$$\text{div}(T_\sigma \vec{v}) = (\text{Div} T_\sigma) \cdot \vec{v} + T_\sigma \cdot \text{Grad} \vec{v} \quad (384c)$$

pretvara se izraz (384b) u

$$p^{(i)} = -T_\sigma \cdot \text{Grad} \vec{v}. \quad (384d)$$

Tenzor gradijenta brzine $\text{Grad} \vec{v}$ definiran je u kinematici fluida izrazom (291c). Skalarni produkt dvaju tenzora P i Q , što daje skalar, definiran je izrazom

$$P \cdot Q = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 P_{pq} Q_{pq}. \quad (384e)$$

Ako se rastavi tenzor $\text{Grad} \vec{v}$ na antisimetrični dio T_ω i simetrični dio T_σ , izraz (297e), a budući da je tenzor naprezanja T_σ simetričan, tako da je $T_\sigma \cdot T_\omega = 0$, izraz (384d) za gustoću snage unutrašnjih sila u fluidu dobiva jednostavan oblik

$$p^{(i)} = -T_\sigma \cdot T_\sigma. \quad (384f)$$

Primjenom izraza (384f) diferencijalni oblik zakona održanja kinetičke energije (383c) prelazi u alternativni oblik

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(T_\sigma \vec{v}) - T_\sigma \cdot T_\sigma, \quad (384g)$$

a izraz (383d) prelazi u

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= \\ &= \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(T_\sigma \vec{v}) - T_\sigma \cdot T_\sigma. \end{aligned} \quad (384h)$$

Zakon održanja energije ili energetska jednadžba. U dinamici fluida zakon održanja energije predstavlja primjenu prvog zakona termodinamike na elemente fluida u strujanju. Prvi se zakon termodinamike primjenjuje na takav termodinamički sustav koji je prvobitno u stanju mirovanja i, nakon što prođe neki proces, ponovno dolazi u stanje mirovanja. Materijalni volumen s identificiranom masom fluida može se smatrati termodinamičkim sustavom iako nikad nije u stanju mirovanja. Naime, fluid koji struji može se smatrati da je u termodinamičkom smislu u stanju ravnoteže, pa je prema prvom zakonu termodinamike energija fluida jednaka zbroju unutrašnje energije po jedinici mase u i kinetičke energije po jedinici mase

$$\frac{1}{2} v^2.$$

Tako modificiran prvi zakon termodinamike postaje u dinamici fluida *zakon održanja energije* i glasi: brzina promjene zbroja unutrašnje i kinetičke energije fluida unutar materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila i brzini dovođenja topline fluidu. U integralno-diferencijalnom obliku taj je zakon prikazan izrazom

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_{V_m(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \\ &+ \int_{S_m(t)} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS - \int_{S_m(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS, \end{aligned} \quad (385a)$$

gdje je u specifična unutrašnja energija po jedinici mase, s dimenzijom $[u] = L^2 T^{-2}$, dakle $[u]_{SI} = J/kg$, a $\vec{q}$ vektor površinske gustoće toplinske snage (ili toplinskog toka) definiran sa

$$|\vec{q}| = \frac{\text{toplinska snaga } (dQ/dt)}{\text{površina } (A)},$$

s dimenzijom $[\vec{q}] = MT^{-3}$, dakle $[\vec{q}]_{SI} = J/(m^2 s) = W/m^2$.

Zadnji član desne strane izraza (385a) ima negativan predznak, jer $\vec{q} \cdot \vec{n} > 0$ znači brzinu odvođenja topline od sustava, pa $(-\vec{q} \cdot \vec{n})$ predstavlja brzinu dovođenja topline sustavu.

Ako se dva površinska integrala desne strane izraza (385a) transformiraju u volumenske integrale, i ako se primijeni kontinuitet $D(\rho dV)/Dt = 0$, zbog proizvoljnosti volumena integracije $V_m(t)$ slijedi

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(T_\sigma \vec{v}) - \text{div} \vec{q}. \quad (385b)$$

To je diferencijalni oblik zakona održanja energije koji se u dinamici fluida zove *energetska jednadžba*.

Ako se od jednadžbe (385b) oduzme jednadžba kinetičke energije (383c) ili (384g), dobiva se *prvi alternativni oblik energetske jednadžbe*

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p^{(i)} - \text{div} \vec{q} = T_\sigma \cdot T_\sigma - \text{div} \vec{q}, \quad (385c)$$

iz kojeg se jednostavno dobiva uobičajena formulacija prvog zakona termodinamike. Naime, ako se (385c) pomnoži sa $Dt dV$, dobiva se

$$dU = \delta W^{(e)} + \delta Q, \quad (385d)$$

gdje je U unutrašnja energija sustava, s dimenzijom $[U] = ML^2 T^{-2}$, dakle $[U]_{SI} = J$, $\delta W^{(e)}$ elementarni rad vanjskih sila, s dimenzijom $[W] = ML^2 T^{-2}$, dakle $[W]_{SI} = J$, a δQ toplina dovedena izvana elementu fluida, s dimenzijom $[Q] = ML^2 T^{-2}$, dakle $[Q]_{SI} = J$.

Unutrašnja energija sustava U jest termodinamičko svojstvo sustava, koje se doduše ne može direktno mjeriti, ali se posrednim mjerenjima drugih veličina može proračunati. Zato je dU u izrazu (385d) egzaktni diferencijal tog svojstva, tj. skalarne funkcije U .

U izrazu (385d) pretpostavljen je polagani ravnotežni, tzv. kvazistatički termodinamički proces pri kojem je elementarni rad vanjskih sila

$$\delta W^{(e)} = -\delta W^{(i)} = -p^{(i)} dV Dt = T_\sigma \cdot T_\sigma dV Dt.$$

To je rad kojim površinske sile djeluju na element fluida u strujanju, a sastoji se od rada tlačnih sila koje mijenjaju volumen elementa i rada tangencijalnih sila koje kutno deformiraju element. Elementarni rad vanjskih površinskih sila $\delta W^{(e)}$ i pritjecanje topline elementu fluida izvana, koje je dano sa

$$\delta Q = -\text{div} \vec{q} dV Dt,$$

nisu u općem slučaju egzaktni diferencijali nekih funkcija, već su beskonačno mali iznosi tih veličina.

Drugi alternativni diferencijalni oblik energetske jednadžbe dobiva se tako da se u normalnim naprezanjima tenzora naprezanja T_σ odijeli učinak termodinamičkog tlaka p od učinka viskoznih normalnih naprezanja. To se postiže rastavljanjem T_σ na dva dijela:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & -p + \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & -p + \pi_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{bmatrix} = -p\mathcal{E} + T_{\pi}, \quad (385e)$$

gdje je p termodinamički tlak, npr. tlak koji za savršeni plin zadovoljava jednadžbu stanja (8) ili tlak u statičkom fluidu, $\mathcal{E}$ je tenzorska jedinica, analogna tzv. Kroneckerovu simbolu δ_{ik} , definirana sa

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (385f)$$

a T_{π} tenzor viskoznih (normalnih i tangencijalnih) naprezanja definiran sa

$$T_{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{bmatrix}, \quad (385g)$$

gdje vrijede i identiteti: $\pi_{xy} \equiv \tau_{xy}$, $\pi_{yz} \equiv \tau_{yz}$, $\pi_{zx} \equiv \tau_{zx}$.

Pomoću rastavljenog tenzora naprezanja (385e) pri razvoju drugog člana desne strane jednadžbe (385b) dobiva se

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_{\sigma}\vec{v}) &= \operatorname{div}[(-p\mathcal{E} + T_{\pi})\vec{v}] = \\ &= -p\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(T_{\pi}\vec{v}) = \\ &= \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(T_{\pi}\vec{v}), \end{aligned} \quad (385h)$$

gdje je primijenjena i jednadžba kontinuiteta (380e). Zbog jednakosti

$$\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p,$$

izraz (385h) postaje

$$\operatorname{div}(T_{\sigma}\vec{v}) = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(T_{\pi}\vec{v}),$$

što uvršteno u (385b) daje drugi alternativni diferencijalni oblik energetske jednadžbe

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(T_{\pi}\vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (385i)$$

U mnogim problemima strujanja pojavljuju se veličine u i p/ρ kao zbroj nazvan *entalpijom*

$$h = u + \frac{p}{\rho}, \quad (386a)$$

gdje je h entalpija s dimenzijom $[h] = L^2 T^{-2}$, dakle $[h]_{SI} = J/kg$.

Ako masene sile imaju potencijal U koji zavisi samo od prostornih koordinata a ne i od vremena, tako da je

$$\rho \vec{f} \cdot \vec{v} = -\rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad} U = -\rho \frac{DU}{Dt}, \quad (386b)$$

može se izraz (385i) pisati i u obliku

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(T_{\pi}\vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q}, \quad (386c)$$

gdje je uvedena i entalpija h definirana sa (386a).

Povezano s rastavljanjem tenzora naprezanja T_{σ} prema izrazu (385e), izraz (384f) za volumensku gustoću snage unutrašnjih sila poprima alternativni oblik

$$p^{(i)} = p \operatorname{div} \vec{v} - T_{\pi} : T_{\sigma}. \quad (386d)$$

Energetska jednadžba za stacionarno strujanje. Unutrašnjost nekog toplinsko-strujnog uređaja (npr. ventilatora, sl. 79) izabrana je kao kontrolni volumen (KV), ograden kontrolnom

površinom (KP), koja uključuje ulazni i izlazni presjek A_1 i A_2 , unutrašnju stijenku uređaja i presjek pogonske osovine stroja. Pretpostavlja se da je strujanje stacionarno, tj. $\partial/\partial t \equiv 0$, i da masene sile imaju potencijal U .

Primjenom Reynoldsova transportnog teorema (378), uvrstivši $\Phi = \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right)$, lijeva strana energetske jednadžbe (385a) postaje

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{KP} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (387a)$$

Prvi član desne strane jednadžbe (385a) postaje

$$\begin{aligned} \int_{KV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV &= - \int_{KV} \rho \operatorname{grad} U \cdot \vec{v} dV = - \int_{KV} \operatorname{div}(U \rho \vec{v}) dV = \\ &= - \int_{KP} U \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \end{aligned} \quad (387b)$$

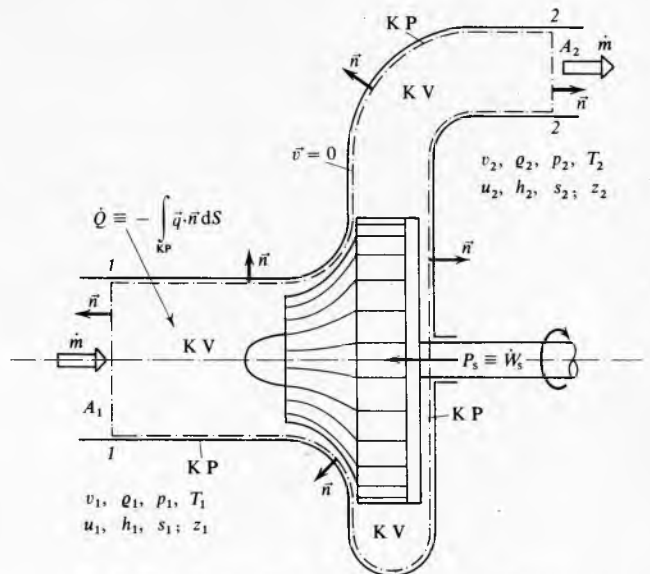
gdje je primijenjena jednadžba kontinuiteta za stacionarno strujanje prema izrazu (380d), tj. $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Drugi član desne strane jednadžbe (385a) postaje

$$\int_{KP} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS = P_s - \int_{KP} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS = P_s - \int_{A_1, A_2} \rho \left(\frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dA, \quad (387c)$$

gdje je $P_s \equiv \dot{W}_s$ osovinska snaga predana sustavu preko rotirajuće osovine motora toplinskog stroja. Budući da je zbog viskoznosti brzina fluida uz unutrašnju stijenku uređaja jednaka nuli ($\vec{v} = 0$), ostaju samo integrali tlakova preko presjeka A_1 i A_2 . Treći član desne strane jednadžbe (385a) postaje

$$\dot{Q} \equiv - \int_{KP} \vec{q} \cdot \vec{n} dS, \quad (387d)$$

što predstavlja toplinsku snagu ili toplinski tok predan fluidu.



Sl. 79. Izvod energetske jednadžbe za stacionarno strujanje

Ako se uvrsti (387a, b, c i d) u (385a) i uvede specifična entalpija (386a), pa kad se sredi, dobiva se energetska jednadžba za stacionarno strujanje:

$$\int_{A_1, A_2} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = P_s + \dot{Q}. \quad (388a)$$

Osim te jednadžbe mora biti zadovoljena i jednadžba kontinuiteta za stacionarno strujanje, koja prema (380b) ima oblik:

$$\int_{KP} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (388b)$$

a iz toga slijedi

$$\dot{m} \equiv - \int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{A_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA. \quad (388e)$$

Uz dalje pretpostavke jednadžba (388a) poprima i drugačije oblike. Ako se pretpostavi da su pojedine veličine preko presjeka A_1 i A_2 konstantne, integral u (388a) jednostavno se izračuna, pa energetska jednadžba za stacionarno strujanje dobiva oblik

$$\dot{m} \left[\left(h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + U_2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + U_1 \right) \right] = P_s + \dot{Q}. \quad (388d)$$

Budući da su presjeci A_1 i A_2 okomiti na smjer vektora brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, maseni je protok $\dot{m}$ dan jednostavnim izrazom

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2. \quad (388e)$$

Ako u sustavu nema stroja ($P_s = 0$) i nema dovođenja topline ($\dot{Q} = 0$), što je značajka adijabatskog procesa, za strujnu cijev s krutom stijenkama uzduž koje je $\vec{v} = 0$ i preko čijih ravnih presjeka A vrijedi pretpostavka da su relevantne veličine konstantne, jednadžba (388d) poprima oblik

$$h + \frac{1}{2} v^2 + U = \text{const.} \quad (388f)$$

To je adijabatska energetska jednadžba za stacionarno strujanje.

Drugi zakon termodinamike. Postoji više verbalnih formulacija sadržaja drugog zakona termodinamike, ali u termodinamičkoj analizi strujanja fluida praktično se primjenjuju samo posljedice tog sadržaja, a to su ljestvica termodinamičke ili apsolutne temperature T i termodinamičko svojstvo tvari nazvano *entropijom*.

Definicija se entropije povezuje s idealiziranim, u termodinamičkom smislu povrativim ili reverzibilnim procesom

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}}, \quad (389a)$$

gdje je S entropija s dimenzijom $[S] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}(\text{K})^{-1}$, dakle $[S]_{\text{SI}} = \text{J/K}$.

Za povrativi kružni proces vrijedi

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = \oint dS = 0, \quad (389b)$$

a to je ujedno i definicija entropije kao svojstva. Svojstvo se, naime, identificira s činjenicom da je promjena njegove vrijednosti zavisna samo od početnog i završnog stanja procesa, a ne i od prirode procesa. Zato je jednakost (389b) valjana za bilo koji kružni povrativi proces

U prirodi ne postoji idealni povrativi proces, i takvu se procesu može tek približiti posebnim tehnikama, trikovima i uvjetima provođenja procesa. Stoga za realne kružne procese vrijedi Clausiusova nejednakost

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (389c)$$

Kombinirana s jednadžbom (389b) ta se nejednakost piše u obliku

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (389d)$$

gdje je znak jednakosti valjan samo za povrativi proces. Izražena entropijom ta nejednakost prelazi u

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (389e)$$

Izrazi (389d) i (389e) matematički su zapisi drugog zakona termodinamike. U izrazu (389e) δQ je prijenos topline preko granice sustava, i ima pozitivni predznak za dovođenje topline sustavu, a negativni za odvođenje topline od sustava. Termodinamička temperatura T je uvijek pozitivna, a odnosi se na točku granice sustava u kojoj se obavlja prijenos topline δQ . Prema tome, u (389e) prirast entropije dS može biti pozitivan

ili negativan, a ako je negativan, tada izraz (389e) pokazuje da li je dS manje (ili jednako) negativan od više (ili jednako) negativne veličine $\delta Q/T$.

Za adijabatski sustav $\delta Q = 0$, pa (389e) daje

$$dS_{\text{adijab}} \geq 0. \quad (389f)$$

To je poseban slučaj drugog zakona termodinamike i naziva se *princip povećanja entropije*. Za povrativi proces izraz (389f) prelazi u jednakost

$$dS_{\text{adijab}} = 0 \quad (389g)$$

ili

$$S_{\text{adijab}} = \text{const.}, \quad (389h)$$

što je zakon održanja entropije u povrativim procesima. Prema (389h) adijabatski povrativi proces jest proces konstantne entropije, i zato se naziva *izentropskim*.

Drugi zakon termodinamike jest empirijski i univerzalan zakon, uvijek ponovo potvrđivan eksperimentima. Taj zakon pokazuje da je nemoguće postojanje perpetuum mobile i prikladan je za analizu realnosti različitih pronalazačkih ideja. Pisan u obliku (389d) ili (389e) to nije zakon održanja, već zakon degradacije energije. Premda zakon održanja energije (također empirijski i univerzalan) kaže da ukupni iznos energije svaki put kad energija mijenja oblik ili se prenosi od jednog sustava na drugi ostaje konstantan, drugi zakon termodinamike kaže da se pri tim promjenama oblika energije ili pri prijenosu energije njen potencijal za proizvodnju korisnog rada nepovrativo i zauvijek smanjuje.

Izrazi (389d) i (389e) pokazuju da drugi zakon termodinamike govori o jednosmjernosti mogućeg odvijanja realnih termodinamičkih procesa i zato postaje važan uvjet ili kriterij za ocjenu valjanosti dobivenog rješenja nekog termodinamičkog problema strujanja fluida. Naime, matematičko rješenje nekog termodinamičkog problema strujanja fluida samo po sebi je formalno, jer npr. za višestruko matematički moguće rješenje neki korišteni rješenja mogu biti fizikalno besmisleni. Tada drugi zakon termodinamike pokazuje mogući smjer odvijanja termodinamičkog procesa.

Ako se nejednakost (389e) napiše u obliku

$$dS - \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \quad (390a)$$

i primijeni na materijalni volumen $V_m(t)$ fluida, ograden materijalnom površinom $S_m(t)$, drugi zakon termodinamike pisan u obliku brzine promjene sadržaja entropije postaje

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho s dV + \int_{S_m(t)} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} dS \geq 0, \quad (390b)$$

gdje je s specifična entropija izražena po jedinici mase, s dimenzijom $[s] = \text{L}^2\text{T}^{-2}(\text{K})^{-1}$, dakle $[s]_{\text{SI}} = \text{J}/(\text{kg K})$, a $\vec{q}$ vektor površinske gustoće toplinske snage definiran omjerom toplinske snage i površine tako da mali iznos topline doveden fluidu preko elementa granice dS iznosi

$$\delta Q = -\vec{q} \cdot \vec{n} dS dt. \quad (390c)$$

Ako se površinski integral u (390b) transformira u volumenski integral, zbog proizvoljnosti volumena integracije i primjenom jednadžbe kontinuiteta slijedi

$$\rho \frac{Ds}{Dt} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \geq 0, \quad (390d)$$

ili

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) s + \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \geq 0. \quad (390e)$$

To je diferencijalni oblik drugog zakona termodinamike, prilagođen primjeni u dinamici fluida.

Univerzalne jednadžbe dinamike fluida kao nepotpun skup diferencijalnih jednadžbi. Diferencijalni oblici zakona održanja

jesu univerzalne jednadžbe koje moraju zadovoljiti svi fluidi u strujanju. To su: skalarna jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (391a)$$

vektorska jednadžba gibanja

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{Div} T_{\pi}, \quad (391b)$$

i skalarna energetska jednadžba

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \operatorname{div}(T_{\pi} \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q}. \end{aligned} \quad (391c)$$

U jednadžbi gibanja (391b) uveden je tenzor naprežanja rastavljen prema shemi (385e), a u energetskoj jednadžbi (391c) razvijen je operator D/Dt .

Uz te univerzalne jednadžbe dolazi i univerzalna nejednadžba drugog zakona termodinamike, kao uvjet jednosmjernosti odvijanja termodinamičkog procesa:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) s + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) \geq 0. \quad (391d)$$

Ako se pretpostavi da se specifična entropija s može izraziti veličinama koje se nalaze u diferencijalnim jednadžbama (391a, b i c), te da je zadano polje masene sile $\vec{f}$ u kojem se odvija strujanje fluida, ostaje problem kako da se odredi 15 skalarnih funkcija prostora i vremena. Te su skalarnе funkcije: gustoća ρ , specifična unutrašnja energija u , termodinamički tlak p , tri komponente vektora brzine $\vec{v}$, tri komponente vektora gustoće toplinske snage $\vec{q}$ i šest komponenta simetričnog tenzora naprežanja T_{π} . Očito je da za rješenje tog problema nije dovoljno pet raspoloživih diferencijalnih jednadžbi, tj. (391a), stri skalarnе komponentne jednadžbe (391b) i jednadžba (391c).

Da bi se dobio potpuni skup jednadžbi koje omogućuju rješenje, univerzalnim jednadžbama treba dodati dopunske ili konstitutivne jednadžbe, koje nemaju univerzalno značenje nego opisuju specifična dinamička i termodinamička ponašanja pojedinih vrsta fluida.

Zakoni posebnih ponašanja fluida (konstitutivne jednadžbe). Pokazalo se da za analitičko rješenje nepotpunog skupa univerzalnih jednadžbi, koje izražavaju zakone održanja, treba tom skupu dodati dopunske informacije o ponašanju i stanju fluida. Te dopunske informacije odražavaju specifična reološka i termodinamička svojstva fluida, a po sadržaju se svrstavaju u dvije grupe. U prvoj su grupi zakonitosti odnosa naprežanja u fluidu i polja brzine strujanja fluida, a u drugoj su toplinske i kaloričke jednadžbe koje opisuju termodinamičko stanje fluida.

Generalizirani Newtonov zakon viskoznosti jest generalizacija Newtonova zakona viskoznosti definiranog izrazima (65) ili (67) za opći slučaj trodimenzijskog strujanja fluida. Tom se generalizacijom uspostavlja opći linearni odnos između tenzora naprežanja i prostorno promjenljivog polja brzine strujanja fluida. Prostorna promjenljivost polja brzine potpuno je definirana tenzorom gradijenta vektora brzine $\operatorname{Grad} \vec{v}$, izraz (291c), koji je dalje rastavljen na antisimetrični dio bez dijagonalnih članova, tj. tenzor rotacijskog gibanja fluida T_{ω} , i na simetrični dio, tj. tenzor brzine deformacije T_{ϵ} , izraz (297e). Pri razvoju izraza za gustoću snage unutrašnjih sila $p^{(i)}$ prijelazom od izraza (384e) u izraz (384f) ispao je iz jednadžbe kinetičke energije fluida u strujanju antisimetrični dio T_{ω} . Budući da u kvazikrutoj rotaciji fluida ne postoje unutrašnja smična naprežanja u fluidu, to ne postoji ni traženi linearni odnos tenzora rotacijskog gibanja T_{ω} s tenzorom naprežanja T_{π} , već se u tom odnosu pojavljuje samo tenzor brzine deformacije T_{ϵ} .

Prema tome, generalizacija Newtonova zakona viskoznosti svodi se na određivanje opće linearne ovisnosti svake od devet komponenta tenzora naprežanja T_{π} o devet komponenta tenzora brzine deformacije T_{ϵ} . Takva bi ovisnost, uključujući i

slobodne članove u linearnim funkcijama, sadržavala ukupno 90 koeficijenata koje bi kao svojstva fluida, trebalo odrediti eksperimentom. Simetričnost tenzora T_{π} i T_{ϵ} smanjuje taj broj na 42 koeficijenta, što je još uvijek previše za bilo kakav praktičan rad s dopunskim zakonom o ponašanju fluida. Zato se postavljaju prihvatljive pretpostavke koje još više smanjuju broj potrebnih koeficijenata. Te su pretpostavke:

1) U stanju mirovanja u fluidu vlada skalarno tlačno naprežanje prema izrazu (55), koje je jednako termodinamičkom tlaku p .

2) Simetrični tenzor naprežanja T_{π} linearno je zavisn od simetričnog tenzora brzine deformacije T_{ϵ} . Isto vrijedi i za simetrični tenzor viskoznih naprežanja T_{π} , izraz (385g).

3) Fluid je izotropan, tj. svojstva fluida zavise samo od točke u prostoru, a ne i od smjera u pojedinim točkama.

4) Za paralelno pravocrtno ravninsko strujanje linearna zavisnost prelazi u Newtonov zakon viskoznosti dan izrazom (65).

Pretpostavka 1 zahtijeva da tenzor naprežanja T_{π} ima oblik prema izrazu (385e), tj.

$$T_{\pi} = -p \mathcal{E} + T_{\pi}, \quad (392)$$

gdje je T_{π} tenzor viskoznih naprežanja (385g), a $\mathcal{E}$ tenzorska jedinica (385f).

Pri razmatranju pretpostavke 2 polazi se od linearne zavisnosti T_{π} u glavnim osima x_1, y_1, z_1 tenzora brzine deformacije T_{ϵ} , u kojima taj tenzor ima jednostavan oblik (306). U tim je osima

$$\pi_{x_1 x_1} = a_1 \epsilon_{x_1} + a_2 \epsilon_{y_1} + a_3 \epsilon_{z_1}, \quad (393a)$$

a zbog pretpostavke 3 vrijedi i

$$\begin{aligned} \pi_{y_1 y_1} &= a_1 \epsilon_{y_1} + a_2 \epsilon_{z_1} + a_3 \epsilon_{x_1} \\ \pi_{z_1 z_1} &= a_1 \epsilon_{z_1} + a_2 \epsilon_{x_1} + a_3 \epsilon_{y_1}. \end{aligned} \quad (393b)$$

Transformiraju li se glavne osi prema shemi

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{y}_1 = z_1, \quad \bar{z}_1 = -y_1, \quad (393c)$$

očito je da su i osi $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ glavne (desne) osi tenzora brzine deformacije T_{ϵ} . U tim je osima:

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}_1} &= v_{x_1}, & \epsilon_{\bar{x}_1} &= \frac{\partial v_{\bar{x}_1}}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} = \epsilon_{x_1}, \\ v_{\bar{y}_1} &= v_{z_1}, & \epsilon_{\bar{y}_1} &= \frac{\partial v_{\bar{y}_1}}{\partial \bar{y}_1} = \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} = \epsilon_{z_1}, \\ v_{\bar{z}_1} &= -v_{y_1}, & \epsilon_{\bar{z}_1} &= \frac{\partial v_{\bar{z}_1}}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = \epsilon_{y_1}, \\ \pi_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} &= \pi_{x_1 x_1}, \end{aligned} \quad (393d)$$

tako da je

$$\begin{aligned} \pi_{x_1 \bar{x}_1} &= a_1 \epsilon_{x_1} + a_2 \epsilon_{\bar{y}_1} + a_3 \epsilon_{\bar{z}_1} = \\ &= a_1 \epsilon_{x_1} + a_2 \epsilon_{z_1} + a_3 \epsilon_{y_1} = \pi_{x_1 x_1}. \end{aligned} \quad (393e)$$

Usporedba sa (393a) pokazuje da je

$$a_2 = a_3 = A, \quad (394a)$$

gdje je A neki koeficijent, pa se i preostali koeficijent a_1 može označiti sa

$$a_1 = B. \quad (394b)$$

Ako se uvedu koeficijenti A i B definirani sa (394a) i (394b), tada izrazi (393a) i (393b) za normalna naprežanja tenzora T_{π} poprimaju oblik

$$\begin{aligned} \pi_{x_1 x_1} &= B \epsilon_{x_1} + A \epsilon_{y_1} + A \epsilon_{z_1} = A \operatorname{div} \vec{v} + (B - A) \epsilon_{x_1}, \\ \pi_{y_1 y_1} &= B \epsilon_{y_1} + A \epsilon_{z_1} + A \epsilon_{x_1} = A \operatorname{div} \vec{v} + (B - A) \epsilon_{y_1}, \\ \pi_{z_1 z_1} &= B \epsilon_{z_1} + A \epsilon_{x_1} + A \epsilon_{y_1} = A \operatorname{div} \vec{v} + (B - A) \epsilon_{z_1}, \end{aligned} \quad (395a)$$

a iščezavaju tangencijalna naprežanja

$$\pi_{x_1 y_1} = \pi_{y_1 x_1} = \pi_{y_1 z_1} = \pi_{z_1 y_1} = \pi_{x_1 z_1} = \pi_{z_1 x_1} = 0. \quad (395b)$$

Uvrsti li se (395a) u izraz (392), odnos tenzora T_{π} i T_{ϵ} u glavnim osima x_1, y_1, z_1 može se pisati u matricinom obliku:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_1} & \tau_{x_1y_1} & \tau_{x_1z_1} \\ \tau_{y_1x_1} & \sigma_{y_1y_1} & \tau_{y_1z_1} \\ \tau_{z_1x_1} & \tau_{z_1y_1} & \sigma_{z_1z_1} \end{bmatrix} = (-p + A \operatorname{div} \vec{v}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (B - A) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{z_1} \end{bmatrix} \quad (396a)$$

ili

$$T_\sigma = (-p + A \operatorname{div} \vec{v}) \cdot \mathcal{E} + (B - A) \cdot T_\varepsilon \quad (396b)$$

Ako su primjerene komponente dvaju tenzora jednake u jednom koordinatnom sustavu, tada su te komponente međusobno jednake i u bilo kojem drugom koordinatnom sustavu. Prema tome je u koordinatnom sustavu $Oxyz$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = (-p + A \operatorname{div} \vec{v}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (B - A) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (396c)$$

dok oblik (396b) odnosa T_σ i T_ε ostaje nepromijenjen za bilo koje osi.

Prema pretpostavci 4, za strujanje fluida s poljem brzine $v_y = v_z = 0$ i $v_x = v_x(y)$ mora odnos (396c) biti

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (396d)$$

U takvu je strujanju

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}, \quad (396e)$$

što uvršteno u (396d) daje

$$\tau_{yx} = 2\mu \gamma_{xy}, \quad (396f)$$

a usporedba sa (396c) pokazuje da je

$$B - A = 2\mu, \quad (396g)$$

gdje je μ dinamički koeficijent viskoznosti ili koeficijent smične viskoznosti.

Razlika između termodinamičkog tlaka p i srednjeg mehaničkog tlaka p_{sr} , definiranog invarijantom tenzora napreznja T_σ , izraz (41), izražava se koeficijentom volumenske viskoznosti μ_v :

$$p - p_{sr} = \mu_v \operatorname{div} \vec{v}, \quad (397a)$$

gdje koeficijent volumenske viskoznosti ima dimenziju $[\mu_v] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$, dakle $[\mu_v]_{SI} = \text{Pa s}$.

Ako se p_{sr} izrazi pomoću normalnih napreznja iz odnosa (396c) i primijeni izraz (396g), dobiva se

$$\begin{aligned} p - p_{sr} &= p - \left[-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] = \\ &= p - \left[p - A \operatorname{div} \vec{v} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right] = \left(A + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{v}, \end{aligned} \quad (397b)$$

a usporedba sa (397a) pokazuje da je koeficijent A jednak

$$A = -\left(\frac{2}{3} \mu - \mu_v \right). \quad (397c)$$

Uvrsti li se (396g) i (397c) u (396b), dobiva se opći linearni odnos tenzora napreznja T_σ i tenzora brzine deformacije T_ε

$$T_\sigma = \left[-p - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu_v \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \mathcal{E} + 2\mu T_\varepsilon \quad (398a)$$

ili u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \left[-p - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu_v \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ 2\mu \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (398b)$$

To je generalizirani Newtonov zakon viskoznosti, i fluidi koji slijede taj zakon, tj. linearni odnos T_σ i T_ε , zovu se newtonski fluidi.

Izraz (398a) piše se i u obliku

$$T_\sigma = -p \mathcal{E} + 2\mu \left(T_\varepsilon - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \mathcal{E} \right) + \mu_v \operatorname{div} \vec{v} \mathcal{E}, \quad (398c)$$

u kojemu je učinak smične viskoznosti μ razdvojen od učinka volumenske viskoznosti μ_v .

Koeficijenti viskoznosti μ i μ_v jesu svojstva fluida, i zavise samo od lokalnoga termodinamičkog stanja. U tabl. 4 dani su podaci o koeficijentima viskoznosti μ i μ_v nekih plinovitih i kapljevitih fluida.

Tablica 4
TRANSPORTNA SVOJSTVA NEKIH FLUIDA PRI 300 K I
1,013 bar (= 1 atm)

Fluid	ρ kg/m ³	$10^{-5} \mu$ Pa s	μ_v/μ	$\frac{\lambda}{10^{-2}}$ J/m s K	$10^{-5} \nu$ m ² /s	Pr
He	0,162	1,98	0	15,0	12,2	0,67
Ar	1,62	2,27	0	1,77	1,40	0,67
H ₂	0,0821	0,887	32	17,3	10,8	0,71
N ₂	1,14	1,66	0,8	2,52	1,46	0,71
O ₂	1,30	2,07	0,4	2,58	1,59	0,72
CO ₂	1,79	1,50	1000	1,66	0,837	0,75
Zrak	1,18	1,85	0,6	2,58	1,57	0,71
Voda	997	85,7	3,1	61	0,0860	6,0
Etilni alkohol	786	110	4,5	18,3	0,14	15
Glicerol	1230	134000	0,4	29	109	11000

Za kombinaciju koeficijenata μ i μ_v , koja je u izrazu (397c) označena kao koeficijent A , uvedena je i posebna oznaka

$$\mu' = -\left(\frac{2}{3} \mu - \mu_v \right), \quad (398d)$$

koja se naziva drugi koeficijent viskoznosti.

Fizikalna interpretacija smične viskoznosti μ provedena je na temelju kinetičke teorije plinova. I volumenska viskoznost μ_v može se interpretirati kinetičkom teorijom poliatomnih plinova. Naime, tlak p_{sr} , nazvan mehaničkim, mjera je samo translacijske energije molekula, dok je termodinamički tlak mjera ukupne energije molekula, koja uz translacijski oblik uključuje i vibracijske, rotacijske i sve ostale oblike energije. Ti različiti oblici energije imaju različita vremena relaksacije, tj. vremena potrebna da se nakon poremećaja ponovo uspostavi ravnotežno stanje neke veličine. Za dušik N₂ pri 300 K vrijeme relaksacije za molekularnu translaciju iznosi $1,6 \cdot 10^{-10}$ s, za molekularnu rotaciju $1,2 \cdot 10^{-9}$ s, a pri 3000 K za molekularne vibracije $3 \cdot 10^{-5}$ s. Zbog takvih razlika energija se može pretvarati i prenositi iz jednog oblika u drugi. Tako se volumenska viskoznost μ_v u izrazu (397a) može interpretirati kao mjera prijenosa energije od translacijskog oblika u druge oblike. Npr. pri prolazu kroz udarni val translacijski oblik energije pretvara se u vibracijski, pa će u takvoj pojavi volumenska viskoznost biti veoma važna. Budući da monoatomni plinovi imaju samo translacijski oblik energije, nemoguće je prijenos energije u druge oblike, pa je za monoatomne plinove $\mu_v = 0$, što pokazuju i eksperimenti (v. tabl. 4). To znači da je pri strujanju monoatomnih plinova termodinamički tlak jednak mehaničkom tlaku.

Volumenska viskoznost plinova bitno utječe u procesima koji se razvijaju vrlo brzo i u kojima su gradijenti pojedinih veličina veliki, kao što je npr. eksplozija i udarni val. U mnogim je strujanjima plinova divergencija brzine $\operatorname{div} \vec{v}$ dovoljno malena da se utjecaj volumenske viskoznosti može zanemariti. Kad je $\mu_v \approx 0$, izraz (398a) prelazi u

$$T_e = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}\right) + 2\mu T_e, \quad (399a)$$

ili izraženo u komponentama tenzora napreznja

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (399b)$$

Za nestlačivi fluid, tj. $\varrho = \text{const.}$, jednadžba kontinuiteta (333a) ili (380e) daje $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, pa je generalizirani Newtonov zakon viskoznosti:

$$T_e = -p\delta + 2\mu T_e, \quad (400a)$$

ili izraženo u komponentama:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (400b)$$

Primjenom generaliziranog Newtonova zakona viskoznosti u oblicima (398a), (399a) i (400a), za gustoću snage unutrašnjih sila $p^{(i)}$ definiranu izrazom (384f), uz jednakost $\delta \cdot T_e = \operatorname{div} \vec{v}$, dobivaju se sljedeći izrazi:

a) $\mu_v \neq 0$, $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$:

$$p^{(i)} = p \operatorname{div} \vec{v} + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v \right) (\operatorname{div} \vec{v})^2 - 2\mu T_e \cdot T_e; \quad (401)$$

b) $\mu_v = 0$, $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$:

$$p^{(i)} = p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{2}{3}\mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 - 2\mu T_e \cdot T_e, \quad (402)$$

c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, nestlačivi fluid:

$$p^{(i)} = -2\mu T_e \cdot T_e. \quad (403)$$

Fourierov zakon toplinske vodljivosti. Vektor površinske gustoće toplinske snage ili toplinskog toka $\vec{q}$, uveden u izrazu (385a) pri formulaciji zakona održanja energije, odražava bit same definicije topline. Toplina nije svojstvo sustava ili nešto što sustav sadržava. Govori se samo o prenesenoj toplini kao međudjelovanju između sustava i okoliša, ili o prenesenoj energiji koja se ne može identificirati s radom. Taj prijenos topline rezultat je razlike u temperaturama.

Fourierov zakon toplinske vodljivosti linearni je odnos između gustoće toplinske snage $\vec{q}$ i gradijenta skalarnog temperaturnog polja

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T \quad (404)$$

gdje je λ koeficijent toplinske vodljivosti s dimenzijom

$[\lambda] = \text{MLT}^{-3}\text{K}^{-1}$, dakle $[\lambda]_{\text{SI}} = \text{J}/(\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{K})$. U tabl. 4 dani su podaci o koeficijentu λ za neke plinovite i kapljevite fluide. Za $\lambda > 0$ Fourierov zakon (404) pokazuje da toplina struji od područja viših temperatura prema području nižih temperatura. Taj je Fourierov linearni odnos gustoće toplinske snage i temperaturnog gradijenta potvrđen mnogim eksperimentima i striktno je primjenljiv samo za izotropne fluide. Za kapljevine je koeficijent toplinske vodljivosti λ relativno nezavisan od temperature, a za plinove je, poput koeficijenta viskoznosti μ , rastuća funkcija temperature.

Koeficijenti smične viskoznosti μ , volumenske viskoznosti μ_v i toplinske vodljivosti λ spadaju u grupu *transportnih koeficijenata*. To su svojstva tvari koja zavise od lokalnog termodinamičkog stanja, pa ako je to stanje definirano tlakom p i temperaturom T , zavisnost se izražava u obliku:

$$\mu = \mu(p, T); \quad \mu_v = \mu_v(p, T); \quad \lambda = \lambda(p, T). \quad (405)$$

Koeficijenti μ , λ i specifična toplota pri konstantnom tlaku c_p tvore bezdimenzijsku kombinaciju

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad (406)$$

nazvanu *Prandtlvim brojem*.

Prandtlv je broj određena kombinacija svojstava fluida, pa se i sam može smatrati svojstvom koje zavisi od lokalnog termodinamičkog stanja. Iznos Prandtlva broja daje odnos relativnih utjecaja viskoznih napreznja i prijenosa topline vodljivošću, pa pokazuje npr. da li se u nekom strujanju brže razvija profil brzine ili profil temperature. Podaci o Prandtlvu broju nekih fluida dani su u tabl. 4.

Termodinamičke jednadžbe stanja. Stanje sustava, npr. materijalnog volumena, zadano je tzv. parametrima stanja, kojima se mogu potpuno odrediti sve značajke sustava potrebne za dinamičko-termodinamičku analizu. Prema *principu stanja* za čistu tvar, tj. za takav sustav kojeg je kemijski sastav za vrijeme procesa homogen i nepromjenljiv, lokalno termodinamičko stanje određeno je s bilo koja dva nezavisna termodinamička parametra stanja. Ako su ta dva nezavisna parametra tlak p i gustoća ϱ , tada *toplinska jednadžba stanja* ima oblik

$$p = p(\varrho, T), \quad (407)$$

npr. kao jednadžba stanja savršenog plina (8).

Kalorička jednadžba stanja za specifičnu unutrašnju energiju glasi:

$$u = u(p, \varrho) = u[p(\varrho, T), \varrho]. \quad (408)$$

Jednadžbe stanja (407) i (408) međusobno su zavisne, a pomoću njih se može odrediti bilo koje termodinamičko svojstvo fluida kao čiste tvari.

Navier-Stokesove jednadžbe. Jednadžba gibanja fluida (381e) ili (391b) i konstitutivna jednadžba za newtonski fluid (398a), koja uspostavlja opći linearni odnos između tenzora napreznja T_e i tenzora brzine deformacije T_e , daju *Navier-Stokesove jednadžbe*. Tri skalarne komponente tih jednadžbi sadržane su u kompaktnom vektorskom obliku

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varrho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \varrho \vec{f} - \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \left[\left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] + 2 \operatorname{Div} (\mu T_e), \end{aligned} \quad (409a)$$

gdje, prema definiciji (43a) za $\operatorname{Div} T_e$, operator $\operatorname{Div} (\mu T_e)$ u pravokutnom kartezijском sustavu ima komponente:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Div} (\mu T_e)]_x &= \frac{\partial (\mu \varepsilon_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \gamma_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \gamma_{zx})}{\partial z}, \\ [\operatorname{Div} (\mu T_e)]_y &= \frac{\partial (\mu \gamma_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \varepsilon_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \gamma_{zy})}{\partial z}, \\ [\operatorname{Div} (\mu T_e)]_z &= \frac{\partial (\mu \gamma_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \gamma_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \varepsilon_{zz})}{\partial z}. \end{aligned} \quad (409b)$$

U ortogonalnim krivocrtnim koordinatama taj operator ima vrlo složen oblik, pa da se pojednostavni jednadžba (409a),

daje joj se invarijantni vektorski oblik, koji doduše sadržava veći broj članova ali su ti članovi standardni operatori za koje su već razvijeni izrazi u ortogonalnim krivocrtnim koordinatama. Pri tom se za konvektivnu akceleraciju na lijevoj strani izraza (409a) primjenjuje izraz (240), a zadnji član desne strane (409a) transformira se pomoću poznatog izraza vektorske analize:

$$\Delta \vec{a} = -\text{rot rot } \vec{a} + \text{grad div } \vec{a}, \quad (409c)$$

gdje je $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ Laplaceov operator.

Transformacija jednadžbe (409a) daje

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] =$$

$$= \rho \vec{f} - \text{grad } p - \text{rot rot}(\mu \vec{v}) + \text{grad} \left[\left(\frac{4}{3} \mu + \mu_v \right) \text{div } \vec{v} \right] +$$

$$+ \text{grad}(\vec{v} \cdot \text{grad } \mu) - \vec{v} \Delta \mu - \text{div } \vec{v} \text{ grad } \mu + \text{grad } \mu \times \text{rot } \vec{v}. \quad (409d)$$

To je vrlo složena diferencijalna jednadžba, pa su za njenu primjenu potrebne neke pretpostavke i približenja. Ako su temperaturne promjene malene, tada se i promjene koeficijenta viskoznosti μ i μ_v mogu zanemariti, pa jednadžba (409d) ima jednostavniji oblik:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] =$$

$$= \rho \vec{f} - \text{grad } p - \mu \text{rot rot } \vec{v} + \left(\frac{4}{3} \mu + \mu_v \right) \text{grad div } \vec{v} =$$

$$= \rho \vec{f} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\frac{1}{3} \mu + \mu_v \right) \text{grad div } \vec{v}. \quad (409e)$$

Za nestlačivi je fluid $\text{div } \vec{v} = 0$, pa iz jednadžbe (409d) nestaju članovi koji sadržavaju $\text{div } \vec{v}$. Ako se uz to pretpostavi da je $\mu = \text{const.}$, tri komponente Navier-Stokesovih jednadžbi za nestlačivi fluid sažete su u vektorskoj jednadžbi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \vec{f} - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) - \nu \text{rot rot } \vec{v} =$$

$$= \vec{f} - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nu \Delta \vec{v}. \quad (410)$$

Energetska jednadžba za newtonske fluide. Ako se u prvi alternativni oblik energetske jednadžbe (385c) uvedu konstitutivne jednadžbe (398a) i (404), broj će se nepoznatih funkcija smanjiti, pa se može formirati potpuni skup jednadžbi dinamike fluida koje su u principu integrabilne.

Jedan od članova jednadžbe (385c) jest gustoća snage unutrašnjih sila s negativnim predznakom, koja je prema izrazu (386d) jednaka:

$$-p^{(i)} = -p \text{div } \vec{v} + T_n \cdot T_n, \quad (411)$$

gdje za T_n , usporedbom (392) i (398a), vrijedi

$$T_n = - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu_v \right) \text{div } \vec{v} \mathcal{E} + 2 \mu T_e. \quad (412a)$$

Prvi izraz desne strane (411) jest snaga po jedinici volumena sile tlaka na element fluida, što je reverzibilan prijenos energije. Taj dio ($-p^{(i)}$) može biti >0 pri $\text{div } \vec{v} < 0$, i <0 pri $\text{div } \vec{v} > 0$. Drugi član desne strane (411) jest volumenska gustoća disipativne snage unutrašnjih sila, tj. nepovrativi (ireverzibilni) dio gustoće snage unutrašnjih sila s negativnim predznakom. Ta se snaga naziva *disipativnom funkcijom* Φ i definirana je izrazom

$$\Phi = -p_{\text{rev}}^{(i)} = -(p^{(i)} - p \text{div } \vec{v}) = T_n \cdot T_n. \quad (412b)$$

Primijeni li se izraz (412a) za T_n i izraz (297c) za T_e , za disipativnu se funkciju nakon jednostavnih operacija dobiva:

$$\Phi = 4\mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) +$$

$$+ \frac{2}{3}\mu[(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2] +$$

$$+ \mu_v(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})^2 \geq 0, \quad (412c)$$

tj: ta funkcija ne može imati negativnu vrijednost.

Primjenom izraza (411), (412c) i Fourierova zakona toplinske vodljivosti (404) energetska jednadžba (385c) dobiva oblik

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u \right] = -p \text{div } \vec{v} + \Phi + \text{div}(\lambda \text{grad } T). \quad (413a)$$

Lako je dokazati da je

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) = T \text{div} \left(\frac{\lambda \text{grad } T}{T} \right) + \frac{\lambda}{T} (\text{grad } T)^2, \quad (413b)$$

gdje zadnji član desne strane, slično funkciji Φ , ne može biti negativan, pa se energetska jednadžba može pisati i u obliku:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u \right] + p \text{div } \vec{v} - T \text{div} \left(\frac{\lambda \text{grad } T}{T} \right) =$$

$$= \Phi + \frac{\lambda}{T} (\text{grad } T)^2. \quad (413c)$$

Drugi zakon termodinamike. Kombinirani matematički zapis prvog i drugog zakona termodinamike dan je *Gibbsovom jednadžbom*

$$T Ds = Du + p D \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (414a)$$

Primjenom jednadžbe kontinuiteta u obliku (380e), za reverzibilni dio gustoće snage unutrašnjih sila može se pisati

$$p \text{div } \vec{v} = -p \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho p \frac{D(1/\rho)}{Dt}, \quad (414b)$$

pa kombinacija (413c), (414a) i (414b) daje

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s \right] - T \text{div} \left(\frac{\lambda \text{grad } T}{T} \right) = \Phi + \frac{\lambda}{T} (\text{grad } T)^2 \geq 0, \quad (414c)$$

gdje je disipativna funkcija Φ dana izrazom (412c).

