

Hamiltonov princip sada glasi

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_E - E_K) dt = 0, \quad (150)$$

odnosno

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 - \frac{\rho}{2} \dot{w}^2 - q(x,t)w(x,t) \right] dx + Q_0 w(0,t) + M_0 w'(0,t) - Q_l w(l,t) - M_l w'(l,t) \right] dt = 0. \quad (151)$$

Kad se provede variranje podintegralne funkcije, dobit će se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l [EI w'' \delta(w'') - \rho w' \delta \dot{w} - q(x,t) \delta w] dx + Q_0 \delta w(0,t) + M_0 \delta w'(0,t) - Q_l \delta w(l,t) - M_l \delta w'(l,t) \right\} dt = 0. \quad (152)$$

Kako je $\delta(w'') = (\delta w)''$ i $\delta \dot{w} = \frac{\partial(\delta w)}{\partial t}$, nakon parcijalnog integriranja dobit će se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l EI w'' \delta(w'') dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [EI w'' \delta w]_0^l - [(EI w'')' \delta w]_0^l + \int_0^l (EI w'')'' \delta w dx \right\} dt. \quad (153)$$

Isto tako je

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l \rho \dot{w} \delta(w) dx \right] dt = \int_0^l \left\{ [\rho \dot{w} \delta w]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \dot{w} \delta w dt \right\} dx. \quad (154)$$

Prema definiciji je $\delta w = 0$ za trenutke t_1 i t_2 , pa prvi član desne strane izraza (153) iščezava, tako da nakon uvrštenja (153) i (154) u (152) slijedi

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l [(EI w'')'' + \rho \ddot{w} - q(x,t)] \delta w dx + [Q_0 + (EI w'')']_{x=0} \delta w(0,t) + [-Q_l - (EI w'')'] \delta w(l,t) + [M_0 - EI w''] \delta w'(0,t) + [-M_l - EI w'']_{x=l} \delta w'(l,t) \right\} dt = 0. \quad (155)$$

Kako se δw može odabrati proizvoljno, da bi izraz (155) za svako δw bio jednak nuli, mora biti

$$(EI w'')'' + \rho \ddot{w} = q(x,t) \quad (156)$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= (EI w'')'_{x=0} \quad \text{ili} \quad \delta w(0,t) = 0 \\ Q_l &= (EI w'')'_{x=l} \quad \text{ili} \quad \delta w(l,t) = 0 \\ M_0 &= (EI w'')_{x=0} \quad \text{ili} \quad \delta w'(0,t) = 0 \\ M_l &= (EI w'')_{x=l} \quad \text{ili} \quad \delta w'(l,t) = 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Izraz (156) predstavlja diferencijalnu jednadžbu fleksijskih vibracija štapa. Izrazi (157) predstavljaju rubne uvjete. Očito je da na svakom kraju štapa mora biti zadana bilo poprečna sila bilo pomak w , ali ne oboje istodobno. Isto tako treba biti zadan moment savijanja M ili kutni pomak w' , ali ne oba istodobno.

Princip najmanjeg Lagrangeovog djelovanja. Lagrangeovo djelovanje A definirano je izrazom

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2E_K dt. \quad (158)$$

U principu najmanjeg Lagrangeova djelovanja uspoređuje se gibanje po stvarnoj i zaobilaznoj putanji koje se obavlja pri konstantnoj ukupnoj energiji $E_K + U = \text{const}$. Kako je energija konstantna, moraju i poopćene brzine biti konstantne, a jer su putovi različiti, mora i interval vremena biti različit. Prema tome, na krajevima putanje izokrone varijacije poopćenih koordinata nisu jednake nuli. Umjesto toga uzima se da su pune varijacije poopćenih koordinata na krajevima obiju putanja jednake nuli, tj.

$$(\Delta q)_t = 0 \quad \text{i} \quad (\Delta q)_t = 0. \quad (159)$$

Pod svim tim uvjetima taj princip glasi: Puna varijacija Lagrangeova djelovanja jednaka je nuli, tj.

$$\delta A = 0. \quad (160)$$

Osim obrađenih principa mehanike formulirani su i drugi principi, a mogu se formulirati i novi ili već formulirani poopćiti na nove klase sustava.

LIT.: R. Dugas, Histoire de la mécanique. Dunod, Paris 1950. — H. Goldstein, Classical mechanics. Addison Wesley, Reading 1951. — C. L. Siegel, Vorlesungen über Himmelsmechanik. Springer Verlag, Berlin 1956. — Ф. Гаммуахер, Лекции по аналитической механике. Наука, Москва 1960. — C. W. Kilmister, Hamiltonian dynamics. John Wiley, New York 1964. — T. Andelić, R. Stojanović, Racionalna mehanika. Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1965. — Z. Janković, Teorijska mehanika. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1966. — C. Lanczos, Variational principles of mechanics. University of Toronto Press, Toronto 1966. — D. A. Wells, Theory and problems of Lagrangian dynamics. McGraw-Hill, New York 1967. — H. B. Гунтениш, Введение в аналитическую механику. Наука, Москва 1971. — D. Bazjanac, Tehnička mehanika III, Dinamika. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1974. — В. В. Доброураов, Основы аналитической механики. Высшая школа, Москва 1976.

I. Alfrević

MEHANIKA FLUIDA, znanost o mehaničkom ponašanju fluida. Prema stanju fluida razlikuju se: *statika fluida*, koja se bavi zakonima ravnoteže i tlakova u fluidima u mirovanju, *kinematika fluida*, koja se bavi zakonima gibanja fluida, i *dinamika fluida*, koja se bavi silama koje djeluju na fluide, gibanjima koja nastaju djelovanjem tih sila i interakcijama između čvrstih tijela i fluida u gibanju. Prema vrsti fluida razlikuju se dvije osnovne grane mehanike fluida: *aerodinamika*, znanost o ravnoteži i gibanjima stlačivih fluida (zraka, plinova), te *hidrodinamika*, znanost o ravnoteži i gibanjima nestlačivih fluida (vode, kapljevine).

Arheološki nalazi, rijetki izvorni crteži i stare legende dokazuju da je već u prethistorijsko doba čovjek iskustvom pronalazio praktična rješenja brojnih problema mehanike fluida. Izumio je splav, čamac i brod, te veslo i jedro za pogon tih plovila, naučio gradnjom kanala i nasipa kontrolirati vodene tokove, navodnjavati i odvodnjavati zemlju, te sprečavati poplave, izumio je strelicu s repnim stabilizatorom, kovački mijeh, primitivno vodeničko kolo, primitivnu vjetrenjaču itd.

Prva zapisana tumačenja nekih pojava mehanike fluida potječu od grčkih filozofa starog vijeka. U jednoj se od svojih rasprava Aristotel (–384. do –322) bavi gibanjem tijela kroz vodu i zrak i zaključuje da je otpor koji među pruža gibanju tijela proporcionalan gustoći medija. Arhimed iz Sirakuze (–287. do –212) smatra se osnivačem hidrostatičke. On je postavio tri osnovna poučka o uzgonu i istisnini tijela koje pluta na površini vode ili je uronjeno u vodu, te teoriju stabilnosti sfernog segmenta koji pluta. Ktesibije iz Aleksandrije (krajem –III st.) izumio je vodeni sat, hidrauličke orgulje, zračnu pušku i vatrogasnu dvostapnu crpku. Heron iz Aleksandrije (između –250. i –150) ostavio je zapise o pneumatici, razradio teoriju sifona, prvi opisao mlazni pogon pomoću vodene pare i prikazao postupak kojim se može proračunati količina vode koja protječe kroz cijev. Filon iz Bizanta (–II st.) bavio se pneumaticom i primjenom sifona za održavanje konstantne razine tekućine u tlačnim komorama.

Znanje o mehanici fluida Rimljani su preuzeli od Grka, ali nisu doprinijeli daljem razvoju te znanosti. Rimljani su doduše izgradili velike vodovodne sustave i kanalizaciju u gradovima, te poboljšali oblik brodskog trupa, ali to su sve bile samo primjene grčkih spoznaja i teorija. Jedini važniji pisani radovi s područja mehanike fluida iz rimskog vremena potječu od Marka Vitruvija Poliona (–I st.), koji je kompilirao tadašnja grčka znanja o hidraulici, i Seksta Julija Frontina (40–103), koji je opisao metode raspodjele vode.

Nakon propasti Rimskog Carstva u kršćanskoj Evropi znanost je skoro tisuću godina stagnirala, ili čak i nazadovala. Grčke su spoznaje o mehanici fluida zaboravljene, a velike su rimske hidrogradnje zapuštene ili uništene. U arapskom je svijetu nastavljen razvoj hidrauličkih strojeva i naprava; usavršeno je vodeničko kolo i vjetrenjača, izumljeni su neki novi hidraulički automati, poboljšani su vodovodni uređaji itd. Neke od tih pronalazaka Mauri su donijeli u Španjolsku, a neke su, kao npr. usavršeno vodeničko kolo, križari prenijeli u Evropu.

U XV st. renesansa je oslobodila umjetnost i znanost od skolastičkih stega, pa se i mehanika fluida ponovno počinje razvijati. Na osnovi promatranja prirode i fizikalnih pokusa Leonardo da Vinci (1452–1519) opisuje u svojim radovima mnoge pojave hidrostatičke, hidrodinamičke i mehanike leta. Prvi je postavio princip zakona kontinuiteta, a približno je točno rastumačio relativno gibanje, prirodu valova na površini vode, putanju slobodnog mlaza kapljevine, raspodjelu brzina u vrtložnom strujanju, protjecanje vode u otvorenim kanalima, stvaranje virova u području odjeljivanja strujnica itd. Otkrio

je strujni oblik tijela i izradio nacрте različitih hidrauličkih strojeva, među njima i centrifugalne pumpe, a kao veliki zagovornik eksperimentalnih metoda istraživanja predložio je postupke i mjerne instrumente za istraživanja u mehanici fluida.

Od renesanse do polovice XVII st. gotovo svi radovi o mehanici fluida zasnivali su se na pokusima i neposrednom promatranju pojava. Galileo Galilei (1564—1642) bavio se hidrostatičkom, te je naslutio da i kapljevine imaju vlačnu čvrstoću, a proučavajući slobodni pad tijela zaključio je da otpor zraka gibanju tijela raste s brzinom tijela i gustoćom medija. Evangelista Torricelli (1608—1647), pronalazač barometra, postavio je zakon istjecanja vodenog mlaza iz posude, a Domenico Guglielmini (1655—1710), koji se smatra osnivačem talijanske hidraulike, napisao je dvije knjige o strujanju vode u rijekama i otvorenim kanalima, uključujući i prijenos sedimenta. U Nizozemskoj je matematičar i fizičar Simon Stevin (1548—1620) prvi odredio tlak kojim kapljevina djeluje na čvrstu ravnu podlogu i protumačio tzv. *hidrostatski paradoks* da tlak kapljevine na dno posude ne ovisi o obliku posude nego jedino o visini kapljevine u posudi. Na temelju eksperimenata u Francuskoj je Edmé Mariotte (1620—1684) objavio radove o elastičnosti zraka i gibanju fluida, obrađujući na potpuno nov način svojstva fluida i sile kojima fluid u gibanju djeluje na čvrste stijenke cijevi.

Mehanika fluida ipak s. nije mogla dalje razvijati samo na osnovi eksperimenata i zapažanja, definirajući osnovne pojmove opisno i bez jasne međusobne veze. Za kvantitativni i kvalitativni opis pojava i njihovih međuosobnosti bile su potrebne nove matematičke spoznaje i bolje poznavanje osnovnih zakona fizike; taj je napredak ostvaren tokom XVII st. René Descartes (1596—1650) postavio je osnove analitičke geometrije, J. Wallis (1616—1703) i G. W. Leibniz (1646—1716) razvili su infinitezimalni račun, a Blaise Pascal (1623—1662), osim znatnog doprinosa razvoju matematike, dokazao je da u mirnom fluidu tlak djeluje jednako u svim pravcima (*Pascalov princip*). Neovisno o Leibnizu, Isaac Newton (1642—1727) došao je do osnovnih pravila infinitezimalnog i integralnog računa, i primijenio ih za matematički opis hidrodinamičkih pojava. Newton je uveo pojam fluida kao kontinuuma, pojam viskoznosti fluida, analizirao gibanje fluida pomoću principa količine gibanja, ispitao otpor fluida djelovanjem inercijskih, viskoznih i gravitacijskih sila, otkrio kontrakciju slobodnog mlaza kapljevine i dokazao da se brzina vala na površini vode mijenja s drugim korijenom duljine vala. Švicarac Johann Bernoulli (1667—1748) definirao je pojam unutrašnjeg tlaka u mehanici fluida.

Potkraj XVII st. matematika se već toliko razvila da je mogla poslužiti za opis osnovnih zakona gibanja fluida, što je bio preduvjet da se u XVIII st. postavte temelji moderne hidrodinamike. Kovanicu hidrodinamika stvorio je Švicarac Daniel Bernoulli (1700—1782) u svom djelu *Hydrodynamica*, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii (1738), ali se osnivačem moderne hidrodinamike smatra Leonhard Euler (1707—1783). On je napisao više originalnih radova o mehanici fluida i primjeni matematičke analize, te je prvi protumačio djelovanje tlaka u fluidu koji se giba, formulirao osnovne jednadžbe gibanja fluida, uveo pojam kavitacije i razjasnio princip rada centrifugalnih strojeva i reaktivne turbine. Vrlo važne doprinose matematičkom opisu gibanja fluida dali su i Eulerovi suvremenici Jean Le Rond d'Alembert (1717—1783), Joseph Louis Lagrange (1736—1813) i Franz Joseph von Gerstner (1756—1832). Tada postavljene teorije i razvijeni postupci matematičke analize gibanja fluida i danas su osnove hidrodinamike. Međutim, u to su vrijeme inženjeri znali vrlo malo matematike da bi razumjeli te teorije, pa ih nisu ni prihvatili, nego su nastavili rješavati praktične probleme, uglavnom pomoću pokusa i opažanja. Tako su se hidraulika i hidrodinamika kroz gotovo dva sljedeća stoljeća razvijale neovisno jedna o drugoj; hidraulika je postajala sve korisnije inženjersko umijeće, a hidrodinamika sve elegantnija matematička disciplina.