Tako je primjenom konstitutivnih jednadžbi i Gibbsove jednadžbe diferencijalni oblik drugog zakona termodinamike (390e) dobio konkretniji sadržaj u obliku (414c), primjeren svojstvima newtonskih fluida.

Osnovne jednadžbe dinamike newtonskih fluida i rubni uvjeti.

Osnovne dinamičke i termodinamičke jednadžbe koje opisuju strujanje newtonskog fluida jesu: jednadžba kontinuiteta (380d), Navier-Stokesove jednadžbe u sažetom vektorskom obliku (409d), energetska jednadžba (413c) i jednadžbe stanja (407) i (408). Tih pet osnovnih jednadžbi čini potpuni skup i u principu postoji njihovo rješenje kojim se odredi sedam nepoznatih funkcija prostora i vremena: p , ρ , te tri skalarne komponente brzine $\vec{v}$, u i T .

Pretpostavlja se da su svojstva fluida μ , μ_v i λ poznate funkcije tlaka i temperature prema izrazu (405). Nadalje, uz skup osnovnih jednadžbi dinamike dolazi i drugi zakon termodinamike prilagođen termodinamičkoj analizi strujanja newtonskih fluida (414c).

Tri skalarne komponente Navier-Stokesovih jednadžbi (409d) jesu tri eliptičke parcijalne jednadžbe drugog reda. Sva moguća strujanja newtonskih fluida zadovoljavaju Navier-Stokesove jednadžbe, ali za rješenje svakog pojedinog problema treba u sustav jednadžbi uvesti posebne rubne (granične) uvjete koji zavise od karakterističnih geometrijskih granica tog problema. Eksperimentima je utvrđeno da na krutoj graničnoj površini oko koje ili preko koje struji realni viskozni fluid nema sklizanja fluida po toj površini, tj. čestice fluida se prilipe uz krutu stijenku pa je brzina čestice na stijenci jednaka brzini pripadne točke stijenske. Ako je $\vec{u}$ raspored brzina točaka krute stijenske, a $\vec{v}$ raspored brzina čestica fluida, tada je rubni uvjet za viskozni fluid na krutoj površini

$$\vec{v} = \vec{u}. \quad (415)$$

Drugi rubni uvjet za neograničeni fluid koji u beskonačnosti miruje jest

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = 0. \quad (416)$$

Za rješenje potpunog skupa jednačbi strujanja newtonskih fluida, kad su uključeni i toplinski učinci, potrebni su i temperaturni rubni uvjeti koji se sastoje od zadane temperature ili gustoće toplinske snage preko granica.

Posebni oblici i integrali osnovnih jednačbi dinamike fluida

Osnovne jednačbe dinamike newtonskih fluida (380d), (409d) i (413c) matematički su vrlo složen skup diferencijalnih jednačbi s ograničenim brojem egzaktnih rješenja. Takva rješenja postoje za jednostavnije tipove strujanja, kad se mogu zanemariti mnogi članovi, pa jednačbe postaju znatno jednostavnije. Numeričkim metodama mogu se riješiti i složeniji slučajevi, ali tada su to rješenja samo određenih problema, pa nemaju karakter općih zakonitosti s univerzalnom primjenom. Do bitnih pojednostavnjenja dolazi i ako se zanemare neki učinci, npr. djelovanje viskoznosti fluida ili prijenosa topline, ili kad se uzmu jednostavniji modeli fluida, npr. model savršenog plina s njegovom jednostavnom jednačbom stanja (8). Takva su rješenja ograničena na idealizirane uvjete, pa ih za probleme strujanja realnih fluida treba nadopuniti empiričkim koeficijentima.

Svako pojednostavnjenje ili poseban oblik osnovnih jednačbi i njihova posebna rješenja moraju biti točno označeni, upravo zato da bi se mogla ocijeniti njihova valjanost i prikladnost za rješavanje realnih problema dinamike fluida.

Posebni oblici jednačbe kontinuiteta. Jednačba kontinuiteta, kao izraz zakona održanja mase, mora biti zadovoljena za sve vrste fluida i sve tipove strujanja. Opći diferencijalni oblici jednačbe kontinuiteta pripadaju skupu osnovnih diferencijalnih jednačbi, a definirani su izrazima (380d) i (380e) dok je opći integralno-diferencijalni oblik dan izrazom (380b).

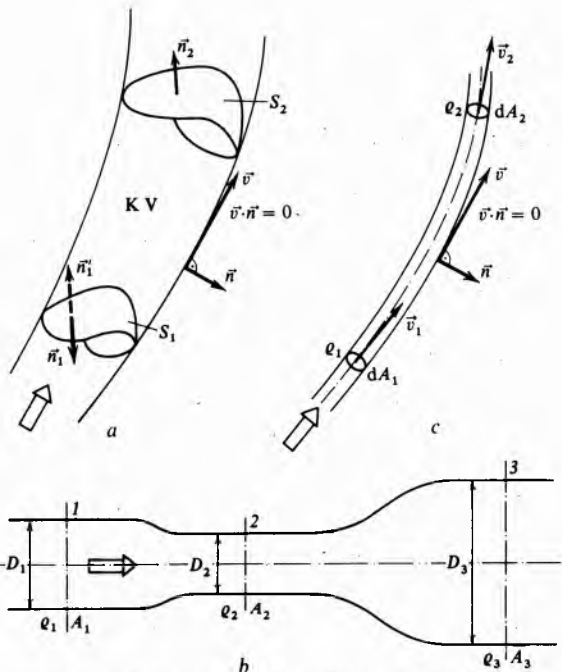
Za *stacionarno strujanje*, u kojemu je gustoća $\rho = \rho(\vec{r})$ i $\partial\rho/\partial t \equiv 0$, izraz (380b) dobiva poseban oblik:

$$\int_{KP} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (417a)$$

Za *nestlačivi fluid*, $\rho = \text{const.}$, u proizvoljnom strujanju vrijedi:

$$\int_{KP} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (417b)$$

Kad kontrolni volumen KV obuhvaća unutrašnjost strujne cijevi presječene sa dva proizvoljna poprečna presjeka S_1 i S_2 (sl. 80a), preko plašta strujne cijevi bit će $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, pa jednačba kontinuiteta (380b) prelazi u oblik



Sl. 80. Izvod posebnih oblika jednačbe kontinuiteta

$$\int_{S_1} \rho \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = - \int_{KV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (418a)$$

što za stacionarno strujanje dobiva oblik

$$\dot{m} = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \text{const.}, \quad (418b)$$

gdje je $\dot{m}$ maseni protok s dimenzijom $[\dot{m}] = \text{MT}^{-1}$, dakle $[\dot{m}]_{\text{SI}} = \text{kg/s}$, a $\vec{n}$ normala na proizvoljan presjek S strujne cijevi, na nizvodnoj strani površine S (na S_1 , sl. 80a, takva je normala označena sa $\vec{n}'_1 = -\vec{n}_1$).

Za strujnu cijev nestlačivog fluida kontinuitet se mase ne izražava masenim protokom, nego protokom

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \text{const.} \quad (418c)$$

Pri strujanju fluida kroz cjevovode redovito postoje ravni dijelovi cijevi konstantnoga poprečnog presjeka. Unutar tih dijelova cijevi strujanje se odvija po pravocrtnim paralelnim putanjama, tako da se mogu položiti ravni normalni presjeci kroz koje strujnice prolaze ortogonalno (sl. 80b). Ako se u takvim normalnim presjecima može pretpostaviti konstantna gustoća fluida, tada za stacionarno strujanje jednačba kontinuiteta (418b) dobiva oblik

$$\dot{m} = \rho v_{\text{sr}} A = \text{const.}, \quad (418d)$$

gdje je v_{sr} srednja brzina strujanja preko normalnoga ravnog presjeka cijevi, koji ima površinu A , definirana izrazom

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{Q}{A}.$$

Za *nestlačivi je fluid*

$$Q = v_{\text{sr}} A = \text{const.} \quad (418e)$$

Za strujanje kroz dio cjevovoda prikazanog na sl. 80b vrijedi

$$\dot{m} = \rho_1 v_{1\text{sr}} A_1 = \rho_2 v_{2\text{sr}} A_2 = \rho_3 v_{3\text{sr}} A_3,$$

a ako je $\rho = \text{const.}$, tada je

$$v_{3\text{sr}} = \frac{Q}{A_3} = \frac{4\pi Q}{D_3^2} < v_{1\text{sr}} = \frac{Q}{A_1} = \frac{4\pi Q}{D_1^2} < v_{2\text{sr}} = \frac{Q}{A_2} = \frac{4\pi Q}{D_2^2}.$$

U elementarnoj strujnoj cijevi (sl. 80c) uvijek se mogu položiti elementarni normalni presjeci dA , pa je za stacionarno strujanje stlačivog fluida

$$d\dot{m} = \rho v dA = \text{const.}, \quad (418f)$$

a za *nestlačivi fluid*

$$dQ = v dA = \text{const.} \quad (418g)$$

Pri *stlačivom strujanju* bitno je da se gustoća ρ nalazi u jednačbi kontinuiteta za cjevovode promjenljivih presjeka. Na primjer, pri nadzvučnom strujanju plina, zbog proširenja presjeka cijevi, plin ekspandira, pa gustoća tako naglo pada da brzina strujanja poraste premda se presjek proširuje, što je upravo suprotno od ponašanja kapljevine.

Funkcija toka ravninskog strujanja nestlačivog fluida. Pri ravninskom strujanju sve se čestice fluida gibaju paralelno s nekom ravninom. Ako je to ravnina Oxy , slika strujanja je identična u svim ravninama paralelnim s ravninom Oxy , pa je $v_z \equiv 0$ i $\partial/\partial z \equiv 0$. Ako se drugačije ne specificira, pod ravninskim se strujanjem smatra strujanje sloja fluida: između ravnine Oxy i na jediničnoj udaljenosti njoj paralelne ravnine. Optjecanje kružnog cilindra, tj. strujanje okomito na uzdužnu simetralu cilindra, prikazuje se u ravnini Oxy kao optjecanje kruga.

Polje brzine ravninskog strujanja zadano je skalarnim komponentama

$$v_x = v_x(x, y, t), \quad v_y = v_y(x, y, t), \quad v_z = 0. \quad (419a)$$

Jednačba kontinuiteta za ravninsko strujanje nestlačivog fluida (333a) ima oblik

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (419b)$$

Ta jednadžba, pisana u obliku

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \equiv \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}, \quad (419c)$$

pokazuje određeno matematičko srodstvo funkcija v_x i v_y , i to takvo da je linearna diferencijalna forma $v_x dy + (-v_y) dx$ egzaktni diferencijal neke funkcije ψ :

$$v_x dy - v_y dx = d\psi, \quad (419d)$$

gdje je $\psi = \psi(x, y, t)$ funkcija toka ravninskog strujanja nestlačivog fluida s dimenzijom $[\psi] = L^2 T^{-1}$, dakle $[\psi]_{SI} = m^2/s$. Budući da je izvedena iz jednadžbe kontinuiteta, funkcija toka ψ postoji za sva moguća ravninska strujanja nestlačivih viskoznih i idealnih fluida.

Za poznate funkcije v_x i v_y , funkcija toka se predočava poznatim izrazom više analize:

$$\psi(x, y) = \int_{y_0}^y v_x(x, y_0) dy_0 - \int_{x_0}^x v_y(x, y) dx + C. \quad (419e)$$

Za poznatu funkciju toka ψ polje brzine (419a), prema (419d), dano je izrazima:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (419f)$$

Iz diferencijalne jednadžbe strujnice ravninskog strujanja (264) ili (280) vidi se da je uzduž strujnice

$$v_x dy - v_y dx = 0, \quad (420a)$$

ili je, usporedi li se taj izraz sa (419d), uzduž strujnice

$$d\psi = 0. \quad (420b)$$

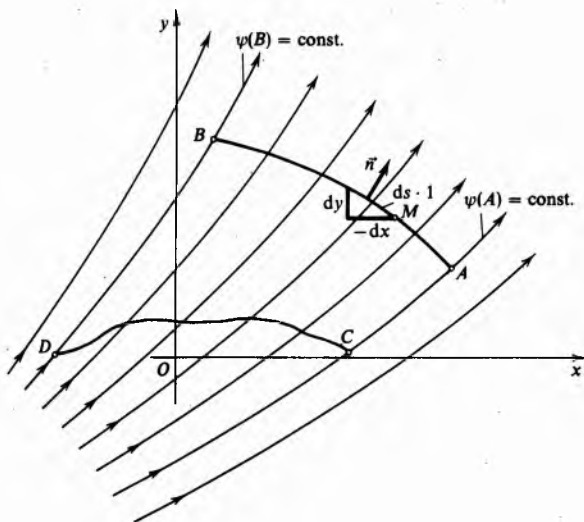
Prema tome je jednadžba strujnice (uzduž strujnice)

$$\psi = \text{const.} \quad (420c)$$

Sustavnim mijenjanjem konstantne vrijednosti funkcije toka ψ definirana je slika strujnica ravninskog strujanja. Pomoću funkcije toka ψ može se proračunati protok Q_1 nestlačivog fluida preko proizvoljne površine, koja u ravnini Oxy ima za konturu neku krivulju $\overline{AB}$ (sl. 81), a njena je visina u smjeru osi Oz jednaka $\Delta z = 1$. Razvije li se izraz za protok preko takve površine, dobiva se

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{\overline{AB}} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \cdot 1 = \int_{\overline{AB}} [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)] ds = \\ &= \int_{\overline{AB}} (v_x dy - v_y dx) = \int_{\overline{AB}} d\psi = \psi(B) - \psi(A). \end{aligned} \quad (420d)$$

Budući da $\psi(B)$ i $\psi(A)$ definiraju dvije strujnice, razlika vrijednosti funkcije toka u dvjema točkama ravnine strujanja određuje protok kroz proizvoljnu spojnicu dviju strujnica koje pro-



Sl. 81. Izvod svojstva funkcije toka ψ ravninskog strujanja
 $Q_1 = \psi(B) - \psi(A)$

laze kroz te dvije točke, pa je zato izraz (420d) valjan i za protok preko npr. krivulje $\overline{CD}$ na sl. 81.

Osnovne jednadžbe dinamike idealnog toplinski nevodljivog fluida i granični uvjeti. U idealnom, tj. neviskoznom fluidu tenzorsko polje naprežanja T_x degenerira u skalarno polje tlaka (55), a jednadžba gibanja dobiva jednostavan oblik (60). Izraze li se sve veličine u Eulerovim varijablama $\vec{r}$ i t , lijeva strana izraza (60) prelazi u individualnu vremensku derivaciju D/Dt danu izrazom (237), tako da je jednadžba gibanja idealnog fluida

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (421a)$$

To je sažeti vektorski oblik Eulerovih jednadžbi gibanja idealnog fluida, koje u kartezijskom sustavu imaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (421b)$$

Te se jednadžbe jednostavno izražavaju i u ortogonalnim krivocrtnim koordinatama pomoću izraza za pojedine operatore u tim koordinatama.

Eulerova vektorska jednadžba (421a) izravno slijedi i iz Navier-Stokesovih jednadžbi (409a) kad se zanemari viskoznost, tj. kad se stavi $\mu = \mu_v = 0$.

Jednadžba kontinuiteta za idealni fluid zadržava oblik (380d) ili (380e), tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (422a)$$

ili

$$\text{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \text{grad } \rho. \quad (422b)$$

Ako se osim viskoznosti istodobno zanemari i prijenos topline, $\bar{q} = 0$, energetska jednadžba (413a) za strujanje toplinski nevodljivog fluida glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u = -\frac{p}{\rho} \text{div} \vec{v}, \quad (423a)$$

uz toplinske jednadžbe stanja

$$p = p(\rho, T), \quad (423b)$$

$$u = u(p, \rho). \quad (423c)$$

Budući da nema toplinske vodljivosti ni viskozne disipacije energije, drugi zakon termodinamike (414c) ima oblik

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } s = 0. \quad (424)$$

Seдам jednadžbi (421b), (422a), (423a), (423b) i (423c) predstavljaju potpuni skup jednadžbi koji je potreban za rješenje nepoznatih funkcija: $\vec{v}$ sa tri skalarne komponente, te p , ρ , u i T .

Sustav jednadžbi (421a) do (423c) zadovoljava sva moguća strujanja idealnih toplinski nevodljivih fluida. Svaki pojedini konkretni problem dodaje tom sustavu jednadžbi svoje individualne granične i početne uvjete koji specificiraju ponašanje pojedinih veličina u određenim točkama prostora, npr. na granicama i u određenom početnom trenutku vremena.

Granični uvjet na krutoj nepromočivoj površini, npr. na površini krutog tijela koje se giba kroz fluid. Budući da nema viskoznosti, idealni fluid se ne lijepe uz krutu stijenu, pa se može gibati tangencijalnom brzinom relativno prema stijenci. Zbog nepromočivosti površine ne postoji normalna komponenta brzine čestica fluida relativno prema krutoj površini. Ako za krutu graničnu površinu F , pomičnu u prostoru, vrijedi jednadžba

$$F(\vec{r}, t) = 0, \quad (425a)$$

tada je kinematički uvjet nepromočivosti dan izrazom

$$v_n|_{F(\vec{r},t)} = 0 = u_n, \quad (425b)$$

gdje je v_n normalna komponenta brzine čestice fluida na površini F , a u_n normalna komponenta brzine točaka površine F .
Lako se dokaže da je

$$u_n = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\text{grad } F|}. \quad (425c)$$

Naime, normala na F dana je izrazom

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}, \quad (425d)$$

pa je

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}, \quad (425e)$$

gdje su $\vec{u}(\vec{r},t)$ brzine točaka površine F u trenutku t . U trenutku $t + dt$, prema (425a), vrijedi:

$$0 = F(\vec{r} + \vec{u} dt, t + dt) = F(\vec{r}, t) + \vec{u} dt \cdot \text{grad } F + \frac{\partial F}{\partial t} dt = dt \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } F \right), \quad (425f)$$

gdje je primijenjena jednačba (425a). Iz (425e) i (425f) proizlazi izraz (425c).

Granični uvjet (425b) može se pomoću (425d) pisati

$$\vec{v} \cdot \text{grad } F = \vec{u} \cdot \text{grad } F, \quad (425g)$$

što uvršteno u (425f) daje alternativni oblik graničnog uvjeta (425b):

$$\frac{DF}{Dt} = 0. \quad (425h)$$

Analitički izraz za površinu krute kugle polumjera r_0 koja se brzinom $U_z(t)$ piba u smjeru osi Oz (sl. 82) i kojoj se u trenutku $t = 0$ središte C nalazilo u O glasi:

$$F(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + \left(z - \int_0^t U_z dt \right)^2 - r_0^2 = 0. \quad (426a)$$

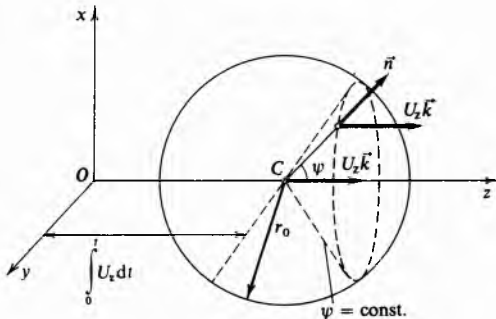
Izraz (425c) daje

$$u_n = \frac{U_z \left(z - \int_0^t U_z dt \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \int_0^t U_z dt \right)^2}} = \frac{z - \int_0^t U_z dt}{r_0} = U_z \cos \psi, \quad (426b)$$

gdje je kut ψ druga koordinata sfernog koordinatnog sustava. Prema tome je granični kinematički uvjet na granici kugle (426a) izražen sa

$$v_n = U_z \cos \psi. \quad (426c)$$

Do istog se rezultata dolazi i primjenom izraza (425h).



Sl. 82. Izvod kinematičkoga graničnog uvjeta na krutoj površini pomične kugle

Granični uvjeti na razdjelnoj površini dvaju idealnih fluida. Ako je $u_n^{(S)}$ normalna komponenta brzine točaka razdjelne površine S , a 1 i 2 oznake njezinih dviju strana, granični su uvjeti dani izrazima

$$v_n^{(1)}|_S = v_n^{(2)}|_S = u_n^{(S)}, \quad p^{(1)}|_S = p^{(2)}|_S, \quad (427)$$

gdje je prvi uvjet analogan uvjetu (425b), a drugi se uvjet dokazuje istim izvedom kao i uvjet (122b) u statici fluida, ako se pri strujanju idealnog fluida zanemari utjecaj površinske napetosti.

Uvjeti u beskonačnosti odnose se na ponašanje brzine, tlaka i temperature u beskonačnosti:

$$(\vec{v})_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}_\infty(t), \quad (p)_{r \rightarrow \infty} = p_\infty(t), \quad (T)_{r \rightarrow \infty} = T_\infty(t). \quad (428)$$

Početni uvjeti. Budući da strujanje fluida zavisi od stanja iz kojeg je počelo u neki početni trenutak $t = t_0$, potrebno je to stanje definirati početnim uvjetima:

$$(\vec{v})_{t=t_0} = \vec{v}_0(\vec{r}), \quad (p)_{t=t_0} = p_0(\vec{r}), \quad (T)_{t=t_0} = T_0(\vec{r}). \quad (429)$$

Pri stacionarnom strujanju početni uvjeti nemaju smisla, jer bi njima bile definirane sve tražene funkcije i u sva kasnija vremena, tj. ti bi uvjeti već predstavljali rješenje. Prema tome, rješenje problema strujanja idealnog toplinski nevodljiva fluida sastoji se u određivanju takvih funkcija $\vec{v}$, p , ρ , u i T koje su rješenje sustava jednačbi (421a) do (423c), koje u početni trenutak $t = t_0$ prelaze u funkcije (429) i koje u sva vremena $t > t_0$ zadovoljavaju granične uvjete (425b), (427) i (428). Ako je u trenutku $t = t_0$ zadana razdjelna površina S_0 , treba odrediti i oblik površine S u sva kasnija vremena $t > t_0$.

Posebni integrali Eulerovih jednačbi gibanja idealnoga barotropnog fluida pod djelovanjem konzervativnih masenih sila. Idealni fluid u strujanju je *barotropan*, odnosno njegovo strujanje je barotropno ako gustoća fluida ρ zavisi samo od tlaka

$$\rho = \rho(p). \quad (430a)$$

Za barotropne je fluide prikladno uvesti funkciju tlaka $\mathcal{P}$ definiranu sa

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (430b)$$

s dimenzijom $[\mathcal{P}] = L^2 T^{-2}$, dakle $[\mathcal{P}]_{SI} = m^2/s^2$. Pomoću funkcije tlaka $\mathcal{P}$ član s gradijentom tlaka u Eulerovoj jednačbi gibanja (421a) može se pisati:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathcal{P}. \quad (430c)$$

Konzervativno polje masene sile $\vec{f}$ ima potencijal U , izraz (17), tako da je

$$\vec{f} = - \text{grad } U. \quad (430d)$$

Primjenom izraza (240) za konvektivnu akceleraciju i izraza (430c) i (430d), Eulerova jednačba gibanja idealnoga barotropnog fluida (421a) dobiva Lamb-Gromekin oblik:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = - \text{grad} \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U \right). \quad (431)$$

Taj je oblik jednačbe gibanja vrlo prikladan za istraživanje njenih posebnih integrala, što se svodi na posebne smjerove integracije i na posebne vrste strujanja.

Posebni smjerovi integracije. Za stacionarno strujanje jednačba gibanja (431) prelazi u

$$\text{grad} \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U \right) = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}. \quad (432)$$

Pomnoži li se ta jednačba skalarno s elementom luka strujnice

$$d\vec{s}_{str} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} ds, \quad (433a)$$

dobiva se

$$d_{str} \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U \right) = 0, \quad (433b)$$

jer je vektor $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ okomit na $\vec{v}$ i $\text{rot } \vec{v}$; indeks str označava diferencijal u smjeru strujnice. Budući da je samo diferencijal konstante jednak nuli, izraz (433b) pokazuje da je uzduž strujnice

$$\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U = \text{const.} \quad (433c)$$

Dalji oblik jednadžbe (433c) zavisi od vrste barotropnosti fluida, tj. od oblika funkcije $\mathcal{P}$, i od vrste konzervativnog polja mase sile, tj. od funkcije U . Za strujanje nestlačivog fluida

$$\rho = \rho(p) = \text{const.}, \quad \mathcal{P} = \frac{p}{\rho}, \quad (433d)$$

u polju sile teže $U = gz$, jednadžba (433c) prelazi u Bernoullijevu jednadžbu ili Bernoullijev integral:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.}, \text{ uzduž strujnice.} \quad (433e)$$

Ako se jednadžba (432) pomnoži skalarno s elementom luka vrtložne krivulje

$$d\vec{s}_{\text{vrtl}} = \frac{\text{rot } \vec{v}}{|\text{rot } \vec{v}|} ds, \quad (434a)$$

dobiva se

$$\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U = \text{const.}, \text{ uzduž vrtložne krivulje,} \quad (434b)$$

ili za nestlačivi fluid u polju sile teže:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.}, \text{ uzduž vrtložne krivulje.} \quad (434c)$$

Ako se iz točke M (sl. 83) u polju stacionarnog strujanja idealnog barotropnog fluida povuče strujnica, pa se iz točaka strujnice povuku vrtložne krivulje, zatim iz točaka vrtložnih krivulja povuku nove strujnice i nastavi li se taj postupak, mreža strujnica i vrtložnih krivulja formira površinu. U svakoj točki te površine vektor $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ okomit je na površinu. Da bi u vektorskom polju $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ postojale površine koje vektorske krivulje tog polja ortogonalno presijecaju, to vektorsko polje mora zadovoljavati uvjet (119b). Ako ukupna specifična mehanička energija po jedinici mase iznosi

$$E = \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U, \quad (435a)$$

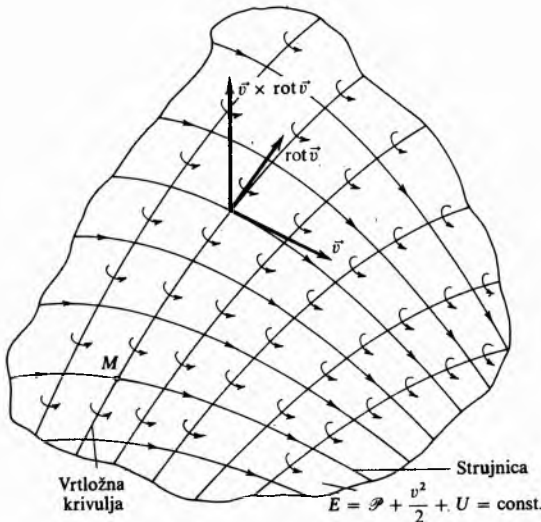
tada jednadžba (432) dobiva oblik

$$\text{grad } E = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}, \quad (435b)$$

a provjera uvjeta (119b) za vektorsko polje $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ daje $(\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) \cdot \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = \text{grad } E \cdot \text{rot}(\text{grad } E) \equiv 0$. (435c)

Prema tome, postoje površine

$$E = \mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U = \text{const.}, \quad (435d)$$



Sl. 83. Površina konstantne specifične mehaničke energije

koje vektorske krivulje polja $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ normalno probadaju, pa je moguća i integracija jednadžbe (432) uzduž proizvoljnih krivulja preko tih površina.

Za nestlačiv idealni fluid u stacionarnom strujanju u polju sile teže taj se integral može napisati u obliku

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.} \quad (435e)$$

uzduž proizvoljne krivulje na površini $E = \text{const.}$

Ako se *jednodimenzijско nestacionarno strujanje* nestlačivog idealnog fluida definira kao strujanje u kojemu strujnice u toku vremena ne mijenjaju svoj prostorni oblik i položaj, tada se za vektor brzine uzduž strujnice takva strujanja može pisati

$$\vec{v} = v(s, t) \vec{e}_s(s), \quad (436a)$$

gdje je s linearna varijabla uzduž strujnice, a $\vec{e}_s$ jedinični vektor tangencijalan na strujnicu i zavisao samo od s . Parcijalna vremenska derivacija vektora brzine (436a) daje:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_s, \quad (436b)$$

što uvršteno u (431) omogućuje za nestlačivi fluid integraciju uzduž strujnice:

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds, \quad (436c)$$

gdje je oznaka 1 za točku uzvodno, a oznaka 2 za točku nizvodno na istoj strujnici.

Izraz (436c) pokazuje da se dio ukupne mehaničke energije troši i na ubrzanje mase fluida unutar elementarne strujne cijevi formirane oko strujnice. Naime, ako je $\partial v / \partial t > 0$, izraz (436c) pokazuje da je ukupna mehanička energija u nizvodnoj točki 2 manja nego u uzvodnoj točki 1.

Posebne vrste strujanja. Bezvrtložno strujanje idealnog fluida definirano je identitetom

$$\text{rot } \vec{v} \equiv 0, \quad (437a)$$

koji garantira da postoji skalarni potencijal brzine

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t), \quad (437b)$$

tako da polje strujanja postaje gradijentno

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi. \quad (437c)$$

Za lokalnu akceleraciju može se pisati

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (437d)$$

pa Eulerova jednadžba gibanja (431) za idealni barotropni fluid u potencijalnom strujanju dobiva oblik

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + U \right) = 0. \quad (438a)$$

Izraz (438a) pokazuje da je u određenom trenutku podgradijentna funkcija jednaka konstanti koja je ista u svim točkama prostora potencijalnog strujanja idealnog barotropnog fluida. Ta se prostorna konstanta može vremenski mijenjati, pa se označuje samo kao funkcija vremena $F(t)$, tako da integral jednadžbe (438a) prelazi u tzv. *Cauchy-Lagrangeov* integral:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + U = F(t). \quad (438b)$$

Funkcija $F(t)$ može se uključiti u funkciju nekog novog potencijala brzine φ_1 pomoću jednostavne transformacije

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad (438c)$$

tako da je

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) - \int_0^t F(t) dt, \quad (438d)$$

pa integral (438b) s funkcijom φ_1 dobiva oblik

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \mathcal{P} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi_1|^2 + U = 0. \quad (438e)$$

Za strujanje idealnoga nestlačivog fluida u polju sile teže Cauchy-Lagrangeov integral ima oblik

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + gz = F(t). \quad (438f)$$

Ako u beskonačnosti potencijal brzine teži k nuli, tj.

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rightarrow 0, \quad |\text{grad } \varphi| \rightarrow 0,$$

a na visini $z = z_0$ tlak teži k nekoj konstantnoj vrijednosti

$$p \rightarrow p_\infty = \text{const.},$$

tada (438f) daje izraz za tlak:

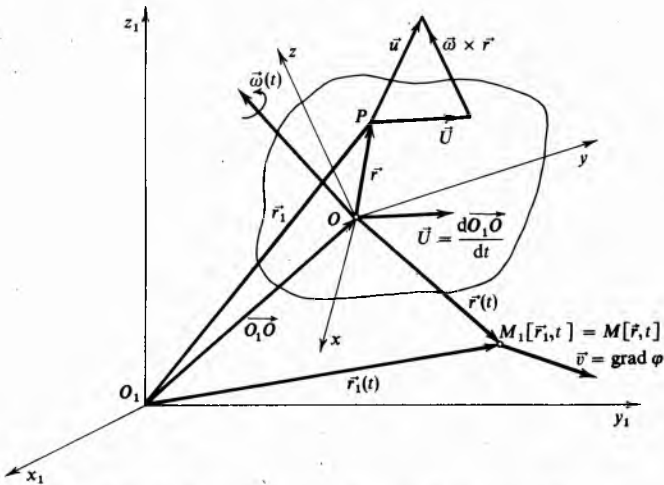
$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= p_\infty - \rho g(z - z_0) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\text{grad } \varphi|^2 = \\ &= p_{HS} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\text{grad } \varphi|^2, \end{aligned} \quad (438g)$$

gdje je $p_{HS} = p_\infty - \rho g(z - z_0)$ hidrostatski tlak.

Prikazani oblici jednadžbi gibanja fluida izvedeni su za inercijski sustav, pa su i integrali tih jednadžbi valjani za strujanja opisana u inercijskom sustavu. Međutim, ponekad je potrebno da se ti integrali, pa i Cauchy-Lagrangeov, izraze u pomičnom neinercijskom sustavu, npr. u sustavu čvrsto vezanom uz tijelo koje se giba u idealnom nestlačivom fluidu proizvoljnom, vremenski promjenljivom brzinom

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{U}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad (439a)$$

gdje je $\vec{U}(t)$ brzina gibanja ishodišta O neinercijskog sustava $Oxyz$ prema inercijskom sustavu $O_1x_1y_1z_1$; $\vec{\omega}(t)$ kutna brzina rotacije sustava $Oxyz$ mjerena u inercijskom sustavu $O_1x_1y_1z_1$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radijvektor mjerena u neinercijskom sustavu $Oxyz$; $\vec{u}(\vec{r}, t)$ prijenosna brzina točke neinercijskog sustava mjerena u inercijskom sustavu (sl. 84).



Sl. 84. Izvod Cauchy-Lagrangeova integrala u pomičnom neinercijskom sustavu

Za poznatu prijenosnu brzinu $\vec{u}$ točke u neinercijskom sustavu, definiranoj sa (439a), može se definirati i analitička veza između radijvektora $\vec{r}_1$ inercijskog sustava i radijvektora $\vec{r}$ neinercijskog sustava pomoću funkcije oblika

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\vec{r}, t). \quad (439b)$$

U potencijalnom se strujanju čestice fluida gibaju relativno prema oba sustava i ta su gibanja opisana sa dva različita zakona u ta dva sustava, a povezana su odnosom radijvektora (439b). Međutim, u istoj točki prostora $M_1 = M$ (sl. 84), u isti vremenski trenutak ta dva analitički različita opisa istog potencijalnog strujanja čestice fluida moraju u točki $M_1 = M$ dati

istu vrijednost potencijala brzine φ i isti vektor brzine $\vec{v}$ gibanja čestice, tj. mora vrijediti:

$$\varphi(\vec{r}_1, t) = \varphi[\vec{r}_1(\vec{r}, t), t] = \varphi(\vec{r}, t), \quad (439c)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_1, t) = \text{grad}[\varphi(\vec{r}_1, t)] = \text{grad}[\varphi(\vec{r}, t)] = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (439d)$$

$$M_1(\vec{r}_1, t) = M(\vec{r}, t). \quad (439e)$$

Cauchy-Lagrangeov integral u obliku (438f) izveden je za inercijski sustav, a parcijalna vremenska derivacija $\partial \varphi / \partial t$ proračunata je za inercijski radijvektor $\vec{r}_1 = \text{const.}$, što je potpuno različito od $\partial \varphi / \partial t$ pri $\vec{r} = \text{const.}$ Vrijedi, dakle,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r}_1 = \text{const.}} \quad (439f)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r} = \text{const.}} \neq \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r}_1 = \text{const.}} \quad (439g)$$

Iz jednakosti (439c) dobiva se

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r} = \text{const.}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r}_1 = \text{const.}} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \text{grad}[\varphi(\vec{r}_1, t)],$$

ili

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r}_1 = \text{const.}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r} = \text{const.}} - \vec{u} \cdot \text{grad}[\varphi(\vec{r}, t)], \quad (439h)$$

gdje je $\vec{u} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ prijenosna brzina točke neinercijskog sustava (439a).

Prema tome, Cauchy-Lagrangeov integral u pomičnom neinercijskom sustavu, uvrštenjem (439h) u (438b), dobiva oblik:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r} = \text{const.}} - \vec{u} \cdot \text{grad } \varphi + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + \mathcal{P} + U = F(t), \quad (440)$$

a za nestlačivi fluid u polju sile teže taj izraz postaje

$$p(\vec{r}, t) = p_{HS} - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\vec{r} = \text{const.}} + \rho \vec{u} \cdot \text{grad } \varphi - \frac{1}{2} \rho |\text{grad } \varphi|^2. \quad (440a)$$

Pri stacionarnom potencijalnom strujanju jest $\varphi = \varphi(\vec{r})$ i $\partial \varphi / \partial t = 0$, pa Cauchy-Lagrangeov integral (438b) prelazi u Euler-Bernoullijev integral

$$\mathcal{P} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + U = C, \quad (441)$$

gdje je C jednaka i ista konstanta za sve točke prostora kojim idealni barotropni fluid struji stacionarno i potencijalno.

Za nestlačivi fluid u potencijalnom strujanju u polju sile teže Euler-Bernoullijev integral ima oblik

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + gz = C. \quad (441a)$$

Premda je integral (441a) formalno jednak Bernoullijevoj jednadžbi (433e), daje mu se posebno ime da bi se naglasila razlika u uvjetima pod kojima su ti izrazi izvedeni. Naime, dok se lijeva strana Bernoullijeve jednadžbe (433e) odnosi na općenitiji tip strujanja idealnoga nestlačivog fluida, tj. i na vrtložno strujanje, pa je konstanta na desnoj strani valjana samo uzduž strujnice i mijenja se od strujnice do strujnice, lijeva strana Euler-Bernoullijeva integrala (441a) ograničena je samo na potencijalno strujanje, pa je konstanta na desnoj strani postala univerzalna za čitav prostor strujanja fluida.

Kad je pri strujanju u svakoj točki vektor vrtložnosti rot $\vec{v}$ kolinearan s vektorom brzine strujanja $\vec{v}$, iščezava njihov vektorski produkt $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = 0$, pa ako je takvo strujanje i stacionarno, može se integrirati Eulerova jednadžba gibanja (431). Integracijom se dobiva tzv. Gromekin integral

$$\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} + U = \text{const.}, \quad (442)$$

pri strujanju u kojem je $\vec{v} \parallel \text{rot } \vec{v}$. Takvo je strujanje npr. nestlačivo strujanje s poljem brzine prema izrazu (284), pa se u tom polju može primijeniti Gromekin integral za nestlačivi fluid u polju sile teže:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const.} (\vec{v} \parallel \text{rot } \vec{v}). \quad (442a)$$

Premda su posebni integrali Eulerovih jednadžbi gibanja strogo valjani samo za idealni fluid, oni se mogu primijeniti i za realna strujanja, jer se npr. strujanje fluida izvan viskozno relativno tankog graničnog sloja uz tijelo može smatrati potencijalnim.

Impulсно gibanje, kinetička energija potencijalnog strujanja i Kelvinov teorem o minimumu kinetičke energije. Pomoću razdiobe impulsa tlaka koji djeluje unutar fluida može se mirujući nestlačivi fluid trenutno prevesti u bilo koje potencijalno strujanje. Naime, ako osim uobičajene masene sile $\vec{f}$ i tlaka p na fluid djeluju kratkotrajno, ali s velikim intenzitetom, trenutna sila $\vec{f}'$ i trenutni tlak p' , Eulerova jednadžba gibanja idealnog fluida (421a) dobiva oblik:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} + \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{\rho} \text{grad } p'. \quad (443)$$

Pri integraciji te jednadžbe u kratkom vremenskom intervalu od $t = 0$ do $t = \tau$ može se zanemariti impuls obične masene sile $\vec{f}$ i tlaka p , pa ostaje

$$\vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \text{grad} \left(\int_0^\tau p' dt \right), \quad (444)$$

gdje je $\vec{v}_1$ brzina strujanja fluida neposredno prije impulsnog djelovanja sila, $\vec{v}$ brzina strujanja fluida nakon impulsnog djelovanja sila, a $\vec{f}'$ impuls trenutne masene sile definiran sa:

$$\vec{f}' = \int_0^\tau \vec{f}' dt. \quad (445)$$

Ako nema impulsa trenutnih masenih sila, tj. $\vec{f}' = 0$, nego samo impuls trenutne razdiobe tlaka p' označen sa

$$\pi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau p' dt \quad (446)$$

i ako je strujanje fluida započelo iz stanja mirovanja $\vec{v}_1 = 0$, a trenutnim djelovanjem impulsa tlaka π stvoreno je polje brzine potencijalnog strujanja $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, izraz (444) prelazi u

$$\text{grad } \varphi = - \frac{1}{\rho} \text{grad } \pi, \quad (447)$$

pa integracija za nestlačivi fluid $\rho = \text{const.}$ daje

$$\pi = -\rho\varphi + \text{const.} \quad (448)$$

U izrazu (448) može se zanemariti konstanta, jer razdioba konstantnog tlaka unutar fluida ne utječe na strujanje, pa je $-\rho\varphi$ jednako impulsu π trenutnog tlaka p' . Taj bi impuls, prostorno raspoređen u polju strujanja, trenutno stvorio iz stanja mirovanja potencijalno strujanje koje stvarno postoji.

Primjenom teorema Gauss-Ostrogradskoga (46c) i jednakosti

$$\text{div}(\varphi \text{grad } \varphi) = \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \Delta \varphi = \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi, \quad (449)$$

jer je za nestlačivo strujanje $\Delta \varphi = 0$, dobiva se izraz za kinetičku energiju potencijalnog strujanja nestlačivog fluida:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho \int_V v^2 dV = \frac{1}{2} \rho \int_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi dV = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_V \text{div}(\varphi \text{grad } \varphi) dV = \frac{1}{2} \rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (450)$$

U izrazu (450) zatvorena površina S ograda volumen fluida V , a $\vec{n}$ je vanjska normala na S s obzirom na fluid unutar V . Izraz (450) može se primijeniti i za proračun kinetičke energije nestlačivog fluida kad se u fluidu koji u beskonačnosti miruje giba kruto tijelo. Tada je V neograničen volumen fluida oko tijela koje je ogradenom površinom S , sastavljenom od zatvorene površine tijela S_0 i površine S_∞ beskonačno velike

kugle sa središtem unutar tijela, položene u fluid u potencijalnom strujanju. Budući da daleko od tijela pri $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ brže iščezavaju i φ i $\partial \varphi / \partial n$ nego što S_∞ raste, ostaje od integrala (450) samo integral preko površine tijela S_0 .

Kelvinov teorem minimalne kinetičke energije glasi: Ako su na granici nekog jednostavno zatvorenog područja normalne komponente brzine vrtložnog i bezvrtložnog (potencijalnog) strujanja jednake, tada je kinetička energija bezvrtložnog strujanja u promatranom području manja od kinetičke energije vrtložnog strujanja. Naime, neka je $E_{k\text{pot}}$ kinetička energija bezvrtložnog strujanja nestlačivog fluida s potencijalom brzine φ :

$$E_{k\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho \int_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi dV, \quad (451)$$

a E_k kinetička energija bilo kojeg drugog vrtložnog strujanja:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{v} \cdot \vec{v} dV, \quad (452)$$

gdje je

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{pot}} + \vec{v}_1 = \text{grad } \varphi + \vec{v}_1. \quad (453)$$

Uz uvjete teorema vrijedi: $\text{div } \vec{v} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{v} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{n}$ (na granici), tako da je prema (453)

$$\text{div } \vec{v}_1 = 0, \quad (454)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = (\vec{v} - \text{grad } \varphi) \cdot \vec{n} = 0 \text{ (na granici)}. \quad (455)$$

Prema tome se izraz (452) može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho \int_V (\text{grad } \varphi + \vec{v}_1)^2 dV = \\ &= E_{k\text{pot}} + E_{k1} + \rho \int_V \vec{v}_1 \cdot \text{grad } \varphi dV, \end{aligned} \quad (456)$$

gdje je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 dV. \quad (457)$$

Prema pravilu vektorske analize vrijedi:

$$\text{div}(\varphi \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \text{grad } \varphi,$$

pa je, primjenom (455), zadnji član desne strane (456) jednak nuli, tj.

$$\rho \int_V \vec{v}_1 \cdot \text{grad } \varphi dV = \rho \int_V \text{div}(\varphi \vec{v}_1) dV = \rho \int_S \varphi \vec{v}_1 \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (458)$$

tako da izraz (456) prelazi u

$$E_k = E_{k\text{pot}} + E_{k1}, \quad (459)$$

a budući da je $E_{k1} > 0$, slijedi

$$E_{k\text{pot}} < E_k. \quad (460)$$

Dinamički teoremi o vrtlozima. Kelvinov dinamički teorem o vrtlozima glasi: Ako masene sile imaju jednoznačni potencijal U , a idealni fluid je u barotropnom strujanju tako da postoji funkcija tlaka $\mathcal{P}$ (430b), cirkulacija brzine po zatvorenoj materijalnoj krivulji ne mijenja se tokom vremena. Taj se teorem jednostavno dokazuje pomoću Eulerove jednadžbe gibanja (421a), koja za uvjete teorema ima oblik

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(U + \mathcal{P}), \quad (461a)$$

i Kelvinova kinematičkog teorema (354)

$$\frac{D\Gamma_{C(t)}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{C(t)} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} = - \int_{C(t)} d(U + \mathcal{P}) = 0, \quad (461b)$$

odakle odmah slijedi

$$\Gamma_{C(t)} = \text{const. tokom vremena}, \quad (461c)$$

gdje je $C(t)$ zatvorena materijalna krivulja koja se sve vrijeme sastoji od istih čestica.

Premda se teorem (461c) odnosi na čisto kinematički element strujanja, u izvodu tog teorema bitna je dinamička struktura sustava strujanja: konzervativnost masenih sila i barotropnost strujanja idealnog fluida.

Uz iste uvjete Eulerova vektorska jednadžba gibanja poprima Lamb-Gromekin oblik (431). Operacijom rotora nad objema stranama te jednadžbe, uz identitet $\text{rot grad} \equiv 0$, dobiva se

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}), \quad (462a)$$

gdje je

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \text{rot}[\vec{v}(\vec{r}, t)], \quad (462b)$$

vektor vrtložnosti koji zadovoljava uvjet da je vektorsko polje solenoidalno:

$$\text{div } \vec{\Omega} = 0. \quad (462c)$$

Lako se dokaže da za bilo koje solenoidalno vektorsko polje $\vec{a}(\vec{r}, t)$ vrijedi izraz za vremensku individualnu derivaciju toka takvog vektora kroz materijalnu površinu

$$\frac{D}{Dt} \int_{S(t)} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{a}) \right] \cdot \vec{n} dS, \quad (463)$$

gdje je $S(t)$ materijalna površina koja se kroz sve vrijeme sastoji od istih čestica.

Za solenoidalno vektorsko polje $\vec{\Omega}$, koje uz uvjet (462c) zadovoljava i uvjet (462a), primjena izraza (463) daje

$$\frac{D}{Dt} \int_{S(t)} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (464a)$$

ili

$$\int_{S(t)} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \text{const. tokom vremena.} \quad (464b)$$

To je zakon održanja toka vektora vrtložnosti $\vec{\Omega}$ kroz proizvoljnu površinu $S(t)$ koja se giba zajedno s česticama fluida. Primjenom Stokesova teorema (352) na (464b) odmah se dobiva izraz (461c) za Kelvinov teorem.

Primijeni li se zakon održanja toka vektora vrtložnosti (464b), mogu se jednostavno dokazati dva *Helmholtzova dinamička teorema o vrtlozima*. Prvi teorem glasi: Ako u barotropnom strujanju idealnog fluida pod djelovanjem konzervativnih masenih sila čestice fluida u nekom trenutku tvore vrtložnu površinu, vrtložnu cijev ili vrtložnu krivulju, tada one u sve vrijeme strujanja tvore vrtložnu površinu, vrtložnu cijev ili vrtložnu krivulju.