Tokom XVIII i XIX st. učinjen je golem napredak u eksperimentalnoj hidromehanici. H. Pitot (1695—1771) izumio je instrument za mjerenje brzine strujanja fluida (*Pitotova cijev*); P. L. G. Du Buat (1734—1809) uveo je pojam virtualne mase tijela koje se giba u kapljevini, proučavao je otpor tijela u vodi, izumio je piezometar za mjerenje tlaka u kapljevini; R. Woltman (1757—1837) izumio je hidrometrijsko kolo za točno mjerenje brzine toka vode; G. B. Venturi (1746—1822) bavio se otporom strujanja vode u cijevima, izumio je instrument za mjerenje protoka (*Venturijeva cijev*). U to doba razvijena je tehnika ispitivanja modela u smanjenom mjerilu i pod kontroliranim uvjetima. W. Froude (1810—1879) izgradio je (1872) prvi moderni bazen za ispitivanja brodskih modela, L. J. Fargue (1827—1910) proveo je prva ispitivanja (1875) na modelu rijeke i time postavio temelj modernog hidrauličkog laboratorija, a H. F. Phillips (1845—1912) konstruirao je prvi aerotunel (1884). Usavršena mjerna tehnika i brojni točniji mjerni podaci omogućili su ispravke i poboljšanja postojećih formula za praktično rješavanje inženjerskih problema. J. A. Eytelwein (1764—1848), G. Bidone (1781—1839), J. B. Belanger (1789—1874), G. G. de Coriolis (1792—1843), A. J. C. B. de Saint-Venant (1797—1886), A. J. E. J. Dupuit (1804—1866), J. A. C. Bresse (1822—1883), E. J. Boudin (1820—1893), P. F. D. du Boys (1847—1924), H. E. Bazin (1829—1917) i R. Manning (1816—1897) dali su na osnovi mjerenja i pokusa ispravljene i nove empirijske formule za strujanje vode u otvorenim kanalima i rijekama. Nove matematičke izraze za strujanje kapljevine u cijevima dali su R. de Prony (1755—1839), G. H. L. Hagen (1797—1884), J. L. Poiseuille (1799—1869) i H. P. G. Darcy (1803—1858). U radovima o otporu tijela koje se giba u kapljevini C. A. de Coulomb (1736—1806), M. Beaufoy (1764—1814), J. C. Russell (1808—1882) i W. Froude objavili su podatke o ovisnosti otpora o obliku tijela, te pokazali da otpor zbog stvaranja valova ovisi o sili gravitacije, a otpor trenja o viskoznosti kapljevine. U drugoj polovici XIX st. počela su i aerodinamička istraživanja u vezi s prvim letjelicama — jedrilicama. O. Lilienthal (1848—1896) bavio se aerodinamikom i gradnjom jedrilica, a F. W. Lanchester (1868—1946) postavio je na osnovi pokusa kvantitativne izraze za uzgon na aeroprofilima.

U XIX st. teorijska hidrodinamika također je mnogo napredovala. L. M. H. Navier (1785—1836) modificirao je Eulerove jednadžbe gibanja fluida, uzimajući u obzir i djelovanje molekularnih sila. Taj su rad nastavili A. L. de Cauchy (1789—1857) i S. D. Poisson (1781—1840), da bi konačno G. G. Stokes (1819—1903) uveo u Navierove jednadžbe dinamičku viskoznost i tako

dobio današnje Navier-Stokesove jednadžbe za gibanje viskozno fluida. Dokazano je da otpor trenja viskozno fluida ovisi o režimu strujanja. O. Reynolds (1842—1912) uveo je parametre za viskozno strujanje i jednadžbu turbulentnog strujanja. H. L. F. von Helmholtz (1821—1894), W. Thomson (Kelvin of Largs 1824—1907), J. W. Strutt (Lord Rayleigh, 1842—1919), J. Boussinesq (1842—1929) i drugi objavili su radove s novim analitičkim izrazima za različite režime i tipove strujanja fluida, za kavitaciju, za valove na ograničenoj i neograničenoj dubini i širini vode, za dinamičku sličnost strujanja itd.

Na prijelazu u XX st. postalo je očito da treba ukloniti jaz između teorijske hidrodinamike i inženjerske hidraulike ako se želi dalji napredak znanosti o fluidima. To je značilo da se teorija mora povezati s fizikalnim činjenicama koje su utvrđene eksperimentima i neposrednim mjerenjima. Tako je počelo ujedinjavanje analitičkih i eksperimentalnih istraživanja, pa je nastala znanstvena disciplina nazvana mehanikom fluida. Osnivačem današnje mehanike fluida smatra se L. Prandtl (1875—1953), poznat po teoriji graničnog sloja. Od početka XX st. pa do danas mehanika fluida postigla je golem napredak. Nove su spoznaje o fluidima omogućile brzi razvoj znanstvenih i tehničkih disciplina u kojima je fluid jedan od utjecajnih faktora.

FIZIKALNE OSNOVE

Definicije, pretpostavke, klasifikacija i osnovne fizikalne veličine. Fluid ili tekućina je tvar koja se pod djelovanjem smičnog naprezanja, koliko god malenog, neprekidno deformira. Iz te definicije slijedi zaključak, koji i sam može poslužiti kao definicija fluida, da u fluidu u stanju mirovanja ne mogu postojati smična naprezanja. Smično naprezanje je tangencijalna komponenta površinske sile podijeljena s mjernim brojem površine. Neprekidna deformacija, o kojoj se govori u definiciji fluida, pojava je koja se zove *strujanje fluida*. Općenito, što je veće smično naprezanje, to je veća brzina deformacije. Za razliku od fluida, čvrsto (elastično) tijelo pod djelovanjem smičnog naprezanja, koje ne prelazi određenu granicu, deformira se za konačnu vrijednost i prestankom djelovanja naprezanja vraća se u prvobitni oblik.

Postoje prividno čvrsta tijela koja se neprekidno deformiraju poput fluida kad naprezanje premaši određenu vrijednost. Za takva tijela se kaže da su u *plastičnom stanju*. Plastično strujanje ne proučava mehanika fluida.

Djelovanjem tlačnog naprezanja fluid se u stanju mirovanja načelno ponaša kao i čvrsto tijelo, i svakoj promjeni tlaka odgovara promjena volumena fluida. Razlika je samo u kvantitativnom odnosu tih promjena. Prema veličini tih promjena fluidi se mogu svrstati u dvije kategorije: kapljevit fluidi ili kapljevine i plinoviti fluidi ili plinovi.

Kapljevine neznatno mijenjaju volumen promjenom tlaka i smještene u posudu, koju djelomično ispunjavaju, formiraju slobodnu površinu na granici s okolišnom atmosferom. Izbačene u atmosferu u obliku tankog mlaza kapljevine se raspršuju formirajući sitne kapljice. U većini problema mehanike fluida kapljevine se mogu smatrati nestlačivima.

Plinovi su vrlo stlačivi, i obratno, kad se smanjuje tlak šire se neograničeno, pa zatvoreni u posudu ispunit će čitav njen volumen.

Takvo ponašanje tih dviju vrsta fluida uzrokovano je relativno manjim udaljenostima između molekula kapljevina i relativno većim udaljenostima među molekulama plinova te pripadnim međumolekularnim silama koje djeluju na tim udaljenostima.

U ovom su članku svi izvodi provedeni a izvedene jednadžbe napisane u homogenom obliku s obzirom na konzistentan sustav jedinica (v. *Dimenzijska analiza*, TE 3, str. 340, v. *Metrologija, zakonska*). Dakle, pisane su kao *veličinske jednadžbe*. Kad se od toga principa iz praktičnih razloga odstupa i kad se jednadžba napiše kao *brojčana jednadžba*, veličine su stavljene u vitičastu zagradu { }, da se upozori na tu činjenicu, i odmah nakon takve brojčane jednadžbe dane su jedinice za koje je takav brojčani oblik jednadžbe jedino valjan. Tako je, npr., formula (99) za viskoznost plina μ pisana u homogenom obliku s obzirom na konzistentan sustav jedinica, i to je veličinska jednadžba. Uvrštenjem numeričkih vrijednosti za neke konstante ta je jednadžba prešla u brojčanu jednadžbu (100) valjanu samo za određeni sustav jedinica označen u tekstu.

Stlačivost ili kompresibilnost fluida kvantitativno se izražava u diferencijalnom obliku

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{K} \quad (1)$$

gdje je V volumen s dimenzijom $[V] = L^3$, dakle $[V]_{SI} = m^3$, p tlak s dimenzijom $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, dakle $[p]_{SI} = N/m^2 =$

= Pa, a K volumenski (prostorni) modul elastičnosti s dimenzijom $[K] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$, dakle $[K]_{\text{SI}} = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$. Negativni predznak u izrazu (1) pokazuje da pozitivnom prirastu tlaka odgovara smanjenje volumena.

Za vodu se modul elastičnosti K mijenja od $2 \cdot 10^9$ do $3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ u širokom području temperatura i tlakova. Za različita ulja K je $1,3 \cdot 10^9 \dots 1,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Za živu $K = 2,76 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, tako da je živa približno deset puta manje stlačiva od vode i približno deset puta stlačivija od čelika.

Recipročna je vrijednost volumenskog modula elastičnosti koeficijent volumenske stlačivosti $\beta_p = 1/K$ s dimenzijom $[\beta_p] = \text{M}^{-1}\text{LT}^2$, dakle $[\beta_p]_{\text{SI}} = \text{m}^2/\text{N} = 1/\text{Pa}$.

Modul K za plinove zavisi od termodinamičkog procesa stlačivanja. Ako se stlačivanje (kompresija) provodi pri konstantnoj temperaturi i uz primjereno odvođenje topline, tada je $K = p$, što proizlazi diferenciranjem jednadžbe izoterme $pV = \text{const}$. Ako je stlačivanje izentropsko, tada je $K = \kappa p$, što proizlazi iz jednadžbe izentropije $pV^\kappa = \text{const}$, gdje je κ omjer specifičnih toplinskih kapaciteta i ima dimenziju $[\kappa] = 1$.

Ta razmatranja o stlačivosti fluida odnose se na fluid zatvoren u posudu i izvana komprimiran. Kad fluid struji, ili se tijelo giba u fluidu, utjecaj stlačivosti fluida zavisi od omjera brzine strujanja (ili brzine gibanja tijela) i brzine zvuka u fluidu. Taj se omjer zove *Machov broj*, $Ma = v/c$, gdje je v brzina strujanja fluida ili brzina gibanja tijela u fluidu, a c brzina zvuka. Za $Ma < 0,2 \dots 0,3$ utjecaj stlačivosti je zanemariv, pa se govori o *nestlačivom strujanju*, a za $Ma > 0,3$ pojavljuje se *stlačivo strujanje*. U mnogim je praktičnim primjenama dostignuta i premašena brzina zvuka u plinovima, pa nastaju i mnogi problemi stlačivog strujanja. I u kapljevina postojе pojave, kao što su širenje podvodne eksplozije, vodeni udar i sl., koje spadaju među probleme stlačivog strujanja, jer se tada utjecaj stlačivosti kapljevine, premda i male, ne može zanemariti. Kad, međutim, plinovi struje brzinom pet puta manjom od brzine zvuka, može se praktički zanemariti njihova velika stlačivost.

U mehanici fluida proučavaju se problemi vanjskih manifestacija fluida, tj. pojave se promatraju fenomenološki, ne ulazeći u fizikalnu strukturu materije. S takva stanovišta fluid se promatra kao *neprekidna sredina* ili *kontinuum*, koji zadržava neprekidnost fizikalnih svojstava prelazeći i u infinitesimalne volumene, odnosno u graničnom prijelazu i u nulti volumen, tj. u točku. Temeljena na toj pretpostavci, definicija *gustoće fluida* daje se u obliku

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (2)$$

gdje je ρ gustoća s dimenzijom $[\rho] = \text{ML}^{-3}$, dakle $[\rho]_{\text{SI}} = \text{kg/m}^3$, m masa s dimenzijom $[m] = \text{M}$, dakle $[m]_{\text{SI}} = \text{kg}$, a V volumen. Nestlačiva tekućina definirana je jednadžbom $\rho = \text{const}$, pa definicijski izraz za gustoću prelazi u $\rho = m/V$. Takve su praktički kapljevine, i zato se ne mogu toliko razrijediti da se ne bi mogla primijeniti hipoteza kontinuum.

Plinovi se u problemima mehanike fluida općenito pojavljuju kao kontinuum s prostorno i, u općem slučaju, s vremenski promjenljivom gustoćom, prema definiciji (2), u pojedinim točkama i vremenskim trenucima. U takvim je problemima uz plin vezano prostorno i vremenski promjenljivo skalarno polje gustoće

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (3)$$

Elementarna čestica fluida, u smislu fenomenoloških problema mehanike, definirana je u tom skalarnom polju elementom mase

$$dm = \rho dV. \quad (4)$$

Tako definirana čestica fluida ne smije se zamijeniti s pojmom molekule tvari. Elementarna čestica fluida sadržava, naime, toliko mnogo molekula da statistički proračun daje pouzdanu i stabilnu srednju vrijednost pojedinim fizikalnih svojstava i dinamičkih veličina.

Za razliku od kapljevine, plinovi mogu doći u tako razrijeđeno stanje da hipoteza kontinuum nije više održiva. Kad se postavljaju granice održivosti te hipoteze, bitno je poznavati kvantitativne odnose u mikrostrukтури tvari.

Svaka je tvar diskretna, tj. sastavljena od odijeljenih čestica, molekula i atoma. Polumjer jezgre atoma ima red veličine 10^{-13} cm , a polumjer molekule vodika $1,36 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Kubični centimetar zraka u normalnim uvjetima (na temperaturi 0°C i pri tlaku od $1,01325 \text{ bar}$) sadrži $N = 2,687 \cdot 10^{19}$ molekula. U kočki sa stranicama 10^{-3} cm , što je u granicama točnosti mjerenja u tehničkoj praksi, još uvijek se nalazi $2,7 \cdot 10^{10}$ molekula, što je dovoljno za proračun pouzdane i stabilne srednje vrijednosti fizikalnih i dinamičkih veličina tvari. Srednja je udaljenost između molekula $d = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$, srednja slobodna putanja molekula između dva sudara u toplinskom gibanju $l = 7 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ ($l \approx 2 \cdot 10^2 d$), a broj sudara jedne molekule u sekundi je 10^{10} . Brzina molekula kisika je 425 m/s , a vodika 1690 m/s . Na visini od 60 km iznad Zemlje broj molekula u atmosferi iznosi $N = 8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, a slobodna putanja $l = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$. Na visini od 200 km atmosfera je već toliko razrijeđena da molekule u prosjeku prelete udaljenost $\sim 300 \text{ m}$ između dva sudara. Očito da u takvim uvjetima ne vrijedi hipoteza kontinuum (neprekidne sredine) i da definicija gustoće graničnom vrijednošću izraza (2) gubi smisao. Granični prijelaz u izrazu (2) očito bi umjesto $\Delta V \rightarrow 0$ trebao glasniti $\Delta V \rightarrow \Delta V^*$, gdje je ΔV^* neki granični volumen koji sadrži dovoljno molekula za pouzdani proračun srednje vrijednosti. No i taj je prestanak valjanosti hipoteze kontinuum relativan. Na spomenutoj visini od 200 km iznad Zemlje raketa duljine 30 m bit će oplakivana s relativno malo molekula razrijeđenog zraka i za nju nije održiva hipoteza kontinuum. Ali ako se na toj visini zamisli raketa duljine 30000 m i više, ona bi u svom gibanju istodobno bila u dodiru s mnogo više molekula, pa bi se u istraživanju njenog gibanja kroz tako razrijeđenu atmosferu mogla primijeniti hipoteza kontinuum.

Kao kriterij primjenljivosti hipoteze kontinuum najprikladniji je omjer slobodne putanje molekula l i karakteristične duljine L u pojavi koja se istražuje

$$K = \frac{l}{L}, \quad (5)$$

a zove se *Knudsenov broj*. Za

$$K \leq 0,01 \quad (6)$$

plin se ponaša kao neprekidna sredina ili kontinuum.

Na temelju hipoteze kontinuum fluid je u smislu mehanike definiran kao neprekidni sustav beskonačnog broja materijalnih čestica. Sume uzete po broju materijalnih čestica, koje se javljaju u pojedinim zakonima mehanike sustava materijalnih čestica, u mehanici fluida zamjenjuju se integralima po neprekidnoj masi, odnosno po volumenu prostora koji taj kontinuum zauzima. Stoga se i u svim izvodima zakona mehanike fluida polazi od elementa mase definiranog izrazom (4).

Hipoteza kontinuum ima fundamentalno značenje zbog mogućnosti upotrebe matematičkog aparata neprekidnih skalarnih, vektorskih i tenzorskih funkcija i primjene diferencijalnog i integralnog računa pri istraživanju zakona mehanike fluida.

Specifični volumen je recipročna vrijednost gustoće

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

s dimenzijom $[v] = \text{M}^{-1}\text{L}^3$, dakle $[v]_{\text{SI}} = \text{m}^3/\text{kg}$. Ta se veličina upotrebljava u nauci o toplini, dok se u mehanici fluida više upotrebljava gustoća. Tako je u mehanici fluida jednadžbu stanja *savršenog plina* uobičajeno pisati u obliku

$$p = \rho R T, \quad (8)$$

gdje je p tlak, ρ gustoća, R plinska konstanta s dimenzijom $[R] = \text{L}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$, dakle $[R]_{\text{SI}} = \text{J/kgK}$, a T termodinamička temperatura s dimenzijom $[T] = \Theta$, dakle $[T]_{\text{SI}} = \text{K}$.

Specifična težina fluida definirana je izrazom

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{g \Delta m}{\Delta V} = \rho g, \quad (9)$$

gdje je γ specifična težina s dimenzijom $[\gamma] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$, dakle $[\gamma]_{\text{SI}} = \text{N/m}^3$, $G = gm$ težina s dimenzijom $[G] = \text{MLT}^{-2}$, dakle $[G]_{\text{SI}} = \text{N}$, a g ubrzanje sile teže s dimenzijom $[g] = \text{LT}^{-2}$, dakle $[g]_{\text{SI}} = \text{m/s}^2$. Budući da specifična težina zavisi od ubrzanja sile teže, u podacima o fluidima daju se obično njihove gustoće, a ako se navode i podaci o specifičnoj težini, tada se oni odnose na standardnu vrijednost ubrzanja sile teže $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$, koja približno vlada na razini mora na 45° geografske širine.

Relativna gustoća ili relativna specifična težina fluida definirana je kao omjer gustoće ρ , ili specifične težine γ fluida, i gu-

stoće ρ_0 , ili specifične težine γ_0 standardnog ili referentnog fluida

$$d = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} \quad (10)$$

s dimenzijom $[d] = 1$. Za kapljevine se kao standardni fluid upotrebljava odzračena destilirana voda pri temperaturi 4°C i tlaku 1,013 25 bar (1 atm), $\rho_0 = \rho_{\max} = 999,972 \text{ kg/m}^3$, a za plinove suhi zrak pri temperaturi 0°C i tlaku 1,013 25 bar: $\rho_0 = 1,292 \text{ kg/m}^3$, ili pri 20°C i istom tlaku $\rho_0 = 1,204 \text{ kg/m}^3$.

Sile u fluidu. Razlike u kvaliteti čvrste tvari i fluida obilježavaju različite uloga tih tvari u tehničkoj primjeni. Fluidi se ne mogu opteretiti iole većim silama, posebno smičnim i vlačnim, pa zato i ne služe kao materijal za gradnju strojeva, objekata i konstrukcija. Za fluid se često upotrebljava i riječ *medij*, koja znači sve što djeluje i služi posredno, tj. sredstvo, sredina, posredovanje i slično. I zaista, ta riječ ispravno odražava važnost fluida u tehničkoj praksi i definira uvjete pod kojim se fluid razmatra u problemima mehanike fluida. Možda jedino u kemijskoj tehnologiji mehanika fluida služi rješavanju i takvih problema u kojima fluidi ostaju sami sebi svrhom.

Brod, koji je i tako proizvod mnogih grana znanosti i tehnike, vrlo je dobar primjer višestruke pojave fluida kao medija i bogat je izvor problema mehanike fluida. Voda je medij u kojem se giba podvodni dio broda i uzrokuje parazitske sile otpora gibanju broda, problem koji teorijska mehanika fluida još nije riješila. Zrak uzrokuje otpor nadvodnog dijela broda. Voda je istodobno medij posredovanjem kojeg se ostvaruje propulzija broda propelerom što tjera vodu unazad, ostvarujući korisnu silu poriva, jednaku sili otpora koji ta ista voda pruža gibanju broda. Brod pliva zahvaljujući Arhimedovu hidrostatičkom uzgonu. Slobodna površina mora, uzburkana vjetrom, stvara posebne probleme valova i valnih sila na brod, koje uzrokuju nepoželjna i neugodna gibanja broda. U brodu su različiti fluidi medij za pogon strojeva koji okreću propeler, npr. para ili plinovi u turbinama, gorivo i plinovi izgaranja u motorima. Rad hidrauličkih i pneumatskih strojeva i uređaja te transport kapljevine i plinova kroz cjevovode, s različitim popratnim pojavama kao što su otpori protjecanju, kavitacija, vodeni udar i sl., daljni su primjeri mnogostruke prisutnosti različitih fluida na brodu i mnogih problema povezanih s njihovom praktičnom primjenom. Može se, dakle, zaključiti da je fluid medij koji svojom posredničkom ulogom stvara i korisne i parazitske sile na čvrsta tijela, a određivanje tih sila jedan je od osnovnih zadataka mehanike fluida.

Sile koje djeluju na čestice fluida mogu se svrstati u dvije kategorije: masene (ili volumenske) i površinske sile.

Masene ili volumenske sile raspoređene su po prostoru i djeluju na svaki element mase fluida. Te se sile javljaju bez fizičkog dodira kao rezultat položaja mase u određenom polju sile. Ako je $\Delta\vec{F}_m$ (s dimenzijom $[|\vec{F}|] = \text{MLT}^{-2}$, dakle, $[|\vec{F}|]_{\text{SI}} = \text{kgm/s}^2 = \text{N}$) masena sila koja djeluje na element mase Δm , tada je u točki prostora gustoća masene sile definirana izrazom

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}_m}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}_m}{\Delta V}, \quad (11)$$

s dimenzijom $[|\vec{f}|] = \text{LT}^{-2}$, dakle $[|\vec{f}|]_{\text{SI}} = \text{N/kg} = \text{m/s}^2$. Za diferencijal masene sile vrijedi izraz

$$d\vec{F}_m = \vec{f} dm = \vec{f} \rho dV. \quad (12)$$

Masena sila može se izraziti i na jedinicu volumena

$$\vec{\phi}_m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}_m}{\Delta V} \quad (13)$$

ili

$$\vec{\phi}_m = \rho \vec{f}, \quad (14)$$

kojemu je dimenzija $[|\phi_m|] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$, dakle $[|\phi_m|]_{\text{SI}} = \text{N/m}^3 = \text{kg/m}^2\text{s}^2$. U masene sile spadaju: sila teže i općenito gravitacijske sile koje slijede Newtonov zakon svemirskog privlačenja, elektromagnetske i inercijske sile.

Ako se uz površinu Zemlje veže desni pravokutni koordinatni sustav tako da je os Oz usmjerena vertikalno uvis, a ravnina Oxy je horizontalna ravnina, tada je gustoća sile teže dana izrazom

$$\vec{f}_{(g)} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{-g \Delta m \vec{k}}{\Delta m} = -g \vec{k}, \quad (15)$$

gdje je \vec{k} jedinični vektor u smjeru osi Oz . Diferencijal sile teže izražen je sa

$$d\vec{F}_{(g)} = -g dm \vec{k} = -\rho g dV \vec{k}. \quad (16)$$

Konzervativne masene sile jesu sile koje imaju potencijal U , a njihova je gustoća definirana gradijentom potencijala

$$\vec{f} = -\text{grad } U, \quad (17)$$

gdje je U potencijal masene sile s dimenzijom $[U] = \text{L}^2\text{T}^{-2}$, dakle $[U]_{\text{SI}} = \text{m}^2/\text{s}^2$, a grad je vektorski diferencijalni operator

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$, s dimenzijom $[|\text{grad}|] = 1/\text{L}$, dakle

$[|\text{grad}|]_{\text{SI}} = 1/\text{m}$. Neki autori definiraju potencijal masene sile tako da desna strana izraza (17) ima predznak plus, pa je i potencijal suprotnog predznaka od onoga definiranog sa (17).

Sila teže je konzervativna masena sila, potencijala $U_{(g)} = gz$, tako da je

$$\vec{f}_{(g)} = -\text{grad } gz = -g \vec{k}. \quad (18)$$

Inercijske sile uvode se pri istraživanju gibanja u neinercijskim koordinatnim sustavima, a sa stanovišta gibanja materijalnih čestica javljaju se kao obične realne vanjske masene sile. Tako u sustavu koji se giba jednoliko ubrzano linearnom akceleracijom \vec{a} postoji raspored masene sile konstantne gustoće

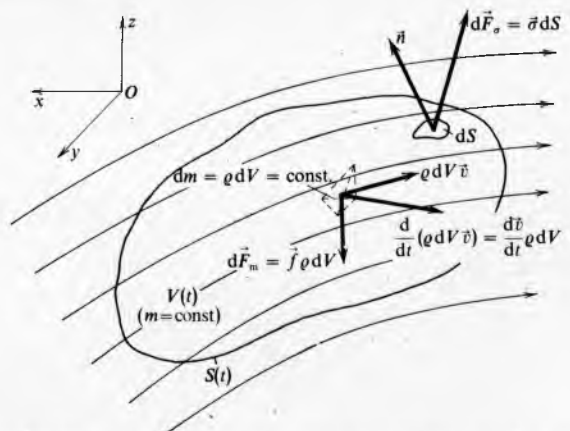
$$\vec{f}_{(a)} = -\vec{a} = -\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}), \quad (19)$$

gdje je: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radijvektor s dimenzijom $[|\vec{r}|] = \text{L}$, dakle $[|\vec{r}|]_{\text{SI}} = \text{m}$, s potencijalom $U_{(a)} = \vec{a} \cdot \vec{r}$. U sustavu što rotira konstantnom kutnom brzinom ω , kojoj je dimenzija $[\omega] = 1/\text{T}$, dakle $[\omega]_{\text{SI}} = \text{rad/s} (\equiv 1/\text{s})$, postoji raspored centrifugalne masene sile gustoće

$$\vec{f}_{(cf)} = \omega^2 r \vec{e}_r = -\text{grad} \left(-\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right), \quad (20)$$

gdje je r udaljenost od osi vrtnje, a \vec{e}_r jedinični vektor u smjeru porasta r , s potencijalom $U_{(cf)} = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2$. Kao što pokazuje izraz (20), intenzitet polja centrifugalne masene sile linearno raste s udaljenosti od osi vrtnje.