Drugi Helmholtzov dinamički teorem koji se odnosi na isti tip strujanja idealnoga barotropnog fluida glasi: Intenzitet vrtložne cijevi, definiran veličinom i prema izrazu (347c), ostaje konstantan kroz sve vrijeme strujanja, tj.

$$i = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \Gamma_C = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{const.}, \quad (465)$$

gdje je S proizvoljan presjek vrtložne cijevi, a C proizvoljna zatvorena krivulja koja opasuje vrtložnu cijev.

Iz Kelvinova teorema (461c) neposredno proizlazi *Lagrangeov teorem* koji glasi: Ako na idealni fluid u barotropnom strujanju djeluju masene konzervativne sile, a u nekom dijelu fluida u neki dani trenutak vremena t_0 nema vrtloga, tada ih u tom dijelu fluida nije bilo ni ranije u $t < t_0$ niti će ih biti kasnije u $t > t_0$. Treba naglasiti da se taj teorem ne odnosi na određene točke prostora, već na dio fluida u strujanju koji općenito mijenja svoj oblik i položaj u prostoru.

Prema uvjetu Lagrangeova teorema, u vrijeme t_0 je u nekom dijelu fluida $\text{rot } \vec{v} = 0$, pa primjena Stokesova teorema (352) pokazuje da je i cirkulacija brzine po proizvoljnoj zatvorenoj krivulji, položenoj u taj dio fluida, također jednaka nuli, tj.

$$\Gamma = \int_{C(t_0)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (466a)$$

Prema Kelvinovu teoremu cirkulacija Γ po zatvorenoj materijalnoj krivulji C ostat će jednaka nuli i u sva druga vremena. Ponovna primjena Stokesova teorema (352) pokazuje da za proizvoljnu površinu S koja potpuno leži u promatranom dijelu fluida vrijedi:

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} dS = 0, \quad (466b)$$

a to je moguće samo ako u proizvoljnoj točki promatranog dijela fluida i za proizvoljan smjer $\vec{n}$ vrijedi $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0$, tj. za proizvoljnu česticu u proizvoljno vrijeme $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Bezvrtnost je uvjet da postoji potencijal brzine ϕ , pa se Lagrangeov teorem može formulirati i na sljedeći način: Ako je u nekom trenutku vremena barotropno strujanje idealnog fluida bilo potencijalno, tada je ono bilo i bit će potencijalno i u svim ostalim trenucima vremena.

Zato što u realnim strujanjima vrtlozi nastaju i nestaju, znači da ti realni uvjeti odstupaju od onih u Kelvinovu teoremu, tj. ili je fluid viskozan, ili strujanje nije barotropno, ili masene sile nisu konzervativne, ili je narušena neprekidnost polja brzine.

Vrtložnost i entropija. U analizi strujanja fluida i za razumijevanje fizike polja strujanja vrlo su važni pojava i svojstva vrtložnosti strujanja, ponašanje entropije sustava i odnos između vrtložnosti i entropije. Kad je poznat taj odnos, može se iz povećanja entropije na nekom mjestu u strujanju (npr. pri prolazu kroz zakrivljeni udarni val) odrediti vrtložnost uvedena u strujanje na tom mjestu.

Odnos vektora vrtložnosti $\vec{\Omega}$ (342b) i gradijenta specifične entropije s dobiva se eliminiranjem tlaka p iz Navier-Stokesovih jednadžbi (409e), u kojima je pretpostavljeno da su viskoznosti μ i μ_v konstantne. Primjenom Gibbsove jednadžbe (414a) za diferencijal entalpije h može se pisati

$$dh = du + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = T ds + \frac{1}{\rho} dp. \quad (467a)$$

Budući da se pretpostavlja da sve čestice fluida imaju istu jednadžbu stanja, izraz (467a) vrijedi za bilo koji par bliskih čestica u bliskom termodinamičkom stanju, pa tako i za susjedne čestice u neprekidnom strujanju. Uz identitet operatora nad skalarnom funkcijom

$$d = d\vec{r} \cdot \text{grad} \quad (467b)$$

i budući da je izraz (467a) valjan za sve smjerove elementa $d\vec{r}$, može se (467a) izraziti i u gradijentnom obliku:

$$\text{grad } h = T \text{grad } s + \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (467c)$$

što uvršteno u (409e), uz pretpostavku konzervativnih masenih sila, daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\Omega} &= T \text{grad } s - \text{grad} \left(h + \frac{v^2}{2} + U \right) - \frac{\mu}{\rho} \text{rot } \vec{\Omega} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \mu + \mu_v \right) \text{grad div } \vec{v}. \end{aligned} \quad (468)$$

To je jednadžba koja povezuje vrtložnost i entropiju s pri strujanju newtonskih fluida konstantne viskoznosti. Za idealni je fluid $\mu = \mu_v = 0$, pa izraz (468) prelazi u Croccovu jednadžbu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\Omega} = T \text{grad } s - \text{grad} \left(h + \frac{v^2}{2} + U \right). \quad (469)$$

Pri *stacionarnom adijabatskom* strujanju idealnog fluida jednadžba entropije (414c) prelazi u

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \quad (470a)$$

ili

$$s = \text{const. uzduž strujnice.} \quad (470b)$$

Takvo se strujanje zove *izentropsko*.

Pri stacionarnom adijabatskom strujanju Croccova jednadžba (469) ima oblik

$$\vec{v} \times \vec{\Omega} = -T \text{grad} s + \text{grad}(h_0 + U), \quad (470c)$$

gdje je h_0 specifična entalpija stanja mirovanja kad je fluid reverzibilnim procesom doveden u to stanje, tj.

$$h_0 = h + \frac{1}{2} v^2. \quad (470d)$$

U Croccovoj je jednadžbi (470c) član $\vec{v} \times \vec{\Omega}$ okomit na strujnicu i na vrtložnu krivulju i nema komponente u smjeru tih krivulja, pa kako ni $\text{grad} s$ prema (470b) nema komponente u smjeru strujnice stacionarnog adijabatskog strujanja, to vrijedi:

$$h_0 + U = \text{const. uzduž strujnice.} \quad (470e)$$

Do istog se zaključka dolazi izravno ako se energetska jednadžba (386c) primijeni za stacionarno ($\partial/\partial t \equiv 0$) adijabatsko ($\vec{q} = 0$) strujanje idealnog fluida ($T_\kappa = 0$), jer tada njena desna strana iščezava, pa je

$$\rho \vec{v} \cdot \text{grad} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = 0, \quad (470f)$$

iz čega slijedi izraz (470e).

Ako se u nekom spremniku nalazi plin u stanju mirovanja i u mehaničkoj i termodinamičkoj ravnoteži, tada su u svim točkama spremnika $h_0 + U$ i entropija s konstantni. Ako iz stanja mirovanja započinje strujanje plina, tada su $h_0 + U$ i s isti za sve strujnice koje izlaze iz spremnika, pa su

$$\begin{aligned} \text{grad}(h_0 + U) &= 0, \\ \text{grad} s &= 0, \end{aligned} \quad (470g)$$

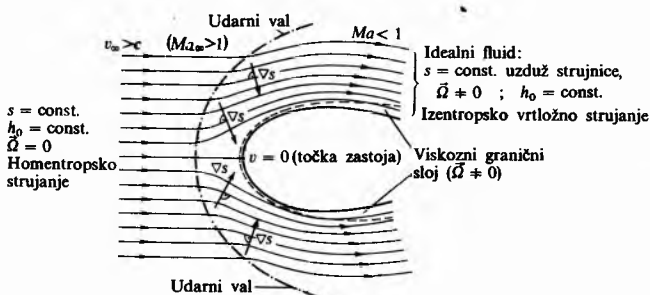
a prema Croccovoj jednadžbi (470c) slijedi

$$\vec{v} \times \vec{\Omega} = 0. \quad (470h)$$

Osim trivijalnog rješenja $\vec{v} = 0$, taj je uvjet zadovoljen pri bezvrtložnom strujanju $\vec{\Omega} = 0$ i pri strujanju u kojem su $\vec{v}$ i $\vec{\Omega}$ paralelni vektori, pa se strujnice poklapaju s vrtložnim krivuljama, npr. u polju brzine strujanja nestlačivog fluida opisanog izrazima (284).

Svako strujanje koje zadovoljava uvjet $\text{grad} s = 0$ naziva se *homotropskim*.

Ako se neko tijelo (npr. avion, raketa ili projektil) giba konstantnom nadzvučnom brzinom kroz atmosferu, tada se promatraču vezanom uz to tijelo jednolika atmosfera daleko ispred tijela pričinja kao jednoliko paralelno strujanje zraka nadzvučnom brzinom v_∞ , tj. $Ma_\infty = v_\infty/c > 1$, (sl. 85). U svim točkama tog polja strujanja vladaju uvjeti homotropskog strujanja $\text{grad} s = 0$, ili $s = \text{const.}$ Takvo se stanje nastavlja i uzduž strujnica koje se razvijaju iz jednolikog strujanja, ali samo do zakrivljenog udarnog vala koji se formira ispred prednjeg dijela tijela. Pri prolazu kroz udarni val nadzvučna brzina strujanja skokovito se smanjuje na podzvučnu brzinu, i nakon toga uzduž središnje strujnice pada na nulu u točki zastoja. I sve se ostale veličine skokovito mijenjaju pri prolazu kroz udarni val, pa skokovito poraste i specifična entropija s . Skokoviti porast entropije veći je na središnjoj strujnici,



Sl. 85. Primjena Croccove jednadžbe u analizi strujanja iza zakrivljenog udarnog vala

gdje je udar jači, a manji prema periferiji, pa se zbog toga formiraju gradijenti entropije prikazani na sl. 85. Strujanje zraka izvan relativno tanka viskoznog graničnog sloja uz površinu tijela može se smatrati nevizkoznim strujanjem idealnog fluida. Zato u području strujanja izvan graničnog sloja i iza udarnog vala vrijede uvjeti Croccove jednadžbe (470c), tj. uvjeti stacionarnog adijabatskog strujanja idealnog fluida. To znači da je prema (470b) $s = \text{const.}$ uzduž strujnice, $\text{grad} s$ je okomit na strujnicu, a prema (470c) i uz $\text{grad}(h_0 + U) = 0$ strujanje je vrtložno, tj. $\vec{\Omega} \neq 0$, i to tako da je $\vec{\Omega}$ okomit na $\text{grad} s$.

Operacijom rotora nad lijevom i desnom stranom jednadžbe (468) pomoću identiteta (409c) i izraza

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) \equiv -\vec{\Omega} \text{div} \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (471a)$$

gdje je usputno primijenjen i identitet $\text{div} \vec{\Omega} = \text{div rot} \vec{v} \equiv 0$, dobiva se *jednadžba vrtložnosti*

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = -\vec{\Omega} \text{div} \vec{v} + (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \\ &+ \text{grad} T \times \text{grad} s - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{4}{3} \mu + \mu_v \right) \text{grad} \rho \times \\ &\times \text{grad div} \vec{v} + \frac{\mu}{\rho} \left(\Delta \vec{\Omega} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho \times \text{rot} \vec{\Omega} \right). \end{aligned} \quad (471b)$$

Za nestlačiv viskozni fluid konstantne viskoznosti i kad je specifična entropija funkcija samo temperature, $s = f(T)$, tako da je $\text{grad} s = f' \text{grad} T$ i $\text{grad} T \times \text{grad} s = 0$, jednadžba vrtložnosti (471b) poprima oblik

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\Omega}. \quad (471c)$$

Budući da se u toj jednadžbi ne javlja eksplicite tlak p , očito je da se polje vrtložnosti i brzine može odrediti i kad je nepoznato skalarno polje tlaka.

Jednadžba koju zadovoljava tlak p dobiva se operacijom divergencije nad vektorskom Navier-Stokesovom jednadžbom za nestlačivi fluid konstantne viskoznosti (410). Primjenom identiteta

$$\text{div}[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \frac{1}{2} \Delta v^2 - \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} - \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}, \quad (471d)$$

gdje je usputno primijenjena jednadžba kontinuiteta nestlačivog fluida $\text{div} \vec{v} = 0$, operacija divergencije daje *jednadžbu tlaka*

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho} \right) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} + \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} - \frac{1}{2} \Delta v^2 - \Delta U, \quad (471e)$$

što je Poissonova diferencijalna jednadžba.

U jednadžbi tlaka (471e) za polje sile teže, uz pretpostavku $g = \text{const.}$, vrijedi:

$$\Delta U_{(g)} = \Delta g z = 0. \quad (471f)$$

Jednodimenzijsko strujanje nestlačivog fluida

Znanstvena teorijska i eksperimentalna istraživanja različitih problema strujanja fluida polaze od osnovnih i iz njih izvedenih jednadžbi dinamike fluida. Zahvaljujući rezultatima takvih istraživanja postignut je s vremenom opći napredak i razvoj znanstvene misli mehanike fluida. Međutim, za tehničku je praksu često suviše složen i nepotreban strogo znanstveni pristup rješavanju konkretnih problema mehanike fluida, već su dovoljni jednostavni matematičko-hidrodinamički modeli koji daju rješenja ograničene, ali za tehničku praksu prihvatljive točnosti. Tako se jednodimenzijskim modelom strujanja (a to je najjednostavniji model strujanja) mogu približno simulirati i s dovoljnom točnošću rješavati i praktički problemi nekih trodimenzijskih strujanja.

Pretpostavlja se u idealiziranom jednodimenzijskom strujanju da se sva svojstva fluida i sve funkcije dinamičkih veličina strujanja mogu izraziti jednom duljinskom koordinatom i vremenom. Ta je pretpostavka potpuno opravdana za elementarnu strujnu cijev (sl. 64c), preko čijih se malih normalnih presjeka dA mogu zanemariti promjene gustoće, brzine, tlaka i ostalih veličina, tako da one ostaju funkcije samo koordinate s postavljene uzduž simetrale elementarne strujne cijevi i mjerenne od proizvoljno postavljenog ishodišta O na toj simetrali. Elementarna strujna cijev može u prostoru mijenjati smjer, pa zato i tok simetrale i koordinate s može imati proizvoljan trodimenzijski oblik. Dopusšteno je da gustoća, brzina, tlak i ostale veličine zavise i od vremena jedino pri određenim jednostavnijim tipovima nestacionarnih strujanja.

Pretpostavka da je u strujnim cijevima konačnih dimenzija strujanje jednodimenzijsko, razlog je pogreškama koje se ili mogu zanemariti ili se ispravljaju različitim empiričkim fakto-

rima. Hidrostaticka promjena tlaka preko presjeka ravnih dije-
lova strujne cijevi konačnih dimenzija može se jednostavno
uključiti u proračune koji se zasnivaju na modelu jednodimen-
zijskog strujanja.

Poprečni ravni presjeci strujne cijevi uzimaju se na ravnim
cilindričnim ili prizmatičkim dijelovima cijevi. Općenito, takav
se izbor ograničava uvjetima:

$$\frac{dA}{ds} \ll 1, \quad \frac{d}{R} \ll 1, \quad (472)$$

gdje je A površina poprečnog presjeka strujne cijevi, d promjer
cijevi ili visina kanala, a R polumjer zakrivljenosti simetrale
strujne cijevi.

Neke od osnovnih jednadžbi jednodimenzijskog strujanja
pretpostavljaju model idealnog fluida, pa su za uvjete strujanja
realnoga viskoznog fluida potrebne empirijske modifikacije tih
jednadžbi.

**Osnovne jednadžbe jednodimenzijskog strujanja nestlačivog
fluida bez izmjene topline s okolišem.** Takvo je strujanje de-
finirano funkcijama:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{const.}, \\ v &= v(s, t), \\ p &= p(s, t), \end{aligned} \quad (473)$$

uz dodatni uvjet da strujna cijev tokom vremena ne mijenja
ni oblik ni položaj u prostoru, ali se dopušta da se transla-
torno pomiče konstantnom brzinom.

Jednadžba kontinuiteta za stacionarno i nestacionarno jedno-
dimenzijsko strujanje poprima oblik (418e), ali se za strujnu cijev
konačnoga normalnog presjeka brzina v piše bez indeksa sr ,
tako da se za dvije točke strujne cijevi piše

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{const.} \quad (474)$$

Odnos tlaka p , brzine v i visine z u točkama 1 (uzvodno) i 2
(nizvodno) stacionarnog strujanja idealnoga nestlačivog fluida
unutar elementarne strujne cijevi izražava se *Bernoullijevom*
jednadžbom (433e), koja se tada piše

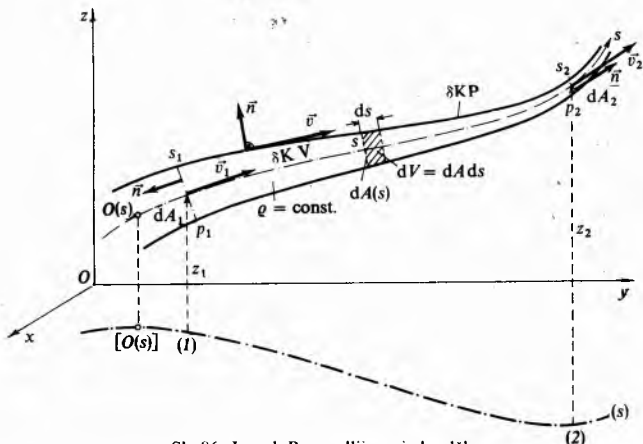
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2, \quad (475a)$$

a za tip nestacionarnog strujanja danog poljem brzine (436a),
što je u skladu i s uvjetima (473), jednadžba (436c) u obliku:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds. \quad (475b)$$

Prikladno je da indeksi točaka 1, 2, 3 itd. uzduž strujnice
imaju redoslijed u smjeru strujanja fluida. Razina $z = 0$ pot-
puno je proizvoljna, ali da bi visine z bile uvijek pozitivne,
prikladno je postaviti $z = 0$ u najnižu točku sustava ili ispod nje.

Energetski sadržaj Bernoullijeve jednadžbe može se fizikalno
jasnije istaknuti, a kasnije se može jednostavnije provesti njena



Sl. 86. Izvod Bernoullijeve jednadžbe

energetska modifikacija, ako se ona izvede iz jednadžbe kine-
tičke energije (383a). Prema (386d) za idealni nestlačivi fluid
($T_r = 0$, $\text{div } \vec{v} = 0$) gustoća snage unutrašnjih sila jest $p^{(0)} = 0$,
pa u polju sile teže $\vec{f}_{(g)} = -\text{grad } gz$, primjenom Reynoldsova
transportnog teorema (366), jednadžba (383a) za kontrolni vo-
lumen unutrašnjosti elementarne strujne cijevi (sl. 86) dobiva
oblik

$$\begin{aligned} \rho \int_{\delta KV} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dV + \rho \int_{\delta KP} \frac{1}{2} v^2 \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \\ = -\rho \int_{\delta KV} \vec{v} \cdot (\text{grad } gz) dV - \int_{\delta KP} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS. \end{aligned} \quad (475c)$$

Za $\text{div } \vec{v} = 0$ prvi se član desne strane može razviti u

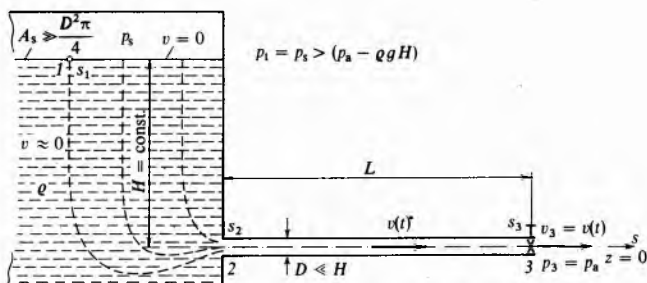
$$\int_{\delta KV} \vec{v} \cdot (\text{grad } gz) dV = \int_{\delta KV} \text{div}(gz \vec{v}) dV = \int_{\delta KP} gz \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (475d)$$

Preko plašta elementarne strujne cijevi $\vec{n}$ i $\vec{v}$ su međusobno
okomiti, pa uz $dV = ds dA$ i primjenom jednadžbe kontinuiteta
(418g) jednadžba (475d) prelazi u

$$\begin{aligned} \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds dQ + \frac{1}{2} \rho v_2^2 dQ - \frac{1}{2} \rho v_1^2 dQ = \\ = -\rho g(z_2 - z_1) dQ - (p_2 - p_1) dQ. \end{aligned} \quad (475e)$$

Ako se podijeli (475e) sa dQ , dobiva se Bernoullijeva jed-
nadžba (475b), odnosno za stacionarno strujanje $\partial/\partial t \equiv 0$ jed-
nadžba (475a).

Nestacionarno istjecanje iz spremnika. Kad se na izlazu cijevi
(sl. 87) u točki 3 naglo otvori zasun, zbog djelovanja gravitacije
i tlaka p_s započinje istjecati idealna kapljevina gustoće ρ iz
velikog spremnika. Pretpostavlja se da razina kapljevine u
spremniku ostaje tokom vremena na konstantnoj visini.



Sl. 87. Početna nestacionarna perioda istjecanja idealne kapljevine iz spremnika

Sve čestice kapljevine na slobodnoj površini u spremniku
imaju istu mehaničku energiju, a isto tako i na izlazu iz
cijevi. Zbog $D \ll H$ mogu se zanemariti neznatne promjene geo-
metrijske visine z preko presjeka izlaza cijevi, pa je Bernoul-
lijeva jednadžba identična za sve strujnice koje započinju na
slobodnoj površini u spremniku i izlaze u atmosferu na kraju
cijevi. Prema tome, čitava kapljevina u spremniku i cijevi može
se smatrati elementarnom strujnom cijevi, pa se tako problem
svodi na jednodimenzijsko strujanje za koje Bernoullijeva jed-
nadžba (475b) za točke 1 i 3 ima oblik:

$$\begin{aligned} p_s + \rho g H = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \int_{s_1}^{s_3} \frac{\partial v}{\partial t} ds = \\ = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \frac{dv}{dt} L, \end{aligned} \quad (476)$$

gdje je pretpostavljeno da je u svim točkama u spremniku
 $v = 0$. Ta je pretpostavka ozbiljnije pogrešna samo u neposred-
noj blizini izlaza iz spremnika. Zbog pretpostavke da je u
spremniku $v = 0$, integral od s_1 do s_3 prelazi u integral od

s_2 do s_3 , a budući da je promjer cijevi $D = \text{const.}$ i brzina u cijevi $v = v(t)$, rješenje integrala daje

$$\varrho \frac{dv}{dt}(s_3 - s_2) = \varrho \frac{dv}{dt}L. \quad (477a)$$

Iz (476) dobiva se diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama

$$\frac{dv}{\frac{2}{\varrho}(p_s - p_a + \varrho gH) - v^2} = \frac{1}{2L} dt. \quad (477b)$$

Prvi član u nazivniku lijeve strane predstavlja kvadrat asimptotske brzine istjecanja. Naime, pri $t \rightarrow \infty$, nestacionarni član u (476) može se zanemariti, pa je tada

$$v(t \rightarrow \infty) = v_0 = \sqrt{\frac{2}{\varrho}(p_s - p_a + \varrho gH)} > v(t), \quad (477c)$$

što pokazuje da je istjecanje moguće samo pri

$$p_s > (p_a + \varrho gH). \quad (477d)$$

Primjenom tabličnog integrala

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{a} \text{Arth} \frac{v}{a},$$

integracija izraza (477b) daje za $a^2 > v^2$ rješenje

$$v(t) = v_0 \text{th} \left(\frac{v_0}{2L} t \right), \quad (477e)$$

gdje je v_0 asimptotska brzina istjecanja definirana izrazom (477c). Očito je da će za dulju cijev duže trajati ubrzavanje istjecanja.

Ako je spremnik otvoren prema atmosferskom tlaku, tj. $p_s = p_a$, asimptotska brzina istjecanja v_0 prelazi u

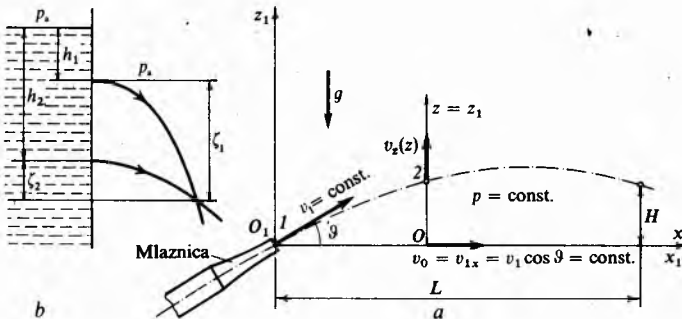
$$v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (477f)$$

To je *Torricellijeva formula* za brzinu stacionarnog istjecanja iz spremnika.

Domet mlaza. Treba odrediti kut ϑ vatrogasne mlaznice kojim će se za zadanu izlaznu brzinu mlaza v_1 ostvariti zadani uzdužni domet L i vertikalni domet H mlaza (sl. 88a). Ako se zanemari otpor što ga zrak pruža gibanju mlaza, na čestice fluida u mlazu ne djeluje horizontalna sila, pa će svaka čestica bilo gdje u mlazu imati konstantnu horizontalnu komponentu brzine

$$v_0 = v_{1x} = v_1 \cos \vartheta = \text{const.}, \quad (478a)$$

gdje je v_1 izlazna brzina mlaza.



Sl. 88. Domet mlaza

Inercijski sustav $O_1x_1z_1$ čvrsto je vezan za izlaz iz mlaznice, a inercijski sustav Oxz pomičan je i giba se translatorno horizontalno konstantnom brzinom v_0 . Promatrač koji je čvrsto vezan uz pomični inercijski sustav Oxz , prateći gibanje jedne čestice fluida, opaža samo vertikalnu komponentu gibanja čestice v_z . Ako je praćenje čestice započelo u vrijeme $t = 0$, kad su se O i O_1 poklapali, promatrač može primijeniti Bernoullijevu jednadžbu (475b), koja je valjana za svaki inercijski

sustav, i uz $p = \text{const.}$ dobiva

$$\frac{1}{2} \varrho v_1^2 z = \frac{1}{2} \varrho [v_z(z)]^2 + \varrho g z, \quad (478b)$$

gdje je

$$v_{1z} = v_1 \sin \vartheta \quad (478c)$$

vertikalna komponenta brzine čestice na izlazu iz mlaznice, a $v_z(z)$ brzina te iste čestice kad se nalazi na visini z .

Iz (478b) primjenom z -komponente izraza (227) slijedi:

$$v_z(z) = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \vartheta - 2gz} = \frac{Dz}{Dt}. \quad (478d)$$

Uvrsti li se (478c) u (478d), dobiva se separirana diferencijalna jednadžba:

$$\frac{Dz}{\sqrt{v_1^2 \sin^2 \vartheta - 2gz}} = Dt. \quad (478e)$$

Vrijeme potrebno da O prijeđe razdaljinu L iznosi

$$t_0 = \frac{L}{v_0} = \frac{L}{v_1 \cos \vartheta}, \quad (478f)$$

i kroz to se vrijeme čestica popne od $z = 0$ do $z = H$, tako da integral diferencijalne jednadžbe (478e) ima oblik

$$\int_0^H \frac{Dz}{\sqrt{v_1^2 \sin^2 \vartheta - 2gz}} = \int_0^{t_0} Dt = \frac{L}{v_1 \cos \vartheta}. \quad (478g)$$

Kad se sredi, integral daje

$$\tan \vartheta = \frac{v_1^2}{gL} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1^2}{gL}\right)^2 - \frac{2Hv_1^2}{gL^2} - 1}. \quad (478h)$$

Realna rješenja postoje samo za

$$\frac{2Hv_1^2}{gL^2} + 1 \leq \left(\frac{v_1^2}{gL}\right)^2. \quad (478i)$$

Za znak jednakosti rješenje (478h) ima samo jedan korijen.

Lako se dokaže da se dva mlaza koja istječu iz spremnika sijeku u točki za koju vrijedi jednakost $h_1 \zeta_1 = h_2 \zeta_2$ (sl. 88b).

Kad se podijeli jednadžba (475e) sa dQ , dobiva se Bernoullijeva jednadžba (475a), u kojoj sva tri člana na svakoj strani imaju dimenziju tlaka ili energije po jedinici volumena ili snage po jedinici (volumenskog) protoka.

Ako se jednadžba (475e) za stacionarno strujanje podijeli masenim protokom ϱdQ , Bernoullijeva jednadžba dobiva oblik

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const. uzduž strujnice}, \quad (479a)$$

u kojoj svi članovi i konstanta imaju dimenziju energije po jedinici mase ili dimenziju snage po jedinici masenog protoka.

Jednadžba (475e) podijeljena težinskim protokom $\varrho g dQ$ daje Bernoullijevoj jednadžbi za stacionarno strujanje oblik

$$\frac{p}{\varrho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const. uzduž strujnice}, \quad (479b)$$

gdje svi članovi i konstanta imaju dimenziju energije po jedinici težine ili dimenziju snage po jedinici težinskog protoka. Ako se skrate dimenzije mase i vremena, ostaje samo dimenzija duljine, pa svaki član i konstanta predstavljaju visine. Prema tome, može se pisati

$$H_1 = \frac{p}{\varrho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const. uzduž strujnice}, \quad (479c)$$

gdje je H_1 visina ukupne mehaničke energije, $\frac{p}{\varrho g}$ visina tlaka, $\frac{v^2}{2g}$ visina brzine, jednaka visini vertikalnog hica ispaljenog u vakuumu početnom brzinom v , a z geometrijska ili geodetska visina.

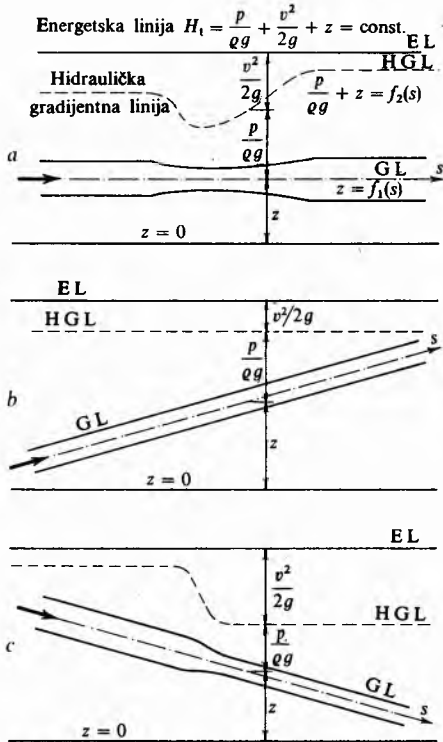
Korisno je i ilustrativno da se u skicama cjevovodnih sustava ucrtaju linije pojedinih visina iz Bernoullijeve jednadžbe (479c), i to:

$z = f_1(s)$, geometrijska ili geodetska linija sustava (GL) ili linija potencijalne energije;

$\frac{p}{\rho g} + z = f_2(s)$, piezometrička linija ili hidraulička gradijentna linija (HGL);

$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = f_3(s)$, energetska linija (EL).

Na sl. 89 te su linije ucrtane za tri primjera cjevovoda, od kojih svaki na svoj način ilustrira sadržaj Bernoullijeve jednadžbe (479b) i jednadžbe kontinuiteta (474). Pretpostavlja se da su na pojedinim presjecima profili brzine konstantni.



Sl. 89. Ilustracija sadržaja Bernoullijeve jednadžbe

Dok je zakon hidrostatičke nestlačivog fluida (128) pokazivao da je piezometrička visina konstantna, pri strujanju idealnoga nestlačivog fluida toj se visini pridružuje i visina brzine. Međutim, kao što pokazuje primjer na sl. 89c, pri konstantnom presjeku cijevi vrijedi također hidrostatski odnos tlaka i visine, tj.

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad (479d)$$

uzduž strujnice u cijevi konstantnog presjeka.

Pri strujanju realnog fluida, zbog viskozne disipacije energije, energetska će linija imati pad u smjeru strujanja. U dijelu cjevovoda konstantnog presjeka isti takav pad ima i hidraulička gradijentna linija.

Za $z = \text{const.}$ Bernoullijeve jednadžba (479c) pokazuje da zbog povećanja brzine na suženom presjeku cijevi pada tlak (sl. 89a). Takva se suženja u cjevovodnim sustavima, s pripadnim promjenama tlaka mnogo primjenjuju u mnogim mjernim uređajima, napravama i hidrauličkim regulacijskim sustavima.

U suženom dijelu ejektora (sl. 90a) smanji se tlak, pa se pri nekom određenom protoku $Q_{\min}$ primarnog fluida, uz zadane iznose površina presjeka A_1 i A_2 te visine h , sekundarni fluid iz nižeg spremnika podiže do ejektora i pri $Q > Q_{\min}$ ulazi u primarni fluid, miješa se s njime i dalje nastavlja strujati. Da bi ejektor počeo funkcionirati, na presjeku 1 mora se uspostaviti tlak

$$p_1 = p_a - \rho g h, \quad (480a)$$

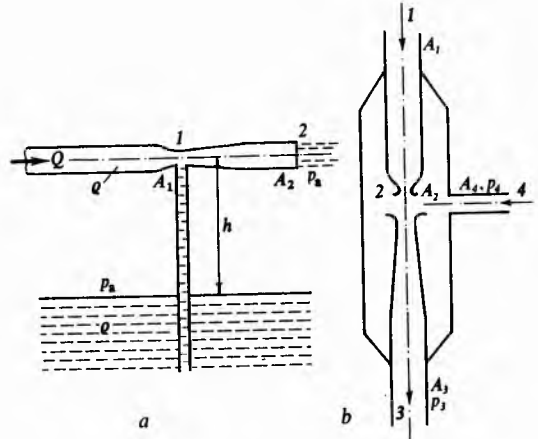
a to će se ostvariti pri protoku $Q_{\min}$ koji zadovoljava Bernoullijeve jednadžbu napisanu za točke 1 i 2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{Q_{\min}^2}{2g A_1^2} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{Q_{\min}^2}{2g A_2^2} \quad (480b)$$

Rješenje (480a) i (480b) daje

$$Q_{\min} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}} \sqrt{2gh}. \quad (480c)$$

Primarni i sekundarni fluid u ejektoru mogu biti različiti, npr. kombinacija zraka i vode.



Sl. 90. Shema ejektora i injektora

Na sl. 90b shematski je prikazan princip rada *injektora*. Prikladnim izborom površina presjeka A_2 i A_3 može se postići znatna razlika tlakova $p_3 - p_4$, tako da se npr. pri atmosferskom tlaku voda iz napojnog spremnika spojenog s cijevi 4 injektira u kotao koji je pod visokim tlakom p_3 . Alternativno, u slučaju ejektora voda struji niz cijev 1 kroz suženje 2 i izlazi na presjeku 3 u atmosferu, pri čemu se u spremniku spojenom s cijevi 4 stvara djelomičan vakuum.

Za poseban oblik nestacionarnog strujanja nestlačivog fluida koje je zadano poljem brzine (436a), primjenom jednakosti

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \vec{e}_n \frac{v^2}{R}, \quad (481a)$$

gdje je $\vec{e}_s$ jedinični vektor tangente na strujnicu, $\vec{e}_n$ jedinični vektor glavne normale na strujnicu, a R polumjer zakrivljenosti strujnice, ima Eulerova jednadžba gibanja (421a) u polju sile teže oblik

$$\vec{e}_s \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \vec{e}_n \frac{v^2}{R} = -g \vec{k} - \text{grad} \frac{p}{\rho}. \quad (481b)$$

Ako se, uz $\vec{e}_s \cdot \vec{e}_n = 0$, jednadžba (481b) skalarno pomnoži s elementom luka strujnice $e_s ds$ i integrira od s_1 do s_2 , dobiva se Bernoullijeve jednadžba (436c). Ako se, pak, skalarno pomnoži s elementom luka normale na strujnicu $d\vec{n} = \vec{e}_n dn$, dobiva se

$$\frac{v^2}{R} dn = -d_{\text{norm}} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right). \quad (481c)$$

Integracija jednadžbe (481c) od točke 1 do točke 2 na krivulji koja presijeca strujnice, a na koju je tangenta u svakoj točki usmjerena uzduž glavne normale na strujnice, daje

$$(p_2 + \rho g z_2) - (p_1 + \rho g z_1) = -\rho \int_{n=n_1}^{n=n_2} \frac{v^2}{R} dn. \quad (481d)$$

Ta jednadžba određuje *promjenu tlaka normalno na strujnicu* idealnoga nestlačivog fluida.

Budući da je $R > 0$, negativni predznak desne strane izraza (481d) pokazuje da se tlak smanjuje pri pomaku u smjeru glavne normale prema središtu zakrivljenosti strujnice, a da u suprotnom smjeru raste. Zbog takva rasporeda tlaka djeluje na česticu fluida sila usmjerena prema središtu zakrivljenosti, održavajući česticu na zakrivljenoj putanji.

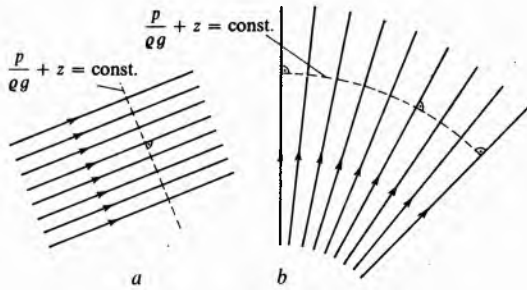
Strujanje s *pravećnim strujnicama*. Ako su strujnice pravocrtne, tako da je polumjer zakrivljenosti R beskonačan, izraz (481d) pokazuje da je

$$(p_2 + \rho g z_2) - (p_1 + \rho g z_1) = 0, \quad (482a)$$

ili da je

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const. normalno na strujnice.} \quad (482b)$$

To je zakon promjene hidrostatskog tlaka, izražen u hidrostatici izrazom (128). Zakon (482b) ilustriran je s dva primjera strujanja na sl. 91.



Sl. 91. Promjena tlaka normalno na pravocrtne strujnice

Jednadžba količine gibanja (379) ima za elementarnu strujnu cijev nestlačivog fluida (sl. 86) oblik

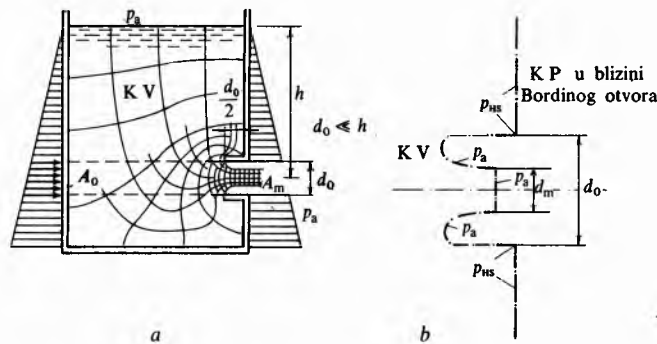
$$\int_{\delta KV} \rho \vec{f} dV + \int_{\delta KP} \vec{\sigma}_n dS - \rho \int_{\delta KV} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV - \rho \vec{v}_2 v_2 dA_2 + \rho \vec{v}_1 v_1 dA_1 = 0. \quad (483)$$

Ta jednadžba nije ograničena na idealni fluid. Primjenom jednadžbe kontinuiteta (474) jednadžba (483) poprima oblik

$$\int_{\delta KV} \rho \vec{f} dV + \int_{\delta KP} \vec{\sigma}_n dS = \rho \int_{\delta KV} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \rho \delta Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad (484)$$

gdje je δQ protok kroz elementarnu strujnu cijev.

Lijeva strana jednadžbe (484) predstavlja masene i površinske sile što djeluju na fluid. Pri stacionarnom strujanju otpada prvi član desne strane. Osim što je ograničena na inercijski kontrolni volumen i nestlačivi fluid, jednadžba (484) nema nikakvih drugih ograničenja. U primjeni se ta jednadžba razlaže na tri skalarne komponente. Ako se pri strujanju mogu pretpostaviti konstantni profili brzina preko ravnih normalnih presjeka, tada se jednadžba (484) primjenjuje i za strujne cijevi konačnih dimenzija.



Sl. 92. Bordin otvor

Koeficijent kontrakcije Bordinog otvora. Bordin otvor jest cijev uvučena za polovicu promjera d_0 u spremnik, i kroz tu cijev kapljevinu istječe iz spremnika (sl. 92a). Na izlazu se mlaz sužava od površine otvora A_0 na površinu A_m , tako da je koeficijent kontrakcije C_c definiran odnosom

$$C_c = \frac{A_m}{A_0} = \frac{d_m^2}{d_0^2}. \quad (485a)$$

Budući da je Bordin otvor uvučen, uz stijenku spremnika nije poremećen hidrostatski tlak, pa je višak sile hidrostatskog tlaka u horizontalnom smjeru na fluid u spremniku (spremnik se uzima kao kontrolni volumen) potpuno određen izrazom

$$\Delta F_{px} = \rho g h A_0. \quad (485b)$$

Naime, osim na samom otvoru površine A_0 , gdje vlada atmosferski tlak p_a (sl. 92b), svuda unaokolo na stijenci spremnika na dubini h vlada tlak

$$p = p_a + p_{hs} = p_a + \rho g h, \quad (485c)$$

koji upravo proizvodi višak sile (485b) u smjeru istjecanja mlaza.

Primjenom Torricelijeve formule (477f), uz $v_1 = 0$ i $v_2 = v = \sqrt{2gh}$, x-komponenta jednadžbe količine gibanja (484) dobiva oblik

$$\rho g h A_0 = \rho Q v = \rho v A_m v = \rho A_m 2gh, \quad (485d)$$

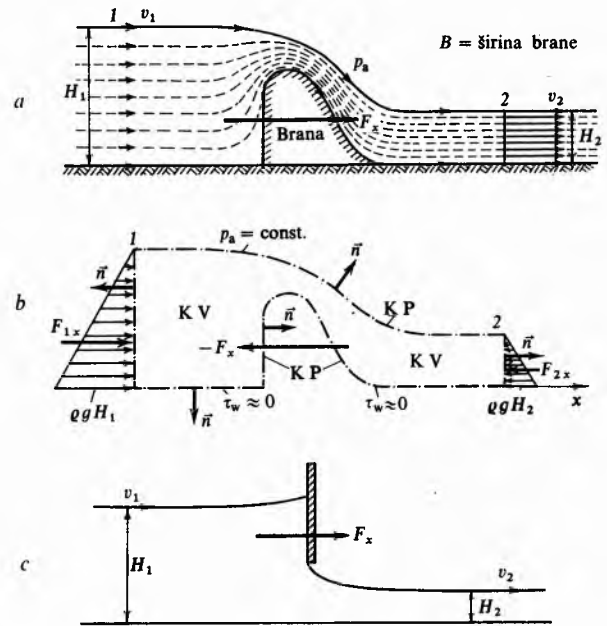
odatle slijedi

$$C_c = \frac{A_m}{A_0} = \frac{1}{2}. \quad (485e)$$

Ta se vrijednost dobro slaže s eksperimentalnim podacima.

Ako otvor nije uvučen, hidrostatski će tlak na stijenci spremnika u blizini otvora biti smanjen, pa će sila ΔF_{px} postati veća, te prema (485d) slijedi da je $C_c > \frac{1}{2}$.

Djelovanje sile na branu. Preko brane (sl. 93a) prelijeva se voda gustoće ρ . Strujanje je vode stacionarno ravninsko, a uzvodno i nizvodno od brane uspostavljaju se pravocrtne paralelna strujanja s profilima konstantnih brzina v_1 i v_2 i s dubinama H_1 i H_2 .



Sl. 93. Proračun sile vode na branu

Budući da konstantni tlak p_a , koji se prema Pascalovu zakonu prenosi na čitav fluid, ne daje komponentu sile u smjeru osi x , u proračun ulazi samo hidrostatski tlak. Na ravnim vertikalnim presjecima 1 i 2 djeluju na fluid sile hidrostatskog tlaka

$$F_{1x} = \frac{1}{2} \rho g H_1^2 B, \quad F_{2x} = -\frac{1}{2} \rho g H_2^2 B. \quad (486a)$$

Ako se sa F_x označi x-komponenta tražene integralne sile tlačnih i tangencijalnih naprezanja kojom voda djeluje na branu, tada $(-F_x)$ označuje x-komponentu ukupne sile kojom brana djeluje na vodu (sl. 93b), tj.

$$-F_x = \int_{S_{brana}} \sigma_{nx} dS, \quad (486b)$$

i to je sila koja ulazi u jednadžbu količine gibanja pa ona poprima oblik

$$\frac{1}{2} \rho g H_1^2 B - \frac{1}{2} \rho g H_2^2 B - F_x = \rho Q (v_2 - v_1). \quad (486c)$$

Za rješenje zadatka služe i jednadžba kontinuiteta

$$Q = v_1 H_1 B = v_2 H_2 B, \quad (486d)$$

te Bernoullijeva jednadžba (478b) za strujnicu uzduž slobodne površine

$$\frac{v_1^2}{2g} + H_1 = \frac{v_2^2}{2g} + H_2. \quad (486e)$$

Iz tih se jednadžbi za nepoznanice Q , v_1 , v_2 i F_x dobivaju izrazi

$$Q = H_1 H_2 B \sqrt{\frac{2g}{H_1 + H_2}}, \quad v_1 = \frac{Q}{H_1 B}, \quad v_2 = \frac{Q}{H_2 B}, \quad (486f)$$

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g B \frac{(H_1 - H_2)^3}{H_1 + H_2}. \quad (486g)$$

Isti izraz za silu F_x koja djeluje na branu dobiva se i ako brana ima oblik prikazan na sl. 93c.

Modifikacija osnovnih jednadžbi. Premda strujanja s promjenljivim profilima brzine u cijevima konačnih dimenzija nisu prema definiciji jednodimenzijska, mogu se modifikacijama osnovnih jednadžbi svrstati u tu kategoriju.