Površinske sile jesu sile dodira između čestica fluida ili između čestica fluida i krute stijene, npr. tijela, posude ili cijevi. I dok su masene sile redovito poznate i zadane, problemi mehanike fluida odnose se upravo na određivanje rasporeda površinskih sila.



Sl. 1. Uz dinamičku analizu strujanja individualnog volumena fluida

U dinamičkoj analizi strujanja fluida izdvaja se i razmatra gibanje proizvoljnog volumena fluida, koji se sastoji uvijek od istih čestica, na sl. 1 označen sa $V(t)$. Takav volumen je pomičan u prostoru, u toku vremena mijenja mu se oblik i, općenito, mjerni broj, a zato što se sastoji uvijek od istih čestica fluida zove se *individualni, supstancijalni ili materijalni volumen* definiran sa $\int_{V(t)} \rho dV = m = \text{const}$. Na fluid u individualnom volumenu V , ograničenom površinom S , izdvojenom za dinamičku analizu, primjenjuje se zatim jednadžba količine gibanja u obliku prilagođenom karakteru fluida kao kontinuuma i vrsti sila koje se javljaju u fluidu.

Za sustav od n materijalnih točaka jednadžba količine gibanja glasi

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}, \quad (21)$$

gdje je $m_i \vec{v}_i$ količina gibanja i -te materijalne točke s dimenzijom $[|m_i \vec{v}_i|] = \text{MLT}^{-1}$, dakle $[|m_i \vec{v}_i|]_{\text{SI}} = \text{kgm/s}$, a $\vec{F}_i^{(e)}$ rezultanta vanjskih sila na i -tu materijalnu točku.

Za individualni volumen fluida, kao sustav beskonačnog broja materijalnih točaka, lijeva strana jednadžbe (21) postaje integral po volumenu

$$\int_{V(t)} \frac{d}{dt} (\rho dV \vec{v}) = \int_{V(t)} \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{v} \rho dV, \quad (22)$$

gdje je na element mase dm u elementu individualnog volumena dV primijenjen zakon o održanju mase, valjan u klasičnoj, nerelativističkoj mehanici

$$\frac{d}{dt} (dm) = \frac{d}{dt} (\rho dV) = 0. \quad (22a)$$

Desna strana jednadžbe (21), prilagođena dinamičkoj analizi fluida u strujanju, sastoji se od zbroja vanjskih masenih i površinskih sila. Rezultanta vanjskih masenih sila, koje djeluju na svaku česticu fluida (sl. 1), izražena je integralom diferencijala (12)

$$\vec{F}_m = \int_{V(t)} \vec{f} \rho dV, \quad (23)$$

a rezultanta vanjskih površinskih sila pložnim integralom preko granične površine S

$$\vec{F}_\sigma = \int_{S(t)} \vec{\sigma} dS, \quad (24)$$

gdje je $\vec{\sigma}$ specifična površinska sila definirana u točki izrazom

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\sigma}{\Delta S}, \quad (25)$$

s dimenzijom $[|\vec{\sigma}|] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$, dakle $[|\vec{\sigma}|]_{\text{SI}} = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$. Na sl. 1 prikazan je diferencijal površinske sile

$$d\vec{F}_\sigma = \vec{\sigma} dS \quad (26)$$

kojom čestice fluida izvan razmatranog individualnog volumena djeluju svojim dodirom preko elemenata dS granične plohe S na fluid unutar individualnog volumena, kojega se dinamička analiza provodi. Granična ploha S može biti i kruta stijenka, pa diferencijali (26) predstavljaju djelovanje te krute stijenke na fluid.

Ako se obje strane jednadžbe (21) zamijene pripadnim izrazima (22), (23) i (24), dobiva se *jednadžba količine gibanja* individualnog volumena s obzirom na inercijski koordinatni sustav u obliku

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{v} \rho dV = \int_{V(t)} \vec{f} \rho dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma} dS. \quad (27)$$

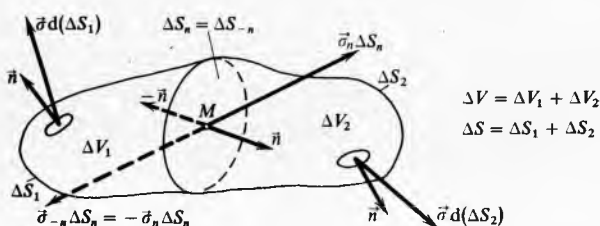
To je osnovna dinamička jednadžba mehanike fluida, koja je valjana samo za inercijski koordinatni sustav, ali inače nema

nikakvih drugih ograničenja valjanosti s obzirom na vrste fluida i vrste strujanja.

U mehanici fluida nije dovoljno poznavati strujanje čitavoga individualnog volumena fluida. Fluid je kao kontinuum neprekidni skup materijalnih točaka i problem strujanja fluida riješen je tek kad je određeno gibanje svih točaka tog skupa. Za rješavanje takva problema potrebno je postaviti jednadžbe gibanja individualnih čestica fluida. Pri tom je potrebno poznavati raspored i unutrašnje površinske sile u individualnom volumenu V , a ne samo vanjske sile koje djeluju preko granične površine S , i koje ulaze u jednadžbu količine gibanja (27).

Osnovna svojstva unutrašnjih površinskih sila u neprekidnom strujanju fluida. Neprekidna su takva strujanja u kojima su karakteristike strujanja i stanja fluida unutar volumena V neprekidne funkcije prostornih koordinata i vremena. (Jednadžba količine gibanja (27) ne podliježe ograničenju neprekidnosti strujanja).

Oko proizvoljne točke M unutar volumena V (sl. 2) elementarni individualni volumen ΔV omeđen je plohom ΔS . Proizvoljnim presjekom ΔS_n , koji prolazi kroz M , volumen ΔV razdijeljen je na dva dijela, ΔV_1 i ΔV_2 , omeđena plohama ΔS_1 i ΔS_2 . Očito je da se točkom M može položiti beskonačan broj presjeka ΔS_n , pa se indeksom n jednoznačno definira orijentacija elementa ΔS_n zadavanjem u točki M vektora normale \vec{n} , koji je okomit na ΔS_n . Prema dogovoru, s obzirom na promatrani volumen, vanjska normala je pozitivna. Tako je na sl. 2 \vec{n} pozitivna normala s obzirom na volumen ΔV_1 , a $(-\vec{n})$ pozitivna s obzirom na ΔV_2 . Preko dodirne površine ΔS_n čestice fluida u volumenu ΔV_2 djeluju na fluid u ΔV_1 površinskom silom $\vec{\sigma}_n \Delta S_n$, i obratno, fluid u ΔV_1 djeluje na fluid u ΔV_2 silom $\vec{\sigma}_{-n} \Delta S_{-n} = -\vec{\sigma}_n \Delta S_n$. Indeksi n i $(-n)$ uz specifične površinske sile $\vec{\sigma}$ također označuju orijentaciju površine ΔS na kojoj djeluju. S promjenom te orijentacije u istoj točki M , $\vec{\sigma}$ mijenja smjer i veličinu, pa taj skup beskonačnog broja specifičnih površinskih sila $\vec{\sigma}_n$ u jednoj točki definira stanje naprezanja u toj točki.



Sl. 2. Površinske sile na elementarnom individualnom volumenu fluida

Primjenom jednadžbe količine gibanja (27), posebno na ΔV_1 i ΔV_2 , a zatim na čitav volumen ΔV , slijede izrazi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \rho \Delta V_1 = \vec{f}_1 \rho \Delta V_1 + \int_{\Delta S_1} \vec{\sigma} d(\Delta S_1) + \vec{\sigma}_n \Delta S_n, \quad (28a)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \rho \Delta V_2 = \vec{f}_2 \rho \Delta V_2 + \int_{\Delta S_2} \vec{\sigma} d(\Delta S_2) + \vec{\sigma}_{-n} \Delta S_n, \quad (28b)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \rho \Delta V = \vec{f} \rho \Delta V + \int_{\Delta S} \vec{\sigma} d(\Delta S). \quad (28c)$$

Lijeve strane i prvi članovi desnih strana u ovim izrazima jesu male veličine trećeg reda, a ostali su članovi male veličine drugog reda. Prema tome, ako se jednadžbe (28 a, b i c) podijele sa ΔS_n i istodobno se elementarni volumen ΔV steže u točku, ostajući sličan sam sebi, za granične vrijednosti jednadžbi (28 a, b i c), kad $\Delta S_n \rightarrow 0$, dobivaju se izrazi

$$0 = 0 + \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_n} \int_{\Delta S_1} \vec{\sigma} d(\Delta S_1) + \vec{\sigma}_n, \quad (29a)$$

$$0 = 0 + \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_n} \int_{\Delta S_2} \vec{\sigma} d(\Delta S_2) + \vec{\sigma}_{-n}, \quad (29b)$$

$$0 = 0 + \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_n} \int_{\Delta S} \vec{\sigma} d(\Delta S). \quad (29c)$$

Budući da je

$$\int_{\Delta S_1} \vec{\sigma} d(\Delta S_1) + \int_{\Delta S_2} \vec{\sigma} d(\Delta S_2) = \int_{\Delta S} \vec{\sigma} d(\Delta S),$$

odbivši (29c) od zbroja (29a) i (29b) slijedi $\vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_{-n} = 0$, odnosno

$$\vec{\sigma}_n = -\vec{\sigma}_{-n}. \quad (30)$$

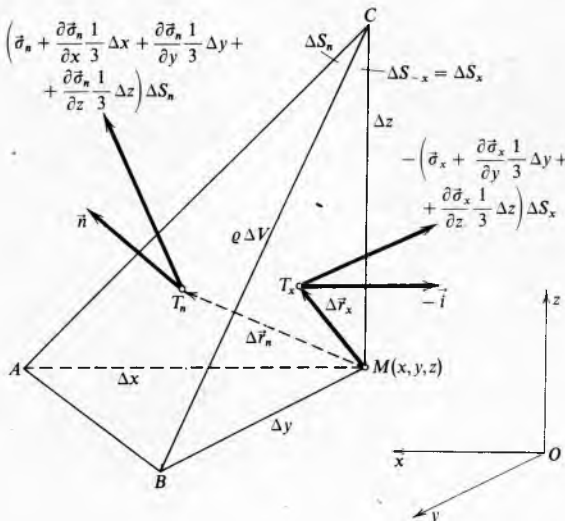
To je osnovno svojstvo unutrašnjih napreznja u neprekidnom strujanju fluida, i ono izražava treći Newtonov zakon akcije i reakcije. Matematički izraženo, to svojstvo pokazuje da je napreznja u točki neparna funkcija normale. Ako se (30) uvrsti u izraze (28a, b i c), dobiva se zakon jednakosti akcije i reakcije i za masene sile:

$$\vec{f}_1 \rho \Delta V_1 + \vec{f}_2 \rho \Delta V_2 = \vec{f} \rho \Delta V. \quad (30a)$$

Da bi se odredila zavisnost unutrašnjeg napreznja $\vec{\sigma}_n$ od proizvoljnog smjera normale u točki, postavlja se jednadžba količine gibanja elementarnog tetraedra fluida s jednim vrhom u proizvoljnoj točki M (sl. 3). Tri međusobno okomite stranice tetraedra paralelne su sa trima koordinatnim ravninama, a četvrta, kosa stranica, orijentirana je normalom proizvoljnog smjera,

$$\vec{n} = \cos(n, x)\vec{i} + \cos(n, y)\vec{j} + \cos(n, z)\vec{k}. \quad (31)$$

Oblik tetraedra izabran je upravo zato da bi se mogla postaviti jedna proizvoljno orijentirana stranica. Pretpostavlja se da u točki M vladaju napreznja $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ i $\vec{\sigma}_n$ na plohama orijentiranim normalama $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i \vec{n} i da su ta napreznja funkcije prostornih koordinata. Ako su napreznja i funkcije vremena, onda se ta razmatranja odnose na određeni trenutak vremena.



Sl. 3. Elementarni tetraedar fluida s proizvoljno orijentiranom kosom stranicom $ABC = \Delta S_n$

Integrali površinskih sila $\int \vec{\sigma} dS$ preko stranica elementarnog tetraedra približno će se izraziti koncentriranim silama u težištima stranica $T_x(0, \frac{1}{3}\Delta y, \frac{1}{3}\Delta z)$, $T_y(\frac{1}{3}\Delta x, 0, \frac{1}{3}\Delta z)$, $T_z(\frac{1}{3}\Delta x, \frac{1}{3}\Delta y, 0)$ i $T_n(\frac{1}{3}\Delta x, \frac{1}{3}\Delta y, \frac{1}{3}\Delta z)$, pri čemu se uzimaju u obzir promjene napreznja kad se udaljuje od točke M .

Napreznja se razviju u Taylorov red vektorskih funkcija $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ i $\vec{\sigma}_n$, zadržavši samo linearne članove razvoja. Ti su izrazi točniji što su dimenzije tetraedra manje. Na sl. 3 ucrtane su i označene dvije koncentrirane površinske sile u težištima T_x i T_n stranica $MBC = \Delta S_{-x} = \Delta S_x$ i $ABC = \Delta S_n$. Na stranici MBC , koja je orijentirana negativnim smjerom osi Ox , u izrazu za silu primijenjeno je osnovno svojstvo unutrašnjih napreznja (30), tj. $\vec{\sigma}_{-x} = -\vec{\sigma}_x$. Istim su postupkom sastavljeni i izrazi za sile na stranicama $MAC = \Delta S_{-y} = \Delta S_y$ i $MAB = \Delta S_{-z} = \Delta S_z$. Ako je u točki M gustoća masenih sila \vec{f} , a visina tetraedra spuštena iz M na ΔS_n iznosi Δh , tako da je volumen tetraedra $\Delta V = \frac{1}{3} \Delta h \Delta S_n$, tada jednadžba količine gibanja (27) za elementarni individualni tetraedar na sl. 3 poprima oblik

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} \rho \frac{1}{3} \Delta h \Delta S_n = & \vec{f} \rho \frac{1}{3} \Delta h \Delta S_n + \left(\vec{\sigma}_n + \frac{\partial \vec{\sigma}_n}{\partial x} \frac{1}{3} \Delta x + \right. \\ & + \frac{\partial \vec{\sigma}_n}{\partial y} \frac{1}{3} \Delta y + \frac{\partial \vec{\sigma}_n}{\partial z} \frac{1}{3} \Delta z \left. \right) \Delta S_n - \left(\vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial y} \frac{1}{3} \Delta y + \right. \\ & + \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial z} \frac{1}{3} \Delta z \left. \right) \Delta S_x - \left(\vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial x} \frac{1}{3} \Delta x + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial z} \frac{1}{3} \Delta z \right) \Delta S_y - \\ & - \left(\vec{\sigma}_z + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial x} \frac{1}{3} \Delta x + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial y} \frac{1}{3} \Delta y \right) \Delta S_z, \end{aligned} \quad (32)$$

gdje se $\frac{d\vec{v}}{dt}$, ρ i parcijalne derivacije odnose na točku M . Izraz (32), kao što se vidi, mješavina je malih veličina drugog i trećeg reda (za $\frac{d\vec{v}}{dt}$, ρ , \vec{f} , $\vec{\sigma}_n$, $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ i $\vec{\sigma}_z$ pretpostavlja se da su reda veličine 1). Kad se taj izraz podijeli sa ΔS_n i istodobno se tetraedar steže u točku graničnim prijelazom $\Delta h \rightarrow 0$, ostavljajući da u tom prijelazu ostaje sličan samom sebi (tj. da omjeri $\Delta x/\Delta y$, $\Delta y/\Delta z$ i $\Delta z/\Delta x$ ostaju konstantni tako da normala \vec{n} ostaje paralelna samoj sebi), male veličine trećeg reda u (32) iščezavaju, pa se nakon sređenja dobiva

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(n, x) + \vec{\sigma}_y \cos(n, y) + \vec{\sigma}_z \cos(n, z), \quad (33)$$

gdje su primijenjeni odnosi $\Delta S_x = \Delta S_n \cos(n, x)$, $\Delta S_y = \Delta S_n \cos(n, y)$ i $\Delta S_z = \Delta S_n \cos(n, z)$.

Izraz (33) pokazuje da je napreznja $\vec{\sigma}_n$ u točki unutar fluida preko proizvoljno orijentirane plohe u toj točki izraženo linearnom vektorskom funkcijom napreznja (u toj istoj točki) $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y$ i $\vec{\sigma}_z$ preko ploha orijentiranih smjerovima osi pravokutnoga Descartesova koordinatnog sustava. Svaka od vektorskih komponentata napreznja $\vec{\sigma}_n$ u izrazu (33) sastavljena je od tri skalarne komponente

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_x &= \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{\sigma}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{\sigma}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}, \end{aligned} \quad (34)$$

u kojima prvi indeksi i dalje označuju orijentaciju ploha, a drugi indeksi smjerove komponentata. Tako su σ_{xx}, σ_{yy} i σ_{zz} normalna napreznja. Pozitivna normalna napreznja jesu *vlačna napreznja*. Napreznja označena sa slovom τ djeluju u ravninama ploha i stoga su to *smična* ili *tangencijalna napreznja*. Pozitivna smična napreznja na plohama orijentiranim pozitivnim smjerovima koordinatnih osi gledaju u pozitivnim smjerovima tih osi, a pozitivna smična napreznja na plohama orijentiranim negativnim smjerovima koordinatnih osi gledaju u negativnim smjerovima tih osi. Dogovor o predznacima napreznja, npr. za napreznja na plohama orijentiranim pozitivnim i negativnim smjerom osi x , što je prikazano na sl. 4a i b, slijedi iz prve od jednadžbi (34) i osnovnog svojstva (30),

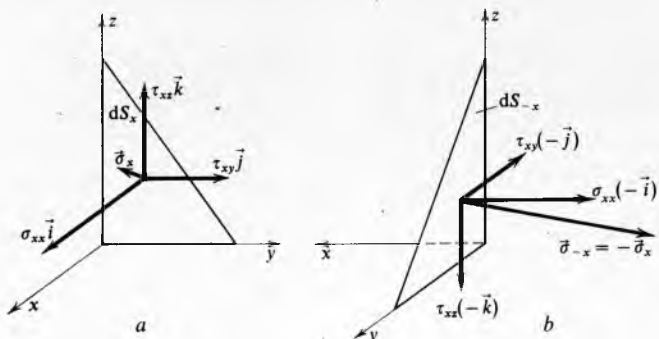
$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{-x} &= \sigma_{(-x)x} \vec{i} + \tau_{(-x)y} \vec{j} + \tau_{(-x)z} \vec{k} = -\vec{\sigma}_x = \\ &= -\sigma_{xx} \vec{i} - \tau_{xy} \vec{j} - \tau_{xz} \vec{k} = \sigma_{xx} (-\vec{i}) + \tau_{xy} (-\vec{j}) + \tau_{xz} (-\vec{k}). \end{aligned}$$

Izrazi (34) pokazuju da je unutrašnje napreznje u fluidu ten-

zorska veličina definirana sa devet skalarnih komponentata, od kojih je svaka funkcija prostornih koordinata i, eventualno, vremena. Skup tih komponentata zove se tenzor napreznja i pisan u obliku matrice glasi

$$T_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Tih devet skalarnih funkcija u koordinatnom sustavu $Oxyz$, ili drugih devet skalarnih funkcija u nekom drugom transformiranom koordinatnom sustavu $Ox'y'z'$, uvijek definiraju istu fizikalnu veličinu: stanje napreznja u točkama unutar fluida.



Sl. 4. Dogovor o predznacima napreznja. Na slici su nacrtana pozitivna napreznja

Lako se dokaže da je tenzor napreznja (35) simetričan. Naime, ako se umjesto jednadžbe količine gibanja (32) za elementarni individualni tetraedar fluida (sl. 3) postavi jednadžba momenta količine gibanja s obzirom na točku M i podijeli sa ΔS_n , zanemarujući male veličine višeg reda, ostaje

$$\Delta \vec{r}_n \times \vec{\sigma}_n = \Delta \vec{r}_x \times \vec{\sigma}_x \cos(n,x) + \Delta \vec{r}_y \times \vec{\sigma}_y \cos(n,y) + \Delta \vec{r}_z \times \vec{\sigma}_z \cos(n,z), \quad (36)$$

gdje su $\Delta \vec{r}_x(0, \frac{1}{3}\Delta y, \frac{1}{3}\Delta z)$, $\Delta \vec{r}_y(\frac{1}{3}\Delta x, 0, \frac{1}{3}\Delta z)$, $\Delta \vec{r}_z(\frac{1}{3}\Delta x, \frac{1}{3}\Delta y, 0)$ i $\Delta \vec{r}_n(\frac{1}{3}\Delta x, \frac{1}{3}\Delta y, \frac{1}{3}\Delta z)$, prema sl. 3, pripadni radij-vektori težišta T_x, T_y, T_z i T_n . Kad se uvrsti u (36) jednakost (33) i primijene jednakosti (34) nakon izvođenja vektorskih produkata te izjednače pripadne komponente lijeve i desne strane, slijede jednakosti

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \quad (37)$$

čime se dokazuje simetričnost tenzora napreznja (35) oko dijagonale σ_{xx}, σ_{yy} i σ_{zz} . Prema tome je za definiranje stanja napreznja unutar fluida potrebno poznavati šest skalarnih funkcija, međusobno različitih komponentata tenzora napreznja. U izrazima (37) uključene su jednakosti i po veličinama i po dogovorenim predznacima tangencijalnih napreznja, pa su ta napreznja u pripadnim parovima usmjerena ili prema, ili od bridova elementa fluida (sl. 5).

Treba primijetiti da je simetričnost tenzora napreznja izvedena za slučaj odsutnosti međudjelovanja unutrašnjih momenta količine gibanja i razdiobe vanjskih masenih i površinskih spregova sila. Kao primjer razdiobe masenih spregova sila mogu se navesti spregovi sila koji djeluju na svaki element kazaljke kompasa smještenog u magnetskom polju Zemlje. U mehanici fluida razdiobe takvih spregova sila tek su se nedavno nametnule kao sadržaj istraživanja.

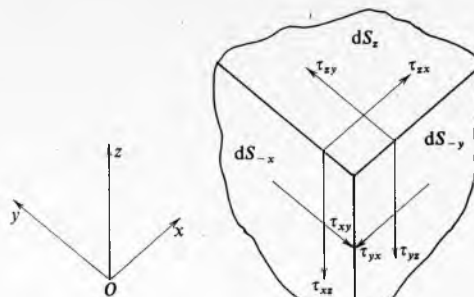
Razvijenim matematičkim aparatom za opisivanje napreznja unutar fluida relativno je vrlo lagano u točki unutar fluida proračunati proizvoljnu komponentu napreznja na proizvoljno orijentiranoj plohi u toj točki. Tako na plohi orijentiranoj normalom \vec{n} za komponentu napreznja u smjeru jediničnog

vektora \vec{m} (kojemu je izraz slično građen izrazu (31) za \vec{n}) dobiva se

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} &= \vec{\sigma}_n \cdot \vec{m} = \sigma_{xx} \cos(n,x) \cos(m,x) + \tau_{yx} \cos(n,y) \cos(m,x) + \\ &+ \tau_{zx} \cos(n,z) \cos(m,x) + \tau_{xy} \cos(n,x) \cos(m,y) + \\ &+ \sigma_{yy} \cos(n,y) \cos(m,y) + \tau_{zy} \cos(n,z) \cos(m,y) + \\ &+ \tau_{xz} \cos(n,x) \cos(m,z) + \tau_{yz} \cos(n,y) \cos(m,z) + \\ &+ \sigma_{zz} \cos(n,z) \cos(m,z), \end{aligned} \quad (38)$$

pri čemu su primijenjene jednakosti (33) i (34). Na isto orijentiranoj plohi, ako se uzme u obzir i simetričnost tenzora napreznja (37), za normalno napreznje dobiva se izraz

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{xx} \cos^2(n,x) + \sigma_{yy} \cos^2(n,y) + \sigma_{zz} \cos^2(n,z) + \\ &+ 2\tau_{xy} \cos(n,x) \cos(n,y) + 2\tau_{yz} \cos(n,y) \cos(n,z) + \\ &+ 2\tau_{zx} \cos(n,z) \cos(n,x). \end{aligned} \quad (39)$$



Sl. 5. Simetričnost tenzora napreznja. Na slici su u parovima ucrtana pozitivna tangencijalna napreznja

U općem slučaju površinskih sila normalna napreznja u točki mijenjaju se s orijentacijom plohe u toj točki, ali zbroj normalnih napreznja na tri međusobno okomite plohe u jednoj točki ostaje invarijantan. Naime, ako se u pravokutnom koordinatnom sustavu $Oxyz$ postavi novi koordinatni sustav $Ox'y'z'$, dobiven rotacijom osi originalnog sustava, tako da su kosinusi smjerova novih osi prema originalnim osima dani tablicom 1, sa svojstvima navedenim ispod tablice, i ako se izrazima sličnim izrazu (39) proračunaju normalna napreznja $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}$ i $\sigma_{z'z'}$, njihov zbroj, kad se uvažavaju svojstva kosinusa smjerova iz tablice 1, postaje

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (40)$$

Prema tome, zbroj normalnih napreznja je invarijanta tenzora napreznja. U općem slučaju površinskih sila invarijantom tenzora napreznja (40) definira se srednji tlak u fluidu

$$p_{st} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (41)$$

Za nestlačivo strujanje i za strujanje s umjerenim gradijentima karakterističnih veličina tako definirani srednji tlak pri-

Tablica 1
KOSINUSI SMJERA PRI ROTACIJSKOJ TRANSFORMACIJI PRAVOKUTNOGA KARTEZIJSKOG KOORDINATNOG SUSTAVA

Originalne osi	Zavrotirane osi		
	x'	y'	z'
x	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Svojstva kosinusa smjerova:

$$\sum_{j=1}^3 l_{ji} l_{jk} = \sum_{j=1}^3 l_{ij} l_{kj} = \delta_{ik}; i, k = 1, 2, 3,$$

gdje je Kroneckerov simbol $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = k \\ 0 & \text{ako je } i \neq k \end{cases}$

blizno je jednak termodinamičkom tlaku p , koji zadovoljava jednadžbu stanja (npr. jednadžbu (8) za savršeni plin).