Jednadžba kontinuiteta za strujanja s promjenljivim profilom brzine po ravnom presjeku strujne cijevi konačnih dimenzija, izražena srednjom brzinom strujanja, ima jednostavan oblik

$$Q = vA, \quad (487)$$

gdje je v srednja brzina strujanja definirana sa

$$v = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{Q}{A}. \quad (487a)$$

U energetskej analizi stacionarnog strujanja kroz cjevovodni sustav s pumpom dolaze svi elementi modifikacije Bernoullijeve jednadžbe za realna strujanja u strujnim cijevima konačnih dimenzija. Prema sl. 94 kontrolni volumen (KV) ograden je kontrolnom površinom (KP), koja se sastoji od dva ravna presjeka A_1 i A_2 , unutrašnje stijenke cijevi s kućištem pumpe i presjeka osovine pumpe. Jednadžba kinetičke energije (383a) za stacionarno strujanje nestlačivog fluida u polju sile teže primjenom Reynoldsova transportnog teorema (366) i izraza (386d), uz $\text{div } \vec{v} = 0$, poprima oblik

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \rho \int_{A_1} v^2 v dA + \frac{1}{2} \rho \int_{A_2} v^2 v dA = \\ & = -\rho \int_{KV} \vec{v} \cdot (\text{grad } gz) dV + \int_{KP} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS - \int_{KV} T_\pi \cdot T_\epsilon dV. \end{aligned} \quad (488)$$

Primjenom identiteta

$$\vec{v} \cdot \text{grad } gz = \text{div}(gz\vec{v}) - gz \text{div } \vec{v} = \text{div}(gz\vec{v}) \quad (490a)$$

prvi član desne strane jednadžbe (488) postaje

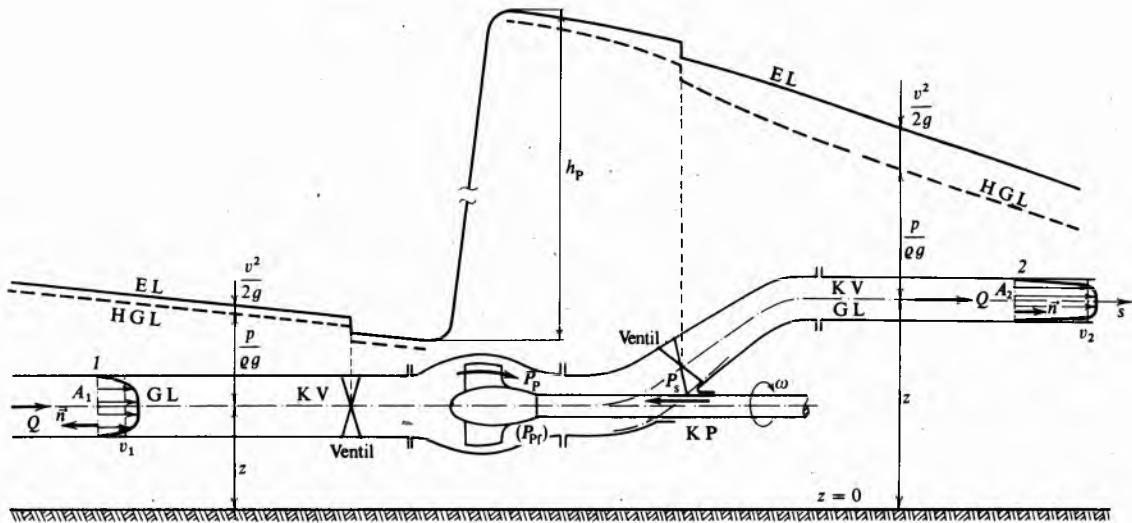
$$\begin{aligned} & -\rho \int_{KV} \vec{v} \cdot (\text{grad } gz) dV = -\rho \int_{KV} \text{div}(gz\vec{v}) dV = \\ & = -\rho \int_{KP} gz\vec{v} \cdot \vec{n} dS = +\rho g \int_{A_1} z v dA - \rho g \int_{A_2} z v dA. \end{aligned} \quad (490b)$$

Uzduž nepomične stijenke cijevi i kućišta pumpe je $\vec{v} = 0$, pa iščezava drugi član desne strane jednadžbe (488), a pod integralom ostaju samo presjeci A_1 i A_2 te presjek osovine pumpe. Ako se sa P_s označi osovinska snaga pogonskog motora, koja se preko osovine pumpe dovodi sustavu, može se pisati

$$\begin{aligned} \int_{KP} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS &= P_s - \int_{A_1} p \vec{n} \cdot \vec{v} dA - \int_{A_2} p \vec{n} \cdot \vec{v} dA = \\ &= P_s + \int_{A_1} p v dA - \int_{A_2} p v dA. \end{aligned} \quad (491)$$

Ravni presjeci A_1 i A_2 izabrani su na cilindričnim dijelovima cjevovoda, gdje je strujanje pravocrtno i paralelno, pa se prema izrazu (482b) može pretpostaviti da je preko takvih presjeka $p + \rho g z = \text{const}$. To znači da se pri zbrajanju izraza (490b) i (491) može $(p + \rho g z)$ staviti ispred znaka integrala, pa preostali integral daje vrijednost Q . Prema tome se za zbroj prvih dvaju članova desne strane jednadžbe (488) može pisati

$$\begin{aligned} & -\rho \int_{KV} \vec{v} \cdot \text{grad } gz dV + \int_{KP} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{v} dS = \\ &= P_s + (p_1 + \rho g z_1)Q - (p_2 + \rho g z_2)Q, \end{aligned} \quad (492)$$



SL. 94. Izvod modificirane Bernoullijeve jednadžbe za stacionarno strujanje u cjevovodnom sustavu s pumpom

Takav je izraz previše složen za praktične proračune, pa ga treba osloboditi integrala. Integrali na lijevoj strani (488) izražavaju se srednjom brzinom strujanja i faktorom ispravka kinetičke energije α u obliku

$$\frac{1}{2} \rho \int_A v^2 v dA = \alpha \frac{1}{2} \rho v_{sr}^2 v_{sr} A = \alpha \frac{1}{2} \rho v_{sr}^2 Q, \quad (489a)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{1}{v_{sr}^3 A} \int_A v^3 dA = \frac{1}{v_{sr}^2 Q} \int_A v^3 dA. \quad (489b)$$

Faktor α zavisi od oblika profila brzine na pojedinom presjeku. Iz izraza za profil brzine (76) dobiva se za laminarno strujanje u cijevi kružnog presjeka $\alpha_{lam} = 2,0$, a za turbulentno strujanje $\alpha_{turb} = 1,01 \dots 1,10$. Pri turbulentnom strujanju faktor α zavisi od Reynoldsova broja, te opada s porastom Re .

gdje su p_1, z_1 i p_2, z_2 tlakovi i visine u bilo kojoj točki presjeka A_1 i A_2 , npr. u točki gdje simetrala cijevi probada presjek.

Zadnji član desne strane jednadžbe (488) predstavlja snagu viskozne disipacije energije i izražava se empiričkim obrascima na sljedeći način:

Pri strujanju realnog viskoznog fluida u ravnim cilindričnim ili prizmatičnim dijelovima cjevovoda, gdje $v_{sr} = \text{const.}$, snaga se viskozne disipacije energije izražava snagom gubitka tlaka zbog otpora trenja P_f . Ako je u cjevovodnom sustavu N_f broj takvih ravnih dijelova, u kojem i -ti dio ima promjer D_i i duljinu L_i , tada se prema Darcy-Weisbachovu obrascu

$$\Delta p_f = p_1 - p_2 = \lambda(Re, k/D) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v_{sr}^2 \quad (492a)$$

dobiva za snagu P_f izraz

$$P_f = Q \cdot \sum_{i=1}^{N_f} \Delta p_{fi} = Q \cdot \sum_{i=1}^{N_f} \lambda \left(Re_i, \frac{k_i}{D_i} \right) \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_{sr}^2. \quad (493)$$

Ako cijev nije kružnog presjeka, računa se s ekvivalentnim promjerom cijevi D_e koji je definiran sa

$$D_e = 4R_H = 4 \frac{A}{o}, \quad (493a)$$

gdje je $R_H = A/o$ hidraulički radijus, A površina presjeka toka fluida, o oplākani opseg, tj. opseg fluida u dodiru sa stijenkom cijevi.

S tako definiranim ekvivalentnim promjerom izračuna se Reynoldsov broj i relativna hrapavost cijevi k/D_e , pa se pomoću tih vrijednosti odredi koeficijent otpora trenja λ iz podataka za cijevi kružnog presjeka. Također se s ekvivalentnim promjerom proračuna i Darcy-Weisbachov obrazac (492a).

Različita armatura u cjevovodnom sustavu, npr. ventili, zasuni, slavine, zakrivljeni dijelovi cjevovoda, koljena, nagle promjene presjeka cjevovoda, točke grananja itd. uzrokuju mjestimne gubitke tlakova Δp_{fm} , što predstavlja snagu lokalnih ili manjih gubitaka P_{fm} . Ako je N_{fm} broj lokalnih izvora gubitka tlaka u cjevovodnom sustavu, snaga lokalnih gubitaka računa se prema praktičnom obrascu

$$P_{fm} = Q \cdot \sum_{k=1}^{N_{fm}} \Delta p_{fmk} = Q \cdot \sum_{k=1}^{N_{fm}} K_k \frac{1}{2} \rho v_{srk}^2, \quad (493b)$$

gdje je K_k koeficijent k -tog lokalnog gubitka, koji općenito zavisi od lokalnog Reynoldsova broja i geometrijskog oblika uzročnika lokalnog gubitka.

Od osovinske snage P_s (koja predstavlja integral snage naprezanja preko presjeka osovine na ulazu u kontrolni volumen) u pumpi se gubi dio P_{pf} . Ostatak P_P je korisna snaga pumpe izravno predana fluidu, pa se zbog toga pri prolazu kroz pumpu povećava ukupna mehanička energija fluida, te fluid s povećanom mehaničkom energijom napušta pumpu i nastavlja strujati kroz sustav. Prema tome je

$$P_{pf} = P_s - P_P. \quad (493c)$$

Korisna snaga pumpe P_P predana fluidu obično se izražava ukupnim stupnjem iskoristivosti pumpe η_P u obliku

$$P_P = \eta_P P_s. \quad (493d)$$

Ako se za svaki od članova lijeve strane jednadžbe (488) uvrsti pripadni izraz (489a), a izrazi (492), (493), (493b) i (493c) uvrste u desnu stranu (488), dobiva se

$$-\alpha_1 \frac{1}{2} \rho v_{1sr}^2 Q + \alpha_2 \frac{1}{2} \rho v_{2sr}^2 Q = (p_1 + \rho g z_1) Q - (p_2 + \rho g z_2) Q - P_f - P_{fm} + P_P. \quad (494)$$

Već prema tome kojim se protokom dijeli jednadžba (494), dobivaju se različiti oblici modificirane Bernoullijeve jednadžbe. Ispuštajući indeks za oznaku srednje brzine, dobivaju se sljedeći oblici:

a) dijeljenje jednadžbe (494) protokom Q nakon sređenja daje

$$p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_P = p_2 + \alpha_2 \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_f + p_{fm}, \quad (495)$$

gdje je p_P prirast ukupnog tlaka fluida pri prolazu kroz pumpu, p_f ukupni gubitak tlaka zbog otpora trenja u ravnim dijelovima cjevovoda, a p_{fm} ukupni gubitak tlaka zbog lokalnih poremećaja strujanja. Te su veličine dane izrazima:

$$p_P = \Delta \left(p + \alpha \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = \frac{P_P}{Q}, \quad (495a)$$

$$p_f = \sum_{i=1}^{N_f} \Delta p_{fi} = \sum_{i=1}^{N_f} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho v_i^2, \quad (495b)$$

$$p_{fm} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} \Delta p_{fmk} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} K_k \frac{1}{2} \rho v_k^2. \quad (495c)$$

U jednadžbi (495) svaki član ima dimenziju snage po jedinici protoka ili dimenziju energije po jedinici volumena ili dimenziju tlaka.

b) dijeljenje jednadžbe (494) masenim protokom ρQ nakon sređenja daje

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + g z_1 + E_{1P} = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + g z_2 + E_{1f} + E_{1fm}, \quad (496)$$

gdje je E_{1P} specifični prirast ukupne mehaničke energije fluida pri prolazu kroz pumpu, E_{1f} specifični gubitak energije tlaka fluida zbog otpora trenja, a E_{1fm} specifični lokalni gubici energije tlaka. Te su veličine dane izrazima:

$$E_{1P} = \Delta \left(\frac{p}{\rho} + \alpha \frac{v^2}{2} + g z \right) = \frac{P_P}{Q}, \quad (496a)$$

$$E_{1f} = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\Delta p_{fi}}{\rho} = \sum_{i=1}^{N_f} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2}, \quad (496b)$$

$$E_{1fm} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} \frac{\Delta p_{fmk}}{\rho} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} K_k \frac{v_k^2}{2}. \quad (496c)$$

U jednadžbi (496) svaki član ima dimenziju snage po jedinici masenog protoka, ili dimenziju energije po jedinici mase, ili dimenziju $L^2 T^{-2}$.

c) dijeljenje jednadžbe (494) težinskim protokom $g Q$ nakon sređenja daje

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_P = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_{fm}, \quad (497)$$

gdje je h_P visina dobave pumpe, h_f visina ukupnog gubitka tlaka zbog otpora trenja, a h_{fm} visina ukupnih lokalnih gubitaka tlaka. Te su veličine dane izrazima:

$$h_P = \Delta \left(\frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g} + z \right) = \frac{P_P}{\rho g Q}, \quad (497a)$$

$$h_f = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\Delta p_{fi}}{\rho g} = \sum_{i=1}^{N_f} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g}, \quad (497b)$$

$$h_{fm} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} \frac{\Delta p_{fmk}}{\rho g} = \sum_{k=1}^{N_{fm}} K_k \frac{v_k^2}{2g}. \quad (497c)$$

U jednadžbi (497) svaki član ima dimenziju snage po jedinici težinskog protoka, ili dimenziju energije po jedinici težine, ili jednostavno dimenziju duljine, tj. visine.

Oblik (497) modificirane Bernoullijeve jednadžbe prikladan je za grafički prikaz transformacije pojedinih oblika energije, te gubitaka i prirasta energije pri strujanju u nekom cjevovodno-pumpnom sustavu (sl. 94). Za strujanje idealnoga nestlačivog fluida energetska linija (EL) ima konstantan horizontalan tok (sl. 89), dok pri strujanju realnoga viskozno fluida energetska linija stalno opada u smjeru strujanja zbog gubitaka koji su posljedica viskoznosti (sl. 94). U ravnim, horizontalnim ili kosim dijelovima cjevovoda, zbog $v = \text{const.}$, isti pad ima i hidraulička gradijentna linija (HGL) koja je na takvim dijelovima paralelna s energetskom linijom. Pad tlaka po jedinici duljine cijevi konstantnog presjeka naziva se *hidraulički gradijent*. Taj je gradijent bez dimenzije, a definiran je izrazom

$$I_1 = \frac{d(HGL)}{ds} = \frac{h_f}{L} = \lambda \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (497d)$$

Visine lokalnih gubitaka, npr. u dva ventila na sl. 94, prikazane su naglim padovima EL i HGL, a skokoviti porast EL i HGL dolazi na prolazu fluida kroz pumpu.

Za razliku od pumpe za kapljevine ili ventilatora za plinove, koji fluidu povećavaju energiju, vodna ili toplinska turbina oduzima od fluida energiju pretvarajući je u rad. Ako se sa P_T označi snaga koju turbina oduzima od fluida, a sa h_T visina pada energije fluida kroz turbinu, tako da je

$$h_T = -\Delta \left(\frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{v^2}{2g} + z \right) = \frac{P_T}{\rho g Q}, \quad (497e)$$

modificirana Bernoullijeva jednadžba za turbinsko-cjevovodni sustav ima oblik

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 - h_T &= \\ = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_{fm}. \end{aligned} \quad (497f)$$

Primjena modificirane Bernoullijeve jednadžbe može se ilustrirati određivanjem toka EL i HGL u zavisnosti od smjera strujanja u kosoj ravnoj cijevi konstantnog promjera (sl. 95). U oba slučaja strujanja isti oblik imaju i modificirana Bernoullijeva jednadžba (495), koja za $v = \text{const.}$ glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f, \quad (498a)$$

i jednadžba hidrostatskog manometra

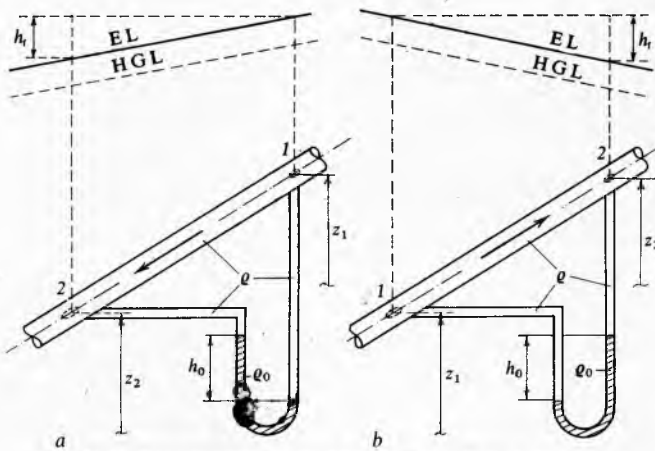
$$p_1 - p_2 = \rho_0 g h_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \rho g (z_1 - z_2), \quad (498b)$$

tako da je za sl. 95a ($z_1 - z_2 > 0$), a za sl. 95b ($z_1 - z_2 < 0$).

Rješenje (498a) i (498b) daje za oba primjera

$$h_f = \frac{p_f}{\rho g} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right).$$

Za strujanje idealnog fluida oba bi manometra pokazivala $h_0 = 0$.



Sl. 95. Ilustracija primjene modificirane Bernoullijeve jednadžbe

Kad se jednadžba količine gibanja (483) primijeni na strujnu cijev konačnih dimenzija, s ravnim presjecima A_1 i A_2 na kojima su vektori brzine međusobno paralelni, integrali zadnjih dvaju članova na lijevoj strani jednadžbe pišu se u praktičnom obliku

$$\int_A \vec{v} v dA = \pm \bar{n} \int_A v^2 dA = \pm \bar{n} \bar{v}_{sr}^2 A = \pm \bar{n} \bar{v}_{sr} Q, \quad (499a)$$

gdje je $\bar{n}$ vektor vanjske normale (s obzirom na kontrolni volumen) na presjeku A , a β faktor ispravka količine gibanja. Prema (499a) faktor β definiran je izrazom

$$\beta = \frac{1}{v_{sr}^2 A} \int_A v^2 dA = \frac{1}{v_{sr}^2} \int_A v^2 dA. \quad (499b)$$

Faktor β zavisi od oblika profila brzine i za laminarni profil brzine u kružnoj cijevi (76) iznosi $\beta_{lam} = 1,333$, a za turbulentni profil $\beta_{turb} \approx 1,0$.

Ako se pri integraciji zadnjih dvaju članova jednadžbe (483) preko ravnih presjeka A_1 i A_2 strujne cijevi konačnih dimenzija primijeni izraz (499a) i ispusti indeks srednje brzine, dobiva se modificirana jednadžba količine gibanja u obliku

$$\begin{aligned} \int_{KV} \rho \vec{v} dV + \int_{KP} \vec{\sigma}_n dS &= \rho \int_{KV} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \beta_2 \rho \vec{v}_2 v_2 A_2 - \beta_1 \rho \vec{v}_1 v_1 A_1 = \\ &= \rho \int_{KV} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \rho Q (\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1). \end{aligned} \quad (500)$$

Sličnim se postupkom može jednadžba (483) generalizirati za sustav s više ulaznih i izlaznih presjeka.

Lokalni gubitak tlaka pri naglom proširenju cijevi. Realni fluid struji kroz cijev koja ima naglo proširenje od presjeka A_1 na presjek A_2 (sl. 96a). Neposredno ispred naglog proširenja cijevi, u presjeku A_1 vlada tlak p_1 . Neposredno iza naglog proširenja cijevi tlak p_1 proširi se preko cijelog presjeka A_2 . Ako se pretpostavi $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ i zanemari tangencijalno naprezanje uz stijenku proširene cijevi, osnovne jednadžbe primijenjene na kontrolni volumen (sl. 96b) imaju oblik:

jednadžba kontinuiteta:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2; \quad (501a)$$

modificirana Bernoullijeva jednadžba:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + (h_{fm})_{NPr}, \quad (501b)$$

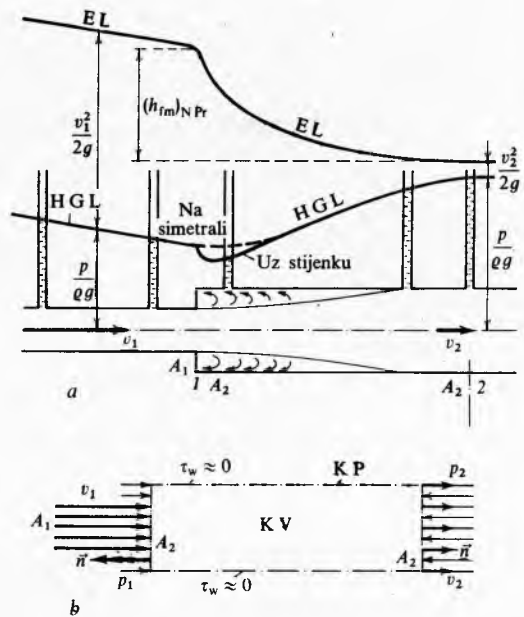
gdje indeks NPr označuje naglo proširenje cijevi;

x-komponenta jednadžbe količine gibanja:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1, \quad (501c)$$

Rješenje tih triju jednadžbi daje

$$(h_{fm})_{NPr} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (501d)$$



Sl. 96. Proračun lokalnog gubitka pri naglom proširenju cijevi

Ako se taj gubitak izrazi koeficijentom lokalnog gubitka, uz visinu brzine v_1 u izrazu

$$(h_{fm})_{NPr} = K_{NPr} \frac{v_1^2}{2g}, \quad (501e)$$

dobiva se

$$K_{NPr1} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

ili uz visinu brzine v_2 :

$$K_{NPr2} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (501f)$$

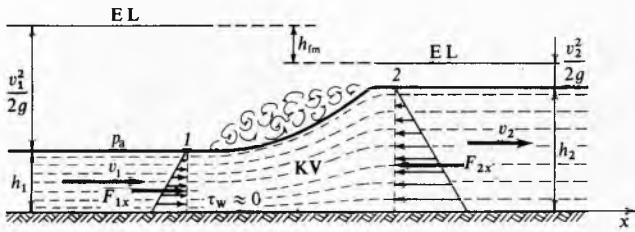
Ako su $\alpha_{1,2} \neq 1$ i $\beta_{1,2} \neq 1$, lako se dokaže da je

$$K_{NPr1} = \alpha_1 - 2\beta_1 \frac{A_1}{A_2} + (2\beta_2 - \alpha_2) \frac{A_1^2}{A_2^2}. \quad (501g)$$

Pripadna energetska i hidraulička gradijentna linija za strujanje kroz naglo proširenje prikazane su na sl. 96a.

Hidraulički skok. U određenim uvjetima, brzi plitki tok kapljevine u otvorenom kanalu skokovito se mijenja u polagani tok s povišenom slobodnom površinom (sl. 97). Ta se pojava zove hidraulički skok, a opaža se i pri dnu kade kad se niz vertikalnu stijenku slijeva tanak sloj vode. Na kosoj slobodnoj površini preko hidrauličkog skoka nastaje intenzivno vrtloženje, pa se dio kinetičke energije brzog toka ispred skoka pretvara u povećanu potencijalnu energiju iza skoka, a dio se troši za održavanje intenzivnog vrtložjenja.

Hidraulički se skok dinamički analizira jednadžbom kontinuiteta, modificiranom Bernoullijevom jednadžbom i jednadžbom količine gibanja, koje se primjenjuju na kontrolni volumen označen na sl. 97. Za jediničnu širinu otvorenog toka, okomito na ravninu strujanja, navedene jednadžbe daju



Sl. 97. Hidraulički skok u pravokutnom kanalu

$$Q = v_1 h_1 = v_2 h_2, \quad (502a)$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + h_{fm}, \quad (502b)$$

$$\frac{1}{2} \rho g h_1^2 - \frac{1}{2} \rho g h_2^2 = \rho Q (v_2 - v_1), \quad (502c)$$

Rješenja tih jednadžbi definiraju posebne uvjete brzina i dubina otvorenog toka pod kojim će se pojaviti hidraulički skok i daju visinu gubitka zbog skoka:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g h_2 (h_1 + h_2)}{2 h_1}}, \quad (502d)$$

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \frac{2 v_1^2 h_1}{g}}, \quad (502e)$$

$$h_{fm} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}, \quad (502f)$$

U rješenju (502e) zadržan je samo pozitivan korijen, jer negativan h_2 nema fizikalnog smisla. Isto se rješenje može prikazati i u bezdimenzijskom obliku

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1), \quad (502g)$$

gdje je $Fr_1 = v_1 / \sqrt{g h_1}$ Froudeov broj koji predstavlja odnos inercijskih i gravitacijskih sila, a bezdimenzijski je kriterij sličnosti pojava u kojima dominira utjecaj gravitacije g (v. Dimenzijska analiza, TE 3, str. 340).

U praksi se hidrauličkim skokom poništava kinetička energija brzih razornih tokova i bujica, a u nekim postupcima hidraulički skok služi kao djelotvorno sredstvo turbulentnog miješanja. Teoretski proračuni odnosa u hidrauličkom skoku izvršno se podudaraju s eksperimentalnim podacima.

Kavitacija. Ako se u horizontalnoj cijevi sa suženjem održava na ulazu suženja konstantan apsolutni tlak p_1 , jednadžba kontinuiteta i Bernoullijeva jednadžba (475a) pokazuju da apsolutni tlak p_2 u suženju pada s kvadratom protoka Q kroz cijev (sl. 98a):

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho Q^2 \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 A_2^2}, \quad (503a)$$

Realne kapljicine, koje redovito nisu kemijski čiste tvari, već u sebi sadrže strane krute čestice i otopljeni plinove, ne mogu podnijeti vlačna naprezanja ili negativne tlakove. (Npr., kemijski čista voda može izdržati negativne tlakove do 200 bara, a vodovodna voda samo vrlo kratkotrajne negativne tlakove do 4 bara.) U realnim kapljinama tlak može pasti samo do tlaka isparavanja ili tlaka zasićenih para kapljicine p_v (tabl. 2). Zato će na najužem presjeku cijevi (sl. 98) prema izrazu (503a) pri kritičnom protoku

$$Q_{krit} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_v)} \quad (503b)$$

tlak pasti na vrijednost $p_1 = p_v$, i pri većim protocima taj se tlak neće više smanjivati. Istodobno će se na mjestu tlaka p_v početi pojavljivati mjehurići pare kapljicine ili plina koji se oslobađa iz otopine, tj. kapljicina počinje na hladno ključati. Pri $Q > Q_{krit}$ područje tlaka p_v širi se uzvodno i nizvodno od suženja, i u tom se području manji mjehurići sjedinjuju, pa nastaju veće šupljine (kaverne) ispunjene plinovima i parama. Zbog toga su narušeni homogenost i kontinuitet kapljevite faze, te za to područje više ne vrijede osnovne jednadžbe strujanja nestlačivog fluida. Ta se pojava naziva kavitacijom. Pri analizi pojave kavitacije treba operirati s apsolutnim tlakovima.

Uz konstantni protok Q kavitacija na suženju cijevi može nastati ako se smanji apsolutni ulazni tlak p_1 (sl. 98b), ili uz

čvrste p_1 , Q i A_1 ako se smanji presjek A_2 pa brzina v_2 toliko poraste da je tlak $p_2 \leq p_v$. Kavitacija nastaje i pri optjecanju tijela i profila na smjestu maksimalne brzine v_{max} kao minimalni tlak p_{min} padne ispod p_v . Pri gibanju kugle konstantnom brzinom U_z , tlak je minimalan na ekvatoru $\psi = \pi/2$:

$$p_{min} = p(R = r_0, \psi = \pi/2) = p_{HS} - \frac{5}{8} \rho U_z^2, \quad (503c)$$

pa će se kavitacija pojaviti pri brzini

$$U_{z1} = \sqrt{\frac{8}{5} \rho (p_{HS} - p_v)}, \quad (503d)$$

gdje je p_{HS} hidrostatički tlak.

Iz izraza (503c) očito je da kavitacija može nastupiti ne samo zbog povećanja brzine gibanja tijela već i zbog smanjenja hidrostatičkog tlaka pri konstantnoj brzini, npr. ako se smanji uronjaj tijela, tj. tijelo približi slobodnoj površini kao granici vode i atmosfere.

Bezdimenzijski kavitacijski broj σ definiran je sa

$$\sigma = \frac{p_{HS} - p_v}{\frac{1}{2} \rho v^2}, \quad (504a)$$

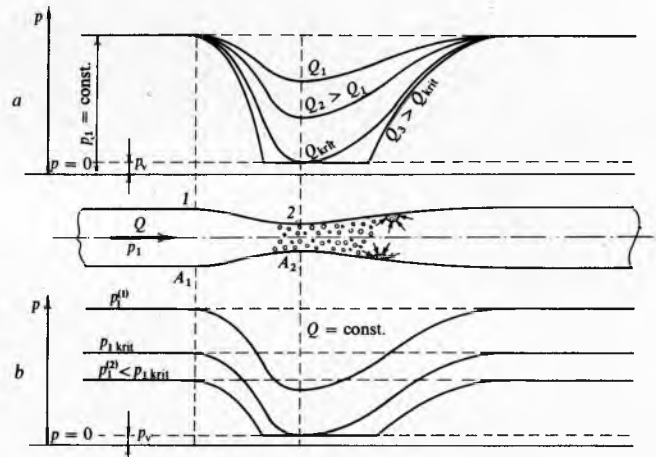
a koeficijent tlaka na mjestu minimalnog tlaka iznosi

$$C_{pmin} = \frac{p_{min} - p_{HS}}{\frac{1}{2} \rho v^2}, \quad (504b)$$

Kavitacija će se pojaviti kad bude

$$\sigma \leq -C_{pmin}, \quad (504c)$$

Za strujanja pri kojima je $\sigma \leq -C_{pmin}$ kavitacijski broj σ postaje, uz Reynoldsov i Froudeov broj, bitan kriterij hidromehaničke sličnosti u eksperimentalnim ispitivanjima modela.



Sl. 98. Pojava kavitacije

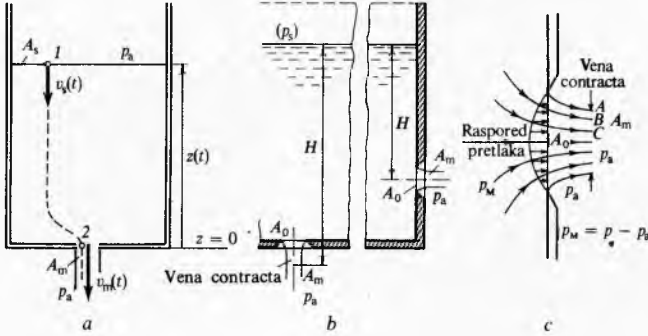
Zbog visokih brzina strujanja kavitacija se često pojavljuje na lopaticama pumpi i vodnih turbina, na krilima brodskog vijka, na podvodnim krilima hidrokrilnog čamca itd. Kavitacija se može pojaviti i u hidrauličkim sustavima aviona na velikim visinama zbog velikog pada hidrostatičkog tlaka. Kao posljedica implozivnog raspada kavitacijskih mjehurića nastaje na površini tijela tzv. kavitacijska erozija (v. Brod, TE 2, str. 205). Ostale popratne pojave u sustavu koji kavitira jesu vibracije i jaki šumovi.

Istjecanje. Istjecanje kapljicine iz otvorenog spremnika nestacionarna je pojava ako se kapljicina koja je istekla ne nadolijeva ili ako površina razine u spremniku nije vrlo velika relativno prema površini otvora. Ako se na dvije točke 1 i 2 bilo koje strujnice od razine u spremniku do izlaznog mlaza (sl. 99a) primijeni Bernoullijeva jednadžba (475b) i jednadžba kontinuiteta (474) u obliku

$$v_m A_m = v_s A_s, \quad (505a)$$

(gdje je $v_s = -dz/dt$ brzina spuštanja razine u spremniku, A_m površina izlaznog presjeka mlaza, a A_s površina horizontalnog presjeka spremnika), dobiva se izraz za brzinu istjecanja v_m u trenutku t kad je dubina vode u spremniku $z(t)$:

$$v_m(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_m/A_s)^2}} \sqrt{2gz(t) \left(1 - \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds\right)}. \quad (505b)$$



Sl. 99. Istjecanje kapljevina kroz otvore na spremniku

Nestacionarni član u izrazu (505b) odredi se uz pretpostavku da su na svim horizontalnim presjecima u spremniku brzine strujanja jednake i da iznose $v_s(t)$, te da su duljine svih strujnica u spremniku jednake i da u trenutku t iznose $z(t)$. Ta pretpostavka znatnije odstupa od stvarnosti samo u neposrednoj blizini izlaznog otvora, gdje se strujanje odvija po zakrivljenim strujnicama različitim brzinama. Uz tu se pretpostavku nestacionarni član u (505b) može pisati

$$-\frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v_s}{\partial t} ds \approx -\frac{1}{g} \frac{dv_s}{dt} z. \quad (505c)$$

Iz izraza (505a) i (505b), zanemarujući u (505b) nestacionarni član koji se i tako smatra malenim, dobiva se

$$v_s(t) = -\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(A_s/A_m)^2 - 1}} \sqrt{2gz(t)}, \quad (505d)$$

pa je

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{g}{(A_s/A_m)^2 - 1},$$

što uvršteno u (505c) i zatim u (505b) nakon sređenja daje

$$v_m(t) = \frac{1}{1 - (A_m/A_s)^2} \sqrt{2gz(t)}. \quad (505e)$$

Za $A_m/A_s = 0,1$ faktor ispred korijena iznosi 1,01, pa se za

$$A_m/A_s < 0,1, \quad (505f)$$

uz grešku manju od -1% , taj faktor može zanemariti i izraz (505e) prelazi u

$$v_m(t) = \sqrt{2gz(t)}. \quad (505g)$$

Ako su mlaz i spremnik kružnog presjeka, uvjet (505f) izražen promjerima prelazi u

$$D_m/D_s < 0,32. \quad (505h)$$

Za otvoreni spremnik u kojem razina kapljevine ostaje na konstantnoj visini H , izraz (505g) prelazi u Torricellijevu formulu

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (506a)$$

To je brzina koju bi čestice kapljevine dobile da slobodno padaju s visine H .

Ako je spremnik zatvoren i nad slobodnom površinom vlada tlak p_s (sl. 99b), brzina istjecanja iznosi

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_s - p_a + \rho g H)} = \sqrt{2gH_0}, \quad (506b)$$

gdje je $H_0 = H + (p_s - p_a)/(\rho g)$ fiktivna dubina kapljevine u spremniku kojoj bi na slobodnoj površini vladao tlak p_a .

Kapljevina istječe iz spremnika i kad je p_s manji od p_a , ali prema (506b) samo do iznosa

$$p_s \geq p_a - \rho g H, \quad (506c)$$

jer bi pri još manjem p_s , umjesto da kapljevina istječe, vanjski zrak ulazio kroz otvor u spremnik.

Pri istjecanju kroz otvor nastaje suženje (kontrakcija) mlaza. Naime, na otvor spremnika nailazi kapljevina radialno iz svih smjerova, pa su strujnice na samom otvoru zakrivljene i s rasporedom tlaka različitim od atmosferskoga (sl. 99c), a tek se negdje nedaleko, postrance ili niže od otvora, strujnice izravnavaju u pravocrtne i paralelne. Presjek mlaza s izravnanim strujnicama naziva se *vena contracta*, i tek je tu tlak konstantan preko presjeka mlaza i jednak okolnom atmosferskom tlaku. Zato i dubinu H treba mjeriti do vene contracte (sl. 99b).

Kontrakcija se mlaza izražava koeficijentom kontrakcije C_c (za koji se često upotrebljava i oznaka ε) definiranim sa

$$C_c = \varepsilon = A_m/A_0. \quad (507a)$$

Strujanja realnih fluida imaju gubitke energije koje ne uzima u obzir Bernoullijeva jednadžba (475a), primijenjena za proračun brzine istjecanja. Zato se brzina koju daje Torricellijeva formula (506a) ili (506b) ispravlja koeficijentom brzine C_v :

$$v = C_v \sqrt{2gH_0} \quad (507b)$$

pa je koeficijent brzine C_v (za koji se upotrebljava i oznaka ϕ) definiran izrazom

$$C_v = \phi = \frac{v}{\sqrt{2gH_0}}. \quad (507c)$$

Protok se računa prema praktičnoj formuli

$$Q = C_c C_v A_0 \sqrt{2gH_0} = C_d A_0 \sqrt{2gH_0}, \quad (507d)$$

gdje je koeficijent istjecanja ili protoka C_d (za koji se upotrebljava i oznaka μ_0) definiran izrazom

$$C_d = \mu_0 = \frac{Q}{A_0 \sqrt{2gH_0}} \quad (507e)$$

ili

$$C_d = C_c C_v = \mu_0 = \varepsilon \phi. \quad (507f)$$

Na sl. 100 prikazani su podaci o koeficijentima C_v , C_c i C_d za različite tipove otvora i za tri tipa sapnica vatrogasnog šmrka.

Umjesto koeficijentom brzine C_v može se gubitak brzine pri istjecanju izraziti koeficijentom lokalnog gubitka K_{istj} u obrascu (493b). Ako se modifizirana Bernoullijeva jednadžba (497) napiše za stacionarno istjecanje iz otvorenog spremnika za točku 1 na slobodnoj površini u spremniku i točku 2 u izlaznom mlazu, dobiva se

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + K_{istj} \frac{v^2}{2g}. \quad (507g)$$

Uvrsti li se za v izraz (507b), dobiva se

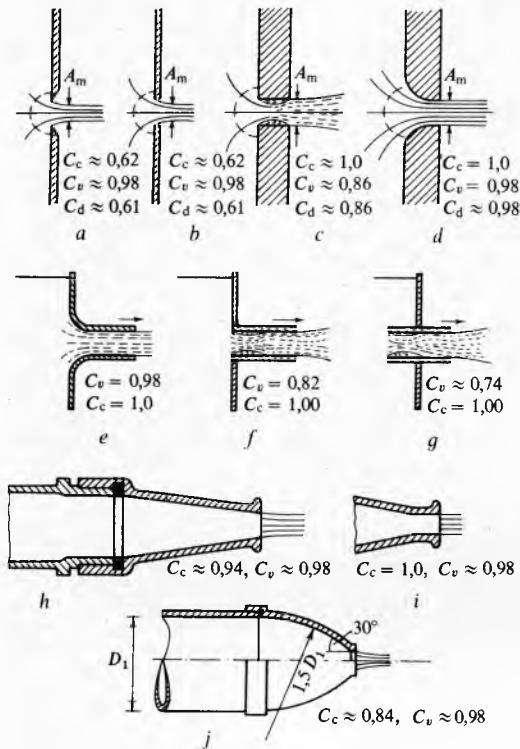
$$K_{istj} = \frac{1}{C_v^2} - 1, \quad (507h)$$

a visina lokalnog gubitka poprima vrijednost

$$(h_{lm})_{istj} = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (507i)$$

Prema sl. 100 za kratku je cijev $C_v = 0,82$, pa je $K_{istj} = 0,49 \approx 0,5$. To je ujedno i koeficijent lokalnog gubitka na oštrom ulazu u cijev kroz koju se odvodi kapljevina iz spremnika.

U praksi je ponekad potrebno odrediti i vrijeme za koje se isprazni spremnik. Ako je zadovoljen uvjet (505f) tako da se


 Sl. 100. Koeficijenti C_c , C_v i C_d za različite tipove otvora i sapnica

može zanemariti $(v_s/v_m)^2$ i nestacionarni član u Bernoullijevoj jednačbi, prema (505g) i (507b) dobiva se za brzinu istjecanja v u trenutku t izraz

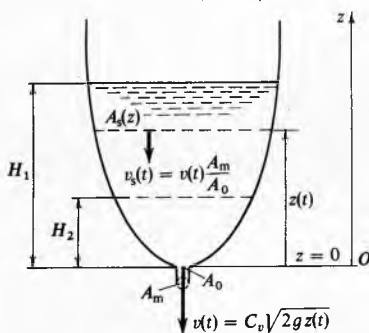
$$v(t) = C_v \sqrt{2gz(t)}, \quad (508a)$$

pa se u vremenskom intervalu između t i $t + dt$ volumen kapljene u spremniku smanji za iznos (sl. 101)

$$dV = (-dz)A_s(z) = Q(t)dt = C_d A_0 \sqrt{2gz(t)} dt, \quad (508b)$$

a iz toga slijedi

$$dt = -\frac{1}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \frac{A_s(z)}{\sqrt{z}} dz. \quad (508c)$$



Sl. 101. Određivanje vremena pražnjenja spremnika

Vrijeme potrebno da se razina kapljene u spremniku spusti od H_1 na H_2 daje integral:

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \int_{z_1=H_1}^{z_2=H_2} \frac{A_s(z)}{\sqrt{z}} dz. \quad (508d)$$

Da se odredi vrijeme za koje se spremnik potpuno isprazni, treba staviti $H_2 = 0$.

Ako je spremnik cilindričan, tada je $A_s(z) = \text{const.} = A_s$, pa je vrijeme za potpuno ispražnjenje spremnika:

$$t = \frac{2A_s}{C_d A_0 \sqrt{2g}} \sqrt{H}, \quad (508e)$$

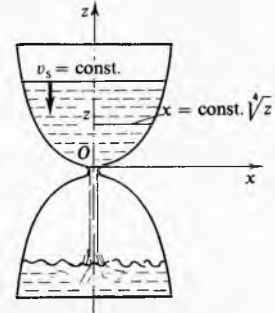
gdje je H početna visina kapljene u spremniku.

Lako se dokaže da je u rotacijskoj posudi (sl. 102) kojoj se kontura mijenja s visinom po zakonu

$$x = \text{const.} \sqrt[4]{z} \quad (509)$$

brzina spuštanja razine kapljene jednolika i konstantna. Princip takvih posuda upotrebljavao se u davna vremena u vodenim satovima (klepsidrama), gdje je visina razine u gornjoj posudi pokazivala vrijeme.

Sl. 102. Vodeni sat ili klepsidra



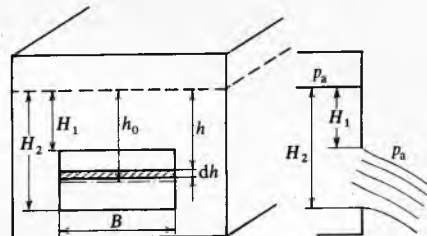
Pri proračunu istjecanja kapljene kroz veće bočne otvore (sl. 103) mora se uzeti u obzir promjena brzine istjecanja po visini presjeka otvora. Ako se pretpostavi da je preko čitave visine otvora koeficijent istjecanja C_d konstantan, tada će preko uskog presjeka Bdh , koji se nalazi na dubini h ispod razine kapljene, istjecati volumenska sekundna količina

$$dQ = C_d Bdh \sqrt{2gh}. \quad (510a)$$

Integracija od gornjeg ruba otvora, na dubini H_1 , do donjega, na dubini H_2 , daje protok istjecanja

$$Q = \frac{2}{3} C_d B \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \quad (510b)$$

Taj je iznos manji od protoka što bi ga dao račun istjecanja samo s uronjajem h_0 simetrale otvora (sl. 103).



Sl. 103. Istjecanje kroz veće otvore

Hidrodinamički instrumenti za mjerenje brzine strujanja i protoka. Nekoliko različitih hidrodinamičkih uređaja i instrumenata za mjerenje brzine strujanja i protoka kapljene zasniiva se na Bernoullijevoj jednačbi (475a).

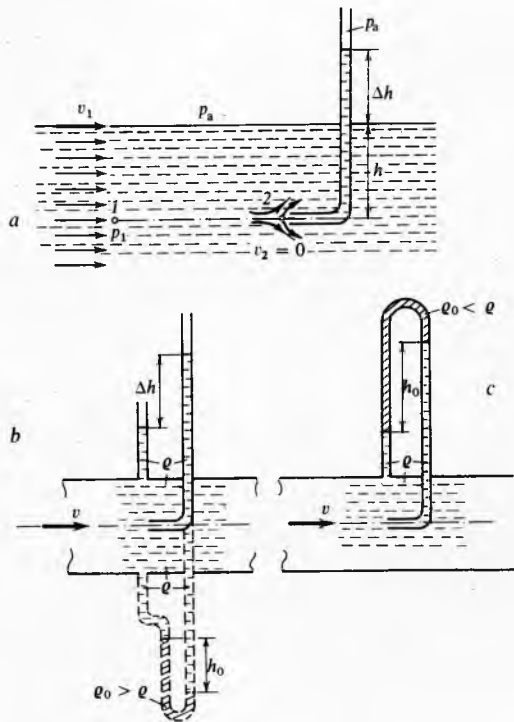
Pitotova cijev je vrlo jednostavan i točan instrument za mjerenje brzine strujanja. To je obična cijev u obliku velikog slova L, kojoj su oba kraja otvorena (sl. 104a). Cijev se postavi u struju kapljene tako da je uronjeni krak paralelan s tokom strujanja, dok je otvor drugog (vertikalnog) kraka izložen vanjskom atmosferskom tlaku. Rezultati su mjerenja brzine strujanja točni ako uronjeni krak nema otklon veći od 10° s obzirom na smjer paralelnog strujanja kapljene.

U struji kapljene cijev se napuni kapljinom do ravnotežnog položaja u kojemu visina meniskusa u vertikalnom kraku prelazi visinu slobodne površine na kojoj vlada atmosferski tlak p_a . Naime, na ulazu uronjenog kraka cijevi nalazi se točka zastoja u kojoj je brzina strujanja $v_2 = 0$, pa je **totalni tlak** p_2 u toj točki:

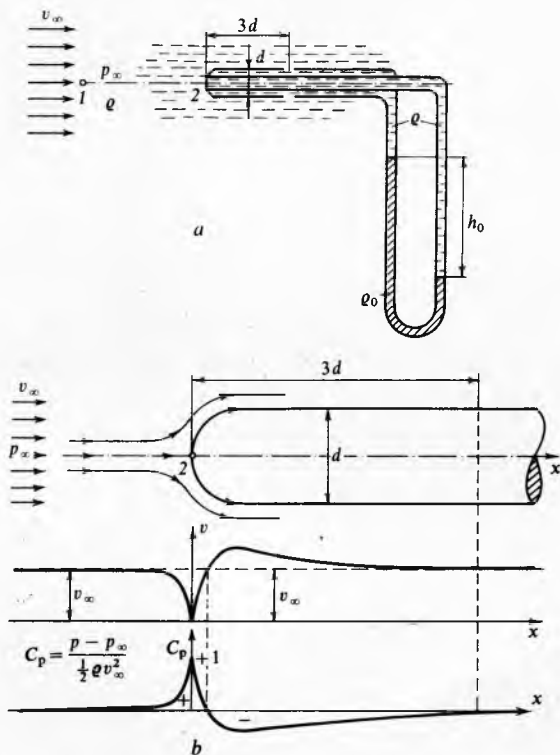
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2, \quad (511a)$$

tj. veći je od statičkog tlaka p_1 u točki 1 ispred ulaza cijevi,

gdje kapljevina struji brzinom v_1 . Izraz (511a) pokazuje da je totalni tlak p_2 veći od statičkog tlaka p_1 za iznos dinamičkog tlaka $\frac{1}{2}\rho v_1^2$. Zato tlak p_2 održava u vertikalnom kraku cijevi stupac kapljevine $h + \Delta h$ koji je viši od stupca h primjerenog statičkom tlaku p_1 .



Sl. 104. Pitotova cijev



Sl. 105. Pitot-Prandtlva cijev

Jednadžba hidrostatičkog manometra od točke 2 kroz cijev pa do slobodne površine na meniskusu glasi

$$p_2 - \rho g(h + \Delta h) = p_a, \quad (511b)$$

a budući da je tok kapljevine ispred cijevi pravocrtan i paralelan, vrijedi

$$p_1 = p_a + \rho g h. \quad (511c)$$

Iz jednadžbi (511a, b i c) slijedi

$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (511d)$$

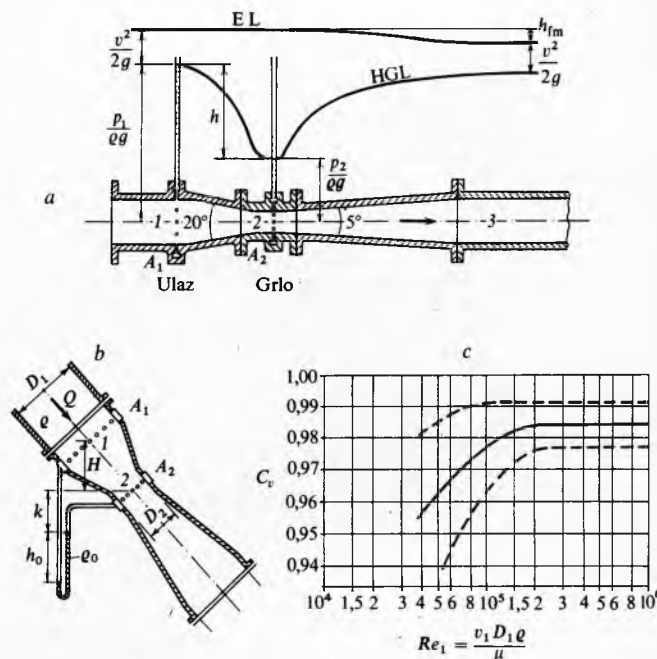
Na sl. 104b i c prikazana su dva načina postavljanja Pitotove cijevi na cjevovod u kojem se mjeri brzina strujanja.