Svojstvima (30) i (33) unutrašnjih napreznja u fluidu i svojstvima (37) i (40) tenzora napreznja (35), obuhvaćena su fizikalna svojstva i postavljene mogućnosti matematičkog opisanja površinskih sila u fluidu. Te sile u prostoru u kojem struji fluid definiraju *tenzorsko polje*.

U prostorno promjenljivoj polju tenzora napreznja na svaki element fluida (npr. za tetraedarski element fluida na sl. 3) djeluje rezultanta površinskih sila kao plošni integral napreznja preko zatvorene granične površine elementa

$$\Delta \vec{F}_\sigma = \int_{\Delta S} \vec{\sigma}_n d(\Delta S) \approx \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \Delta V. \quad (42)$$

Taj izraz se dobiva istim postupkom kojim je izvedena desna strana jednadžbe količine gibanja (32) (tj. razvojem napreznja u Taylorov red, zadržavši linearne članove) i primjenom izraza (33) za zavisnost napreznja od orijentacije plohe. Izraz (42) ne zavisi od izbora oblika elementa fluida, i do istog se rezultata dolazi ako se umjesto elementa fluida u obliku tetraedra izabere element, npr. u obliku pravokutnog paralelepipeda. Ako se (42) podijeli sa ΔV i istodobno se element steže u točku, dobiva se specifična površinska sila na jedinicu volumena

$$\vec{\varphi}_\sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\sigma}{\Delta V} = \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (43)$$

s dimenzijom $[\vec{\varphi}_\sigma] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$, dakle $[\vec{\varphi}_\sigma]_{SI} = \text{N/m}^3 = \text{kg}/(\text{m}^2\text{s}^2)$. Na temelju jednakosti (34) za x komponentu $\varphi_{\sigma x}$ dobiva se

$$\varphi_{\sigma x} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

a analogno i za ostale dvije komponente.

Ako se uvede operator divergencije tenzorskog polja napreznja, definiran identitetom

$$\begin{aligned} \text{Div } T_\sigma &= \nabla T_\sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \vec{\sigma}_n dS = \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \vec{n} T_\sigma dS = \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (43a)$$

koji iz tenzorskog polja generira vektor, za razliku od operatora divergencije vektorskog polja koji generira skalar, izraz (43) za specifičnu površinsku silu može se pisati u sažetijem obliku

$$\vec{\varphi}_\sigma = \text{Div } T_\sigma. \quad (43b)$$

Za proračun površinske sile \vec{F}_σ , koja djeluje na fluid konačnog volumena V unutar zatvorene površine S

$$\vec{F}_\sigma = \int_S \vec{\sigma}_n dS = \int_S [\vec{\sigma}_x \cos(n, x) + \vec{\sigma}_y \cos(n, y) + \vec{\sigma}_z \cos(n, z)] dS, \quad (44)$$

može poslužiti izraz (42) tako da se volumen V razdjeli na N malih volumena ΔV_i , a za svaki se od njih izrazom (42) proračuna površinska sila $\Delta \vec{F}_{\sigma i}$. Vektorski zbroj tih sila i granični prijelaz daju

$$\vec{F}_\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta \vec{F}_{\sigma i} = \int_V \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (45)$$

Izjednačenjem sa (44) slijedi

$$\vec{F}_\sigma = \int_S \vec{\sigma}_n dS = \int_V \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV, \quad (46)$$

što je jedan od oblika integralnog poučka Gauss-Ostrogradskog, koji pretvara plošne integrale po zatvorenoj površini u

volumenske i obratno. Fizikalno promatrajući, pri zbrajanju površinskih sila po plohama elemenata ΔV_i , zbog osnovnog svojstva unutrašnjeg napreznja definirano izrazom (30), te su se sile na dodirnim plohama susjednih elemenata međusobno poništavale sve do granice S i njihov zbroj \vec{F}_σ ostao je integral (44) uzet po toj zatvorenoj graničnoj površini. Elementarna sila $\Delta \vec{F}_\sigma$ definirana izrazom (42) predstavlja rezultantnu površinsku silu koja djeluje na pojedini element ΔV_i , pa vektorski zbroj elementarnih sila $\Delta \vec{F}_\sigma$ po čitavom volumenu V ponovo mora dati tu istu ukupnu površinsku silu \vec{F}_σ koja djeluje na čitav fluid sadržan u V . To i jest sadržaj jednakosti (46).

Zbog preglednosti i kasnijih potreba navode se razni oblici integralnog poučka Gauss-Ostrogradskoga do kojih se dolazi postupkom sličnim onome koji je doveo do jednakosti (46). Ako je T tenzorska, \vec{a} vektorska i f skalarna prostorno promjenljiva neprekidna funkcija s neprekidnim prvim parcijalnim derivacijama u volumenu V omeđenom zatvorenom površinom S , koja se može sastojati od konačnog broja ploha s dobro definiranim neprekidnim vanjskim normalama \vec{n} tada vrijede jednakosti:

$$\int_S \vec{n} T dS = \int_V \text{Div } T dV \quad (46a)$$

$$\int_S \vec{n} f dS = \int_V \text{grad } f dV \quad (46b)$$

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \int_V \text{div } \vec{a} dV \quad (46c)$$

$$\int_S \vec{n} \times \vec{a} dS = \int_V \text{rot } \vec{a} dV. \quad (46d)$$

Od tih prva jednakost (46a) je samo drugi oblik pisanja jednakosti (46).

Ako se u jednadžbu količine gibanja (32) za elementarni individualni tetraedar fluida uvrsti jednakost (33), jednadžba (32) se reducira u

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \Delta V = \rho \vec{f} \Delta V + \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \Delta V. \quad (47)$$

Kad se podijeli ovaj izraz sa ΔV i stegne istodobno element u točku graničnim prijelazom $\Delta V \rightarrow 0$, pri čemu i približenja upotrijebljena za formiranje jednadžbe (32), a time i izraza (47), postaju točna, dobiva se

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (48)$$

ili preko jednakosti (43a),

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{Div } T_\sigma. \quad (48a)$$

Ta vektorska jednadžba je *osnovna diferencijalna jednadžba gibanja fluida* izražena napreznjima za neprekidna strujanja proizvoljnih fluida i za takva je strujanja potpuno ekvivalentna jednadžbi količine gibanja (27) za proizvoljan individualni volumen V . Dimenzija svakog člana u (48) je sila koja djeluje na jedinicu volumena ili $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$. Očito da je izraz (48), kao i raniji izraz (42), izveden pod pretpostavkom neprekidnosti i derivabilnosti komponenata tenzora napreznja (35). Na temelju jednakosti (34) mogu se dobiti komponente vektorske jednadžbe gibanja (48), pa tako npr. z komponenta glasi:

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

Jednadžba gibanja u obliku (48) ima neposrednu primjenu u analizama strujanja, kojemu su karakteristike, npr., istražene eksperimentalno. U tom obliku jednadžbu (48) nemoguće je integrirati jer sadržava previše nepoznatih funkcija. Uz zadane vanjske masene sile to su: gustoća ρ , tri komponentne brzine i šest komponenata simetričnog tenzora napreznja. Dalja razrada pojedinih članova jednadžbe (48), kao i dodatne jednadžbe, ostvarit će barem principijelnu mogućnost njene integracije.

Posebni slučajevi površinskih sila u fluidu: fluid u mirovanju i idealni fluid. Prema definiciji fluida, u fluidu u stanju mirovanja ne mogu postojati smična ili tangencijalna napreznja i

tenzor naprezanja definiran izrazom (35) poprimat će tada poseban oblik. Isto je tako i s idealnim fluidom, koji je umjetno konstruirani model sa sljedećom definicijom: idealni fluid ili idealna tekućina (kapljevine i plinovi) takav je model kontinuuma u kojem je u mirovanju i u proizvoljnom strujanju vektor naprezanja $\vec{\sigma}_n$ na elementu površine orijentiranom proizvoljnom normalom \vec{n} , okomit na taj element površine, tj. $\vec{\sigma}_n$ je paralelan s normalom \vec{n} . Premda u stvarnosti ovo svojstvo imaju svi fluidi samo pri vrlo visokim temperaturama i tlakovima, idealni fluid je vrlo koristan model općenito u mehanici fluida.

Nepostojanje tangencijalnih naprezanja unutar fluida definirano je izrazom

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn}\vec{n}. \quad (49)$$

Uz $\tau_{xy} = \dots = \tau_{yz} = 0$, izrazi (34) uvršteni u (33) daju

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{xx} \cos(n, x)\vec{i} + \sigma_{yy} \cos(n, y)\vec{j} + \sigma_{zz} \cos(n, z)\vec{k}. \quad (50)$$

Ako se sa \vec{i} skalarno pomnoži najprije jednakost (49), dobiva se $\sigma_{nx} = \sigma_{nn} \cos(n, x)$, a zatim jednakost (50), što za istu komponentu daje $\sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos(n, x)$, iz jednakosti tih komponentata slijedi

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}. \quad (51)$$

Ako se u jednakostima (49) i (50) ponove ove operacije najprije sa \vec{j} , a zatim sa \vec{k} , dobiva se

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}, \quad (52)$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz}. \quad (53)$$

Iz jednakosti (51), (52) i (53) primjećuje se da jedina postojeća normalna komponenta naprezanja u fluidu bez tangencijalnih naprezanja ne zavisi od orijentacije površine i da je u točki unutar takva fluida

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \quad (54)$$

gdje je p tlak. Pozitivnom p odgovara tlačno naprezanje. Tenzor naprezanja (35) degenerira se tada u skalar

$$T_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (55)$$

Prema tome, u fluidu u mirovanju i u idealnom fluidu u mirovanju i u proizvoljnom strujanju raspored unutrašnjih površinskih sila dan je jednom skalarnom funkcijom rasporeda tlaka p .

Izraz (42) za površinsku silu koja djeluje na element fluida unutar ΔV u prostorno promjenljivoj polju tlaka $p = p(x, y, z)$ prelazi u

$$d\vec{F}_p = - \int_{\Delta S} p \vec{n} d(\Delta S) \approx - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \Delta V = - \text{grad } p \Delta V, \quad (56)$$

a specifična površinska sila na jedinicu volumena, prema izrazu (43) poprima oblik

$$\vec{\varphi}_p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_p}{\Delta V} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right),$$

ili

$$\vec{\varphi}_p = - \text{grad } p, \quad (57)$$

s dimenzijom $[\vec{\varphi}_p] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$, dakle $[\vec{\varphi}_p]_{\text{SI}} = \text{N/m}^3$.

Sila tlaka \vec{F}_p na fluid konačnog volumena V unutar zatvorene površine S dana je izrazom

$$\vec{F}_p = - \int_S p \vec{n} dS = - \int_V \text{grad } p dV, \quad (58)$$

što je sadržaj i integralnog poučka Gauss-Ostrogradskog, jednakost (46b).

Jednadžba gibanja izražena napreznjima (48) za fluid u stanju mirovanja prelazi u jednadžbu ravnoteže

$$0 = \rho \vec{f} - \text{grad } p. \quad (59)$$

To je osnovna diferencijalna jednadžba statike fluida.

Za idealni fluid jednadžba gibanja (48) prelazi u

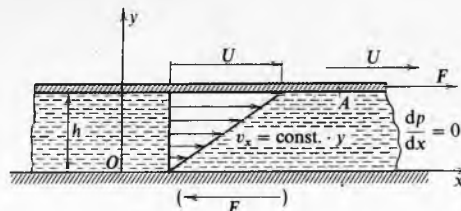
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p, \quad (60)$$

što je osnovna diferencijalna jednadžba gibanja dinamike idealnog fluida. Jednadžbe (60) i (48) izvedene su pod pretpostavkom neprekidnosti i derivabilnosti tenzora naprezanja u točkama unutar fluida, što se za idealni fluid svodi na neprekidnost i derivabilnost skalarne funkcije tlaka p .

Viskoznost i Newtonov zakon viskoznosti. Svojstvo otpornosti fluida prema smičnoj ili kutnoj deformaciji zove se *viskoznost*. Recipročno svojstvo je *fluidnost* ili svojstvo tečenja, povezano s nazivom fluid ili tekućina. Viskoznost se manifestira u jednostavno zamišljenom eksperimentu kojega je model prikazan na sl. 6. Između dviju paralelnih ravnih ploča, razmaknutih za udaljenost h i dovoljno velikih površina da se učinci rubova mogu zanemariti, nalazi se fluid. Donja ploča miruje, a gornja, površine A , pod djelovanjem sile F giba se paralelno sa svojom ravninom brzinom U . Kao prvi rezultat eksperimenta pokazuje se da se čestice fluida lijepe ili pranjaju uz krutu stijenku tako da čestice fluida uz donju ploču na sl. 6 miruju, a one uz gornju ploču gibaju se istom brzinom U kao i ploča. Ako udaljenost h između ploča nije prevelika, ili ako brzina U nije previsoka, i ako nema uzdužnog gradijenta tlaka, tj. $dp/dx = 0$, eksperiment pokazuje da se u fluidu uspostavlja linearni profil brzine od 0 do U , prikazan na sl. 6, da je sila F proporcionalna mjernom broju površine A gornje ploče, brzini U i obrnuto proporcionalna udaljenosti ploča h . Ako se koeficijent proporcionalnosti označi sa μ , izloženi rezultat eksperimenta, valjan za veliku grupu fluida, izražava se u obliku *Newtonova zakona viskoznosti*

$$F = \mu \frac{AU}{h}, \quad (61)$$

gdje koeficijent μ nosi naziv dinamički koeficijent viskoznosti ili, jednostavno, dinamička, ili apsolutna, ili molekularna viskoznost, s dimenzijom $[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$, dakle $[\mu]_{\text{SI}} = \text{kg/ms} = \text{Ns/m}^2 = \text{Pas}$.