Prandtlva modifikacija Pitotove cijevi sastoji se od dviju koaksijalnih cijevi, što omogućuje mjerenje totalnog i statičkog tlaka (sl. 105a). Princip rada Pitot-Prandtlve cijevi zasnovan je na činjenici da se pri optjecanju rotacijskog polutijela na određenoj udaljenosti iza ulaznog vrha uspostavlja tlak koji se po volji malo razlikuje od tlaka p_∞ u paralelnom strujanju dovoljno daleko ispred tijela (sl. 105b). Ako se na toj udaljenosti (približno tri promjera vanjske cijevi) izbuše po obodu vanjske cijevi rupice i spoje s jednim krajem diferencijalnog manometra, a drugi se kraj spoji s unutrašnjom cjevčicom (u kojoj vlada totalni tlak $p_\infty + \frac{1}{2}\rho v^2$), dobiva se *Pitot-Prandtlva cijev*.

Primjena Bernoullijeve jednadžbe i jednadžbe manometra daju brzinu strujanja

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_\infty)} = \sqrt{2gh_0\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)}. \quad (511e)$$

Venturijeva cijev (sl. 106) služi za mjerenje protoka. Sastoji se od ulaznog dijela s ugrađenim piezometričkim prstenom, konvergentnog dijela, najužeg dijela (grla cijevi), također s piezometričkim prstenom, i blago divergentnog izlaznog dijela. Ulazni dio i izlaz divergentnog dijela imaju promjer jednak promjeru cjevovoda u kojemu se mjeri protok. Diferencijalni manometar (hidrostatički ili metalni) postavljen je između dva piezometrička prstena. Radi točnosti mjerenja treba da ispred Venturijeve cijevi postoji ravni dio cjevovoda duljine najmanje 10 promjera cijevi.

Sl. 106. Venturijeva cijev. a shema cijevi s energetska linijom EL i hidrauličkom gradijentnom linijom HGL, b presjek cijevi, c dijagram koeficijenta brzine C_v u ovisnosti o Reynoldsovu broju Re_1 ulaznog strujanja

Bernoullijeva jednadžba za točke 1 i 2 (sl. 106b), uz $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{Q^2}{2gA_1^2} + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{Q^2}{2gA_2^2}, \quad (512a)$$

gdje je A_1 ulazni presjek Venturijeve cijevi (jednak presjeku cjevovoda), A_2 presjek grla Venturijeve cijevi.

Jednadžba manometra glasi

$$p_1 + \rho g H + \rho g k + \rho g h_0 - \rho_0 g h_0 - \rho g k = p_2, \quad (512b)$$

gdje je ρ gustoća fluida u strujanju, a ρ_0 gustoća mjernog fluida u manometru. Rješenje (512a) i (512b), uz koeficijent protoka $C_d = C_v$ (jer je u Venturijevoj cijevi $C_c = 1$), daje izraz za protok

$$Q = C_v \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 + \rho g H - p_2)} =$$

$$= C_v \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2g h_0 (\rho_0 - \rho)}{\rho}}. \quad (512c)$$

Kad se mjeri diferencijalnim hidrostatičkim manometrom, u izrazu za protok (512c) nema visinske razlike H između ulaza i grla (sl. 106b), tako da protok zavisi samo od očitavanja manometra h_0 , bez obzira na orijentaciju Venturijeve cijevi. Ako se tlakovi p_1 i p_2 mjere odvojenim manometrima, prvi dio jednakosti u izrazu (512c) pokazuje da H ulazi u izraz za protok. Međutim, ako diferencijalni metalni manometar, bez obzira na kojoj je visini postavljen, pokazuje razliku tlakova Δp , tada se H opet gubi iz izraza za protok:

$$Q = C_v \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}. \quad (512d)$$

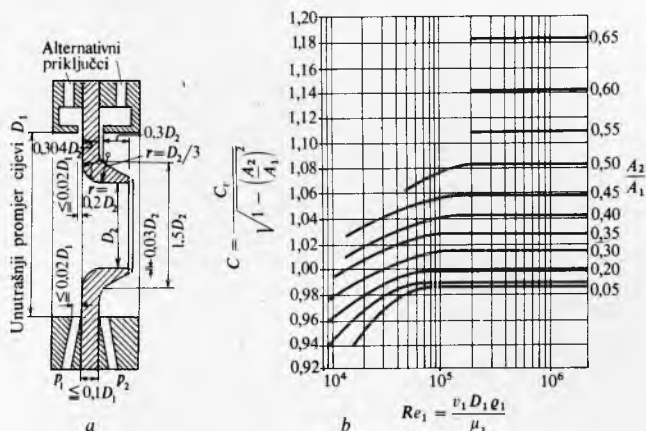
U dijagramu sl. 106c prikazani su podaci o koeficijentu brzine C_v na bazi Reynoldsova broja ulaznog strujanja Re_1 , dobiveni brojnim baždarenjima Venturijeve cijevi. Dijagram vrijedi za odnose promjera $D_2/D_1 = 0,25 \dots 0,75$, a tolerancije su označene crtkanim krivuljama.

Zbog postepenog širenja divergentnog dijela Venturijeve cijevi, lokalni gubitak h_{lm} je malen i iznosi $\sim 10 \dots 15\%$ pada h hidrauličke gradijentne linije od ulaza do grla (sl. 106a i sl. 109). Baždarenje Venturijeve cijevi vrlo fino obrađene glatke unutrašnje površine može dati koeficijent brzine C_v nešto veći od jedinice. To ne znači da nema gubitaka, nego pokazuje da su zanemareni faktori ispravka kinetičke energije α_1 i α_2 , od kojih je (zbog nižeg Re) α_1 općenito veći od α_2 . Kad bi se uzeli u obzir i ti faktori, tada bi izraz (512c) imao oblik

$$Q = C_v \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 + \rho g H - p_2)}. \quad (512e)$$

Budući da je $\alpha_1 > \alpha_2$, usporedba izraza (512e) i (512c) pokazuje da C_v mora biti veći od C_v' , pa tako može premašiti i jedinicu, dok je uvijek $C_v' < 1$.

Mjerna sapnica (sl. 107a) radi na istom principu kao i Venturijeva cijev, samo mlaz iza grla nije vođen, već slobodno ulazi u cijev cjevovoda, što uzrokuje veće gubitke tlaka (sl. 109).



Sl. 107. Mjerna sapnica. a) standardne mjerne sapnice ISA i VDI; piezometrički otvori mogu biti prema konstrukciji prikazanoj na gornjem ili na donjem dijelu skice, b) dijagram koeficijenta protoka C u ovisnosti o Reynoldsovu broju Re_1 ulaznog strujanja

Inače je mjerna sapnica jeftinija od Venturijeve cijevi i zauzima manje prostora. Izraz za protok obično se piše u obliku

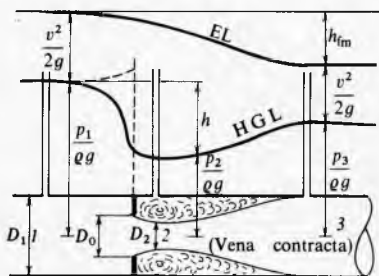
$$Q = C A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}, \quad (513a)$$

gdje je

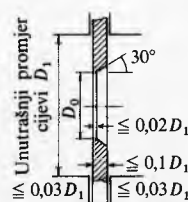
$$C = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}}, \quad (513b)$$

A_1 površina unutrašnjeg presjeka cijevi cjevovoda, a A_2 površina izlaznog presjeka sapnice.

Podaci o koeficijentu C za različite odnose A_2/A_1 prikazani su u dijagramu na sl. 107b. Taj dijagram vrijedi samo za standardnu izvedbu sapnice te za smještaj i dimenzije piezometričkih otvora prema sl. 107a.

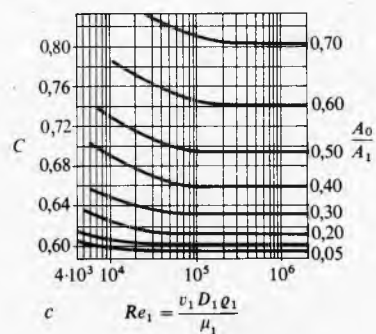


a



$$Q = C A_0 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

b



c

Sl. 108. Mjerna dijafragma. a) shema mjerne dijafragme, b) presjek mjerne dijafragme, c) dijagram koeficijenta C mjerne dijafragme u ovisnosti o Reynoldsovu broju Re_1 i omjeru A_0/A_1

Mjerna dijafragma (prigušnica, zaslon ili blenda) prikazana je shematski na sl. 108a. Koeficijent kontrakcije mlaza iza dijafragme definiran je odnosom

$$C_c = \frac{A_2}{A_0}, \quad (514a)$$

gdje je A_2 presjek vene contracte iza dijafragme, a A_0 površina otvora dijafragme. Primjenom jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeve jednadžbe, te ako se uvede i koeficijent brzine C_v , dobiva se izraz za protok

$$Q = C_d \frac{A_0}{\sqrt{1 - C_c^2 (A_0/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}, \quad (514b)$$

gdje je koeficijent protoka $C_d = C_c C_v$, a A_1 površina presjeka cijevi.

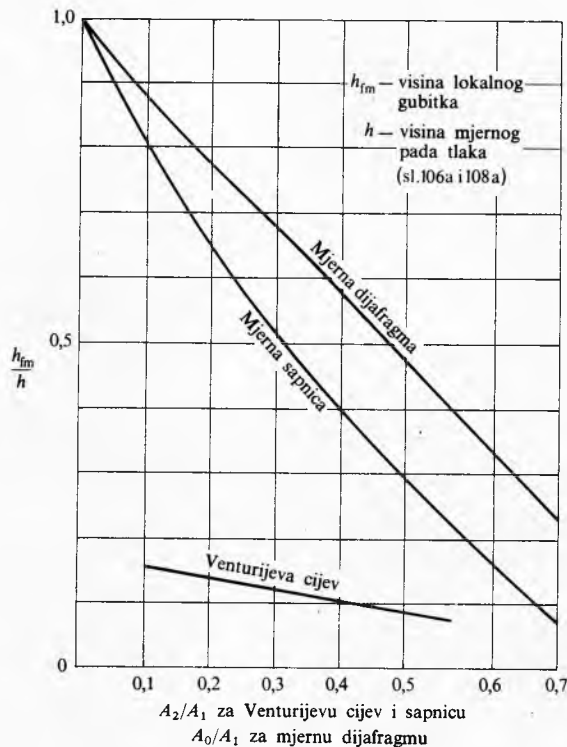
Da se izbjegne određivanje dvaju koeficijenata C_c i C_v , primjenjuje se jednostavnija formula

$$Q = C A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}, \quad (514c)$$

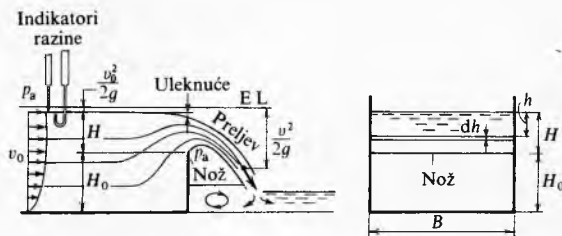
gdje je za standardnu izvedbu mjerne dijafragme (sl. 108b) u dijagramu sl. 108c prikazan koeficijent C kao funkcija Reynoldsova broja Re_1 i omjera A_0/A_1 .

Sl. 109 pokazuje da je vrlo velik lokalni gubitak pri strujanju kroz mjernu dijafragmu.

Mjerna brana služi za mjerenje protoka u otvorenom kanalu (sl. 110). Protok se određuje prema visini H uzvodno od noža brane, i to na mjestu koje je od noža udaljeno bar četiri maksimalne visine H za vrijeme mjerenja. Uleknucé slobodne površine kapljavine iznad noža iznosi $\sim 0,15H$.



Sl. 109. Visina lokalnog gubitka u protočnom mjerilu



Sl. 110. Mjerna brana

Pri izvodu izraza za protok preko pravokutne brane širine B promatra se elementarni protok dQ preko površine $dA = Bdh$ u ravnini noža. Zanimari li se kvadrat male ulazne brzine v_0 , Bernoullijeva jednadžba daje

$$dQ = Bdh\sqrt{2gh}, \quad (515a)$$

a integracijom od $h=0$ do $h=H$, i ako se uvede koeficijent protoka C_d , dobiva se

$$Q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} B H^{3/2}. \quad (515b)$$

U području visina iznad brane $H = 30 \dots 600$ mm Rehbockova formula za koeficijent C_d glasi

$$C_d = 0,605 + \frac{1}{1000\{H\}} + 0,08 \frac{H}{H_0}, \quad (515c)$$

gdje je visina iznad brane $\{H\}$ izražena u metrima.

Pravokutna mjerna brana na sl. 110 nema kontrakciju bočnih krajeva. Ostali tipovi mjernih brana jesu brane s kontrakcijom krajeva (širina je otvora brane manja od širine ulaznog kanala) i brane s različitim oblicima otvora brane, npr. trokutne, trapezne i kružne brane.

Jednodimenzijско stlačivo strujanje

U jednodimenzijском stlačivom strujanju gustoća fluida ρ postaje jedna od osnovnih skalarnih funkcija varijable x . Umjesto oznake s za jednodimenzijску varijablu nestlačivog strujanja, pri stlačivom strujanju uvodi se oznaka x . Tako jednadžba kontinuiteta za stacionarno stlačivo strujanje ima oblik (418d) i, ispusti li se indeks srednje brzine, ona glasi

$$\dot{m} = \rho(x)v(x)A(x) = \text{const.}, \text{ uzduž strujne cijevi.} \quad (516)$$

Pri stlačivom strujanju i temperatura T je jedna od osnovnih veličina i skalarna je funkcija varijable x .

U običnim tehničkim problemima strujanja plinova redovito se utjecaj masenih sila (npr. gravitacije) može zanemariti, pa iz jednadžbe gibanja i energetske jednadžbe otpada član koji izražava taj utjecaj. Međutim, pri analizi dinamike strujanja velikih masa plina, npr. pri analizi stabilnosti atmosfere, Zemljina gravitacija ima velik utjecaj koji se ne smije zanemariti.

Za jednodimenzijско stacionarno strujanje stlačivog fluida, ako između presjeka 1 i 2 strujne cijevi fluid ne obavlja mehanički rad, niti se rad obavlja na fluidu (tj. u sustavu nema stroja, pa je $P_s = 0$), energetska jednadžba (388d), uz $U = 0$ i nakon dijeljenja masenim protokom $\dot{m}$, dobiva oblik

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \dot{q} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}, \quad (517)$$

gdje je $\dot{q} = \dot{Q}/\dot{m}$ toplinska energija po jedinici mase fluida dovedena fluidu iz vanjskog toplinskog izvora, ili toplinska snaga po jedinici masenog protoka, s dimenzijom $[\dot{q}] = L^2 T^{-2}$, dakle $[\dot{q}]_{SI} = J/kg = W/(kg/s)$.

U energetske jednadžbi (517) pretpostavljeni su jedinični faktori ispravka kinetičke energije definirani izrazom (489b), tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Ako se pretpostave jedinični faktori ispravka količine gibanja definirani sa (499b), tj. $\beta_1 = \beta_2 = 1$, jednadžba količine gibanja (379) za jednodimenzijско stacionarno stlačivo strujanje, umjesto oblika (500), poprima oblik

$$\int_{KP} \vec{\sigma}_n dS = \rho_2 \vec{v}_2 v_2 A_2 - \rho_1 \vec{v}_1 v_1 A_1 = \dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad (518)$$

gdje, uz vanjske normale, maseni protok iznosi

$$\dot{m} = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 A_2 = -\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 A_1. \quad (518a)$$

U jednadžbi (518) zanemaren je utjecaj masenih sila.

Razvije li se lijeva strana izraza (390b), drugi zakon termodinamike za jednodimenzijско stacionarno strujanje dobiva oblik

$$\rho_2 s_2 v_2 A_2 - \rho_1 s_1 v_1 A_1 + \int_{KP} \frac{\dot{q}}{T} \cdot \vec{n} dS \geq 0, \quad (519)$$

gdje je s specifična entropija. Za adijabatsko strujanje (tj. $\dot{q} = 0$), primjenom jednadžbe kontinuiteta, izraz (519) prelazi u

$$s_2 - s_1 \geq 0. \quad (519a)$$

Odnosi za savršeni plin. Savršeni plin je tvar s jednadžbom stanja u obliku

$$p = \rho R T. \quad (520a)$$

U tehničkoj se primjeni mogu mnogi plinovi smatrati savršenim plinom ako se nalaze ispod kritičnog tlaka, a iznad kritične temperature (*v. Termodinamika*). Savršeni se plin ne smije poistovjetiti s idealnim fluidom ili idealnim plinom. Naime, idealni fluid ili plin idealizirani je medij bez viskoznosti, pa zbog toga u njemu ne mogu postojati smična ili tangencijalna naprezanja, dok je savršeni plin viskozan i definiran samo jednadžbom stanja (520a). *Idealni savršeni plin* je idealizirani neviskozni stlačivi fluid koji slijedi jednadžbu stanja (520a). Pri analizi stlačivog strujanja plinova uvijek se mora računati s apsolutnim tlakom p koji ulazi u jednadžbu stanja (520a).

Toplinski i kalorično savršeni plin jest plin koji slijedi jednadžbu stanja (520a) i ima konstantne specifične topline c_p i c_v , pa je konstantan i omjer

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa. \quad (520b)$$

Realni plinovi odstupaju više od toplinske i kalorične savršenosti ili nego od jednadžbe stanja (520a).

Za čistu tvar koja slijedi jednadžbu stanja (520a) vrijedi odnos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_T = 0, \quad (521a)$$

tj. da unutrašnja energija savršenog plina ne zavisi od gustoće, nego samo od temperature, pa je

$$du = c_v dT, \quad (521b)$$

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\rho. \quad (521c)$$

Promjena unutrašnje energije savršenog plina između bilo kojeg para krajnjih stanja iznosi

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT = c_v(T_2 - T_1), \quad (521d)$$

gdje se prvi dio jednakosti odnosi na savršeni plin, a drugi na toplinski i kalorično savršeni plin.

Prema (520a) i omjer p/ρ funkcija je samo temperature, te je i entalpija h (386a) također funkcija samo temperature, pa vrijede relacije:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0, \quad dh = c_p dT, \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p. \quad (522a)$$

Promjena je entalpije dana izrazom

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT = c_p(T_2 - T_1). \quad (522b)$$

Primjenom jednadžbe stanja (520a) može se pisati

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + RT, \quad (523a)$$

ili primjenom (521b) diferencijalni oblik izraza za entalpiju glasi

$$dh = c_p dT = du + R dT = c_v dT + R dT. \quad (523b)$$

Iz te se relacije dobiva za savršeni plin važna jednakost

$$c_p = c_v + R. \quad (523c)$$

Uvede li se u tu jednakost omjer specifičnih toplina κ prema (520b), dobiva se

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho T}, \quad (523d)$$

$$c_v = \frac{c_p}{\kappa} = \frac{1}{\kappa - 1} R = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho T}. \quad (523e)$$

Gibbsova jednadžba (414a) i primjena jednadžbi (521b) i (520a) daju izraz za diferencijal entropije savršenog plina:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}. \quad (524a)$$

Uz $c_v = \text{const.}$ integracijom se dobiva

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (524b)$$

a primjenom (523e) i (520a) taj izraz poprima i sljedeće oblike:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-(\kappa-1)} \right], \quad (524c)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\kappa} \right], \quad (524d)$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\kappa \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-(\kappa-1)} \right]. \quad (524e)$$

Ako je proces izentropski, tj. adijabatski i reverzibilan, tada je $s_2 - s_1 = 0$, pa iz (524d) slijedi

$$\frac{p_2}{\rho_2^\kappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}, \quad (524f)$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const. za izentropski proces.} \quad (524g)$$

Taj se proces može izraziti i temperaturama u obliku

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\kappa-1} \quad (524h)$$

Izraz (524g) pokazuje da je izentropski proces barotropan:

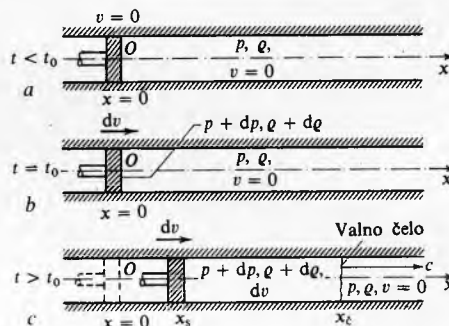
$$\rho = \rho(p) = \left(\frac{p}{\text{const.}} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (525a)$$

pa funkcija tlaka $\mathcal{P}$, definirana sa (430b), postaje

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^p \left(\frac{p}{\text{const.}} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right). \quad (525b)$$

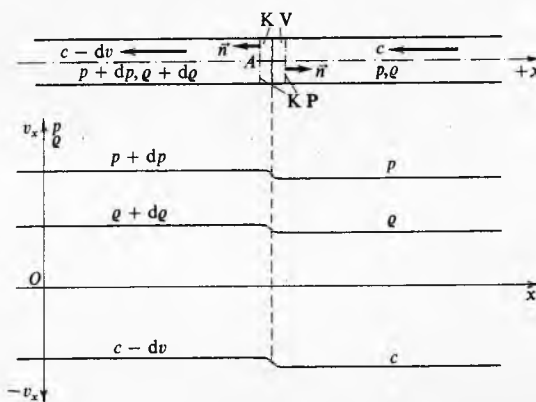
Brzina širenja slabog tlačnog poremećaja ili brzina zvuka.

Ako se stap u cijevi (sl. 111a i b) u trenutku $t = t_0$ odjednom počne gibati nekom malom brzinom dv , istodobno nastaje preko površine stapa slabo stlačivanje fluida, što se očituje u povećanju tlaka za dp i gustoće za $d\rho$. Nakon toga, u vrijeme $t > t_0$, taj se poremećaj širi uzduž cijevi konstantnom brzinom c , i to u obliku valnog čela (sl. 111c). Fluid kroz koji je prošlo čelo vala nalazi se pod tlakom $p + dp$, ima gustoću $\rho + d\rho$ i giba se brzinom dv . Fluid ispred valnog čela i dalje ostaje neporemećen u stanju p, ρ i $v = 0$. Pri tom treba razlikovati malu brzinu strujanja fluida dv od velike brzine c kojom čestice međusobnim dodirima jedna drugoj prenose poremećaj koji se dogodio negdje u fluidu. Kad bi fluid bio apsolutno nestlačiv, ta bi brzina širenja poremećaja bila beskonačna, tj. poremećaj bi se istodobno i trenutno raširio čitavim fluidom.



Sl. 111. Širenje slabog tlačnog poremećaja u fluidu

S obzirom na promatrača u sustavu čvrsto vezanom uz cijev pojava je nestacionarna. Analiza je jednostavnija ako je inercijski sustav promatrača čvrsto vezan uz čelo vala koje se giba konstantnom brzinom c , jer je u tom sustavu pojava stacionarna. Na dijagramu sl. 112 prikazane su veličine p, ρ i v kako ih vidi promatrač koji se giba zajedno s čelom vala.



Sl. 112. Izvod izraza za brzinu zvuka

Jednadžba kontinuiteta (516) ili (518a) i x -komponenta jednadžbe količine gibanja (518), primijenjene na fluid unutar kontrolnog volumena koji prekriva neposredni okoliš valnog čela (sl. 112), daju

$$\dot{m} = \rho c A = (\rho + d\rho)(c - dv)A, \quad (526a)$$

$$dpA = \rho c A [-(c - dv) + c], \quad (526b)$$

ili zanemari li se $d\rho dv$ kao produkt malih veličina, vrijedi

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dv}{c}, \quad dp = \rho c dv. \quad (526c)$$

Ako se te dvije jednadžbe podijele, dobiva se

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad \text{ili} \quad c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (526d)$$

To je izraz za brzinu širenja slabog poremećaja u fluidu ili izraz za brzinu zvuka.

Pomoću (statičke) jednadžbe kontinuiteta

$$m = \rho V = \text{const.} \quad \text{ili} \quad dm = \rho dV + V d\rho = 0 \quad (527a)$$

može se prikazati zakon stlačivanja fluida (1) i u obliku

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K} \quad \text{ili} \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}. \quad (527b)$$

Ako se jednakost (527b) uvrsti u (526d), dobiva se alternativni izraz za brzinu zvuka

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (528)$$

Za vodu temperature 15°C volumenski modul elastičnosti iznosi $K = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, a gustoća $\rho = 999,1 \text{ kg/m}^3$, pa je brzina zvuka u vodi $c = 1467 \text{ m/s}$.

Pri prolazu zvučnog vala neznatne su promjene tlaka i temperature, pa se proces može smatrati reverzibilnim, a budući da je proces relativno brz, može se, zbog neznatne temperaturne promjene, smatrati i adijabatskim. Prema tome, proces širenja zvučnog vala u fluidu može se smatrati izentropskim. Odnos p i ρ za savršeni plin i izentropski proces dan je izrazom (524g), pa vrijedi

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = \kappa \cdot \text{const.} \cdot \rho^{\kappa-1} = \frac{\kappa p}{\rho} \quad (529a)$$

ili, izraženo volumenskim modulom elastičnosti,

$$K = \kappa p \text{ za izentropsku kompresiju.} \quad (529b)$$

Prema (526d) ili (528) izraz za brzinu zvuka u savršenom plinu glasi

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (529c)$$

ili je, primjenom (520a), alternativni oblik

$$c = \sqrt{\kappa R T}. \quad (529d)$$

Prema toj jednadžbi, u zraku temperature 15°C , uz $R = 287,04 \text{ J/(kg K)}$ i $\kappa = 1,4$, brzina zvuka iznosi $340,3 \text{ m/s}$.

Izraz (529d) pokazuje da u savršenom plinu brzina zvuka zavisi samo od apsolutne temperature. Za nestlačivi je fluid volumenski modul elastičnosti K beskonačan, pa je i brzina zvuka beskonačna.

Budući da je c brzina širenja slabog poremećaja relativno prema česticama fluida, apsolutna brzina zvuka a u fluidu koji struji brzinom v iznosi

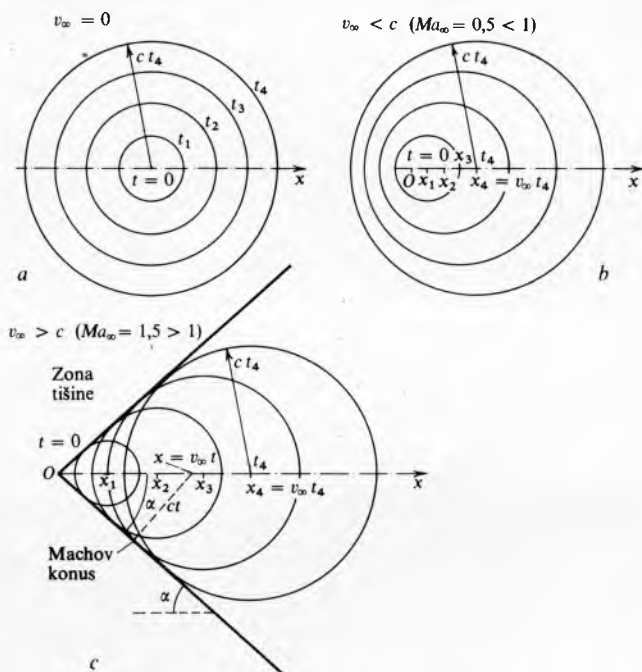
$$a = v \pm c, \quad (529e)$$

gdje se predznak $+$ odnosi na područje nizvodno od izvora zvuka, a predznak $-$ na područje uzvodno od izvora zvuka, dok se predznak brzine a odnosi na smjer brzine v . Zbog toga, kad fluid struji brzinom $v < c$ preko dva fiksna mjesta koja se nalaze jedno uzvodno, a drugo nizvodno od izvora zvuka, isti ton emitiran određenom frekvencijom čut će se na mjestu uzvodno od izvora zvuka kao ton više frekvencije, a na mjestu nizvodno od izvora kao ton niže frekvencije od one kojom je stvarno emitiran.

Ako se kroz fluid koji miruje giba izvor zvuka nekom određenom brzinom, tada će se na fiksnom mjestu u fluidu čuti ton kojemu frekvencija raste s približavanjem izvora zvuka, a opada s udaljavanjem izvora zvuka. Ta se pojava zove *Dopplerov efekt*.

Kao što pokazuje izraz (529e), kad je $v > c$, predznak a je u oba slučaja pozitivan, pa se u području uzvodno od izvora zvuka neće uopće čuti zvuk, tj. u nadzvučnom strujanju slabi se poremećaji ne mogu širiti uzvodno, tj. u smjeru suprotnom od smjera strujanja.

Ako u fluidu koji miruje točkasti izvor zvuka emitira ton određene frekvencije, tada će se pulsovi tog tona širiti prostorom u svim smjerovima formirajući sferna valna čela (sl. 113a). Kad se preko takva izvora pusti da fluid paralelno struji brzinom $v_\infty < c$, zvuk će se ponovo širiti na sve strane, ali s nizom ekscentričnih valnih čela pojedinog pulsa tona (sl. 113b). Pri $v_\infty > c$ situacija se potpuno mijenja, i kao što pokazuje konstrukcija na sl. 113c, sav poremećaj ostaje unutar konusnog područja nazvanog *Machovim konusom*, izvan kojeg je tzv. *zona tišine*. Ako se takav točkasti izvor zvuka giba kroz mirni fluid nadzvučnom brzinom $u = -v_\infty$, na fiksnom mjestu u fluidu čut će se zvuk tek kad na to mjesto naiđe rub Machova konusa. Ta se pojava opaža kad nebom proleti avion nadzvučnom brzinom.



Sl. 113. Širenje poremećaja fluidom u trodimenzijskom prostoru

Polovični kut Machova konusa naziva se *Machov kut*, i prema sl. 113c iznosi:

$$\sin \alpha = \frac{ct}{v_\infty t} = \frac{1}{Ma_\infty}, \quad (529f)$$

gdje je $Ma_\infty = v_\infty/c$ *Machov broj*.

O detaljnijoj dinamičkoj analizi širenja slabog poremećaja u fluidu (kao nestacionarne pojave) v. *Valovi u fluidima*.

Jednodimenzijско stacionarno izentropsko strujanje idealnoga savršenog plina. Pri takvu su strujanju sve veličine funkcije samo jednodimenzijске varijable x : $v = v(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $T = T(x)$, $A = A(x)$, $s(x) = \text{const.}$

Zanemare li se masene sile (tj. $\vec{f} = 0$), Eulerova jednadžba gibanja (421a) za jednodimenzijско stacionarno strujanje idealnog fluida poprima oblik

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (530a)$$

a jednadžba kontinuiteta (516):

$$\dot{m} = \rho v A = \text{const.} \quad (530b)$$

Piše li se jednadžba (530a) u obliku diferencijala

$$v dv = - \frac{dp}{\rho} = - \left(\frac{dp}{d\varrho} \right)_s \frac{d\varrho}{\varrho} = - c^2 \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad (530c)$$

a (530b) u obliku logaritmičkog diferencijala

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0, \quad (530d)$$

i ako se uvede Machov broj $Ma = v/c$, kombinacija (530c) i (530d) daje Hugoniotovu jednadžbu

$$(Ma^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A}. \quad (531)$$

Primjenom (530a), Hugoniotova se jednadžba može pisati i u obliku

$$(1 - Ma^2) \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{dA}{A}. \quad (531a)$$

Hugoniotovom se jednadžbom mogu rastumačiti odnosi između prirasta površine presjeka strujne cijevi dA , prirasta brzine dv i prirasta tlaka dp pri *podzvučnom* ($Ma < 1$) i *nadzvučnom* ($Ma > 1$) strujanju idealnog stlačivog fluida (sl. 114). Ti su odnosi sljedeći:

Geometrija	$Ma < 1$	$Ma > 1$
$dA > 0$ (Divergentni kanal) 	$dv < 0$ $dp > 0$ Podzvučni difuzor	$dv > 0$ $dp < 0$
$dA < 0$ (Konvergentni kanal) 	$dv > 0$ $dp < 0$	$dv < 0$ $dp > 0$ Nadzvučni difuzor

Sl. 114. Odnosi pri izentropskom strujanju

a) Ako je $Ma < 1$, tada dv i dA imaju suprotne predznake, tj. pri podzvučnom izentropskom strujanju plina, kao i pri strujanju nestlačivog fluida, brzina se strujanja smanjuje s porastom površine presjeka cijevi, i obratno, pri smanjenju presjeka cijevi brzina se povećava.

b) Ako je $Ma > 1$, predznaci dv i dA su jednaki, tj. pri nadzvučnom izentropskom strujanju plina u cijevi koja se sužava strujanje se usporava, a u cijevi koja se proširuje strujanje se ubrzava. Ta, na prvi pogled paradoksalna pojava nastaje zato što se u nadzvučnom području brzina gustoća plina pri ekspanziji toliko smanjuje da se bez obzira na porast površine A produkt ϱA u jednadžbi kontinuiteta ipak smanjuje, pa se brzina v povećava.

c) Ako je $Ma = 1$ te je $dA = 0$, pripadni presjek cijevi na kojemu je izentropsko strujanje jednako brzini zvuka naziva se *kritični presjek*, A_{kr} . Nuždan uvjet ekstrema površine presjeka A jest $dA = 0$, tj. $dA/dx = 0$. Lako se dokaže da je kritični presjek A_{kr} minimalan, a ne maksimalan presjek. Naime, ako plin pritječe maksimalnom presjeku, podzvučno strujanje se usporava i ne može doseći $Ma = 1$, a nadzvučno strujanje se ubrzava, pa zato Ma i dalje raste te ostaje $Ma > 1$. Zbog toga se na maksimalnom presjeku cijevi nikad ne može ostvariti strujanje brzinom zvuka.

d) Ako je $dA = 0$, tj. presjek je ekstrem (maksimalan ili minimalan), tada je ili $Ma = 1$, tj. presjek je kritičan (minimalan), ili je $Ma \neq 1$, a $dv = 0$. U tom posljednjem slučaju, bez obzira da li je brzina strujanja podzvučna ili nadzvučna, ona u ekstremnom presjeku ima ekstremnu vrijednost. Pri podzvučnom strujanju brzina je minimalna na maksimalnom presjeku, a maksimalna na minimalnom presjeku. Pri nadzvučnom je strujanju obratno, na maksimalnom presjeku brzina je maksimalna, a na minimalnom minimalna.

Dakle, da bi se ostvarilo nadzvučno stacionarno izentropsko strujanje plina iz stanja mirovanja u spremniku, potrebno je da plin prvo prolazi kroz konvergentni dio cijevi i zatim, uz odgovarajuće uvjete na izlazu, u divergentnoj cijevi postiže nadzvučnu brzinu strujanja.

Iz jednadžbe gibanja (530a) slijedi

$$\frac{dp}{dv} = -\varrho v < 0, \quad (531b)$$

tj. pri izentropskom strujanju dp i dv uvijek imaju različite predznake.

Ako se zanemari utjecaj masene sile ($U = 0$) i primijeni funkcija tlaka $\mathcal{P}$ za izentropski proces (525b), integral jednadžbe gibanja idealnoga barotropnog fluida (433c) prelazi u Bernoullijevu jednadžbu za stacionarno izentropsko strujanje idealnoga savršenog plina:

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\varrho_0} = \text{const.}, \quad (532)$$

gdje indeks 0 označava veličine (izentropskog) stanja mirovanja ostvarenog povratnim procesom (npr. tlak p_0 , gustoća ϱ_0 , brzina zvuka c_0 , temperatura T_0 , entalpija h_0 itd. plina u spremniku u kojemu miruje i iz kojeg izentropski istječe).

Za dvije točke jednodimenzijskog izentropskog strujanja, primjenom odnosa (524f) za izentropski proces, jednadžba (532) može se pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] = \\ &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\varrho_2} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (532a)$$

Za stacionarno izentropsko strujanje vrijedi i adijabatska energetska jednadžba (388f) sa $U = 0$ ili (517) sa $\dot{q} = 0$, tj.

$$h + \frac{1}{2} v^2 = h_0. \quad (533)$$

Za savršeni plin s konstantnim c_p i c_v iz (522b), (523d) i (520a) slijedi

$$h = c_p T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\varrho}, \quad (533a)$$

gdje je proizvoljna konstanta izjednačena s nulom. Uvrštenjem (533a) u (533) dobiva se Bernoullijeva jednadžba (532).

Jednadžbe (532) i (533) imaju u praktičnoj primjeni i druge alternativne oblike. Ako se prva jednakost iz (533a) uvrsti u (533), slijedi

$$c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0, \quad (534a)$$

a primjenom (529d) i (523d) ta jednadžba poprima oblik

$$c^2 + \frac{\kappa - 1}{2} v^2 = c_0^2 \quad \text{ili} \quad \frac{T_0}{T} = \frac{c_0^2}{c^2} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2. \quad (534b)$$

Primjenom (524h) dobivaju se iz (534b) izrazi za omjere tlakova p_0/p i gustoća ϱ_0/ϱ :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \text{i} \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (534c)$$

Uvjeti strujanja na najužem presjeku jednodimenzijskog strujanja nazivaju se kritičnima kad je na tom mjestu brzina strujanja jednaka brzini zvuka ($Ma = 1$ na A_{kr}), pa je

$$v = v_{kr} = c_{kr} = \sqrt{\frac{\kappa p_{kr}}{\varrho_{kr}}} = \sqrt{\kappa R T_{kr}}. \quad (535a)$$

Jednadžbe (532) i (533) mogu se izraziti i veličinama kritičnih uvjeta. Tako jednakost (535a) uvrštena u (534b) daje

$$c_0^2 = \frac{\kappa + 1}{2} c_{kr}^2, \quad (535b)$$

što uvršteno natrag u (534b) daje

$$c^2 + \frac{\kappa - 1}{2} v^2 = \frac{\kappa + 1}{2} c_{kr}^2. \quad (535c)$$

Pri $Ma = 1$ odnosi (534b i c) prelaze u odnose kritičnih veličina i veličina izentropskog stanja mirovanja:

$$\begin{aligned} \frac{T_{kr}}{T_0} &= \frac{c_{kr}^2}{c_0^2} = \frac{2}{\kappa + 1}, \\ \frac{p_{kr}}{p_0} &= \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \\ \frac{\rho_{kr}}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \end{aligned} \quad (535d)$$

U tabl. 5 dani su podaci o tim odnosima za tri uobičajene vrijednosti κ .

Tablica 5
ODNOS KRITIČNIH VELIČINA I VELIČINA STANJA MIROVANJA PRI IZENTROPSKOM STRUJANJU IDEALNOGA SAVRŠENOG PLINA

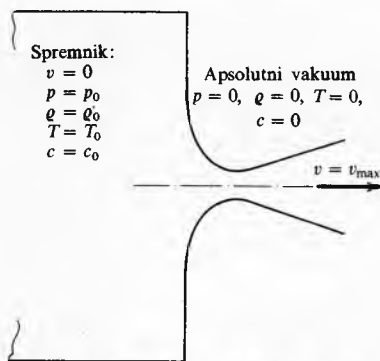
$\kappa \rightarrow$	$\frac{2}{\kappa} = 1,286$	$\frac{7}{5} = 1,400$	$\frac{4}{3} = 1,667$
$\frac{T_{kr}}{T_0}$	0,8750	0,8333	0,7500
$\frac{p_{kr}}{p_0}$	0,5483	0,5283	0,4871
$\frac{\rho_{kr}}{\rho_0}$	0,6267	0,6339	0,6495

Ako bi se od nekog polaznog stanja mirovanja p_0 , ρ_0 , T_0 i c_0 izentropska ekspanzija plina pri istjecanju odvijala do potpunog vakuuma, tj. p , ρ , T i $c = 0$, npr. pri istjecanju iz spremnika kroz konvergentno-divergentnu sapnicu (sl. 115), ostvarila bi se maksimalna ili granična brzina za koju izrazi (534a), (534b), (535c), (532) i (533) redom daju

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{2c_p T_0} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} = c_{kr} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{2h_0}. \end{aligned} \quad (536a)$$

Pomoću te maksimalne brzine mogu se izvesti novi oblici energetske ili Bernoullijeve jednadžbe izentropskog strujanja. Npr., uvrštenjem u (534b) dobiva se oblik

$$c^2 + \frac{\kappa - 1}{2} v^2 = \frac{\kappa - 1}{2} v_{\max}^2. \quad (536b)$$



Sl. 115. Istjecanje u vakuum

Umjesto Machovim brojem $Ma = v/c$, odnosi pri izentropskom strujanju (534b i c) i ostale jednadžbe mogu se izraziti koeficijentom brzine λ definiranim sa

$$\lambda = \frac{v}{c_{kr}}. \quad (536c)$$

Taj se odnos naziva i *normalizirani Machov broj*, a neopravdano se označuje sa Ma_{kr} .

Lako se dokaže da su λ i Ma povezani izrazima:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}} \frac{Ma}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2}}, \quad (536d)$$

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}}. \quad (536e)$$

Ako je $Ma = 0$, tada je $\lambda = 0$, a za $Ma = 1$ i $\lambda = 1$; ako $Ma \rightarrow \infty$, tada $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$, gdje je

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}. \quad (536f)$$

Recipročni odnosi izraza (534b i c) izraženi sa λ glase:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{c^2}{c_0^2} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2, \quad (537a)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (537b)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (537c)$$

Kad se u stlačivom strujanju brzina mjeri pomoću Pitotove ili Pitot-Prandtllove cijevi, potrebno je *odvojeno* izmjeriti statički tlak p_{∞} , tlak stanja mirovanja p_0 i temperaturu T_0 . Za $Ma_{\infty} = v_{\infty}/c_{\infty} < 1$ primjena Bernoullijeve jednadžbe (532), jednadžbe izentropije (524f) i izraza (523d) daju izraz za brzinu mjerenu Pitotovom cijevi:

$$v_{\infty} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p_{\infty}}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho_{\infty}} \right)} = \sqrt{2c_p T_0 \left[1 - \left(\frac{p_{\infty}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}. \quad (538)$$

U nadzvučnom strujanju $Ma_{\infty} > 1$, kad nadzvučna brzina v_{∞} padne na nulu, nastaje ispred nosa Pitotove cijevi udarni val i izraz (538), valjan za izentropsko zaustavljanje fluida, ne može se više primijeniti.

Utjecaj stlačivosti fluida na razliku tlakova p_0 i p_{∞} raste s povećanjem Machova broja i izražava se *faktorom stlačivosti* ili *kompresibilnosti*

$$F_c = \frac{p_0 - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2} = f(Ma_{\infty}). \quad (539a)$$

Za nestlačivi fluid $\rho_{\infty} = \text{const.}$ taj faktor iznosi

$$F_c = \frac{p_0 - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2} = 1. \quad (539b)$$

U stlačivom strujanju odnos tlakova p_0 i p_{∞} dan je izrazom (534c), i za $Ma_{\infty} < 1$ taj izraz razvijen u red daje u okolišu $Ma_{\infty}^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p_{\infty}} &= 1 + \frac{\kappa}{2} Ma_{\infty}^2 + \frac{\kappa}{8} Ma_{\infty}^4 + \frac{\kappa(2 - \kappa)}{48} Ma_{\infty}^6 + \\ &+ \frac{\kappa(2 - \kappa)(3 - 2\kappa)}{384} Ma_{\infty}^8 + \dots \end{aligned} \quad (539c)$$

Budući da prema (529c) vrijedi

$$\frac{\kappa}{2} p_{\infty} Ma_{\infty}^2 = \frac{\kappa}{2} p_{\infty} \frac{v_{\infty}^2}{c_{\infty}^2} = \frac{\kappa}{2} p_{\infty} \frac{v_{\infty}^2}{\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} v_{\infty}^2, \quad (539d)$$

za faktor stlačivosti pomoću (539c) dobiva se izraz

$$F_c = \frac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2} = 1 + \frac{1}{4} Ma_\infty^2 + \frac{2-\kappa}{24} Ma_\infty^4 + \frac{(2-\kappa)(3-2\kappa)}{192} Ma_\infty^6 + \dots \quad (539e)$$

U tabl. 6 prikazane su vrijednosti faktora F_c za područje $Ma_\infty = 0 \dots 1$ i $\kappa = 1,4$. Iz te se tablice vidi da ako se za $Ma_\infty > 0,2$ zanemari stlačivost fluida, u razlici $p_0 - p_\infty$ nastaje pogreška veća od 1%, što za omjer gustoća ρ_∞/ρ_0 daje pogrešku veću od 2%.

Tablica 6
FAKTOR STLAČIVOSTI $F_c = f(Ma_\infty)$ ZA SAVRŠENI
PLIN ($\kappa = 1,4$)

$Ma_\infty = \frac{v_\infty}{c_\infty}$	F_c	$100(F_c - 1)$ %
0	1	0
0,05	1,0006	0,06
0,10	1,0025	0,25
0,15	1,0056	0,56
0,20	1,0100	1,00
0,25	1,0157	1,57
0,30	1,0227	2,27
0,35	1,0310	3,10
0,40	1,0406	4,06
0,45	1,0517	5,17
0,50	1,0641	6,41
1,00	1,2756	27,56

Jednadžba kontinuiteta također se može izraziti kritičnim veličinama

$$\dot{m} = \rho v A = \rho_{kr} v_{kr} A_{kr} = \rho_{kr} c_{kr} A_{kr} \quad (540a)$$

Maseni protok kroz jediničnu površinu normalnog presjeka cijevi $\dot{m}_1$ naziva se *maseni tok* ili *fluks*, a definiran je sa

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{m}}{A} = \rho v. \quad (540b)$$

Odnos masenog toka i kritičnoga masenog toka naziva se *normalizirani maseni tok* $\dot{m}_1^*$, a može se pisati:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1^* &= \frac{\rho v}{\rho_{kr} v_{kr}} = \frac{A_{kr}}{A} = \frac{\rho v}{\rho_{kr} c_{kr}} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_{kr}} \frac{v}{c} \frac{c}{c_0} \frac{c_0}{c_{kr}} = \\ &= \frac{\rho_0}{\rho_{kr}} \frac{c_0}{c_{kr}} Ma \frac{\rho}{\rho_0} \frac{c}{c_0}. \end{aligned} \quad (540c)$$

Primjenom odnosa (534b), (534c) i (535d) normalizirani maseni tok savršenog plina postaje funkcija Machova broja, ili, primjenom odnosa (536d), koeficijenta brzine

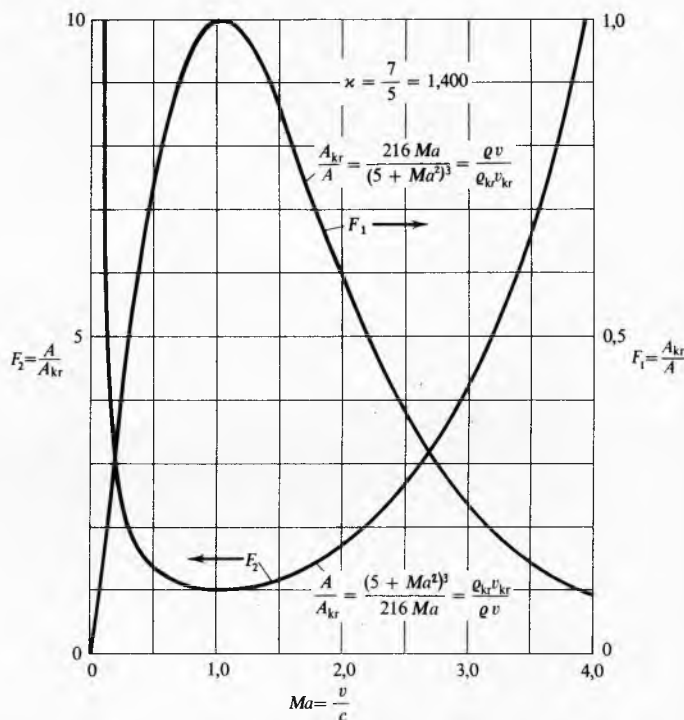
$$\begin{aligned} \dot{m}_1^* &= \frac{A_{kr}}{A} = \frac{\rho v}{\rho_{kr} v_{kr}} = \frac{Ma}{\left(\frac{2}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} Ma^2 \right)^{\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} = \\ &= \lambda \left(\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}. \end{aligned} \quad (540d)$$

Ta funkcija ima maksimum pri $Ma = \lambda = 1$, pa je *maseni tok maksimalan pri kritičnim uvjetima*. To vrijedi i za druge plinove, a ne samo za savršeni plin. U dijagramu na sl. 116 prikazane su za $\kappa = 1,4$ funkcija $\dot{m}_1^* = F_1(Ma)$ i njena recipročna vrijednost $1/\dot{m}_1^* = F_2(Ma)$.