Sl. 6. Raspored eksperimenta za prikaz Newtonova zakona viskoznosti

Brzina U i udaljenost h u opisanom pokusu moraju biti ograničeni da bi se osiguralo *slajevito* ili *laminarno strujanje*. Laminarnost strujanja nije stabilna pojava i pri višim brzinama U ili većim razmacima h između ploča strujanje postaje *turbulentno* s osjetnim fluktuacijama brzine strujanja i intenzivnim miješanjem makroskopskih gromada čestica fluida između udaljenih slojeva. Za turbulentni režim strujanja nije valjan Newtonov zakon viskoznosti definiran izrazom (61). Za laminarno strujanje uvjet je da se izmjene čestica fluida između bliskih slojeva zbivaju u mikroskopskom, molekularnom mjerilu.

Sila F , dana izrazom (61), prenosi se kroz slojeve fluida do donje ploče, jer je čitav fluid u prostoru između ploča u kontinuiranom deformiranju. Zbog linearnog profila brzine strujanja (sl. 6), brzina deformiranja fluida je konstantna, pa je i tangencijalna (smična) sila F u svakom sloju ista (npr. ako se gornja ploča na sl. 6 giba brzinom $U/2$ na udaljenosti $h/2$ od donje ploče, izraz (61) daje istu silu F), tako da je svaki sloj fluida u stanju smičnog naprezanja

$$\tau_{yx} = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h}, \quad (62)$$

koje ostaje konstantno u prostoru između dvije ploče. Izraz (62) drugi je oblik Newtonova zakona viskoznosti, tj. izraza (61).

Fluidnost Φ je veličina recipročna dinamičkom koeficijentu viskoznosti

$$\Phi = \frac{1}{\mu}, \quad (63)$$

s dimenzijom $[\Phi] = M^{-1}LT$, dakle $[\Phi]_{SI} = m^2/Ns = 1/Pas$.

Kinematički koeficijent viskoznosti ν definiran je izrazom

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (64)$$

s dimenzijom $[\nu] = L^2T^{-1}$, dakle $[\nu]_{SI} = m^2/s$.

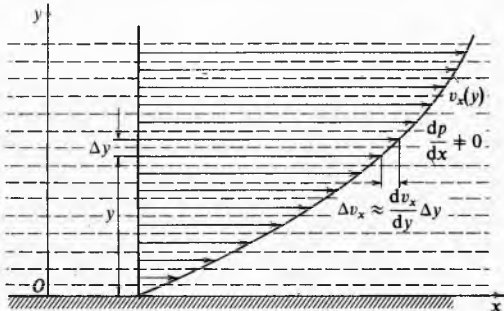
U napuštenom sustavu CGS, jedinica za dinamički koeficijent viskoznosti μ bila je poise = P = g/cms = dyn/cm² = 0,1 Pas, a jedinica za kinematički koeficijent viskoznosti ν bila je stokes = St = cm²/s = 10⁻⁴ m²/s. U tehničkoj praksi te zastarjele jedinice još uvijek imaju određenu primjenu, jer se preko njih povezuju jedinice sustava SI sa viskozimetrijskom skalom SAE za motorna ulja.

Postojanje uzdužnog gradijenta tlaka u eksperimentu prikazanom na sl. 6 narušilo bi linearni profil brzine i obezvrijedilo zakone definirane izrazima (61) i (62). Međutim, u paralelnom pravocrtnom laminarnom strujanju s proizvoljnim profilom brzine, koji se ne mijenja s vremenom (sl. 7), razmatranja koja su pratila opisani eksperiment, mogu se primijeniti na element fluida debljine Δy , preko kojeg brzina strujanja linearno raste za $\Delta v_x \approx (dv_x/dy)\Delta y$. Taj prirast brzine odgovara brzini U u izrazu (62), a debljina Δy udaljenosti h , i kada $\Delta y \rightarrow 0$, za tangencijalno naprezanje uzduž sloja na udaljenosti y dobiva se izraz

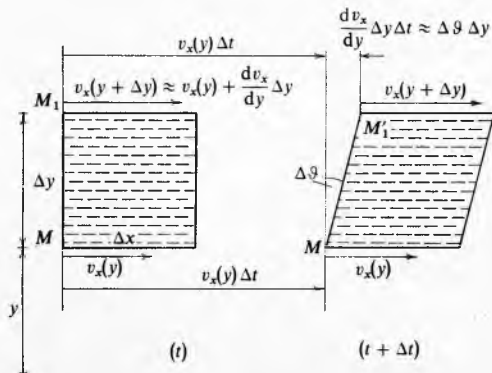
$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}. \quad (65)$$

Stežanjem sloja na nultu debljinu, u jednadžbi ravnoteže elementa fluida iščezava $-(dp/dx)\Delta V$, tj. uzdužna sila koja djeluje na element zbog uzdužnog gradijenta tlaka prema izrazu (56).

Izraz (65) je općenitiji oblik Newtonova zakona viskoznosti za proizvoljan profil brzine paralelnoga pravocrtnoga lami-



Sl. 7. Nelinearni profil brzine paralelnog pravocrtnog laminarnog strujanja



Sl. 8. Uz izvod brzine kutne deformacije pri paralelnom pravocrtnom laminarnom strujanju

narnog strujanja. Derivacija dv_x/dy u izrazu (65) predstavlja brzinu kutne deformacije elementa fluida, kao što pokazuju sljedeća razmatranja.

U laminarnom strujanju proizvoljnog profila brzine, prikazanom na sl. 7, uz $v_x = v_x(y)$ i $v_y = v_z = 0$, formira se u točki M_1 kao jednim od vrhova, pravokutni element fluida s bridovima $\Delta y = MM_1$ i Δx . Budući da točka M_1 brida Δy ima veću brzinu od točke M za približan iznos $(dv_x/dy)\Delta y$ (sl. 8), taj brid, prvobitno u vertikalnom položaju u trenutku t , zauzet će u trenutku $(t + \Delta t)$ kosi položaj $M_1'M$, otklonjen od vertikale za kut $\Delta\theta \approx (dv_x/dy)\Delta y\Delta t/\Delta y$. Ako je smanjenje prvobitnoga pravog kuta između bridova Δx i Δy pozitivna kutna (smična) deformacija, tada je brzina kutne deformacije elementa fluida, definirana u točki M i u trenutku t , dana izrazom

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(dv_x/dy)\Delta y\Delta t/\Delta y}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dy}, \quad (66)$$

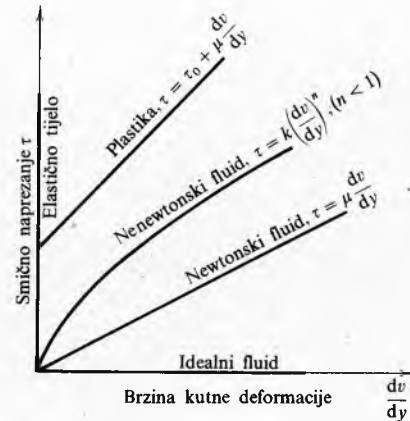
s dimenzijom $\left| \frac{d\theta}{dt} \right| = \left| \frac{dv_x}{dy} \right| = T^{-1}$, dakle $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{SI} = \left| \frac{dv_x}{dy} \right|_{SI} =$
 $= \text{rad/s} (\equiv 1/s)$.

Pomoću jednakosti (66), Newtonov zakon viskoznosti definiran jednadžbom (65) može se izraziti u obliku

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\theta}{dt}, \quad (67)$$

što znači da je smično naprezanje u fluidu proporcionalno brzini kutne deformacije. Taj je zakon analogan Hookeovu zakonu za elastična tijela, prema kojem je smično naprezanje u elastičnom tijelu proporcionalno kutnoj deformaciji.

Fluidi koji slijede linearni odnos naprezanja i brzine kutne deformacije prema Newtonovu zakonu viskoznosti, izraz (65) ili (67), zovu se *newtonski fluidi*. Voda, ulja, zrak i ostale kapljevine i plinovi, koji se najčešće susreću u tehnici, newtonski su fluidi.



Sl. 9. Reološki dijagram nekih modela neprekidne sredine

Grana mehanike koja se bavi modelima neprekidnih sredina različitih tipova odnosa naprezanja, deformacije i brzine deformacije zove se *reologija*. Na sl. 9 prikazan je reološki dijagram različitih modela neprekidne sredine, u kojem je smično naprezanje τ nanoseno na bazi brzine kutne deformacije dv/dy .

Pravac iz ishodišta, u dijagramu na sl. 9, prikazuje reološku jednadžbu newtonskog fluida (65). Reološka jednadžba nenewtonskog fluida ima oblik

$$\tau = k \left(\frac{dv}{dy} \right)^n. \quad (68)$$

Za plastične tvari tangencijalna naprezanja moraju premašiti određenu veličinu τ_0 da bi se nakon toga ponašale kao

fluid, pa je reološka jednadžba plastike

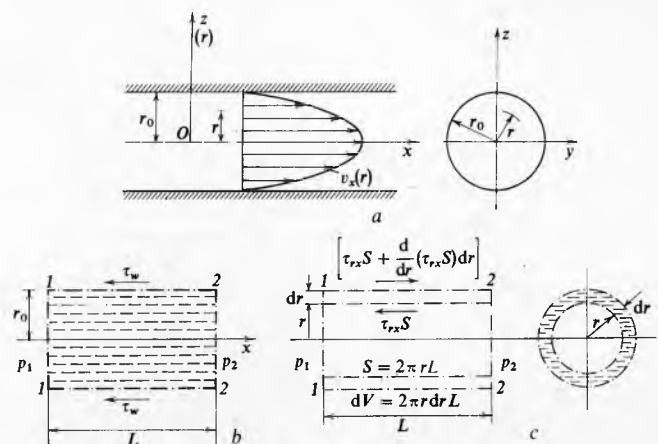
$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dy}. \quad (69)$$

Idealni fluid, koji je ranije definiran kao umjetni kontinuum bez smičnih naprezanja, u reološkom dijagramu na sl. 9 prikazan je apscisom dijagrama. Prema tome, idealnom fluidu je oduzeto svojstvo otpornosti protiv kutne deformacije, tj. idealni fluid nema viskoznosti i za njega je $\mu = 0$.

Elastično tijelo prikazano je ordinatom u reološkom dijagramu na sl. 9, jer je brzina njegove kutne deformacije dv/dy jednaka nuli.

Hagen-Poiseuilleovo i Couetteovo strujanje. Newtonovim zakonom viskoznosti (65) mogu se riješiti jednostavniji problemi laminarnog strujanja kad je strujanje paralelno a profil brzine uzdužno i vremenski nepromjenljiv.

Hagen-Poiseuilleovo strujanje je laminarno strujanje u horizontalnoj cijevi konstantnog kružnog presjeka (sl. 10a). Profil brzine $v_x(r)$ ne mijenja se uzduž cijevi niti s vremenom, a preostale komponente brzine strujanja v_y i v_z jednake su nuli. Budući da viskoznost fluida pruža otpore strujanju, u obliku tangencijalne sile uzduž stijenke cijevi, takvo strujanje moguće je samo na račun uzdužne promjene (smanjenja) tlaka u cijevi.



Sl. 10. Laminarno strujanje u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka (Hagen-Poiseuilleovo strujanje)

Na sl. 10b razmatra se fluid u cijevi između dva proizvoljna poprečna presjeka 1—1 i 2—2, razmaknuta za duljinu L . Budući da nema akceleracije fluida, ravnoteža sila koje djeluju na cjelokupni fluid između presjeka 1—1 i 2—2, prema izrazu (27) daje

$$(p_1 - p_2)r_0^2\pi = \tau_w 2r_0\pi L, \quad (70)$$

gdje su p_1 i p_2 tlakovi na presjecima 1—1 i 2—2, r_0 polumjer je cijevi, a $\tau_w = \mu(dv_x/dr)_{r=r_0}$ je prema izrazu (65) tangencijalno naprezanje uz stijenku cijevi. Budući da se profil brzine $v_x(r)$ ne mijenja uzduž cijevi, ne mijenja se ni $(dv_x/dr)_{r=r_0}$, pa τ_w ostaje konstantno uzduž cijevi. Zbog toga, kako pokazuje jednakost (70), pad tlaka po jedinici duljine cijevi ostaje konstantan, $(p_1 - p_2)/L = 2\tau_w/r_0 = \text{const.}$, ili

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{p_1 - p_2}{L} = b, \quad (71)$$

gdje je $b = -(p_1 - p_2)/L$ konstantni pad tlaka u cijevi po jedinici duljine, s dimenzijom $[b] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$, dakle $[b]_{\text{SI}} = \text{N/m}^3 = \text{Pa/m}$.