Omjer A_{kr}/A ne može biti veći od jedinice, pa prema tome ni omjer A/A_{kr} ne može biti manji od jedinice. Za bilo koji $A/A_{kr} > 1$ postoje dva Machova broja: jedan za podzvučno strujanje $Ma < 1$, a drugi za nadzvučno strujanje $Ma > 1$. Oblik krivulje $F_2(Ma)$, sl. 116, može se zamisliti kao iskrivljeni profil nadzvučne sapnice u kojoj se Machov broj povećava s

udaljenosti u smjeru strujanja, što očito zahtijeva određeni protutlak u prostoru kamo plin istječe.

Za praktične proračune izentropskog strujanja služe tablice s numeričkim vrijednostima odnosa pojedinih veličina kao funkcija Machova broja Ma ili koeficijenta brzine λ .



Sl. 116. Maseni tok i recipročna vrijednost kao funkcija Machova broja za $\kappa = 1,4$

Istjecanje idealnoga savršenog plina kroz sapnice. Pri podzvučnom istjecanju idealnoga savršenog plina preko granične površine mlaza plina ulazi u unutrašnjost mlaza tlak p_a prostora u koji istječe plin, pa vrijedi uvjet

$$p_m = p_a, \quad (541)$$

gdje je p_m tlak u unutrašnjosti izlaznog mlaza, a p_a tlak u prostoru kamo istječe plin, koji se naziva i *protutlakom*.

Pri *nadzvučnom istjecanju* tlak se unutar fluida ne može širiti u smjeru suprotnom od smjera strujanja, pa tlak u mlazu p_m može biti veći, jednak ili manji od protutlaka okoliša p_a , tj. vrijedi uvjet

$$p_m \geq p_a. \quad (542)$$

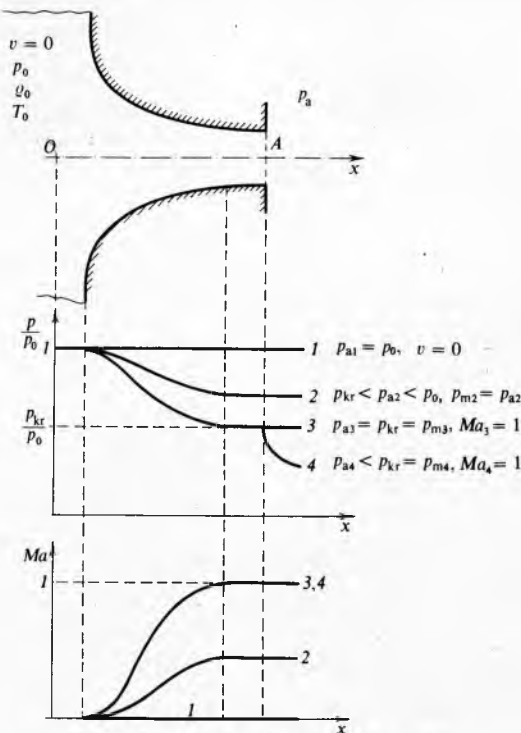
Uz zadani tlak p_0 u spremniku pri nadzvučnom se istjecanju može ostvariti uvjet $p_m = p_a$ samo jednim određenim odnosom izlaznog presjeka sapnice i protutlaka p_a . Ako je pri nadzvučnom istjecanju $p_m > p_a$, plin napuštajući sapnicu dalje ekspandira u u prostoru do tlaka p_a . Ako je $p_m < p_a$, na izlaznom se presjeku cijevi stvara *udarni val* u kojemu tlak skokovito poraste na p_a .

Konvergentna sapnica. Analiza istjecanja kroz konvergentnu sapnicu prikazana je dijagramima odnosa tlaka p/p_0 i Machova broja (sl. 117):

- ako je $p_{a1} = p_0$, nema istjecanja;
- ako je $p_{kr} < p_{a2} < p_0$, uzduž sapnice svuda je podzvučno strujanje ($Ma < 1$), a u mlazu na izlazu tlak je $p_m = p_{a2}$;
- ako je $p_{a3} = p_{kr}$, istjecanje je brzinom zvuka ($Ma = 1$), a u mlazu je $p_m = p_{a3} = p_{kr}$;
- ako protutlak p_a i dalje pada ispod tlaka p_{kr} (tj. $p_{a4} < p_{kr}$), unutrašnje strujanje u sapnici neće se ništa promijeniti prema slučaju pod c), jer se protiv smjera strujanja ne može kroz mlaz širiti nikakav poremećaj. To pokazuje i Hugoniotova jednadžba (531), prema kojoj se u konvergentnom dijelu sapnice ubrzavanje strujanja od $Ma = 0$ u spremniku, može odvijati najviše do $Ma = 1$ na presjeku minimalne površine. Na samom izlazu

bit će u mlazu $p_m = p_{kr}$, a ekspanzija je od p_{kr} do p_{a4} izvan sapnice.

Sapnica u kojoj su dosegnuti kritični uvjeti na presjeku minimalne površine i gdje je ekspanzija na niži tlak okoliša izvan sapnice, naziva se zagušena sapnica. Kad su jednom dosegnuti kritični uvjeti, očito se i maseni protok ne može dalje povećavati, bez obzira na snižavanje protutlaka p_a .



Sl. 117. Istjecanje kroz konvergentnu sapnicu

Opisani odnosi pri istjecanju kroz konvergentnu sapnicu mogu se sažeti u sljedeće: kad je

$$p_{kr} \leq p_a < p_0, \quad (543a)$$

tad je uvijek $p_m = p_a$, pa je strujanje s Machovim brojem $Ma \leq 1$; za sve protutlakove

$$p_a \leq p_{kr} \quad (543b)$$

u izlaznom je mlazu $p_m = p_{kr} \geq p_a$, pa je istjecanje uvijek brzinom zvuka (tj. $Ma = 1$), a dodatna ekspanzija plina nastaje izvan sapnice.

Pri određivanju masenog protoka kad je $p_a \geq p_{kr}$ izlazna brzina iz konvergentne sapnice računa se pomoću Bernoullijeve jednadžbe (532a), koja uz $v_1 = 0$, $p_1 = p_0$, $q_1 = q_0$ i $v_2 = v_m$, $p_2 = p_a$ daje

$$v_m = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}. \quad (544a)$$

Primjenom izentropskog odnosa (524f) može se gustoća u mlazu ρ_m izraziti sa

$$\rho_m = \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \rho_0, \quad (544b)$$

pa je maseni protok

$$\dot{m} = \rho_m v_m A = A \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_0 \rho_0 \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}. \quad (544c)$$

za sve omjere tlakova

$$\frac{p_a}{p_0} \geq \frac{p_{kr}}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (544d)$$

U izrazu (544c) A je površina presjeka otvora sapnice i površina mlaza, tj. pretpostavljen je koeficijent kontrakcije $C_c = 1$.

Pri kritičnom omjeru tlakova i za sve omjere tlakova manje od kritičnoga, tj. pri

$$\frac{p_a}{p_0} \leq \frac{p_{kr}}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (544e)$$

izlazna brzina ostaje jednaka brzini zvuka:

$$v_m = v_{mkr} = c_{kr} = \sqrt{\frac{\kappa p_{kr}}{\rho_{kr}}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad (544f)$$

gdje je primijenjen omjer

$$\frac{p_{kr}}{p_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (544g)$$

dobiven dijeljenjem drugog i trećeg izraza (535d).

Izrazi (544f) i (544b) daju za maksimalni maseni protok izraz

$$\dot{m}_{\max} = \dot{m}_{kr} = \rho_{kr} c_{kr} A = A \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \sqrt{\kappa p_0 \rho_0}, \quad (544h)$$

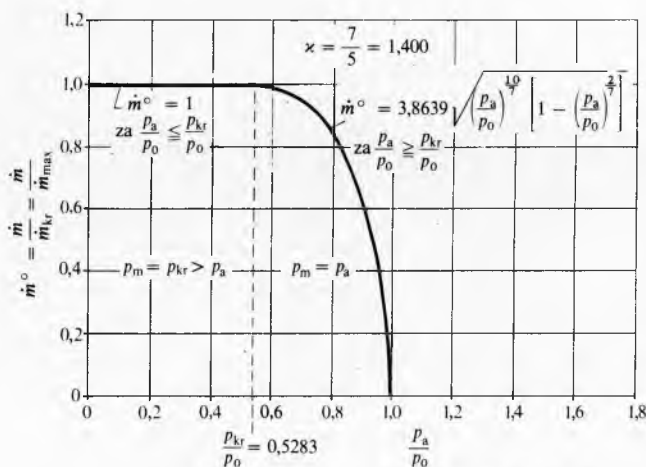
za sve $p_a \leq p_{kr}$.

Ako se maseni protok (544c) podijeli maksimalnim masenim protokom (544h), dobiva se bezdimenzijski maseni protok

$$\dot{m}^o = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}. \quad (545)$$

za sve $p_a \geq p_{kr}$, a $\dot{m}^o = 1$ za sve $p_a \leq p_{kr}$.

U dijagramu na sl. 118 prikazani su za $\kappa = 7/5 = 1,4$ bezdimenzijski maseni protoci (545) kao funkcije omjera tlakova p_a/p_0 .



Sl. 118. Zavisnost bezdimenzijskog masenog protoka $\dot{m}^o = \dot{m}/\dot{m}_{kr} = \dot{m}/\dot{m}_{\max}$ od omjera tlaka p_a u prostoru istjecanja i tlaka p_0 u spremniku

Konvergentno-divergentna (De Lavalova) ili nadzvučna sapnica. Na ulazni (konvergentni ili konfuzorski) dio sapnice, koji se sužava do grla, nastavlja se izlazni ili difuzorski dio. Ako pri istjecanju kroz sapnicu brzina plina na grlu ima kritičnu vrijednost (tj. jednaka je brzini zvuka), pri daljnjoj ekspanziji plina i pri određenim uvjetima protutlaka na izlazu u prostor istjecanja u difuzorskom se izlaznom dijelu sapnice može ostvariti nadzvučno strujanje.

Analiza istjecanja kroz konvergentno-divergentnu sapnicu grafički je prikazana dijagramima omjera tlakova p/p_0 i Machova broja na sl. 119. Ti dijagrami pokazuju sljedeće:

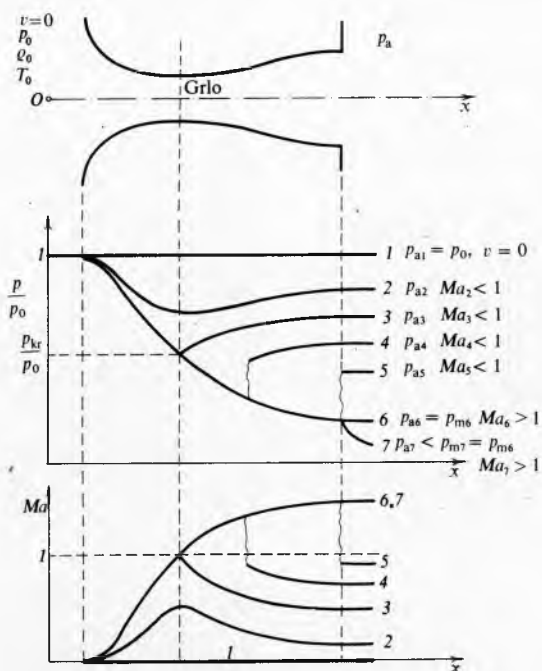
- ako je protutlak $p_{a1} = p_0$, tada nema strujanja;
- ako je protutlak p_{a2} takav da je $p_0 > p_{a2} > p_{a3}$, tada je svuda unutar sapnice strujanje podzvučno;

c) pri jednom potpuno određenom protutlaku p_{a3} , strujanje na grlu je kritično ($Ma = 1$), a u divergentnom se dijelu nastavlja podzvučno strujanje;

d) u području protutlakova od p_{a3} do p_{a6} , kad su protutlakovi $p_{a3} > p_{a4} > p_{a5} > p_{a6}$, na grlu sapnice nastaju kritični uvjeti, a u divergentnom dijelu nadzvučno strujanje. To nadzvučno strujanje na nekom mjestu preko udarnog vala prelazi u podzvučno, da bi se na izlazu tlak povisio, npr. na p_{a4} , u skladu s uvjetom istjecanja $p_{m4} = p_{a4}$. U području protutlakova od p_{a5} do p_{a6} udarni val nastaje na samom izlazu iz sapnice. Što je tlak p_{a5} bliži tlaku p_{a6} , to je udarni val sve slabiji i slabiji;

e) pri jednom potpuno određenom protutlaku p_{a6} , koji zavisi od veličina stanja mirovanja u spremniku i od dimenzija sapnice, unutar divergentnog dijela sapnice i na njenu izlazu uspostavlja se nadzvučno strujanje, a unutar izlaznog mlaza vlada tlak $p_{m6} = p_{a6}$. Takvi uvjeti strujanja u konvergentno-divergentnoj sapnici zovu se *projektirani rad sapnice*;

f) pri protutlakovima $p_a < p_{a6}$ (na sl. 119 primjer protutlaka p_{a7}) unutrašnje strujanje u sapnici ostaje nepromijenjeno s obzirom na protutlak p_{a6} i $p_{m7} = p_{a6}$, pa se ekspanzija plina od tlaka p_{a6} na p_{a7} događa izvan sapnice.

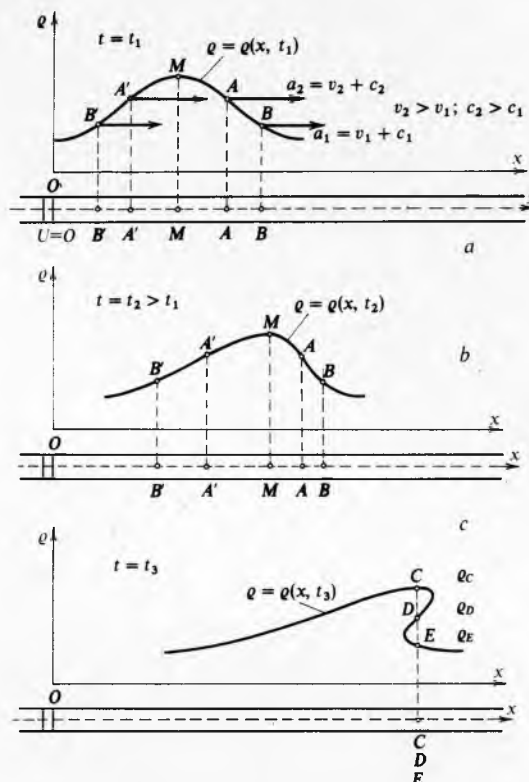


Sl. 119. Istjecanje kroz konvergentno-divergentnu (De Lavalovu) sapnicu

U području protutlakova od p_{a3} do p_{a5} u divergentnom dijelu sapnice nastaju normalni udarni valovi, okomiti na smjer strujanja, a u području protutlakova od p_{a5} do p_{a6} kosi udarni valovi na izlazu iz sapnice. Karakteristika udarnih valova jesu skokovite promjene tlaka, gustoće, temperature i brzine, pa ta pojava nije izentropski proces.

Normalni udarni val. Udarni val je relativno vrlo tanki sloj fluida u kojemu nastaju nagle promjene dinamičkih veličina. Debljina je tog sloja vrlo malena, reda veličine srednje slobodne putanje molekula, tj. 10^{-6} m, pa se udarni val može smatrati prostornom površinom diskontinuiteta brzine strujanja, tlaka, gustoće, temperature i entropije fluida. Kad u zračnom tunelu na tupi rotacijski projektil nailazi paralelno nadzvučno strujanje zraka ($Ma_\infty > 1$), ispred projektila nastaje udarni val u obliku rotacijskog hiperboloida, kroz koji se nadzvučna brzina strujanja zrakom skokovito mijenja u podzvučnu brzinu, a tlak, gustoća, temperatura i entropija skokovito porastu. Kad se projektil giba nadzvučnom brzinom kroz statičku atmosferu, takav se udarni val giba ispred projektila. Eksplozija u zraku proizvede sferno čelo udarnog vala, koje se širi u okolni statički i neporemećeni fluid.

Pri jednodimenzijском strujanju nastaje normalni ravni udarni val, okomit na smjer strujanja. Tako pri neispravno projektiranoj konvergentno-divergentnoj sapnici (npr. protutlak p_{a4} na sl. 119) plin na ulazu u proširenje iza grla sapnice počinje strujati nadzvučnom brzinom, ali zbog visokog protutlaka na izlazu sapnice nastaje već u njenu proširenom dijelu udarni val, pa nadzvučna brzina plina padne na podzvučnu i prilagodi se uvjetima koji vladaju na izlazu.



Sl. 120. Kvalitativna analiza nastajanja udarnog vala

Nastanak normalnog udarnog vala kvalitativno se analizira tako da se u cijevi konstantnog promjera (sl. 120) prati od nekog trenutka $t = t_1$ vremenska promjena uzdužne razdiobe neke veličine, npr. profila gustoće $q = q(x, t_1)$. Takav profil razdiobe gustoće u cijevi može nastati ako se u vremenu od $t = 0$ do $t = t_1$ stap pokreće od lijevog kraja cijevi prema desnom kraju po određenom zakonu brzine gibanja $U = U(t)$, uz $U(t = 0) = 0$ i $U(t = t_1) = 0$. Sličan profil razdiobe ili *jednostavni val* na istom dijelu cijevi imaju tlak p , brzina zvuka c (tj. brzina prijenosa informacije između čestica, ili brzina širenja poremećaja kroz čestice, ili brzina gibanja vala relativno prema česticama) i brzina v gibanja čestica fluida. Prema tome se u prostoru, relativno prema cijevi koja miruje, poremećaj širi udesno brzinom

$$a = v + c. \quad (546)$$

Uz pretpostavku izentropskog strujanja, prema (524g) vrijedi

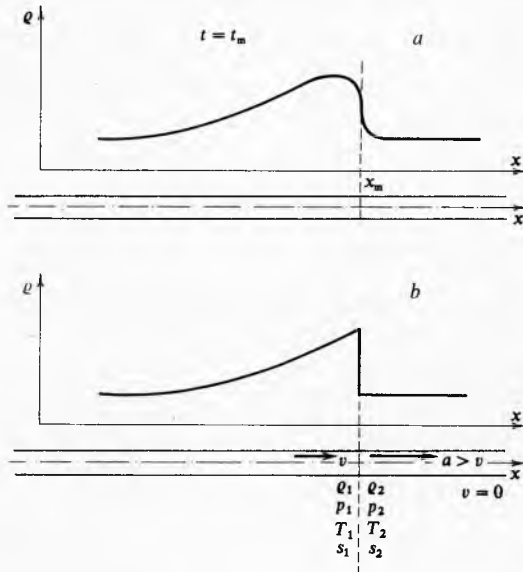
$$p = \text{const. } q^\kappa, \quad (547)$$

gdje je pozitivna konstanta ista za sve čestice, pa je prema izrazu (529c)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\text{const. } \kappa q^{\kappa-1}}, \quad (548)$$

tj. brzina je zvuka veća u gušćem mediju. Zbog toga će se točke A i B na profilu razdiobe gustoće desno od tjemena M (sl. 120a) tokom vremena približavati u cijevi, a točke A' i B', istih gustoća kao u točkama A i B, lijevo od M, međusobno će se udaljavati. Tu je riječ o tome da se u cijevi približavaju i udaljavaju točke određenih gustoća, a ne da se mijenja položaj određenih čestice fluida u cijevi. Zbog takve deformacije profila

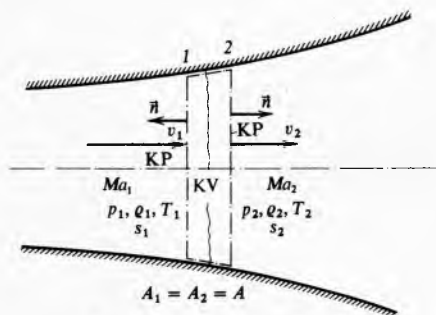
uzdužne razdiobe gustoće profil vala stlačivanja, tj. dio profila desno od M , postaje s vremenom sve strmiji, a val razrjeđenja, tj. dio profila lijevo od M , sve položitiji (sl. 120b). Matematički promatrano, nastavak deformacije bi u nekom trenutku $t = t_3$ poprimio oblik profila vala stlačivanja prikazan na sl. 120c. Međutim, fizikalno je nemoguće da ista čestica fluida na nekom položaju x u cijevi ima tri različite gustoće ρ . Prema tome, kontinuirani analitički proces vremenske deformacije profila razdiobe gustoće ρ prestaje u trenutku $t = t_m < t_3$ kad tangenta na profil razdiobe gustoće ρ postane vertikalna (sl. 121a), tj. rješenje je diskontinuitet nazvan *skokom zgusnuća* (sl. 121b) u kojem se gustoća, tlak, brzina, temperatura i entropija skokovito promijene. Takvo rješenje potvrđuju mnogi eksperimenti. Budući da valovi razrjeđenja postaju tokom vremena sve položitiji, ne može se pojaviti skok razrjeđenja.



Sl. 121. Nastajanje udarnog vala

Analitičko rješenje udarnog vala dobiva se razmatranjem jednodimenzijskoga nestacionarnog strujanja, opisanog nelinearnom diferencijalnom jednačbom (v. *Valovi u fluidima*).

Odnosi dinamičkih i termodinamičkih veličina pri prolazu kroz udarni val kvantitativno se analiziraju pomoću osnovnih jednačbi jednodimenzijskog strujanja na stacionarnom udarnom valu. Naime, na promatrača čvrsto vezanog za udarni val (sl. 121b) nailazi paralelno strujanje fluida brzinom $v_1 = a$, a napušta ga brzinom $v_2 = a - v$, pa se dobiva stanje prikazano na sl. 122, gdje su indeksi 1 i 2 zamijenili mjesta koja su imali na sl. 121b. To stanje odgovara pojavi normalnog udarnog vala u konvergentno-divergentnoj sapnici (npr. protutlak p_{a4} na sl. 119) kad kroz udarni val nadzvučno strujanje skokom prelazi u podzvučno strujanje.



Sl. 122. Normalni udarni val

Pretpostavlja se da je strujanje fluida do udarnog vala i iza njega izentropsko. Prolaz kroz udarni val nije reverzibilan proces, ali se može smatrati adijabatskim procesom jer je debljina

udarnog vala vrlo malena. Iz istog razloga može se za izabrani kontrolni volumen oko udarnog vala (sl. 122) prihvatiti da je $A_1 = A_2 = A$, a mogu se zanemariti i viskozna naprezanja preko kontrolne površine. Pri tom se ne zanemaruju intenzivne viskozne pojave unutar udarnog vala, premda je on vrlo tanak.

Primjena jednačbe kontinuiteta (516), uz navedenu pretpostavku o jednakosti presjeka daje $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. Energetska jednačba (517) za stacionarno adijabatsko strujanje ($q = 0$) poprima oblik:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad \text{ili} \quad h_{01} = h_{02} = h_0. \quad (549a)$$

Iz izvoda izraza (388f) vidi se da se ta jednačba može primijeniti za prolaz kroz udarni val kao adijabatsku pojavu. Odnos entalpije h i p/ρ prema izrazu (533a) pokazuje da integral jednačbe gibanja idealnog fluida (433c) u obliku (532) ostaje valjan kroz udarni val, tj.

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}, \quad (549b)$$

ali uz $p_{01} \neq p_{02}$ i $\frac{p_1}{\rho_1^{\kappa}} \neq \frac{p_2}{\rho_2^{\kappa}}$.

Jednačba količine gibanja (518) primijenjena na kontrolni volumen (sl. 122) daje

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2. \quad (549c)$$

Mogući smjer razvoja udarnog vala određuje se pomoću drugog zakona termodinamike, koji za adijabatsko strujanje kroz udarni val ima oblik (519a), tj. $s_2 - s_1 \geq 0$.

Za savršeni plin koji zadovoljava jednačbu stanja (520a) i za zadano stanje ispred udarnog vala $p_1, v_1, \rho_1, T_1, s_1$ i $Ma_1 > 1$ raspoložive jednačbe daju stanje iza udarnog vala $p_2, v_2, \rho_2, T_2, s_2$ i $Ma_2 < 1$.

Eliminacijom v_1 i v_2 iz (549b) i (549c) i uzme li se u obzir relacija $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, dobiju se Rankine-Hugoniotove jednačbe:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad (550a)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \frac{p_2}{p_1}} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (550b)$$

Ti se odnosi nazivaju i *Rankine-Hugoniotova adijabata* ili *udarna adijabata*. Za $\kappa = 7/5 = 1,400$ prikazana je Rankine-Hugoniotova adijabata dijagramom na sl. 123, zajedno s izentropskom adijabatom (524f).

Kombinacija jednačbi (549b) i (549c) daje za zadane ρ_1, v_1 i p_1 izraz za tlak p_2 :

$$p_2 = \frac{1}{\kappa + 1} [2\rho_1 v_1^2 - (\kappa - 1)p_1], \quad (551a)$$

ili za omjer tlakova p_2/p_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma_1^2 - 1), \quad (551b)$$

što uvršteno u (550b) daje omjer gustoća:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{Ma_1^2 (\kappa + 1)}{2 + \kappa Ma_1^2 (\kappa - 1)}. \quad (551c)$$

Dalje se dobiva

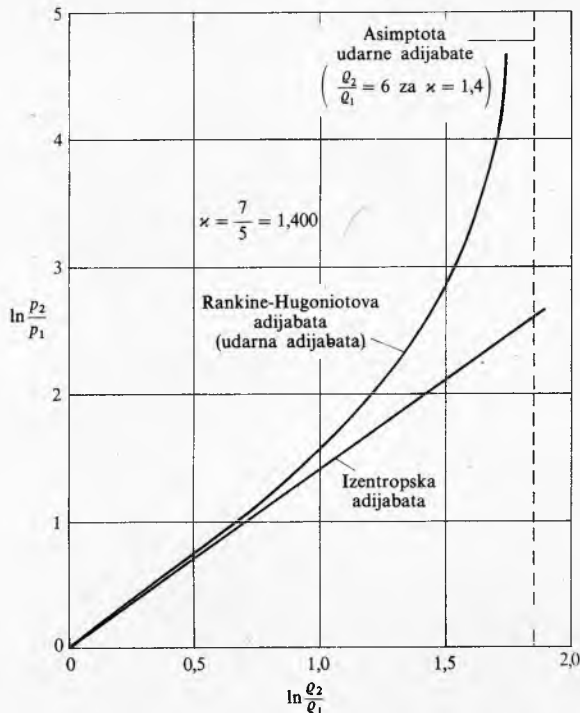
$$h_2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2}, \quad (551d)$$

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}. \quad (551e)$$

Promjena entropije pri prolazu kroz udarni val određena je za savršeni plin izrazom (524d), koji primjenom odnosa (551b) i (551c) daje

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{2\kappa Ma_1^2 - \kappa + 1}{\kappa + 1} \left[\frac{2 + Ma_1^2(\kappa - 1)}{Ma_1^2(\kappa + 1)} \right]^\kappa \right]. \quad (551f)$$

Budući da je samo za $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$ i $Ma_1 > 1$ entropija s_2 veća od s_1 , u udarnom valu može nastati samo skok zgusnuća. Skok razlijeđenja bi dao $s_2 < s_1$, što proturječi drugom zakonu termodinamike.



Sl. 123. Rankine-Hugoniotova ili udarna adijabata i izentropska adijabata za $\kappa = 1,4$

Iz (549a) slijedi čitav niz drugih jednakosti, kao npr.:

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_{02} = T_0; & c_{01} &= c_{02} = c_0; \\ T_{kr1} &= T_{kr2} = T_{kr}; & c_{kr1} &= c_{kr2} = c_{kr}, \end{aligned} \quad (552a)$$

ali i nejednakost

$$p_{01} > p_{02}. \quad (552b)$$

Iz (551e) slijedi Prandtl-ov odnos

$$v_1 v_2 = c_{kr}^2 \quad \text{ili} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (552c)$$

Primjena odnosa (536d) i izraza (552c) pokazuje da pri $Ma_1 > 1$ mora biti $Ma_2 < 1$, tako da je strujanje do udarnog vala nadzvučno, a iza njega podzvučno. Izrazi (536d) i (552c) daju

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{Ma_1^2 + \frac{2}{\kappa - 1}}{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} Ma_1^2 - 1}}. \quad (552d)$$

Prema jednakosti (552a) može se izraz (534b) s istom vrijednosti T_0 primijeniti na stanja ispred i iza udarnog vala, pa se dobiva odnos

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2}. \quad (552e)$$

Odnosi pojedinih veličina pri prolazu kroz normalni udarni val u savršenom plinu $\kappa = 1,4$, prikazani su u tabl. 7.

Tablica 7
ODNOSI KARAKTERISTIČNIH VELIČINA U NORMALNOM UDARNOM VALU U SAVRŠENOM PLINU ($\kappa = 1,40$)

Ma_1	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{v_1 - v_2}{c_1}$	Ma_2
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	1,0
1,5	2,458	1,862	1,320	1,149	0,930	0,694	0,7011
2,0	4,500	2,667	1,688	1,299	0,721	1,250	0,5774
3,0	10,333	3,857	2,679	1,637	0,328	2,222	0,4752
4,0	18,500	4,571	4,047	2,012	0,139	3,125	0,4350
5,0	29,000	5,000	5,800	2,408	0,0617	4,000	0,4152
10,0	116,500	5,714	20,387	4,515	0,00304	8,250	0,3876
50,0	2916,5	5,988	487,055	22,069	$1,14 \cdot 10^{-6}$	41,650	0,3784
100,0	11666,5	5,997	1945,387	44,107	$3,59 \cdot 10^{-8}$	83,325	0,3781
∞	∞	6	∞	∞	0	∞	0,3780

Promjena strujanja u udarnom valu može se prikazati u h,s -dijagramu. Uz konstantnu površinu normalnog presjeka udarnog vala jednadžba kontinuiteta ima oblik

$$\dot{m}_1 = \rho v = \text{const.}, \quad (553a)$$

a primjenom jednadžbe stanja savršenog plina (520a) može se energetska jednadžba (549a) pisati u obliku

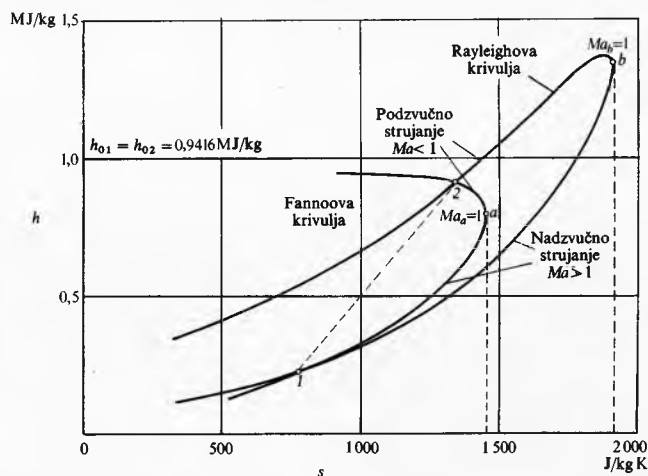
$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} = c_p T + \frac{v^2}{2} = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (553b)$$

Ako se pođe od zadanih uvjeta ispred udarnog vala p_1 , ρ_1 , v_1 , h_0 i s_1 , kombinacijom izraza (553a) i (553b) s izrazom za razliku entropije (551f) dobiva se odnos entropije s i entalpije h za sva moguća stanja koja zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta (553a) i adijabatsku energetsku jednadžbu (553b):

$$s = s_1 + c_v \ln \left[\frac{\rho_1^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} R}{p_1 c_p} \left(\frac{\sqrt{2}}{\dot{m}_1} \right)^{\kappa-1} \right] + c_v \ln \left[h(h_0 - h)^{\frac{\kappa-1}{2}} \right]. \quad (553c)$$

Krivulja koja u h,s -dijagramu opisuje ta moguća stanja, odnosno funkciju (553c), zove se *Fannoova krivulja* (sl. 124). Fannoova se krivulja može prikazati i kao odnos h i $1/\rho$ u $h,1/\rho$ -dijagramu.

U točki a Fannoove krivulja (sl. 124) jest $ds/dh = 0$, pa je entropija maksimalna, a lako se može dokazati da je u toj točki stanje upravo kritično, tj. $Ma_a = v_a/c_a = 1$. Za o se jedna grana Fannoove krivulja što izlazi iz točke a odnosi na nadzvučno, a druga grana na podzvučno strujanje.



Sl. 124. Analiza normalnog udarnog vala Fannoovom i Rayleighovom krivuljom

Kombinacija jednadžbe kontinuiteta (553a) i jednadžbe količine gibanja (549c) pokazuje da je

$$p + \frac{\dot{m}_1^2}{\rho} = \text{const.} = C_1, \quad (554a)$$

gdje se konstanta C_1 može izračunati iz zadanog polaznog stanja:

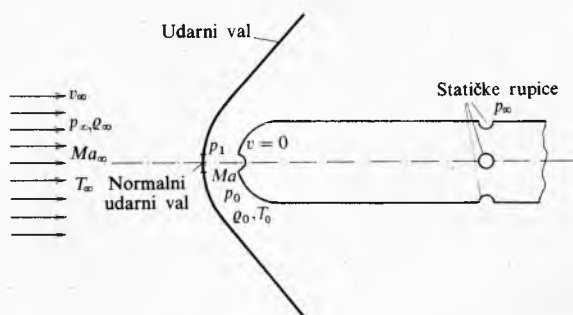
$$C_1 = p_1 + \frac{\dot{m}_1^2}{\rho} = p_1 + \rho_1 v_1^2.$$

Krivulja u h,s -dijagramu koja opisuje stanja što istodobno zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta i jednadžbu količine gibanja zove se *Rayleighova krivulja* (sl. 124). Ako se gustoća ρ uzme kao parametar, primjenom (554a), (551f) i (522b) može se Rayleighova krivulja prikazati u parametarskom obliku

$$s = s_1 + c_v \ln \frac{\rho_1}{\rho} + c_v \ln \frac{C_1 - \frac{\dot{m}_1^2}{\rho}}{C_1 - \frac{\dot{m}_1^2}{\rho_1}}, \quad (554b)$$

$$h = c_p T = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{R} \frac{1}{\rho} \left(C_1 - \frac{\dot{m}_1^2}{\rho} \right). \quad (554c)$$

U h,s -dijagramu na sl. 124 ucrtane su za isti primjer strujanja Fannoove i Rayleighove krivulje. U točki b Rayleighove krivulje, gdje je $ds/dh = 0$, također je i kritično stanje, tj. $Ma_b = v_b/c_b = 1$, i iz te točke izlazi nadzvučna i podzvučna grana krivulje. Stanja 1 i 2 ispred i iza udarnog vala nalaze se na sjecištima Fannoove i Rayleighove krivulje (točke 1 i 2 na sl. 124). Budući da se prema drugom zakonu termodinamike za adijabatsko strujanje entropija ne može smanjivati, stanje 1 ispred udarnog vala ima manju entropiju s_1 (točka 1, koja je sjecište nadzvučnih grana obje krivulje). Stanje 2 iza udarnog vala ima veću entropiju, $s_2 > s_1$, i nalazi se u sjecištu (točka 2) podzvučnih grana obje krivulje.



Sl. 125. Pitot-Prandtl-ova cijev u nadzvučnom strujanju

Pri mjerenju brzine strujanja Pitotovom ili Pitot-Prandtl-ovom cijevi, kad je $Ma_{\infty} > 1$, ispred točke stagnacije nastaje normalni udarni val (sl. 125). Prema izrazu (551b) omjer tlakova iza i ispred udarnog vala iznosi:

$$\frac{p_1}{p_{\infty}} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma_{\infty}^2 - 1), \quad (555a)$$

a primjena (534c) od točke 1 iza vala do točke zastoja daje

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (555b)$$

Pomnože li se te dvije jednadžbe i primijeni izraz (552d) za odnos Ma_1 i Ma_{∞} , dobiva se

$$\frac{p_0}{p_{\infty}} = \frac{\kappa + 1}{2} Ma_{\infty}^2 \left[\frac{(\kappa + 1)^2 Ma_{\infty}^2}{4\kappa Ma_{\infty}^2 - 2(\kappa - 1)} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (555c)$$

Budući da su prema (552a) temperature stanja mirovanja na obje strane udarnog vala jednake, vrijedi

$$T_{0\infty} = T_{01} = T_0, \quad (555d)$$

ili primjenom (534a)

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} = c_p (T_0 - T_{\infty}). \quad (555e)$$

Budući da je $c_p^2 = \kappa R T_{\infty}$ i $Ma_{\infty} = v_{\infty}/c_{\infty}$, to slijedi

$$T_{\infty} = \frac{1}{\kappa R Ma_{\infty}^2} v_{\infty}^2, \quad (555f)$$

što uvršteno u (555e) daje

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} \left(1 + \frac{2c_p}{\kappa R Ma_{\infty}^2} \right) = c_p T_0. \quad (555g)$$

Pomoću izraza (555g) i (555c) može se proračunati brzina v_{∞} na osnovi izmjerenih veličina T_0 , p_0 i p_{∞} . Iz izmjerenih tlakova p_{∞} i p_0 zaključuje se da li je strujanje podzvučno ili nadzvučno. Naime, prema (535d), za strujanje brzinom zvuka ($Ma_{\infty} = 1$) vrijedi odnos

$$\frac{p_{\infty}}{p_0} = \frac{p_{kr}}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (555h)$$

i prema tome, ako je

$$\frac{p_{\infty}}{p_0} > \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (555i)$$

strujanje je podzvučno ($Ma_{\infty} < 1$) i za proračun brzine mjerene Pitotovom cijevi primjenjuje se izraz (538).

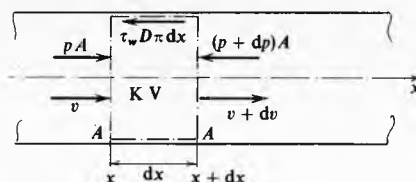
Ako nije zadovoljena nejednadžba (555i), strujanje je nadzvučno i za proračun brzine primjenjuju se izrazi (555c) i (555g).

Pitot-Prandtl-ova cijev za mjerenje nadzvučnog strujanja ima nos u obliku konusa od 10° , a statičke rupice su udaljene deset promjera cijevi od ramena konusa. Međutim, ima i posebni izvedbi da se izbjegne pojava udarnog vala, npr. izvedba nosa u obliku oštrog klina s jednom stranom paralelnom sa strujanjem fluida.

Stacionarno adijabatsko strujanje s trenjem u cijevima konstantnog presjeka. Ako u dugačkoj, savršeno izoliranoj cijevi konstantnoga poprečnog presjeka velikom brzinom struji savršeni plin stacionarno i adijabatski, učinci viskoznosti i pripadne promjene entropije ne mogu se zanemariti. Pri takvu strujanju, zbog otpora trenja na stijenka cijevi, nastaje na duljini L cijevi promjera D razlika tlaka Δp_f , dana Darcy-Weisbachovim obrascem:

$$\Delta p_f = \lambda (Re, Ma, k/D) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (556a)$$

gdje za stlačivo strujanje koeficijent otpora trenja λ zavisi i od Machova broja.



Sl. 126. Adijabatsko strujanje s trenjem

Prema izrazu (556a) na elementu dx jednodimenzijske varijable u cijevi diferencijalni pad tlaka iznosi

$$dp_f = -\lambda \frac{dx}{D} \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (556b)$$

Tom razlikom tlaka preko površine $A = D^2 \pi/4$ na x i $x + dx$ svladava se sila otpora trenja $\tau_w D \pi dx$ uz stijenku cijevi (sl. 126), gdje je τ_w tangencijalno naprezanje uz stijenku, pa izjednačenje tih dviju sila daje odnos između λ i τ_w :

$$\lambda = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v^2}. \quad (556c)$$

Jednadžba količine gibanja (518) i jednadžba kontinuiteta (518a), primijenjene na kontrolni volumen, daju

$$\frac{dp}{\frac{1}{2} \rho v^2} = -\frac{dv^2}{v^2} - \frac{\lambda}{D} dx. \quad (557a)$$

Jednadžba (557a) može se smatrati i modificiranom Eulerovom

jednadžbom gibanja za stacionarno adijabatsko strujanje s trenjem.

Ako se zanemari masena sila energetska jednadžba za stacionarno adijabatsko strujanje (388f) ima oblik

$$h + \frac{1}{2}v^2 = h_0 = \text{const.}, \quad (557b)$$

a drugi zakon termodinamike (519a) može se pisati u obliku $ds/dx > 0$.

Za $A = \text{const.}$ jednadžba kontinuiteta (516) pisana u obliku logaritmičkog diferencijala glasi

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dv^2}{v^2}. \quad (557c)$$

Iz zadanih uvjeta na ulaznom presjeku energetska jednadžba (557b) i jednadžba kontinuiteta (516) određuju funkcije

$$h = h(v); \quad q = q(v), \quad (558)$$

pa se i sve ostale veličine mogu izraziti kao funkcije brzine v . Tako se može jednadžba (557a) pretvoriti u diferencijalnu jednadžbu samo sa v kao varijablom, što omogućuje njenu integraciju.

Za *savršeni plin* u stacionarnom adijabatskom strujanju va-
ljana je i jednadžba (532), kao što je pokazano izrazom (549b).
Primjenom izraza $c^2 = \kappa p/q$ i $Ma^2 = v^2/c^2$ može se diferencijal
jednadžbe (532):

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{dp}{q} - \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{q} \frac{dq}{q} + \frac{1}{2} dv^2 = 0 \quad (559a)$$

napisati i u obliku

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\frac{1}{2} q v^2} &= - \left(\frac{1}{\kappa Ma^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \frac{dv^2}{v^2} = \\ &= - \frac{1 + (\kappa - 1) Ma^2}{\kappa Ma^2} \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2} \frac{dMa^2}{Ma^2}, \end{aligned} \quad (559b)$$

gdje je primijenjen i odnos

$$\frac{dv^2}{v^2} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2} \frac{dMa^2}{Ma^2}, \quad (559c)$$

dobiven iz diferencijala jednadžbe (534b) i diferencijala $d(\ln Ma^2)$.

Ako se izrazi (559b) i (559c) uvrste u izraz (557a), dobiva se diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama Ma^2 i x :

$$\frac{1 - Ma^2}{\kappa Ma^4 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)} dMa^2 = \frac{\lambda}{D} dx. \quad (560)$$

Ta jednadžba pokazuje da je u smjeru strujanja (tj. $dx > 0$) $dMa^2 > 0$ za $Ma < 1$, a $dMa^2 < 0$ za $Ma > 1$. Prema tome, pri adijabatskom strujanju u cijevi konstantnog presjeka trenje uzrokuje ubrzavanje podzvučnog strujanja, a usporava nadzvučno strujanje. To znači da se pri adijabatskom strujanju zbog trenja Machov broj pomiče prema jedinici.

Podzvučno se strujanje može ubrzavati samo do $Ma = 1$, i tome procesu je primjerena neka kritična duljina L_{kr} na kojoj strujanje biva *zagušeno trenjem*. Kad se nadzvučno strujanje usporava, može nastati udarni val kroz koji nadzvučno strujanje skokom prelazi u podzvučno.

Integracija diferencijalne jednadžbe (560) svodi se na tablične integrale. Ako je na nekom presjeku cijevi $Ma_1 = Ma$ i ako se stavi za taj presjek $x_1 = 0$, tada integracija (560) do $Ma_2 = 1$ određuje duljinu $x_2 = L_{kr}$ preko koje se brzina strujanja pri $Ma < 1$ ubrza, a pri $Ma > 1$ uspori na brzinu zvuka. Rezultat integracije može se pisati u bezdimenzijskom obliku

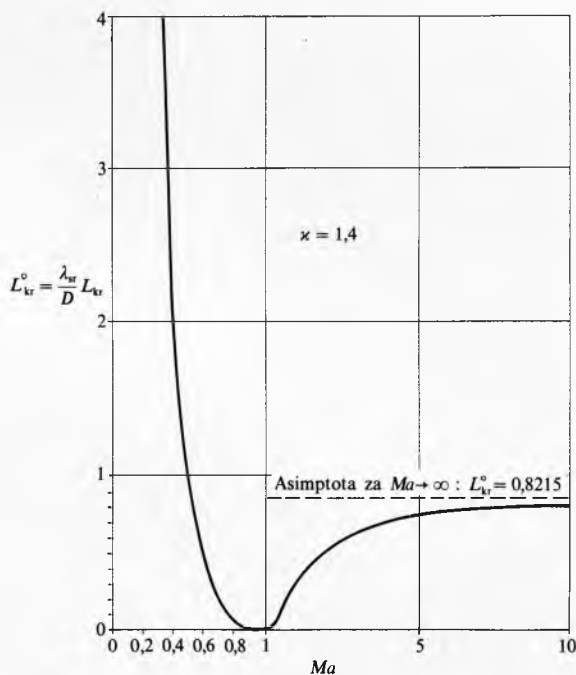
$$L_{kr}^0 = \frac{\lambda_{sr}}{D} L_{kr} = \frac{1 - Ma^2}{\kappa Ma^2} + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \ln \frac{(\kappa + 1) Ma^2}{2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)}, \quad (561)$$

gdje je srednja vrijednost koeficijenta otpora trenja

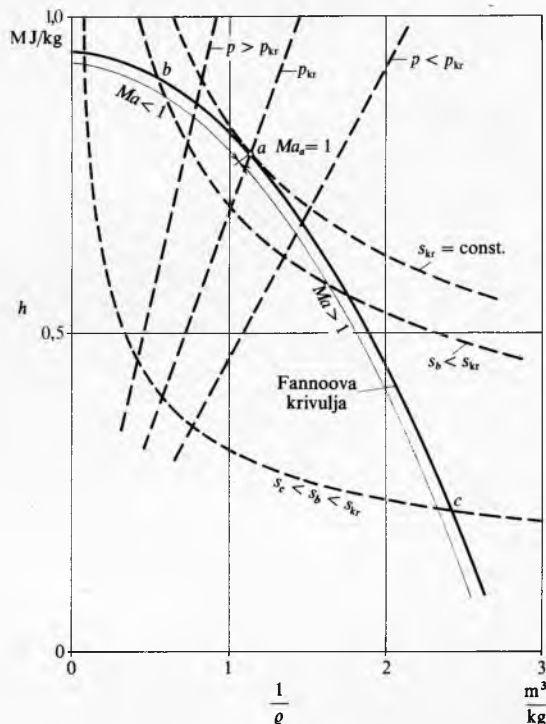
$$\lambda_{sr} = \frac{1}{L_{kr}} \int_0^{L_{kr}} \lambda(x) dx. \quad (561a)$$

Pri $Ma \rightarrow \infty$ duljina L_{kr}^0 teži asimptotskoj vrijednosti (sl. 127)

$$\lim_{Ma \rightarrow \infty} L_{kr}^0 = -\frac{1}{\kappa} + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \ln \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}. \quad (561b)$$



Sl. 127. Bezdimenzijska kritična duljina pri adijabatskom strujanju s trenjem za $\kappa = 1,4$



Sl. 128. Analiza adijabatskog strujanja s trenjem pomoću Fannoove krivulje

Fannoova krivulja može također poslužiti za analizu adijabatskog strujanja s trenjem. Kombinira li se energetska jednadžba (557b) s jednadžbom kontinuiteta (553a), dobiva se

$$h = h_0 - \frac{1}{2} \dot{m}_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)^2, \quad (562)$$

što je za zadane h_0 i $\dot{m}_1$ u $h, 1/\rho$ -dijagramu prikazano Fannoovom krivuljom u obliku parabole (sl. 128). Jednako kao u h, s -dijagramu (sl. 124), tako i u $h, 1/\rho$ -dijagramu postoji na Fannoovoj krivulji kritična točka a u kojoj je entropija maksimalna, a brzina strujanja jednaka brzini zvuka ($Ma = 1$). U točki a krivulja $s = s_{kr} = \text{const.}$ tangira Fannoovu krivulju. Krivulje konstantnih vrijednosti entropije manjih od s_{kr} sijeku Fannoovu krivulju u dvije točke: jedno je sjecište na podzvučnoj grani, a drugo na nadzvučnoj grani Fannoove krivulje. Budući da prema drugom zakonu termodinamike entropija raste u smjeru strujanja, to za bilo koje ulazno stanje (podzvučno ili nadzvučno), istodobno s napredovanjem strujanja uzduž strujne cijevi, sjecišta krivulja $s = \text{const.}$ i Fannoove krivulje približuju se po Fannoovoj krivulji prema točki a , tj. prema strujanju brzinom zvuka $Ma = 1$.

Prema (533a) vrijednosti $p = \text{const.}$ prikazane su u $h, 1/\rho$ -dijagramu pravcima

$$h = \text{const.} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (563)$$

koji su strmiji za veće tlakove (sl. 128). Prema tome će pri podzvučnom strujanju, kada se točka b pomiče prema točki a , tlak padati, a pri nadzvučnom strujanju tlak će rasti.

Iz prikaza adijabatskog strujanja Fannoovom krivuljom vidi se da je nemoguće bez skoka u točki a prijeći s jedne na drugu granu Fannoove krivulje, jer bi kontinuirani prolaz točkom a proturječio drugom zakonu termodinamike.

Ponašanja pojedinih dinamičkih i termodinamičkih veličina pri stacionarnom adijabatskom strujanju s trenjem u cijevi konstantnog presjeka mogu se pregledno prikazati predznacima uzdužnih gradijenata tih veličina:

	$\frac{ds}{dx}$	$\frac{dv}{dx}$	$\frac{dp}{dx}$	$\frac{d(1/\rho)}{dx}$	$\frac{dh}{dx}$	$\frac{dT}{dx}$
$Ma < 1$	+	+	-	+	-	-
$Ma > 1$	+	-	+	-	+	+

Stacionarno izotermičko strujanje savršenog plina u dugačkom cjevovodu konstantnog presjeka. Da bi strujanje u cijevi bilo izotermičko, potrebno je uravnotežiti toplinsku energiju proizvedenu otporom trenja u fluidu i toplinsku energiju koju fluid predaje okolišu kroz stijenku cijevi. Često se takvo ravnotežno stanje uspostavlja pri strujanju plina kroz magistralne vodove, kad su brzine strujanja znatno ispod brzine zvuka i kad je temperatura unutar neizolirane cijevi jednaka temperaturi izotermičkog okoliša.

U izotermičkom je strujanju Reynoldsov broj konstantan

$$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{\dot{m}_1 D}{\mu}, \quad (564a)$$

jer je pri normalnim tlakovima i pri konstantnoj temperaturi i viskoznost μ konstantna. Zbog konstantnog Re konstantan je i koeficijent otpora λ .

Za analizu izotermičkog strujanja savršenog plina služi jednadžba kontinuiteta (553a) i jednadžba količine gibanja (557a), koja se može pisati u obliku

$$\frac{dp}{p} + \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{dx}{p} + \frac{\rho v}{p} dv = 0. \quad (564b)$$

U izotermičkom je procesu $T = \text{const.}$, pa jednadžba stanja savršenog plina (520a) postaje $p/\rho = RT = \text{const.}$, ili u diferencijalnom obliku

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dMa^2}{Ma^2}, \quad (564c)$$

gdje je primijenjena jednadžba kontinuiteta (553a) i odnos

$$\frac{dv}{v} = \frac{dMa}{Ma} = \frac{1}{2} \frac{dMa^2}{Ma^2}, \quad (564d)$$

jer je za izotermičko strujanje

$$c = \sqrt{\kappa RT} = \text{const.} \quad (564e)$$

Na presjeku gdje vlada statička temperatura T , a strujanje je s Machovim brojem Ma , prema (534b) izentropska temperatura stanja mirovanja iznosi

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right), \quad (565a)$$

a primjenom (534c) izentropski je tlak stanja mirovanja

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (565b)$$

Ako se u jednadžbu količine gibanja (564b) uvrste (564c) i jednakosti

$$\frac{\rho v^2}{p} = \frac{\rho}{\kappa p} \kappa v^2 = \kappa Ma^2, \quad \frac{\rho v}{p} dv = \frac{\kappa}{2} dMa^2 \quad (566a)$$

dobiva se

$$-\frac{1}{2} \frac{dMa^2}{Ma^2} = -\frac{\kappa Ma^2}{1 - \kappa Ma^2} \frac{\lambda}{2D} dx. \quad (566b)$$

Uvrstivši taj izraz u (564e), dobiva se

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dMa^2}{Ma^2} = -\frac{\kappa Ma^2}{1 - \kappa Ma^2} \frac{\lambda}{2D} dx. \quad (567)$$

Do Machova broja $Ma = 1/\sqrt{\kappa}$ nazivnik desne strane (567) jest pozitivan, a iznad te vrijednosti je negativan, pa je to granična vrijednost Machova broja u smislu predznaka diferencijala pojedinih veličina. Budući da je dx pozitivan u smjeru strujanja, izraz (567) pokazuje da se pri $Ma < 1/\sqrt{\kappa}$ tlak i gustoća smanjuju, a brzina i Machov broj povećavaju u smjeru strujanja, dok je obratno pri $Ma > 1/\sqrt{\kappa}$. U oba se slučaja Machov broj približava vrijednosti $Ma = 1/\sqrt{\kappa}$.

Diferencijal izraza (565a) i odnos (566b) daju pri $T = \text{const.}$:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{\kappa(\kappa - 1)Ma^4}{(1 - \kappa Ma^2)[2 + (\kappa - 1)Ma^2]} \frac{\lambda}{D} dx. \quad (568)$$

Taj izraz pokazuje smjer prijenosa topline. Naime, za $Ma < 1/\sqrt{\kappa}$ dobiva se $dT_0 > 0$, tj. topline se prenosi od okoliša fluidu, a za $Ma > 1/\sqrt{\kappa}$ dobiva se $dT_0 < 0$, tj. topline se prenosi od fluida okolišu.

Diferencijal izraza (565b) i odnosi (566b) i (567) daju

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{2 - (\kappa + 1)Ma^2}{2 + (\kappa - 1)Ma^2} \frac{\kappa Ma^2}{\kappa Ma^2 - 1} \frac{\lambda}{D} dx, \quad (569)$$

što pokazuje promjenu tlaka stanja mirovanja.

Ponašanja pojedinih veličina pri stacionarnom izotermičkom strujanju u cijevi konstantnog presjeka mogu se pregledno prikazati predznacima njihovih gradijenata u smjeru strujanja:

	$\frac{dp}{dx}$	$\frac{d\rho}{dx}$	$\frac{dv}{dx}$	$\frac{dMa}{dx}$	$\frac{dT_0}{dx}$	$\frac{dp_0}{dx}$
$Ma < 1/\sqrt{\kappa}$	-	-	+	+	+	-
$Ma > 1/\sqrt{\kappa}$	+	+	-	-	-	+ za $Ma < \sqrt{2/(1+\kappa)}$ - za $Ma > \sqrt{2/(1+\kappa)}$

Ako se jednadžba (567) integrira od $Ma_1 = Ma$ na presjeku $x_1 = 0$ do $Ma_2 = 1/\sqrt{\kappa}$ na presjeku $x_2 = L_{\max}$, dobiva se

$$\frac{\lambda}{D} L_{\max} = \frac{1 - \kappa Ma^2}{\kappa Ma^2} + \ln(\kappa Ma^2), \quad (570)$$

gdje je $L_{\max}$ maksimalna duljina cjevovoda. Ako je duljina cjevovoda veća od $L_{\max}$, strujanje se zagušuje i maseni se protok smanji.

Iz jednadžbe stanja slijedi

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (571a)$$

a iz jednadžbe kontinuiteta (516):

$$\rho v^2 = \rho \frac{\dot{m}^2}{A^2 \rho^2} = \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2 p} \quad (571b)$$

Ako se jednadžba količine gibanja (564b) pomnoži sa p^2 i primijeni (571b), dobiva se diferencijalna jednadžba

$$p dp + \frac{\lambda}{2D} \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2} dx + \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2} \frac{dv}{v} = 0. \quad (571c)$$

Integracija te jednadžbe od presjeka x_1 do presjeka x_2 uz $x_2 - x_1 = L$, daje

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2} \left[2 \ln \frac{v_2}{v_1} + \lambda \frac{L}{D} \right]. \quad (572a)$$

Jednadžba kontinuiteta (516), uz $A = \text{const.}$, i jednadžba stanja (571a) pokazuju da je pri izotermičkom strujanju $p_1 v_1 = p_2 v_2$, pa izraz (572a) poprima oblik

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2} \left[2 \ln \frac{p_1}{p_2} + \lambda \frac{L}{D} \right]. \quad (572b)$$

Za zadani p_1 može se nekom od numeričkih metoda ta transcendentna jednadžba riješiti po p_2 .

Pri izotermičkom strujanju niskim brzinama u dugačkim cjevovodima veličina $2 \ln(p_1/p_2)$ malena je u usporedbi s članom $\lambda L/D$ i može se zanemariti, pa je približan izraz za (572b):

$$p_1^2 - p_2^2 \approx \lambda \frac{L}{D} \frac{\dot{m}^2 R T}{A^2}. \quad (572c)$$

Primjenom relacije $p_1 v_1 = p_2 v_2$ i izraza (564e) može se izraz (572b) jednostavno transformirati u omjer Machovih brojeva:

$$\frac{Ma_1^2}{Ma_2^2} = 1 - \kappa Ma_1^2 \left[2 \ln \frac{Ma_2}{Ma_1} + \lambda \frac{L}{D} \right]. \quad (573)$$

Dinamika viskozno strujanja

Za istraživanje i rješavanje problema viskozno strujanja newtonskih fluida služe osnovne jednadžbe dinamike fluida: jednadžba kontinuiteta (380d) ili (380e), Navier-Stokesove jednadžbe (409a) ili (409e), energetska jednadžba (413c) i drugi zakon termodinamike (414c), uz pripadne jednadžbe stanja (407) i (408) i pripadne granične uvjete. Navier-Stokesove jednadžbe rastavljaju se na komponente u smjeru osi izabranog koordinatnog sustava, a ostale su jednadžbe skalarne. Koordinatni sustav odabire se prema geometrijskim granicama razmatranog problema; ako je granica kugla, najprikladnije su sferne koordinate, za aksijalno simetrična strujanja prikladne su cilindarske koordinate itd.

Najjednostavniji problemi viskozno strujanja jesu izotermička strujanja nestlačivih newtonskih fluida. Zbog $T = \text{const.}$ može se za normalno područje tlakova uzeti da je $\mu = \text{const.}$, a zbog $\rho = \text{const.}$ da je $v = \text{const.}$, pa se uz $\text{div } \vec{v} = 0$ vektorski oblik Navier-Stokesovih jednadžbi (409a) rastavlja na tri skalarne jednadžbe u kartezijском pravokutnom koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \\ = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \\ = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (574)$$

uz jednadžbu kontinuiteta

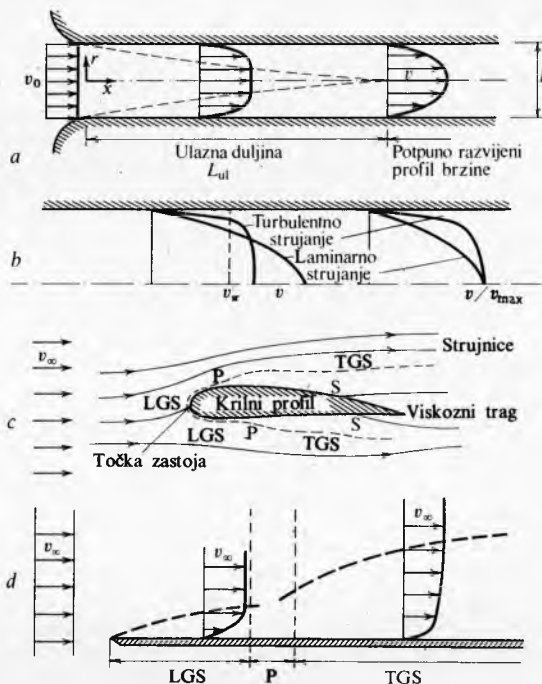
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (575)$$

Prema unutrašnjoj strukturi strujanje realnih viskoznih fluida u prirodi može biti laminarno ili turbulentno.

Pri laminarnom strujanju nastaju otpori zbog izmjene količine gibanja između molekula fluida u susjednim slojevima različitih brzina. Laminarno je strujanje pravilno strujanje u laminama (slojevima), putanje čestica su pravilne krivulje, a fluktuacije su pojedinih veličina u mikroskopskom molekularnom mjerilu, pa se ne mogu izmjeriti običnim inženjerskim instrumentima. Vizualizira li se laminarno strujanje bojom, obojena nit fluida ostat će pravilna krivulja.

Eksperimenti pokazuju da laminarno strujanje nije stabilno i da ono pri višim brzinama ili, ispravnije, pri određenom Reynoldsovu broju naglo prelazi u turbulentno strujanje. Turbulentno je strujanje karakterizirano velikim fluktuacijama pojedinih veličina i vrlo nepravilnim putanjama čestica fluida. Pri turbulentnom strujanju otpori nastaju zbog izmjene količine gibanja između gromada ili grozdova čestica susjednih slojeva različitih brzina, i općenito su ti otpori veći nego pri laminarnom strujanju. Nit boje injektirana u turbulentno strujanje brzo se razaspe po čitavu polju strujanja i rasprši u mnoštvo zapletenih, nepravilnih krivulja.

Navier-Stokesove jednadžbe valjane su u principu za obje vrste strujanja. Međutim, te jednadžbe imaju egzaktna rješenja samo za relativno ograničen broj jednostavnijih problema laminarnog strujanja, i u svom izvornom obliku ne mogu se integrirati preko nepravilnog i slučajnog polja tlaka, naprezanja i brzine turbulentnog strujanja.



Sl. 129. Tipovi viskozno strujanja. a) strujanje kroz cijev, b) profili brzine strujanja u cijevi, c) optjecanje oko krilnog profila, d) strujanje uz ravnu ploču. LGS laminarni granični sloj, TGS turbulentni granični sloj, P prijelaz laminarnog strujanja u turbulentno strujanje

S obzirom na oblik granica, strujanja se razvrstavaju na unutrašnja i vanjska, odnosno na protjecanja i optjecanja. Na sl. 129 prikazani su tipovi viskozno strujanja pri protjecanju kroz cijev i optjecanju oko krilnog profila i ravne ploče. Zbog prijanjanja viskozno fluida za krutu površinu, izraz (415) za rubni uvjet na nepomičnoj krutoj granici prelazi u

$$\vec{v} = 0, \quad (576)$$

pa se uz takvu granicu stvara određeni profil brzine koji tvori granični sloj.

Na čitavom presjeku ulaza u cijev brzina je konstantna, a tek iznad određene duljine cjevovoda L_{ul} od ulaza granični se sloj razvije do simetrale cijevi. Na sl. 129a prikazan je razvoj profila brzine u cijevi pri laminarnom strujanju za koje približno vrijedi:

$$\frac{L_{ul}}{D} \approx 0,06 Re, \quad (577)$$

gdje je D unutrašnji promjer cijevi. Budući da je prema (81) $Re_{krit} \approx 2300$, ulazna duljina cjevovoda potrebna za razvoj laminarnog profila brzine može maksimalno iznositi 138 D .

Pri turbulentnom strujanju intenzivno miješanje slojeva pridonosi bržem razvoju turbulentnog profila brzine, pa ulazna duljina cjevovoda iznosi 25...40 D , premda za puni razvoj turbulentnog strujanja treba duljina $L_{ul} \geq 80 D$.

Pri optjecanju tijela, zbog graničnog uvjeta (576), stvara se uz krutu površinu tijela relativno tanak granični viskozni sloj, u kojemu se brzina strujanja fluida velikim gradijentom mijenja od nule do brzine vanjskog strujanja. Strujanje je unutar graničnog sloja vrtložno, a izvan graničnog sloja može se strujanje smatrati bezvrtložnim ili potencijalnim. Na ulaznom dijelu, u blizini točke zastoja, granični je sloj laminaran. Na određenoj udaljenosti od ulaza, definiranoj kritičnim Reynoldsovim brojem, laminarni sloj prelazi u turbulentni granični sloj (sl. 129c i d).

Zakoni sličnosti u mehanici fluida. Zbog matematičke složenosti vrlo je malen broj problema dinamike viskoznog strujanja koji imaju egzaktna analitička rješenja. U drugoj grupi zadataka, zbog određenih odnosa i razlike u redu veličine između pojedinih fizikalnih veličina u prirodi pojave, dopušteno je da se zanemare pojedini članovi Navier-Stokesovih jednadžbi, pa se egzaktna analitička rješenja tako pojednostavnjenih jednadžbi nazivaju približnim rješenjima zadataka viskoznog strujanja. Suvremena elektronička računala omogućila su da se problemi viskoznog strujanja direktno numerički rješavaju, npr. metodom konačnih diferencija ili metodom konačnih elemenata. Unatoč uspjesima koji su ostvareni teorijskim pristupom rješavanju zadataka dinamike viskoznog strujanja, glavni izvor osnovnih spoznaja i temelj razvoja i provjere teorije i teorijskih rješenja još su uvijek i dugo će ostati rezultati eksperimentalnih istraživanja. Tako je i mehanika fluida, poput većine grana fizike, u svojoj biti teorijsko-eksperimentalna znanost.

Zakoni sličnosti u mehanici fluida definiraju kriterije za provođenje eksperimenata. Na zakonima sličnosti zasnivaju se metode za generalizaciju eksperimentalnih rezultata i za predviđanje toka prototipne pojave na temelju ispitivanja modela.

U principu model može biti manji ili veći od prototipa. Ako je prototip velik, npr. brod, tada je brodski model deset do dvjesto puta manji od broda. S takvim modelom mogu se ekonomično provoditi eksperimentalna istraživanja da bi se odredio optimalan oblik broskog trupa i propulzora, što je praktički nemoguće da se provodi s brodom u naravnoj veličini. Pri tom je velika prednost da se u laboratoriju mogu kontrolirati i simulirati vanjski uvjeti u kojima se obavljaju pokusi s modelom. Za vrlo sitne prototipne pojave ekonomičnije je eksperimentirati s modelom većim od prototipa, jer je takav model jednostavniji za izradbu i za eventualne modifikacije u procesu istraživanja, a i prikladniji je za mjerenje.

Veličine u prototipnoj pojavi označene su indeksom P , a veličine u modelnoj pojavi indeksom M . Svaka od tih pojava ima svoj prostor i svoje vrijeme. Prostori su opisani koordinatnim sustavima O_P i O_M s radijvektorima r_P i r_M , a vremena tekućim vremenima t_P i t_M sa zajedničkim ishodišnim vremenom $t_P = t_M = 0$.

Dvije prostorno-vremenske točke prototipa i modela

$$M_P(\vec{r}_P, t_P) \text{ i } M_M(\vec{r}_M, t_M) \quad (578)$$

slične su ako radijvektori i vremena stoje u jednostavnim linearnim odnosima

$$\vec{r}_P = C_L \vec{r}_M, \quad (579)$$

$$t_P = C_t t_M, \quad (580)$$

gdje je C koeficijent sličnosti za duljinu, a C_t koeficijent slič-

nosti za vrijeme. Koeficijenti C_L i C_t jednaki su za sve točke prostorno-vremenskog područja u kojemu se odvijaju prototipne i modelne pojave. Konstantnim koeficijentom sličnosti za duljinu C_L definirana je *geometrijska sličnost*, koja uključuje geometrijsku sličnost granica i sličnost položaja ishodišta O_P i O_M relativno prema tim granicama. Jednakost (579) pisana u komponentama glasi:

$$x_P = C_L x_M, \quad y_P = C_L y_M, \quad z_P = C_L z_M. \quad (581)$$

Kinematička sličnost dvaju strujanja sadržava uvjet da se vektori brzina u sličnim prostorno-vremenskim točkama razlikuju samo u skalarnom faktoru, konstantnom i jednakom u čitavom području strujanja, tj.

$$\vec{v}_P(\vec{r}_P, t_P) = C_v \vec{v}_M(\vec{r}_M, t_M), \quad (582)$$

gdje je C_v koeficijent sličnosti za brzinu, a točke $(\vec{r}_P, t_P)$ i $(\vec{r}_M, t_M)$ povezane su jednakostima (579) i (580).

Dinamička sličnost dvaju strujanja mora zadovoljavati uvjet da se vektori masenih sila i tenzori naprežanja u sličnim prostorno-vremenskim točkama razlikuju samo u skalarnom faktoru, konstantnom i jednakom u čitavom području strujanja, tj.

$$\vec{f}_P(\vec{r}_P, t_P) = C_f \vec{f}_M(\vec{r}_M, t_M), \quad (583)$$

$$T_{\sigma P}(\vec{r}_P, t_P) = C_{T\sigma} T_{\sigma M}(\vec{r}_M, t_M), \quad (584)$$

gdje su C_f i $C_{T\sigma}$ koeficijenti sličnosti za masene i površinske sile, a točke $(\vec{r}_P, t_P)$ i $(\vec{r}_M, t_M)$ povezane su jednakostima (579) i (580).

Općenito se za dvije fizikalne pojave kaže da su slične ako se karakteristične veličine jedne pojave mogu odrediti iz pripadnih veličina druge pojave u sličnim prostorno-vremenskim točkama tako da se pomože sa skalarnim faktorom koji je jednak za sve točke. Taj se faktor naziva koeficijentom sličnosti i različit je za različite fizikalne veličine. Ako se sa

$$\Phi = \Phi(\vec{r}, t) \quad (585)$$

označi karakteristična skalarna, vektorska ili tenzorska veličina neke pojave, dvije pojave su prema definiciji slične ako vrijedi jednakost

$$\Phi_P(\vec{r}_P, t_P) = \Phi_P(C_L \vec{r}_M, C_t t_M) = C_\Phi \Phi_M(\vec{r}_M, t_M), \quad (586)$$

gdje je C_Φ koeficijent sličnosti za tu karakterističnu veličinu Φ jednak i isti u svim točkama i za sva vremena. Na sl. 130 ilustrirana je ta definicija sličnosti na primjeru optjecanja kugle.

Sličnost dviju pojava u mehanici fluida uključuje geometrijsku, kinematičku i dinamičku sličnost.

Razmotrit će se uvjeti sličnosti izotermodinamičkoga viskoznog strujanja nestlačivog fluida konstantne viskoznosti. Neka su za prototip i model karakteristične veličine: duljina L_P, L_M (npr.: duljina tijela koje se giba kroz fluid; promjer kugle koju optječe fluid; promjer cijevi); brzina v_{0P}, v_{0M} (npr.: brzina paralelnog strujanja $\vec{v}_\infty$ kojom fluid iz beskonačnosti nailazi na tijelo; srednja brzina strujanja u cijevi); vrijeme t_{0P}, t_{0M} (npr.: perioda neke oscilatorne pojave; vrijeme L/U potrebno da tijelo prevali put jednak svojoj duljini, gdje je U konstantna brzina gibanja tijela kroz fluid); masena sila f_P, f_M (npr.: gravitacijska sila na dvije planete); tlak p_{0P}, p_{0M} (npr.: dinamički tlak u točki zastoja $\rho v_\infty^2/2$; razlika tlakova $p_\infty - p_v$ od koje direktno zavisi održivost kapljevite faze fluida u strujanju); gustoća fluida ρ_P, ρ_M ; kinematički koeficijent viskoznosti fluida ν_P, ν_M .

Navier-Stokesove jednadžbe (574) i jednadžba kontinuiteta (575) mogu se napisati u sažetu vektorskom obliku

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (587)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (588)$$

Svaki pojedini zadatak strujanja fluida ima svoje granične i početne uvjete koji osiguravaju jedinstvenost rješenja sustava jednadžbi (587) i (588):

$$\vec{v}|_S = \vec{u}(M, t), \quad \vec{v}|_\infty = \vec{v}_\infty, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_1(\vec{r}), \quad p|_{t=0} = p_1(\vec{r}), \quad (589)$$

gdje je S površina tijela, a $\vec{u}(M, t)$ brzina točaka te površine.

Za dvije slične pojave, npr. za prototipnu i modelnu, jednadžbe (587) i (588) te granični i početni uvjeti (589) izraženi su u prostorima i vremenima povezanim jednakostima (579) i (580). Iz tih dvaju prostora i vremena, te se jednadžbe i uvjeti mogu preslikati u zajednički bezdimenzijski prostor i bezdimenzijsko vrijeme, koji su definirani karakterističnom duljinom i karakterističnim vremenom

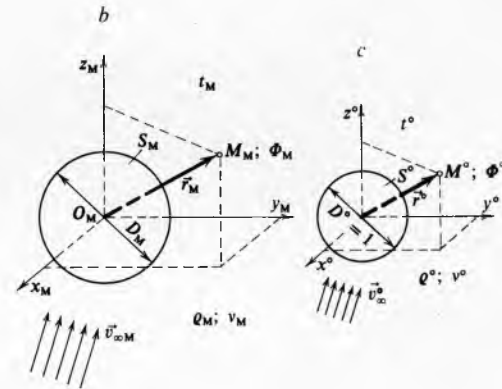
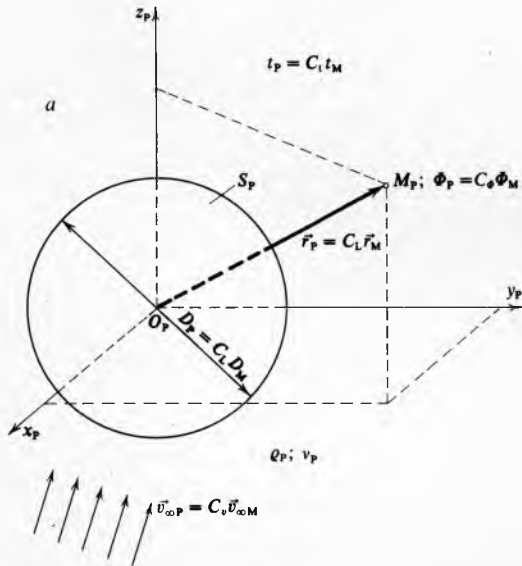
$$\vec{r}^\circ = \frac{\vec{r}_P}{L_P} = \frac{\vec{r}_M}{L_M}, \quad (590)$$

$$t^\circ = \frac{t_P}{t_{0P}} = \frac{t_M}{t_{0M}}, \quad (591)$$

Derivacije i operatori u (587) i (588) mogu se za prototipnu i modelnu pojavu izraziti bezdimenzijskim derivacijama i operatorima definiranim izrazima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^\circ} &= \frac{\partial}{\partial t_P} \frac{1}{L_P} = \frac{\partial}{\partial t_M} \frac{1}{L_M}, \\ \nabla^\circ &= \frac{\nabla_P}{1} = \frac{\nabla_M}{1}, \\ \Delta^\circ &= \frac{\Delta_P}{L_P^2} = \frac{\Delta_M}{L_M^2}, \end{aligned} \quad (592)$$

gdje kružić gore zdesna označuje bezdimenzionalnost.



Sl. 130. Sličnost optjecanja oko kugle

Funkcije $\vec{v}$ i p prelaze u bezdimenzijske funkcije bezdimenzijskog prostora i vremena relacijom

$$\vec{v}^\circ(\vec{r}^\circ, t^\circ) = \frac{\vec{v}_P(\vec{r}_P, t_P)}{L_P} = \frac{\vec{v}_M(\vec{r}_M, t_M)}{L_M}, \quad (593)$$

$$p^\circ(\vec{r}^\circ, t^\circ) = \frac{p_P(\vec{r}_P, t_P)}{p_{0P}} = \frac{p_M(\vec{r}_M, t_M)}{p_{0M}}, \quad (594)$$

Zadano polje brzine $\vec{v}_\infty$ paralelnog strujanja u beskonačnosti prelazi u bezdimenzijsko polje

$$\vec{v}_\infty^\circ = \frac{\vec{v}_{\infty P}}{L_P} = \frac{\vec{v}_{\infty M}}{L_M}, \quad (595)$$

Jednadžbe (587) i (588) izražene bezdimenzijskim funkcijama (593) i (594) i bezdimenzijskim operatorima (592) imaju, npr. za prototipnu pojavu, oblik

$$\frac{L_P}{t_{0P}^2} \left[\frac{\partial \vec{v}^\circ}{\partial t^\circ} + (\vec{v}^\circ \cdot \nabla^\circ) \vec{v}^\circ \right] = \vec{f}_P - \frac{p_{0P}}{\rho_P L_P} \nabla^\circ p^\circ + \frac{\nu_P}{t_{0P} L_P} \Delta^\circ \vec{v}^\circ, \quad (596)$$

$$\frac{1}{t_{0P}} \nabla^\circ \cdot \vec{v}^\circ = 0. \quad (597)$$

Takve se jednadžbe dobivaju i za sličnu modelnu pojavu s karakterističnim modelnim veličinama.

Ako se jednadžbe (596) i (597) podijele nosiocima njihove dimenzionalnosti $\frac{L_P}{t_{0P}^2}$ i $\frac{1}{t_{0P}}$, dobiva se

$$\frac{\partial \vec{v}^\circ}{\partial t^\circ} + (\vec{v}^\circ \cdot \nabla^\circ) \vec{v}^\circ = \vec{f}^\circ - \frac{1}{\rho^\circ} \nabla^\circ p^\circ + \nu^\circ \Delta^\circ \vec{v}^\circ, \quad (598)$$

$$\nabla^\circ \cdot \vec{v}^\circ = 0, \quad (599)$$

gdje su za sličnu prototipnu i modelnu pojavu

$$\vec{f}^\circ = \frac{\vec{f}_P}{L_P} = \frac{\vec{f}_M}{L_M}, \quad (600)$$

$$\frac{1}{\rho^\circ} = \frac{p_{0P}}{\rho_P L_P^2} = \frac{p_{0M}}{\rho_M L_M^2}, \quad (601)$$

$$\nu^\circ = \frac{\nu_P}{L_P^2} = \frac{\nu_M}{L_M^2}. \quad (601a)$$

Kad je zadovoljen uvjet sličnosti (600), (601) i (601a), bezdimenzijske jednadžbe (598) i (599) identičnog su oblika za sve hidromehanički slične pojave. I granični i početni uvjeti (589) imaju u bezdimenzijskom prostoru i bezdimenzijskom vremenu identičan oblik za prototipnu i modelnu pojavu i to

$$\begin{aligned} \vec{v}^\circ|_{S^\circ} &= \vec{u}^\circ(M^\circ, t^\circ), \\ \vec{v}^\circ|_{\infty} &= \vec{v}_{\infty}^\circ, \\ \vec{v}^\circ|_{t^\circ=0} &= \vec{v}_1^\circ(\vec{r}^\circ), \\ p^\circ|_{t^\circ=0} &= p_1^\circ(\vec{r}^\circ), \end{aligned} \quad (601b)$$

gdje je S° geometrijski slična granica površine u bezdimenzijskom prostoru, identičnoga geometrijskog oblika kad se u taj prostor preslika površina prototipne granice S_P ili površina modelne granice S_M . Na primjeru sl. 130c, ta je površina S°

kugla jediničnog promjera. Vektor brzine $\vec{v}_\infty$ dan je izrazom (595).

Rješenje bezdimenzijskih Navier-Stokesovih jednadžbi (598) i bezdimenzijske jednadžbe kontinuiteta (599), uz bezdimenzijske granične i početne uvjete (601b) predstavljeno je bezdimenzijskim funkcijama

$$\vec{v}^\circ = \vec{v}^\circ(\vec{r}^\circ, t^\circ; \vec{v}_\infty^\circ, \vec{f}^\circ, \frac{1}{\rho^\circ}, v^\circ), \quad p^\circ = p^\circ(\vec{r}^\circ, t^\circ; \vec{v}_\infty^\circ, \vec{f}^\circ, \frac{1}{\rho^\circ}, v^\circ). \quad (601c)$$

Kad je rješenje određenog problema viskoznog strujanja fluida (bez obzira da li je dobiveno analitički ili eksperimentalno) izraženo u bezdimenzijskom obliku (601c), tada ono pripada i beskonačnoj obitelji »dimenzijskih« strujanja s geometrijski sličnim granicama i s karakterističnim veličinama koje zadovoljavaju jednakosti (595), (600), (601) i (601a). Naime, sva ta strujanja opisana su identičnim bezdimenzijskim jednadžbama (598) i (599) i identičnim bezdimenzijskim rubnim uvjetima (601b), pa moraju imati i identična bezdimenzijska rješenja oblika (601c). Za jedno od tih prototipnih strujanja iz beskonačne obitelji geometrijski, kinematički i dinamički sličnih strujanja dimenzijsko rješenje ima oblik

$$\vec{v}_p(\vec{r}_p, t_p) = \frac{L_p}{t_{0p}} \vec{v}^\circ \left(\frac{\vec{r}_p}{L_p}, \frac{t_p}{t_{0p}}, \frac{\vec{v}_{\infty p}}{L_p}, \frac{\vec{f}_p}{L_p}, \frac{p_{0p}}{\rho_p L_p^2}, \frac{v_p}{L_p^2} \right), \quad (601d)$$

$$p_p(\vec{r}_p, t_p) = p_{0p} p^\circ \left(\frac{\vec{r}_p}{L_p}, \frac{t_p}{t_{0p}}, \frac{\vec{v}_{\infty p}}{L_p}, \frac{\vec{f}_p}{L_p}, \frac{p_{0p}}{\rho_p L_p^2}, \frac{v_p}{L_p^2} \right).$$

Jednakosti (595), (600), (601) i (601a) jesu uvjeti ili kriteriji hidromehaničke sličnosti dvaju izotermičkih strujanja nestlačivog fluida. Te se jednakosti mogu izraziti i s bezdimenzijskim značajkama ili kriterijima sličnosti, koji su uobičajeni u mehanici fluida. Te su značajke:

$$\text{Strouhalova značajka: } Sh = \frac{L}{v_\infty t_0}, \quad (602a)$$

$$\text{Froudeova značajka: } Fr = \frac{v_\infty}{\sqrt{fL}}, \quad (602b)$$

$$\text{Eulerova značajka: } Eu = \frac{p_0}{\rho v_\infty^2}, \quad (602c)$$

$$\text{Reynoldsova značajka: } Re = \frac{v_\infty L}{\nu} = \frac{\rho v_\infty L}{\mu}. \quad (602d)$$

Pomoću tih značajka dobivaju se jednostavnije relacije za bezdimenzijske veličine. Osim toga, bezdimenzijske značajke moraju imati istu vrijednost za prototip i za model.

Tim se značajkama može bezdimenzijsko rješenje (601c) prikazati u obliku

$$\vec{v}^\circ = \vec{v}^\circ \left(\vec{r}^\circ, t^\circ, Sh, Fr, Eu, Re, \frac{\vec{v}_\infty}{v_\infty}, \frac{\vec{f}}{f} \right), \quad (603a)$$

$$p^\circ = p^\circ \left(\vec{r}^\circ, t^\circ, Sh, Fr, Eu, Re, \frac{\vec{v}_\infty}{v_\infty}, \frac{\vec{f}}{f} \right),$$

a za bilo koje dimenzijsko rješenje (601d) iz beskonačne obitelji sličnih strujanja u obliku

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{L}{t_0} \vec{v}^\circ \quad \text{i} \quad p(\vec{r}, t) = p_0 p^\circ. \quad (603b)$$

Što se tiče uvjeta sličnosti prvoga graničnog uvjeta u (589) ili prvoga u (601b) u bezdimenzijskom obliku, mogu u principu postojati dva različita slučaja. Ako je gibanje granice unaprijed zadano funkcijom njenih točaka i vremena, to gibanje granica u prototipnoj i modelnoj pojavi mora biti kinematički slično, tj.

$$\vec{u}_p(M_p, t_p) \parallel \vec{u}_M(M_M, t_M),$$

$$\frac{u_p(M_p, t_p)}{L_p} = \frac{u_M(M_M, t_M)}{L_M}, \quad (604)$$

$$\frac{L_p}{t_{0p}} = \frac{L_M}{t_{0M}}$$

gdje su (M_p, t_p) i (M_M, t_M) slične prostorno-vremenske točke na granicama S_p i S_M .

To je, npr., slučaj kad prototipna kugla (sl. 130) oscilira po određenoj unaprijed zadanoj putanji s periodom t_{0p} , ili s frekvencijom $n_p = 1/t_{0p}$, pa uvjeti (604) propisuju kako to osciliranje kugle treba reproducirati na modelu da bi pojave bile slične.

Drugačije je kad nije zadano gibanje granice, već je to gibanje sastavni dio rješenja zadatka. Tada se rješenje dobiveno eksperimentom s modelom preslikava pomoću izraza (604) na slične uvjete traženog gibanja prototipne granice. Tako se, npr., određuju oscilatorna gibanja plovnog objekta na slobodnoj valovitoj morskoj površini ili u njenoj blizini.

Na sličan se način i oscilatorno otkidanje vrtloga u tragu iza kružnog cilindra (sl. 62a) opisuje Strouhalovim brojem $n_v D/v_\infty$, gdje je n_v frekvencija otkidanja vrtloga. Međutim, tada Strouhalov broj nije nezavisna veličina, već opisuje samo rješenje, tj. određeno unutrašnje svojstvo pojave strujanja, i kao takav je funkcija Reynoldsova broja. Tim Strouhalovim brojem preslikava se dobiveno modelno rješenje na rješenje beskonačne obitelji sličnih strujanja modeliranih Reynoldsovim brojem. Ako se kružni cilindar oscilatorno giba u fluidu prema zakonu

$$U = U_{\max} \cos(2\pi n t), \quad (605)$$

tada je ta pojava opisana sa dva Strouhalova broja: jednim vanjskim $Sh_1 = \frac{nD}{U_{\max}}$, koji modelira zadano gibanje cilindra,

i jednim unutrašnjim $Sh_2 = \frac{n_v D}{U_{\max}}$, koji je rješenje ili svojstvo same pojave, a funkcija je od Sh_1 i Reynoldsova broja $Re = \frac{U_{\max} D}{\nu}$.

Ako se raspolaze teorijskim ili eksperimentalnim bezdimenzijskim rješenjem nekog problema strujanja (603a), odnosno rješenjem (603b) za bilo koji dimenzijski slučaj, može se odrediti resultantna sila djelovanja fluida na graničnu površinu tijela u dodiru s fluidom. To je često osnovni zadatak mehanike fluida. Tako je za bilo koje dimenzijsko rješenje granične površine S (npr. površine kugle na sl. 130) sila fluida na tu granicu dana izrazom

$$\vec{F} = \int_S \vec{\sigma}_n dS = \int_S \vec{T}_\sigma dS = \int_S (-\vec{n}) p dS + 2\mu \int_S \vec{n} T_\epsilon dS, \quad (606a)$$

gdje je za tenzor naprezanja T_σ u nestlačivom fluidu primijenjen izraz (400a).

Za nestacionarno strujanje sila (606a) je funkcija i vremena.

Primjenom bezdimenzijskog rješenja (603a) i bezdimenzijske granice S° , te uzme li se u obzir prema (297b) struktura tenzora brzine deformacije T_ϵ , izraz (606a) poprima oblik

$$\begin{aligned} \vec{F} &= p_0 L^2 \int_{S^\circ} (-\vec{n}) p^\circ dS^\circ + 2\mu \frac{L^2}{t_0} \int_{S^\circ} \vec{n} T_\epsilon^\circ dS^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L^2 2Eu \int_{S^\circ} (-\vec{n}) p^\circ dS^\circ + \\ &+ \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L^2 4 \frac{Sh}{Re} \int_{S^\circ} \vec{n} T_\epsilon^\circ dS^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L^2 \vec{C}_p^\circ + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L^2 \vec{C}_\tau^\circ, \end{aligned} \quad (606b)$$

gdje su

$$\vec{C}_p^\circ \left(\frac{t}{t^\circ}; Sh, Fr, Eu, Re; \frac{\vec{v}_\infty}{v_\infty}, \frac{\vec{f}}{f} \right) = 2Eu \int_{S^\circ} (-\vec{n}) p^\circ dS^\circ, \quad (606c)$$

$$\vec{C}_\tau^\circ \left(\frac{t}{t^\circ}; Sh, Fr, Eu, Re; \frac{\vec{v}_\infty}{v_\infty}, \frac{\vec{f}}{f} \right) = 4 \frac{Sh}{Re} \int_{S^\circ} \vec{n} T_\epsilon^\circ dS^\circ \quad (606d)$$

bezdimenzijski vektorski koeficijenti sile tlaka $\vec{C}_p^\circ$ i sile tangencijalnih naprezanja $\vec{C}_\tau^\circ$ na graničnu površinu S . Ako se zadovolje uvjeti sličnosti, za prototipnu i modelnu pojavu vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned}\bar{C}_p &= \frac{\bar{F}_{pP}}{\frac{1}{2} \rho_P v_{\infty P}^2 L_P^2} = \frac{\bar{F}_{pM}}{\frac{1}{2} \rho_M v_{\infty M}^2 L_M^2}, \\ \bar{C}_t &= \frac{\bar{F}_{tP}}{\frac{1}{2} \rho_P v_{\infty P}^2 L_P^2} = \frac{\bar{F}_{tM}}{\frac{1}{2} \rho_M v_{\infty M}^2 L_M^2}.\end{aligned}\quad (607)$$

Ti se vektorski koeficijenti obično rastavljaju svaki na tri skalarne komponente u tri međusobno okomita smjera, npr. u smjerove x, y, z .

Za stacionarno strujanje Strouhalov broj nema nikakvu važnost. Naime, u takvom se strujanju može za mjerilo vremena proizvoljno uzeti vrijeme potrebno da se brzinom v_∞ prevali put karakteristične duljine L , tj. $t_0 = L/v_\infty$, pa je Strouhalov broj $Sh = L/(v_\infty t_0) = 1$ za bilo koje dimenzijsko rješenje pa je tako automatski zadovoljen i uvjet $Sh_P = Sh_M$. (Isto je tako i kad se tijelo karakteristične duljine L giba konstantnom pravocrtnom brzinom U u neograničenom fluidu, premda je to nestacionarno strujanje.)

Prema tome, uvođenjem karakteristične duljine L i karakteristične brzine v_∞ , za stacionarno je strujanje automatski definirano i karakteristično vrijeme, pa Navier-Stokesova vektorska jednačba (587), izražena bezdimenzijskim funkcijama $\bar{v}^\circ(\bar{r}^\circ)$ i $p^\circ(\bar{r}^\circ)$, glasi

$$\frac{v_\infty^2}{L}(\bar{v}^\circ \cdot \nabla^\circ) \bar{v}^\circ = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \frac{p^\circ}{L} \nabla^\circ p^\circ + \nu \frac{v_\infty}{L^2} \Delta^\circ \bar{v}^\circ. \quad (608a)$$

Dijeljenje te jednačbe sa $\frac{v_\infty^2}{L}$ daje

$$\begin{aligned}(\bar{v}^\circ \cdot \nabla^\circ) \bar{v}^\circ &= \bar{f}^\circ - \frac{1}{\rho^\circ} \nabla^\circ p^\circ + \nu^\circ \Delta^\circ \bar{v}^\circ = \\ &= \frac{1}{Fr^2} \bar{f} - Eu \nabla^\circ p^\circ + \frac{1}{Re} \Delta^\circ \bar{v}^\circ.\end{aligned}\quad (608b)$$

Jednačba kontinuiteta zadržava svoj bezdimenzijski oblik dan izrazom (601b).

Uz geometrijsku sličnost granica, uvjeti sličnosti beskonačne obitelji sličnih stacionarnih strujanja jesu: paralelnost brzina $\bar{v}_\infty$ i masenih sila $\bar{f}$ i, kao što se vidi iz (608b), jednakosti Froudeovih brojeva, Eulerovih brojeva i Reynoldsovih brojeva. Tada se, naime, iz bezdimenzijskog rješenja $\bar{v}^\circ(\bar{r}^\circ)$ i $p^\circ(\bar{r}^\circ)$ jednačbi (608b) i (599) može dobiti dimenzijsko rješenje za bilo koji dimenzijski slučaj iz te beskonačne obitelji sličnih stacionarnih strujanja. Iz zavisnosti (603a) i (603b) osim t° i t ispada i Sh .

Pri stlačivom strujanju toplinski vodljivog savršenog plina ulazi u analizu uvjeta sličnosti i energetska jednačba (413c), pa se i skup značajki sličnosti proširuje na Machov broj $Ma = v/c$, Prandtlov broj (406), odnos specifičnih toplota κ i na sličnost temperaturnih graničnih uvjeta.

Značajke turbulentnog strujanja. Polje brzine turbulentnog strujanja izražava se u obliku

$$\left. \begin{aligned}v_x &= \bar{v}_x + v'_x, \\ v_y &= \bar{v}_y + v'_y, \\ v_z &= \bar{v}_z + v'_z,\end{aligned} \right\} \bar{v} = \bar{v} + \bar{v}', \quad (609a)$$

gdje je $\bar{v}$ stvarna (trenutna) brzina strujanja, $\bar{v}$ vremenski osrednjena brzina ili vremenski prosjek brzine, a $\bar{v}'$ pulzacijska brzina.

Slično se izražavaju tlak, tenzor napreznja i temperatura

$$\begin{aligned}p &= \bar{p} + p', \\ T_\sigma &= \bar{T}_\sigma + T'_\sigma, \\ T &= \bar{T} + T'\end{aligned}\quad (609b)$$

Ako se općenito sa $f(x, y, z, t)$ označi neka skalarna, vektorska ili tenzorska veličina turbulentnog strujanja, tada se ta funkcija rastavlja na vremenski prosjek $\bar{f}$ i pulzaciju f' :

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z, t) + f'(x, y, z, t). \quad (610a)$$

Prema definiciji je

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{T_s} \int_{t - \frac{T_s}{2}}^{t + \frac{T_s}{2}} f(x, y, z, \tau) d\tau, \quad (610b)$$

gdje je T_s perioda osrednjenja.

Pretpostavlja se da je perioda T_s u usporedbi s periodom turbulentnih pulzacija dovoljno velika da bi za definiciju srednje vrijednosti obuhvatila dovoljan broj pulzacijskih ciklusa, a da je dovoljno malena u usporedbi s vremenom koje karakterizira vremenski promjenljivo osrednjeno turbulentno strujanje, npr. s periodom oscilacija vremenski osrednjenih veličina.

Ako je vremensko osrednjenje ispravno provedeno, veličina $\bar{f}$ se ne mijenja pri ponovnom osrednjenju, tj. vrijedi

$$\bar{\bar{f}}(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z, t). \quad (611a)$$

Za turbulentno strujanje u kojem $\bar{f}$ nije funkcija vremena kaže se da je *kvazistacionarno*.

Primjenom pretpostavljenog svojstva osrednjenja (611a), vrijedi

$$\bar{f}' = \bar{f} - \bar{\bar{f}} = 0. \quad (611b)$$

Ako je g još jedna pulzacijska funkcija, lako se dokaže da vrijedi

$$\bar{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}. \quad (611c)$$

Isto tako vrijede očite jednakosti

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}. \quad (611d)$$

Za analizu i rješavanje problema turbulentnog strujanja primjenjuju se vremenski osrednjena jednačba gibanja i jednačba kontinuiteta.

Za nestlačivi fluid član konvektivne akceleracije na lijevoj strani jednačbe gibanja (381e), uz $\text{div } \bar{v} = 0$, može se izraziti sa

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \text{Div } \bar{v} \bar{v}, \quad (612a)$$

gdje je $\bar{v} \bar{v}$ diada ili multiplikacijski tenzor, u kartezijskom sustavu definiran sa

$$\bar{v} \bar{v} = \begin{bmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{bmatrix} \quad (612b)$$

Ako se zanemari utjecaj masene sile, primjenom (612a) jednačba gibanja (381e) poprima oblik

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \text{Div}(T_\sigma - \rho \bar{v} \bar{v}). \quad (613a)$$

Za newtonski nestlačivi fluid tenzor napreznja T_σ određen je izrazom (400a).

Izraze li se prema (609a) i (609b) $\bar{v}$ i T_σ vremenskim prosjekom i pulzacijskim dijelom te uvrste u jednačbu gibanja (613a), vremensko osrednjenje te jednačbe primjenom (610b), (611a), (611b), (611c) i (611d) daje

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \text{Div}(\bar{T}_\sigma - \rho \bar{v} \bar{v} - \rho \bar{v}' \bar{v}'). \quad (613b)$$

Vremenski osrednjena jednačba kontinuiteta ima oblik

$$\text{div } \bar{v} = 0. \quad (613c)$$

Usporedba jednačbe gibanja stvarnog (trenutnog) turbulentnog strujanja (613a) s jednačbom vremenski osrednjenog strujanja (613b) prikazuje da se u (613b) pojavio dodatni član $-\rho \bar{v}' \bar{v}'$, koji se naziva *tenzorom turbulentnog napreznja* i u kartezijskom sustavu ima komponente

$$(T_\sigma)_{\text{turb}} = -\rho \bar{v}' \bar{v}' = \begin{bmatrix} -\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_x & -\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_y & -\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_z \\ -\rho \bar{v}'_y \bar{v}'_x & -\rho \bar{v}'_y \bar{v}'_y & -\rho \bar{v}'_y \bar{v}'_z \\ -\rho \bar{v}'_z \bar{v}'_x & -\rho \bar{v}'_z \bar{v}'_y & -\rho \bar{v}'_z \bar{v}'_z \end{bmatrix}. \quad (613d)$$

Turbulentna naprezanja odražavaju vremenski osrednjeni prijenos pulzacijske količine gibanja $\bar{q}\bar{v}'$ pulzacijskom brzinom $\bar{v}'$.

Primjenom generaliziranog Newtonova zakona viskoznosti (400a), x-komponenta jednadžbe (613b) poprima oblik

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v'_x v'_x}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'_y v'_x}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{v'_z v'_x}) \right]. \end{aligned} \quad (614a)$$

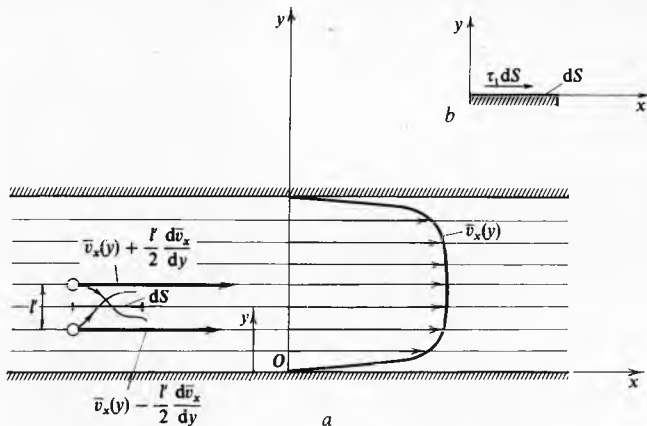
Sličan oblik poprimaju i preostale dvije komponente, a vremenski osrednjena jednadžba kontinuiteta glasi

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0. \quad (614b)$$

Jednadžbe (613b) i (613c) i jednadžbe (614a) i (614b) nazivaju se *Reynoldsovim jednadžbama gibanja vremenski osrednjenoga turbulentnog strujanja*.

Vremenski osrednjeno turbulentno strujanje matematički je model strujanja u kojemu su strujnice pravilne krivulje. Strujanje je u slojevima, slično laminarnom strujanju, ali je profil vremenski srednjih brzina bitno različit od profila brzine laminarnog strujanja. U stvarnom turbulentnom strujanju strujnice pulzacijskog gibanja presijecaju strujnice tog urednog osrednjenog strujanja i time se iz sloja u sloj fluida prenosi količina gibanja, toplina, masa i ostale karakteristične veličine. Za razliku od laminarnog strujanja, u kojemu također postoji prijenos tih veličina iz sloja u sloj, ali u mikroskopskim razmjerima jer su nosioci tog prijenosa molekule, pri turbulentnom strujanju nosioci su tog prijenosa konačne mase fluida, tj. gromade ili grozdovi čestica, pa je i miješanje u makroskopskim razmjerima.

Na sl. 131 prikazano je ustaljeno kvazistacionarno vremenski osrednjeno strujanje između dviju ravnih ploča, s profilom vremenski srednjih brzina $\bar{v}_x(y)$. Strujnice pulzacijskog gibanja gromada čestica presijecaju te pravilne strujnice osrednjenog strujanja i sa sobom prenose kroz slojeve količinu gibanja, toplinu i ostale mehaničke i termodinamičke veličine, a također i razne primjese koje se nalaze u fluidu, npr. dim u zraku, pijesak u vodi i sl. Prijenos i promjena količine gibanja uzrokuje turbulentno trenje među slojevima, prijenos topline uzrokuje turbulentnu vodljivost topline, a prijenos primjese turbulentnu difuziju. Mehanizam turbulentnog miješanja isti je za trenje, toplinsku vodljivost i difuziju.



Sl. 131. Ustaljeno kvazistacionarno vremenski osrednjeno strujanje između dviju ravnih ploča

Turbulentno tangencijalno naprezanje τ_t određuje se vremenskim prosjekom projekcije na os x prijenosa količine gibanja na jedinicu površine elementa dS položenog uzduž strujnice vremenski osrednjenoga turbulentnog strujanja (sl. 131). Ako se promatra sila naprezanja $\tau_t dS$ kojom gornji sloj djeluje na donji, tada se primjenom ispravnih predznaka za prijenos količine gibanja kroz dS dobiva

$$\tau_t dS = \rho \left[\bar{v}_x \left(y + \frac{1}{2} l' \right) - \bar{v}_x \left(y - \frac{1}{2} l' \right) \right] \bar{v}'_y dS \approx \rho \bar{v}'_y l' \frac{d\bar{v}_x}{dy} dS,$$

ili za turbulentno tangencijalno naprezanje

$$\tau_t = \rho \bar{v}'_y l' \frac{d\bar{v}_x}{dy} = A \frac{d\bar{v}_x}{dy} = \rho \epsilon \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (615a)$$

Taj je izraz postavio J. Boussinesq (1877). Veličina

$$A = \rho \bar{v}'_y l' \quad (615b)$$

izražava intenzitet turbulentnog miješanja, pa se po analogiji s molekularnim miješanjem, koje je izraženo koeficijentom μ , naziva *dinamičkim koeficijentom turbulentne viskoznosti*. Po istoj analogiji, veličina

$$\epsilon = \frac{A}{\rho} \quad (615c)$$

naziva se *kinematičkim koeficijentom turbulentne viskoznosti*.

Mjerenja pokazuju da se veličina A znatno mijenja po poprečnom presjeku strujanja u cijevi ili u graničnom sloju. A ima vrlo malu vrijednost u blizini stijenke (gdje krutost stijenke ne dopušta česticama da pulziraju), pa raste do maksimuma na polovici polumjera cijevi ili polovici debljine graničnog sloja, a zatim ponovno opada. To se ponašanje turbulentne viskoznosti A bitno razlikuje od ponašanja molekularne viskoznosti μ , koja je svojstvo fluida, dok je A svojstvo režima strujanja, tj. intenziteta turbulencije. Tako je u izrazu za ukupno srednje tangencijalno naprezanje

$$\bar{\tau} = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} + A \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (616)$$

prvi član dominantan u neposrednoj blizini krute (glatke) stijenke, u tzv. laminarnom podsloju, i njegov utjecaj naglo slabi s udaljavanjem od stijenke, gdje dominantni utjecaj preuzima drugi član.

L. Prandtl (1925) dao je veličini l' u izrazu (615b) fizikalni smisao analogan smislu duljine slobodne putanje molekula u teoriji molekularnog miješanja. Kad pri turbulentnom miješanju konačni volumen fluida, a ne molekula, polazi iz nekog sloja koji se nalazi na udaljenosti l' od promatranog sloja, tada taj konačni volumen fluida zadržava svoju osrednjenu (uzdužnu) količinu gibanja sve dok ne stigne u promatrani sloj i tek se tada pomiješa s okolnim fluidom, predajući mu ili primajući od njega svu razliku količine gibanja. Udaljenost od sloja iz kojeg je taj konačni volumen fluida pošao do sloja u kojemu se odigralo miješanje Prandtl je nazvao *putom miješanja*, a teorija je nazvana *teorijom puta miješanja*.

U skladu s Prandtlom shvaćanjem, pulzacije komponente brzine v'_y normalno na strujnice osrednjenog strujanja $\bar{v}_x(y)$ proporcionalne su razlici brzina $l' \frac{d\bar{v}_x}{dy}$. Ako se ta razlika uvrsti u (615a) i provede osrednjenje, a koeficijent proporcionalnosti se uključi u novu veličinu l , također nazvanu *putom miješanja*, dobiva se Prandtlova formula

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2. \quad (617a)$$

Da bi mogla postojati oba predznaka, izraz (617a) piše se u obliku

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} = A \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad (617b)$$

gdje je

$$A = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (617c)$$

Umjesto puta miješanja, veličini l može se dati smisao značajke geometrijske strukture turbulentnog strujanja ili mjerila turbulentnosti.

Prandtl je dalje pretpostavio da je l proporcionalno s udaljenosti od stijenke, tj.

$$l = \kappa y, \quad (618a)$$

Uz novu pretpostavku da u blizini stijenke τ , ostaje konstantno i jednako tangencijalnom naprezanju τ_w uz samu stijenku, za profil vremenski srednje brzine turbulentnog strujanja dobiva se izraz

$$\bar{v}_x(y) = \frac{v_\tau}{\kappa} \ln y + C, \quad (618b)$$

gdje je $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ tzv. brzina trenja.

Konstantom integracije C u (618b) usklađuju se linearni profil brzine u laminarnom podsloju u neposrednoj blizini stijenke i logaritmički profil brzine (618b) turbulentnog strujanja podalje od stijenke. Naime, za $y = 0$ izraz (618b) odlazi u $(-\infty)$, pa ako se udaljenost od stijenke y_0 na kojoj (618b) daje vrijednost $\bar{v}_x = 0$ izrazi u obliku

$$y_0 = \beta \frac{v}{v_\tau}, \quad (618c)$$

profil brzine (618b) može se izraziti u bezdimenzijskom obliku

$$v^*(y^*) = A_1 \ln y^* + D_1, \quad (619)$$

gdje je $v^* = \frac{\bar{v}_x}{v_\tau}$, $y^* = y \frac{v_\tau}{v}$, $A_1 = \frac{1}{\kappa}$ i $D_1 = -\left(\frac{1}{\kappa}\right) \ln \beta$.

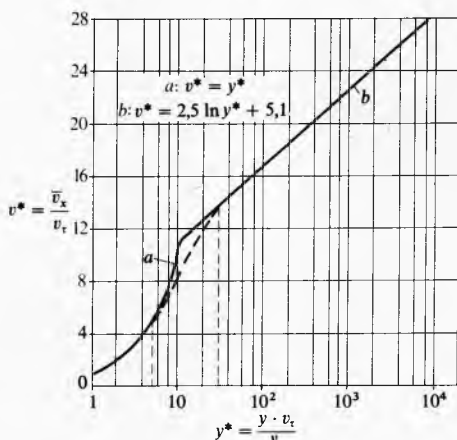
Na sl. 132 prikazan je bezdimenzijski profil brzine (619) uz glatku stijenku, određen brojnim mjerenjima u cijevima, kanalima i graničnom sloju. Do vrijednosti $y^* = 5$ uz glatku stijenku se održava laminarni podsloj s linearnim profilom brzine

$$v^* = y^*, \quad \text{za } y^* \leq 5, \quad (620a)$$

zatim nastupa prijelazno područje do $y^* = 30$, a nakon toga je strujanje turbulentno s logaritmičkim profilom brzine

$$v^* = 2,5 \ln y^* + 5,1, \quad \text{za } y^* \geq 30. \quad (620b)$$

Iz konstanta $A_1 = 2,5$ i $D_1 = 5,1$ dobivaju se $\kappa = 0,4$ i $\beta = 0,130$.

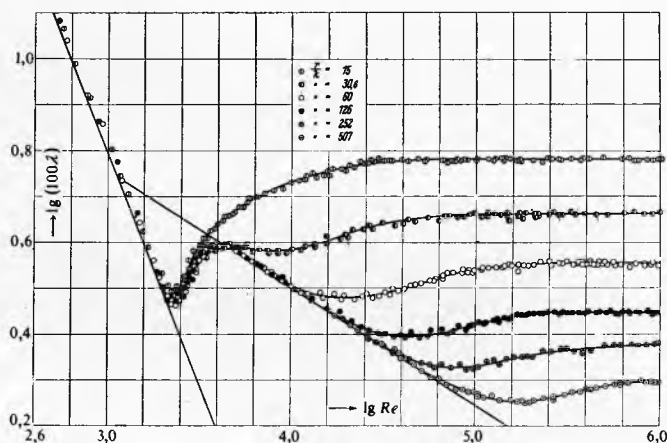


Sl. 132. Univerzalni bezdimenzijski profil srednje brzine turbulentnog strujanja oko glatke stijenke prema podacima mjerenja u cijevima, kanalima i graničnom sloju (Kestin, Richardson, 1963)

Vrlo opsežna istraživanja strujanja u glatkim i hrapavim cijevima proveo je J. Nikuradse (1932. i 1933). Cijevi su bile umjetno ohrapavljene zrcima pijeska. Rezultati njegovih istraživanja prikazani su grafički logaritmom koeficijenta otpora trenja λ na bazi logaritma Reynoldsova broja, za različite omjere r/k (sl. 133), gdje je r polumjer cijevi a k visina pješćane hrapavosti.

Za laminarno strujanje, do kritičnog Reynoldsova broja, koji se nalazi između $Re = 2160 \dots 2500$ (tj. $\lg Re = 3,33 \dots 3,40$), λ ne zavisi od relativne hrapavosti r/k . Ponašanje λ u turbulentnom strujanju daje jasniju definiciju hrapave cijevi u hidrauličkom smislu. Krivulja λ za najveću hrapavost ($r/k = 15$) prva se odvaja od krivulje λ za glatke cijevi. Krivulje za niže hrapavosti (tj. za više vrijednosti r/k) slijede jednim dijelom svog toka krivulju glatke cijevi i zatim se od nje odvajaju.

Za najnižu hrapavost ($r/k = 507$) taj slijed krivulje za glatku cijev prostire se preko šireg područja Re . Prema tome, svaka hrapava cijev ponaša se u određenom području Re kao hidraulički glatka cijev. Kad se krivulja λ odvoji od krivulje hidraulički glatke cijevi, nakon jednog relativno užeg prijelaznog područja ona postaje paralelna s apscisom i λ više ne zavisi od Re već samo od relativne hrapavosti r/k . To je područje potpune hrapavosti.



Sl. 133. Koeficijent otpora trenja λ za strujanje u cijevima različite hrapavosti, prema ispitivanjima Nikuradsea (1933)

Takvo ponašanje koeficijenta trenja λ u turbulentnom strujanju određeno je odnosom visine hrapavosti k prema debljini laminarnog podsloja definiranog sa $y^* = 5$. Ako se i visina hrapavosti k izrazi u bezdimenzijskom obliku $k^* = k v_\tau / v$, tada su pojedini režimi turbulentnog strujanja u cijevima definirani na sljedeći način:

a) hidraulički glatki režim strujanja

$$0 \leq k^* \leq 5 \rightarrow \lambda = \lambda(Re), \quad (621a)$$

u kojem se svi izdanci hrapavosti nalaze unutar laminarnog podsloja, pa je i otpor strujanju uzrokovan jedino viskozim trenjem;

b) prijelazni režim strujanja

$$5 \leq k^* \leq 70 \rightarrow \lambda = \lambda\left(Re, \frac{k}{D}\right), \quad (621b)$$

u kojem izdanci hrapavosti izlaze iz laminarnog podsloja, pa uz viskozno trenje nastaje i dodatni otpor forme (virova) izdanaka koji se nalaze u brzjoj turbulentnoj jezgri;

c) potpuno hrapavi režim strujanja

$$k^* > 70 \rightarrow \lambda = \lambda\left(\frac{k}{D}\right), \quad (621c)$$

u kojem su svi izdanci hrapavosti izvan laminarnog podsloja, pa dominira kvadratični zakon otpora forme izdanaka, a pad tlaka dan je izrazom

$$\Delta p_f = \lambda \left(\frac{k}{D}\right) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.} \cdot v^2, \quad (621d)$$

Na temelju Prandtlove i Karmanove teorije te eksperimentalnih istraživanja, Nikuradse je za λ hidraulički glatke cijevi u turbulentnom strujanju dobio izraz

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8, \quad (622a)$$

a za područje potpune hrapavosti za cijevi umjetno ohrapavljene zrcima pijeska

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74\right)^2}. \quad (622b)$$

Za koeficijent trenja λ koji prekriva čitavo prijelazno područje od hidraulički glatkog do potpuno hrapavog režima strujanja Colebrook je postavio formulu

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \lg \left(\frac{k}{r} + \frac{18,7}{Re \sqrt{\lambda}} \right), \quad (622c)$$

ili

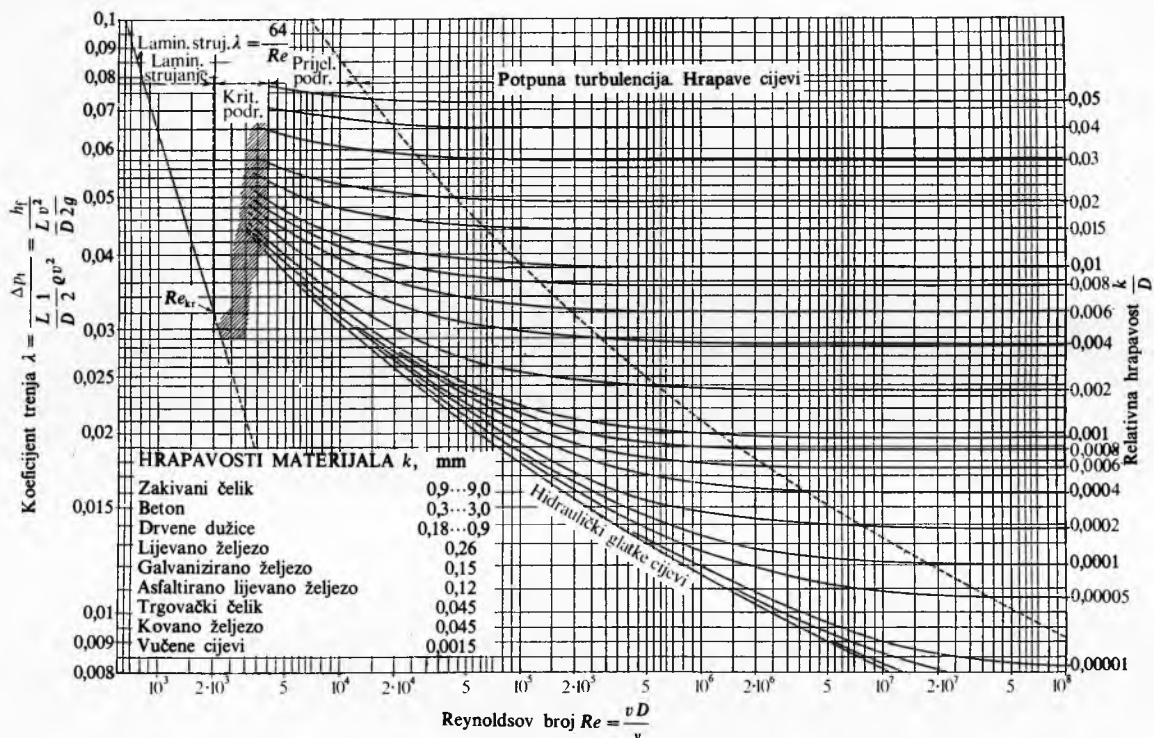
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8686 \ln \left(\frac{k/D}{3,707} + \frac{2,523}{Re \sqrt{\lambda}} \right), \quad (622d)$$

što je dobro približenje za proračun otpora u različitim komercijalnim tipovima cijevi. Za $k \rightarrow 0$ te formule prelaze u izraz (622a), a za $Re \rightarrow \infty$ u izraz (622b). U tim formulama veličina k predstavlja ekvivalentnu ili efektivnu visinu hrapavosti materijala komercijalnih cijevi, tj. vrijednost koja daje istu vrijednost λ kao visina umjetne pješčane hrapavosti u potpuno hrapavom režimu strujanja.

strujanja u tom području opisuje Eulerovim jednadžbama gibanja (421a).

Debljina graničnog sloja δ definirana je kao udaljenost od stijenke u smjeru poprečne osi y preko koje se brzina mijenja od nule do 99% iznosa brzine vanjskog strujanja, tj. $y = \delta$, gdje je $v_x = 0,99 v_\infty$ pri uzdužnom optjecanju ravne ploče (sl. 135a) ili $v_x = 0,99 v_\delta$ pri optjecanju tijela sa zakrivljenom granicom (sl. 135b), gdje je v_δ brzina vanjskog potencijalnog strujanja na mjestu x .

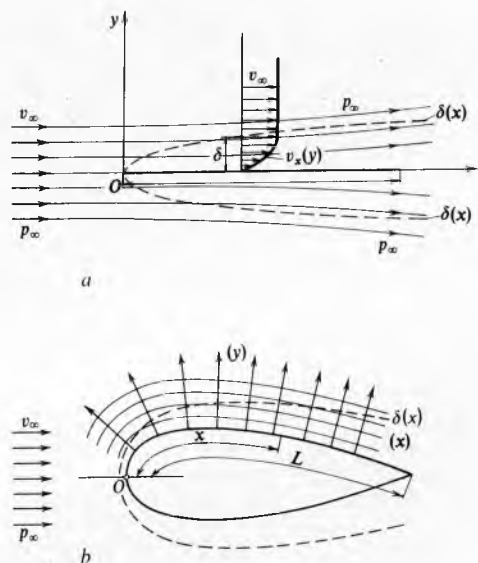
Budući da je δ malena veličina prema uzdužnoj dimenziji tijela L , tj. vrijedi $\delta \ll L$, Navier-Stokesove jednadžbe mogu se znatno pojednostavniti. Tako se u laminarnom graničnom sloju ravninskoga stacionarnog strujanja nestlačivog fluida utjecaj pojedinih članova u komponentama x i y Navier-Stokesovih jednadžbi (574) analizira ocjenom reda veličine. Naime, promjena x -komponente brzine v_x mijenja se od nule do iznosa v_∞ (ili v_δ) unutar udaljenosti δ u smjeru y , a apscisa x se mijenja



Sl. 134. Moodyjev dijagram koeficijenta otpora trenja λ za strujanje u cijevima od različitog materijala

Formule (622c i d) Moody je dao dijagramom gdje je prikazao λ na bazi Re u lg-lg mjerilu (sl. 134). U istom su dijagramu dani podaci o ekvivalentnim visinama hrapavosti nekih materijala za izradu komercijalnih cijevi.

Granični sloj. L. Prandtl je 1904. god. uveo pojam graničnog sloja, čime je označen početak moderne ere mehanike fluida. Uvjet priljepljivosti realnog viskoznog fluida o krutu stijenku uzrokuje bitnu razliku u poljima brzine strujanja idealnog i viskoznog fluida u neposrednoj blizini krute granice tijela. Podalje od te granice ta se razlika praktički potpuno izgubi. Stoga je Prandtl u analizi viskoznog strujanja oko tijela podijelio polje strujanja u područje relativno tankoga graničnog sloja u neposrednoj blizini krutih granica i u područje koje prekriva ostatak polja strujanja. Unutar tankoga graničnog sloja tangencijalna komponenta brzine naglo se mijenja u smjeru normalno na stijenku, i to od nule na stijenci do brzine slobodne struje na vanjskom rubu graničnog sloja. U tom je sloju učinak viskoznosti bitan; strujanje je vrtložno, a viskozne su sile istog reda veličine kao i inercijske sile, pa se dinamika strujanja opisuje Navier-Stokesovim jednadžbama (409a). Izvan graničnog sloja učinak je viskoznosti zbog malih poprečnih gradijenata brzine strujanja zanemarljiv, pa se fluid može smatrati idealnim u potencijalnom (bezvrtložnom) strujanju, tako da se dinamika



Sl. 135. Laminarni granični sloj

od nule do L , pa ako se znakom $\sim$ označi ocjena reda veličine, može se pisati

$$x \sim L, \quad y \sim \delta, \quad v_x \sim v_\infty, \quad p \sim \rho v_\infty^2. \quad (623a)$$

Pomoću tih odnosa može se ocijeniti red veličine pojedinih članova Navier-Stokesovih jednadžbi. Tako je

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &\sim \frac{v_\infty^2}{L}, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &\sim \frac{v_\infty^2}{L}, \\ v \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} &\sim v \frac{v_\infty}{L^2}, & v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &\sim v \frac{v_\infty}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (623b)$$

Iz jednadžbe kontinuiteta (575) vrijedi

$$\left| \frac{\partial v_y}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \sim \frac{v_\infty}{L},$$

a zbog

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_y}{\delta},$$

dobiva se ocjena reda veličine y -komponente brzine

$$v_y \sim v_\infty \frac{\delta}{L}, \quad (623c)$$

tako da je

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_\infty^2}{L}. \quad (623d)$$

Zbog osnovne pretpostavke da je $\delta \ll L$, izraz (623b) pokazuje da je

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (623e)$$

pa se član na lijevoj strani te nejednakosti može zanemariti.

Budući da je granični sloj područje podjednako utjecaja viskoznih i inercijskih sila, u x -komponenti Navier-Stokesovih jednadžbi zadržava se viskozni član s desne strane nejednakosti (623e). Taj član mora imati isti red veličine kao ostali zadržani članovi, pa se iz (623a) dobiva

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim v \frac{v_\infty}{\delta^2} \sim \frac{v_\infty^2}{L}. \quad (623f)$$

Iz te ocjene reda veličine slijedi

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (623g)$$

gdje je $Re = \frac{v_\infty L}{\nu}$ Reynoldsov broj.

Prema (623g) uvjet $\delta \ll L$ bit će ispunjen samo kad je $Re \gg 1$, što uz zadane v_∞ i L , kad su reda veličine 1, zahtijeva relativno malu viskoznost fluida. Tada se može primijeniti koncepcija graničnog sloja kao uskog područja oko krutih granica u kojemu je važan utjecaj viskoznosti.

Ocjena reda veličine članova y -komponente Navier-Stokesovih jednadžbi, uz $Re \gg 1$, pokazuje da se svi članovi mogu zanemariti, pa približno vrijedi

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0. \quad (623h)$$

Iz toga slijedi osnovno svojstvo graničnog sloja da se tlak preko normalnog presjeka graničnog sloja može smatrati konstantnim i jednakim tlaku u vanjskom strujanju. Ako se pri stacionarnom ravninskom strujanju brzina i tlak na vanjskom rubu graničnog sloja mijenjaju po zakonu

$$v_\delta = v_\delta(x), \quad p = p(x), \quad (624a)$$

primjena Eulerove jednadžbe gibanja daje

$$v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \quad (624b)$$

Na temelju ocjene reda veličine pojedinih članova Navier-Stokesovih jednadžbi i primjenom (624b) dobivaju se Prandtllove

jednadžbe za laminarni granični sloj ravninskog stacionarnog strujanja

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (625a)$$

s graničnim uvjetima

$$\begin{aligned} v_x = v_y &= 0 \quad \text{za } y = 0, \\ v_x &\rightarrow v_\delta(x) \quad \text{za } y \rightarrow \infty(\delta), \\ v_x &= v_{x0}(y) \quad \text{za } x = x_0. \end{aligned} \quad (625b)$$

Primjenom funkcije toka ravninskog strujanja (419e), sa svojstvima (419f), Prandtllove jednadžbe (625a) i granični uvjeti (625b) poprimaju oblik

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{dv_\delta}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (626a)$$

$$\psi = 0 \quad \text{za } y = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{za } y = 0, \quad (626b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow v_\delta(x) \quad \text{za } y \rightarrow \infty(\delta),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_{x0}(y) \quad \text{za } x = x_0.$$

Pri stacionarnom laminarnom optjecanju ravne ploče (sl. 135a) tlak ostaje konstantan u čitavom polju strujanja, a također je i $v_\delta = v_\infty = \text{const.}$, pa sustav jednadžbi (626a) i uvjeti (626b) prelaze u

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad p = p_\infty = \text{const.}, \quad (627a)$$

$$\psi = 0 \quad \text{za } y = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow v_\infty \quad \text{kad } y \rightarrow \infty, \quad \text{za sve } x, \quad (627b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{za } y = 0 \quad \text{i} \quad x > 0,$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty \quad \text{za } x = 0.$$

Za rješavanje jednadžbe (627a) Blasius je na temelju reda veličine (623g) uveo složenu bezdimenzijsku varijablu

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}}, \quad (628a)$$

i bezdimenzijsku funkciju toka

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{v_\infty \nu x}}, \quad (628b)$$

u kojima jednadžba (627a) prelazi u običnu nelinearnu diferencijalnu jednadžbu

$$2f''' + f f'' = 0, \quad (628c)$$

s graničnim uvjetima:

$$\begin{aligned} f &= 0 \quad \text{za } \eta = 0, \\ f' &= 0 \quad \text{za } \eta = 0, \\ f' &= 1 \quad \text{za } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (628d)$$

Uz granične uvjete (628d) može se Blasiusova jednadžba (628c) numerički riješiti. U tabl. 8 prikazani su rezultati Howarthove numeričke integracije, a na sl. 136 pokazano je da se teorija i eksperiment odlično podudaraju.

Tangencijalno naprezanje τ_w uz ravnu ploču dano je izrazom

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \varphi''(0) \frac{\rho v_\infty^2}{\sqrt{Re_x}} = 0,3321 \frac{\rho v_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}, \quad (629a)$$

gdje je $Re_x = \frac{v_\infty x}{\nu}$.

Koeficijent otpora trenja jedne strane ploče duljine L i širine B iznosi

$$C_F = \frac{R_F}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 LB} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 L} \int_0^L \tau_w dx = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad (629b)$$

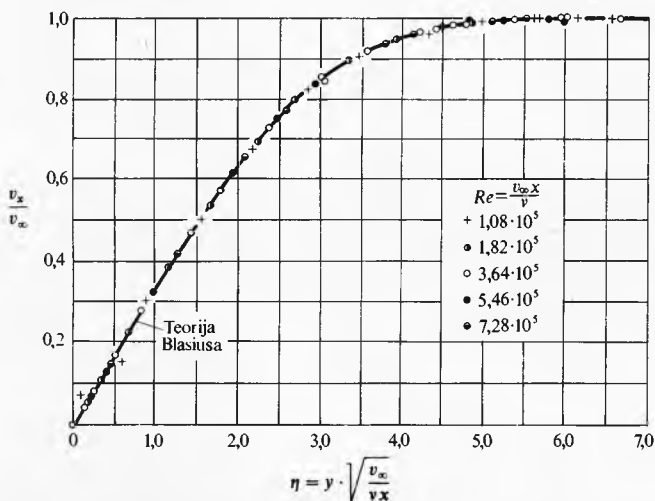
Debljina graničnog sloja dana je izrazom

$$\delta_{v_x/v_\infty = 0,99} = 4,91 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \quad (629c)$$

Karman i Pohlhausen razvili su približnu metodu rješavanja ravninskoga graničnog sloja temeljenu na jednadžbi količine gibanja.

Tablica 8
HOWARTHOVA INTEGRACIJA BLASIUSOVE JEDNADŽBE
 $2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0$ LAMINARNOG GRANIČNOG SLOJA UZ RAVNU PLOČU

η	φ	$\varphi' = \frac{v_x}{v_\infty}$	φ''	η	φ	$\varphi' = \frac{v_x}{v_\infty}$	φ''
0	0	0	0,33206	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
0,2	0,00664	0,06641	0,33199	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,2	3,48189	0,99425	0,01434
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
4,4	2,69238	0,97587	0,03897	8,8	7,07923	1,00000	0,00000



Sl. 136. Raspored brzine u laminarnom graničnom sloju uz ravnu ploču prema Blasiusovoj teoriji i Nikuradseovim eksperimentima

Karman je primijenio jednadžbu količine gibanja na fluid u elementu ravninskog graničnog sloja i dobio jednadžbu koja je osnova približnih metoda rješavanja graničnog sloja. Takav

element, izvučen na mjestu x iz graničnog sloja sa sl. 135a ili sl. 135b, prikazan je na sl. 137.

Za element jedinične širine okomito na ravninu strujanja, uz $dS = ds \cdot 1$ ili $dS = dy \cdot 1$, jednadžba kontinuiteta (417a) primijenjena na KV (sl. 137) poprima oblik

$$-\dot{m}(x) + \int_0^{\delta(x)} \rho \vec{v}_\delta \cdot \vec{n} ds + \left[\dot{m}(x) + \frac{d\dot{m}}{dx} dx \right] = 0, \quad (630a)$$

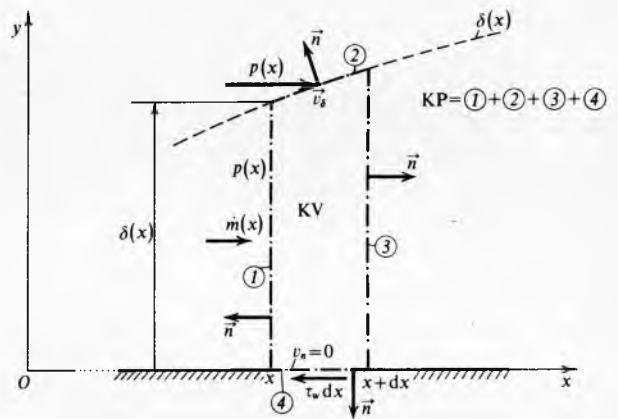
gdje je

$$\dot{m}(x) = - \int_0^{\delta(x)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dy = \int_0^{\delta(x)} \rho v_x dy. \quad (630b)$$

Iz (630a) i (630b) slijedi

$$\int_0^{\delta(x)} \rho \vec{v}_\delta \cdot \vec{n} ds = - \frac{d\dot{m}}{dx} dx = - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho v_x dy, \quad (630c)$$

budući da vanjski rub graničnog sloja nije strujnica.



Sl. 137. Izvod Karmanove jednadžbe količine gibanja za ravninski granični sloj

Za stacionarno ravninsko strujanje, zanemarujući masene sile i primijenivši osnovno svojstvo graničnog sloja (623h), x-komponenta jednadžbe količine gibanja (379) primijenjena na KV (sl. 137) glasi

$$p \delta + p \frac{d\delta}{dx} dx - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) \left(\delta + \frac{d\delta}{dx} dx \right) - \tau_w dx - \int_0^{\delta(x)} \rho v_x (v - v_x) dy - \int_0^{\delta(x)} \rho v_\delta \vec{v}_\delta \cdot \vec{n} ds - \left[\int_0^{\delta(x)} \rho v_x^2 dy + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho v_x^2 dy dx \right] = 0. \quad (631a)$$

U toj se jednadžbi mnogi članovi poništavaju, pa ako se primijene izrazi (624b) i (630c), uz $v_x = v_\delta = \text{const.}$ preko dijela ② KP tako da je

$$- \int_0^{\delta(x)} \rho v_\delta \vec{v}_\delta \cdot \vec{n} ds = v_\delta \frac{d\dot{m}}{dx} dx = v_\delta \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho v_x dy dx, \quad (631b)$$

izraz (631a), nakon dijeljenja sa dx , prelazi u

$$\rho v_\delta \frac{dv_\delta}{dx} \int_0^{\delta(x)} dy - \tau_w + v_\delta \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho v_x dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho v_x^2 dy = 0. \quad (631c)$$

Ako se pretpostavi da je fluid nestlačiv, tj. $\varrho = \text{const.}$, izraz (631c), nakon jednostavnih operacija, prelazi u Karmanov impulsni integralni odnos za ravninski granični sloj

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{v_\delta} \frac{2\delta_2 + \delta_1}{dx} = \frac{\tau_w}{\varrho v_\delta^2}, \quad (631d)$$

gdje je

$$\delta_1 = \delta_1(x) = \int_0^{\delta(x); \infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\delta}\right) dy \quad (631e)$$

debljina istisnuća, koja daje iznos za koji je vanjsko potencijalno strujanje istisnuto prema van zbog smanjenja brzine strujanja u graničnom sloju (uobičajena je i oznaka δ^*);

$$\delta_2 = \delta_2(x) = \int_0^{\delta(x); \infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\delta}\right) \frac{v_x}{v_\delta} dy \quad (631f)$$

impulsna debljina graničnog sloja, koja karakterizira gubitak količine gibanja u graničnom sloju u usporedbi s količinom gibanja potencijalnog strujanja (uobičajene su i oznake δ^{**} i θ).

Alternativne gornje granice ∞ integrala u izrazima (631e) i (631f) odnose se na tzv. asimptotski granični sloj.

Pohlhausen je primjerom ilustrirao opći postupak primjene Karmanove jednadžbe (631d). U Pohlhausenovom se postupku pretpostavi opći oblik bezdimenzijskog profila brzine u graničnom sloju kao jednoparametarske obitelji sličnih krivulja, gdje je parametar

$$A = A(x) = \frac{\delta^2 dv_\delta}{v dx}. \quad (632)$$

Na pretpostavljeni profil brzine postavi se što je moguće više rubnih uvjeta za $y = 0$ i za $y = \delta(x)$, ili pri asimptotskom profilu brzine za $y \rightarrow \infty$. Ti se uvjeti za $y = 0$ dobivaju iz Prandtl-ovih jednadžbi (625a) i njenih derivacija prvog i viših redova, a za $y = \delta(x)$ ili $y \rightarrow \infty$ ti se uvjeti svode na postizanje što boljeg stupnja izgladenosti s kojim taj profil brzine ulazi u profil konstantne brzine vanjskog strujanja. Pomoću tako obrađenog pretpostavljenog profila brzine proračunaju se veličine δ_1 , δ_2 i τ_w , koje također ovise o izabranom parametru, i kad se uvrste u Karmanovu jednadžbu (631d), dobiva se obična diferencijalna jednadžba u traženom parametru, npr. u Pohlhausenovom parametru (632). Rješenje te diferencijalne jednadžbe određuje taj parametar, a njime je određena i jednoparametarska obitelj profila brzine u graničnom sloju i sve ostale značajke graničnog sloja $\delta(x)$, $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$ i τ_w .

LIT.: H. Lamb, *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York 1945. — K. Voronjec, N. Obradović, *Mehanika fluida*. Građevinska knjiga, Beograd 1965. — L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*. Macmillan and Co., London 1968. — R. H. Sabersky, A. J. Acosta, E. G. Hauptmann, *Fluid flow*. Macmillan Publishing Co., New York 1971. — M. Ridanović, *Hidrodinamika*. Zavod za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo 1972. — V. L. Streeter, E. B. Wylie, *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Book Co., New York 1975. — Л. И. Седов, *Механика сплошной среды I/II*. Наука, Москва 1976. — R. L. Daugherty, J. B. Franzini, *Fluid mechanics with engineering applications*. McGraw-Hill Book Co., New York 1977. — Л. Г. Лоизинский, *Механика жидкости и газа*. Наука, Москва 1978.

M. Fancev

MEHANIKA KONTINUUMA, dio mehanike koji proučava makroskopsko gibanje čvrstih, tekućih i plinovitih tijela. Mehanika kontinuuma ne uzima diskretnu, atomsku strukturu tvari, nego, nasuprot tome, uvodi pojam neprekidne sredine ili materijalnog kontinuuma. Prema tom pristupu pretpostavlja se da tvar neprekidno i potpuno ispunjava prostor koji zauzima tijelo. Pojam kontinuuma dopušta da se definiraju

naprezanje, deformacija i ostale veličine u geometrijskoj točki bez volumena pomoću limesa (graničnog prijelaza) na sličan način kako se uvodi pojam derivacije u infinitezimalnom računu. To omogućuje primjenu tog računa u mehanici kontinuuma. Makroskopski pristup proučavanju gibanja deformabilnih tijela zapravo je statistički pristup koji analizira prosječne vrijednosti fizikalnih veličina za više čestica, umjesto da analizira gibanje svake pojedine čestice.

Iako ne uzima atomsku strukturu tijela, mehanika kontinuuma omogućuje predviđanje ponašanja realnih tijela. Ta se predviđanja vrlo dobro slažu s mjerenjem, iako ponekad takav pristup ne daje dobre rezultate. Takvi su npr.: pojava pukotina pri cikličkom naprezanju (zamor materijala), problemi aerodinamike pri vrlo velikim visinama gdje je zrak vrlo rijedak, gibanje tekućine pri vrlo velikom gradijentu brzina, koncentracija naprezanja oko oštih uglova itd.

Mehanika kontinuuma radi s fizikalnim veličinama koje ne ovise o izboru koordinatnog sustava, ali koje se najlakše opisuju pomoću komponenata u određenom koordinatnom sustavu. Iako fizikalna veličina ne ovisi o izboru sustava, njene komponente ovise. Takve veličine su tenzori. Ako se znaju komponente tenzora za jedan koordinatni sustav, mogu se pomoću izraza za transformaciju odrediti njegove komponente bilo za koji drugi sustav. Zakoni mehanike kontinuuma opisuju se tenzorskim jednadžbama koje vrijede u svim koordinatnim sustavima. Ta je invarijantnost tenzorskih izraza glavna prednost primjene tenzorskog računa u mehanici kontinuuma.

Historijski, mehanika kontinuuma počela se razvijati kao nekoliko odvojenih grana mehanike: hidromehanika s aeromehanikom i mehanika elastičnih tijela. Danas mehanika kontinuuma, u užem smislu, obuhvaća sljedeće grane: mehaniku fluida, teoriju elastičnosti, teoriju plastičnosti, teoriju viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Teorija viskoelastičnosti i viskoplastičnosti obuhvaća prve tri grane kao posebne slučajeve. U klasičnoj mehanici kontinuuma pretpostavlja se da su materijali izotropni, homogeni i nepolarni. Materijal je izotropan ako su mu svojstva u svim smjerovima jednaka, inače je anizotropan. Ako su svojstva tijela u svim točkama jednaka, materijal je homogen, inače je nehomogen. U mikropolarnim materijalima uz obična naprezanja pojavljuju se i sprigovi naprezanja, što uvjetuje da tenzor naprezanja postaje nesimetričan.

U širem smislu, mehanika kontinuuma obuhvaća i termodinamiku i magnetohidrodinamiku, a osim materijalnih tijela proučava različita polja, kao npr. elektromagnetska polja, polja zračenja, gravitacijska polja i slično.

Neke zakonitosti mehanike kontinuuma bile su poznate još u starom vijeku, npr. Arhimedov zakon. G. Galilei je 1638. proučavao problem savijanja štapa, a R. Hooke 1660. formulirao je po njemu nazvan zakon. E. Mariotte je Hookeov zakon primijenio na Galilejev problem savijanja štapa. C. L. Navier je 1821. izveo opće jednadžbe gibanja elastičnog tijela, koje je G. G. Stokes proširio i na tekućine. Brži razvoj mehanike kontinuuma započeo je nakon što je A. L. Cauchy 1822. definirao pojam naprezanja i deformacije. Za razvoj pojedinih grana mehanike kontinuuma zaslužni su I. Newton, J. L. Lagrange, L. Euler, J. i D. Bernoulli, L. da Vinci, Th. Young, Ch. Huyghens, B. Pascal, M. V. Lomonosov, J. L. Poiseuille, O. Reynolds, L. Prandtl, N. J. Žukovski, B. de St. Venant i mnogi drugi.

Brača Eugene i Francois Cosserat uveli su 1907. pojam mikropolarnog kontinuuma, dok je Sudria 1935. dalje razvio teoriju mikropolarnog kontinuuma uz upotrebu vektorskog računa.

U posljednje vrijeme istraživanja su usmjerena na formuliranje što sveobuhvatnijih konstitutivnih jednadžbi, u prvom redu anizotropnih, viskoelastičnih i mikropolarnih materijala. Na tom području rade mnogi istraživači: C. Truesdell, W. Noll, R. Toupin, A. C. Eringen, W. Prager, P. G. Hodge, H. Parkus, A. A. Iljušin, L. I. Sedov, W. Nowacki, R. Stojanović i drugi.

ELEMENTI TENZORSKOG RAČUNA

Definicija tenzora. U mehanici i drugim granama fizike postoje veličine kojima je za opisivanje potreban samo jedan podatak, npr.: masa, temperatura, volumen itd. Te se veličine zovu skalari. Nasuprot tome, da bi se opisala brzina, sila, jakost magnetskog polja i slične usmjerene veličine, potrebna su tri podatka. To mogu biti tri komponente ili, npr., apsolutna veličina i dva kuta koja određuju smjer. Te veličine su vektori. Ako je za opisivanje neke veličine potrebno devet podataka, veličina može biti tenzor drugog reda. Takve veličine su npr. tenzor naprezanja, tenzor deformacije, tenzor inercije itd. Očito su, ako se promatra problem u ravnini, za definiranje vektora potrebna samo dva podatka, dok su za definiranje tenzora drugog reda potrebna četiri podatka. U jednodimenzionalnom prostoru gubi se razlika između skalara, vektora i tenzora, jer je za svaki od njih dovoljan samo po jedan podatak. Pojam tenzora se poopćuje, pa se tako skalari još nazivaju i tenzorima