Da bi se potpuno riješio problem, tj. odredilo gibanje svih čestica fluida kao neprekidnog skupa materijalnih točaka, izabire se elementarni individualni volumen fluida unutar stijenke šupljeg cilindra (sl. 10c), između presjeka 1—1 i 2—2 unutrašnjeg polumjera $r (< r_0)$ i debljine stijenke dr , $dV = 2\pi r dr L$. Budući da se površina elementa izložena uzdužnoj komponenti sile tlaka ne mijenja, može se prema (56) za uzdužnu kompo-

mentu sile tlaka na element fluida pisati

$$dF_{px} = -\frac{dp}{dx}dV = -bdV = 2\pi(p_1 - p_2)r dr. \quad (72)$$

Izraz (42) za elementarnu površinsku silu izveden je za pravokutni Descartesov koordinatni sustav, kojem elementi lukova, površina i volumena ne zavise od koordinata točaka, i zato se u tom obliku ne može primijeniti za proračun uzdužne komponente sile dF_{rx} tangencijalnih naprezanja izabranog elementarnog volumena (sl. 10c), kojemu se površina $S = 2\pi r L$ mijenja s cilindarskom koordinatom r . Stoga se ta sila određuje zbrojem tangencijalne sile na unutrašnjem plaštu šupljeg cilindra ($-\tau_{rx}S$) i sile na vanjskom plaštu $\left[\tau_{rx}S + \frac{d}{dr}(\tau_{rx}S)dr\right]$, tako da je

$$dF_{rx} = \frac{d}{dr}(\tau_{rx}S)dr = 2\pi\mu L \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_x}{dr}\right)dr, \quad (73)$$

gdje je primijenjen Newtonov zakon viskoznosti (65), $\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x}{dr}$, i pretpostavljeno $\mu = \text{const.}$

Osim sile tlaka (72) i sile tangencijalnog naprezanja (73), na element fluida, koji se giba konstantnom brzinom, tj. $dv/dt = 0$, ne djeluju druge uzdužne sile, pa iz jednadžbe ravnoteže $0 = dF_{px} + dF_{rx}$, na temelju (72) i (73) slijedi

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_x}{dr}\right) = -\frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} r. \quad (74)$$

Dvostruka integracija ove diferencijalne jednadžbe daje

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad (75)$$

gdje se konstante C_1 i C_2 određuju iz rubnih uvjeta. Iz uvjeta realnosti, da je za $r = 0$ brzina v_x konačna, proizlazi $C_1 = 0$, a iz uvjeta prijanjanja viskoznog fluida uz krutu stijenku, da je za $r = r_0$ brzina $v_x = 0$, proizlazi $C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} r_0^2$, tako da se za profil brzine (75) dobiva izraz

$$v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} r_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]. \quad (76)$$

Volumenski protok ili, jednostavno, *protok* volumenska je količina fluida koja u jedinici vremena proteče kroz presjek cijevi. Ako je dA element ravnog presjeka cijevi, na koji je vektor brzine \vec{v} okomit, kroz njega proteče u sekundi $dQ = v dA$ volumenskih jedinica fluida, a kroz čitav presjek A proteče volumenska količina

$$Q = \int_A v dA, \quad (77)$$

gdje je Q protok s dimenzijom $[Q] = \text{L}^3\text{T}^{-1}$, dakle, $[Q]_{\text{SI}} = \text{m}^3/\text{s}$. Za profil brzine prema izrazu (76), koji predstavlja rotacioni paraboloid, provedena integracija izraza (77) preko kružnog presjeka cijevi daje izraz za protok

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} r_0^4 = \frac{\pi}{128\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} D^4, \quad (78)$$

gdje je D promjer cijevi. Odatle za pad tlaka dobiva se izraz

$$p_1 - p_2 = \frac{128\mu}{\pi} \frac{LQ}{D^4}, \quad (79)$$

a to je *Hagen-Poiseuilleov zakon*, koji kaže da je pri laminarnom strujanju u cijevi kružnog presjeka pad tlaka proporcionalan s duljinom cijevi i protokom te obrnuto proporcionalan s četvrtom potencijom promjera cijevi. Taj su zakon nezavisno jedan od drugoga eksperimentalno otkrili G. H. L. Hagen 1839. i J. L. Poiseuille 1840. godine. Hagen je bio njemački hidraulički inženjer, koji je eksperimentirao s mješanim cijevima ma-

lih promjera (2,5...6 mm), a Poiseuille je bio francuski liječnik, koji je istraživao snagu pumpanja srca, strujanje krvi u venama i u kapilarnim sudovima, i eksperimentirao s cijevima promjera 0,029...0,142 mm.

Tangencijalna naprezanja unutar fluida mogu se odrediti iz profila brzine (76) pomoću izraza (65),

$$\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{L} r. \quad (80)$$

Vidi se da su tangencijalna naprezanja τ_{rx} negativna i da tangencijalne sile djeluju u smjerovima suprotnim od onih pozitivno pretpostavljenih na sl. 10c, te da im apsolutna vrijednost

linearno pada od vrijednosti $|\tau_w| = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{L} r_0$ uz stijenku

cijevi na nulu na simetrali cijevi. Moglo bi se pomisliti da zbog pada apsolutne vrijednosti tangencijalnog naprezanja prema simetrali cijevi za održavanje strujanja nije potreban isti pad tlaka $p_1 - p_2$ u svim točkama presjeka 1—1 i 2—2. Međutim, na plaštu kružnog cilindra, koaksijalnoga sa simetralom cijevi i čitavoga ispunjenog fluidom, proizvoljnog polumjera r (uključujući i $r \rightarrow 0$) i duljine L , tangencijalna sila iznosi $F_{rx} = \tau_{rx} 2r \pi L = -(p_1 - p_2) r^2 \pi$, i jednaka je za bilo koji r razlici sila tlakova F_{p_1} i F_{p_2} na osnovkama takva zamišljenog cilindra. Ta razlika sila tlakova savladava tangencijalnu silu. Prema tome, tlakovi p_1 i p_2 ne zavise od r .

Laminarno strujanje u cijevi kružnog presjeka održava se samo pri niskim brzinama strujanja ili u malim promjerima cijevi, ispravnije formulirano, do kritičnog Reynoldsova broja (v. Dimenzijska analiza, TE 3, str. 340), tj. do

$$Re = \frac{v_{sr} D}{\nu} \leq Re_{krit} \approx 2300, \quad (81)$$

gdje je Re Reynoldsov broj s dimenzijom $[Re] = 1$, a v_{sr} srednja brzina strujanja. Srednja brzina strujanja je u ovom slučaju definirana izrazom (78) za protok

$$v_{sr} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{32\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} D^2 = \frac{1}{2} v_{max}, \quad (82)$$

iz čega slijedi da se kriterij (81) može pisati u obliku

$$\frac{Q}{\mu^2} \frac{p_1 - p_2}{L} D^3 \leq 73600. \quad (83)$$

Hagen-Poiseuilleova jednadžba (78) za protok može se upotrijebiti pri eksperimentalnom određivanju dinamičkog koeficijenta viskoznosti μ . Metoda se sastoji u mjerenju protoka Q ispitivane tekućine i pada tlaka ($p_1 - p_2$) preko određene duljine L kapilarne cijevi poznatog promjera D . Raspoložujući s ovim podacima, μ se izračuna pomoću jednadžbe (78)

$$\mu = \frac{\pi}{128} \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{D^4}{Q}. \quad (84)$$

Za primjenu te jednadžbe u mjerenjima mora biti zadovoljen kriterij (81), odnosno (83).

Couetteovo strujanje je laminarno strujanje između dviju paralelnih ravnih ploča od kojih jedna miruje, a druga se u svojoj vlastitoj ravnini giba brzinom U . Za nulti uzdužni gradijent tlaka $dp/dx = 0$ takvo je strujanje prikazano na sl. 6. Uzdužni gradijent tlaka mijenja profil brzine strujanja $v_x(y)$ (sl. 11). Strujanje je ravninsko, pravocrtno i paralelno s osi x , tako da su $v_y = v_z = 0$.

Ako se stavi $\sigma_{xx} = -p$, tada ukupna uzdužna komponenta površinske sile $dF_{\sigma_{xx}}$ na elementarni paralelepiped fluida volumena $dV = dx dy dz$, proračunana izrazima (42) i (65) iznosi

$$dF_{\sigma_{xx}} = \left(-\frac{dp}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} \right) dx dy dz = \left(-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \right) dx dy dz. \quad (85)$$

Element fluida ima konstantnu brzinu, a drugih uzdužnih masenih sila nema, pa stoga $dF_{\sigma_{xx}}$ mora biti jednak nuli, što daje

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx}. \quad (86)$$

Lijeva strana jednadžbe (86) je funkcija samo od y i zato mora biti $dp/dx = \text{const}$. Dvostruka integracija diferencijalne jednadžbe (86), uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} v_x &= 0 & \text{za } y &= 0 \\ v_x &= U & \text{za } y &= h, \end{aligned} \quad (87)$$

daje za profil brzine izraz

$$v_x = U \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (88)$$

gdje je U brzina gibanja gornje ploče u smjeru osi x .

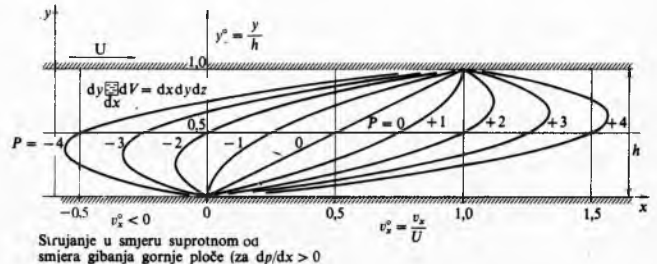
Pisan u bezdimenzijskom obliku, izraz (88) glasi

$$v_x^0 \frac{v_x}{U} = \frac{y}{h} + P \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (89)$$

gdje je P bezdimenzijski gradijent tlaka

$$P = \frac{h^2}{2\mu U} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (90)$$

Bezdimenzijski profil brzine (89) prikazan je na sl. 11 za vrijednosti $P = 0 \dots \pm 4$. Za $P > 1$, tj. pri smanjenju tlaka u smjeru gibanja ploče $dp/dx < 0$, brzina strujanja, kako pokazuje izraz (89), pozitivna je preko čitave širine kanala. Za $P < -1$ brzina strujanja postaje negativna na dijelu kanala uz nepomičnu ploču, tj. strujanje je u smjeru suprotnom od smjera gibanja gornje ploče. Naime, sile smičnog naprezanja prenošene od gornje ploče kroz slojeve fluida postaju na određenoj udaljenosti manje od sile pozitivnog uzdužnog gradijenta tlaka $dp/dx > 0$, koja na čestice fluida djeluje u smjeru suprotnom od smjera gradijenta, kao što pokazuje izraz (56).



Sl. 11. Couetteovo strujanje između dviju ravnih ploča. Ucrtane krivulje prikazuju bezdimenzijski profil brzine $v_x^0 = y/h + P y/h (1 - y/h)$, za vrijednosti $P = 0 \dots \pm 4$, gdje je $P = \frac{h^2}{2\mu U} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$, za $P > 0$ tlak pada, a za $P < 0$ tlak raste u smjeru osi x

Za $P = 1$ smično naprezanje uz gornju ploču jest $\tau_w = \mu (dv_x/dy)_{y=h} = 0$, pa za gibanje gornje ploče nije potrebna sila, a za $P > 1$ gornja ploča se mora zadržavati silom u smjeru suprotnom od smjera njena gibanja. Za $P = -1$ iščezava djelovanje sile na donju ploču.

Kad je $U = 0$, između ploča se uspostavlja parabolični profil brzine.

$$v_x = \frac{h^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (91)$$

s protokom preko presjeka jedinične širine okomito na sliku strujanja, tj. $\Delta z = 1$

$$Q = \int_0^h v_x(y) dy \cdot 1 = \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (92)$$

i srednjom brzinom strujanja

$$v_{sr} = \frac{Q}{h \cdot 1} = \frac{h^2}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{2}{3} v_{max}. \quad (93)$$

U paraboloidnom profilu brzine (76) Hagen-Poiseuilleova strujanja srednja brzina strujanja je polovica maksimalne brzine dane izrazom (82).

Viskoznost plinova i viskoznost kapljevine mijenja se s temperaturom. Viskoznost plinova raste s porastom temperature, a viskoznost kapljevine slabi. Tako za suhi zrak, s tlakom od 1,01325 bar, dinamički koeficijent viskoznosti poraste od $\mu = 1,72 \cdot 10^{-5}$ Pa s pri 0°C na $\mu = 2,18 \cdot 10^{-5}$ Pa s pri 100°C , a za destiliranu vodu, pri istom tlaku padne od $\mu = 1,792 \cdot 10^{-3}$ Pa s pri 0°C na $\mu = 0,282 \cdot 10^{-3}$ Pa s pri 100°C . Takvo ponašanje viskoznosti plinova i kapljevine tumači se različitim mehanizmom podrijetla pojave viskoznosti (unutrašnjeg trenja) u tim dvjema vrstama fluida.

Pojava viskoznosti u plinovima može se teoretski interpretirati na osnovi kinetičke teorije savršenog plina. Savršeni plin je definiran kao plin kojemu jednadžba stanja ima oblik (8). Ta jednadžba opisuje makroskopsku manifestaciju savršenog plina. U molekularno-kinetičkoj teoriji, koja ulazi u mikroskopsku molekularnu strukturu tvari, savršeni plin je takav plin u kojem se mogu zanemariti sile privlačenja (tzv. van der Waalsove sile) između molekula, pa se molekule identificiraju s pojmom materijalne točke iz mehanike. U svojem običnom stanju takvima se mogu prihvatiti plemeniti plinovi, zrak, elementarni plinovi kao što su vodik, kisik, dušik i dr. Važno je napomenuti da se ranije uvedeni model idealnog fluida, tj. idealni plin ili idealna kapljevine, kojemu je oduzeto svojstvo viskoznosti, pojmovno razlikuje od savršenog plina i stoga ih se mora kroz ove nazive tako i razlikovati. (Kombinirani model idealnoga savršenog plina, koji ima određeni smisao u mehanici fluida, ali ne i u molekularno-kinetičkoj teoriji, jest plin koji slijedi jednadžbu stanja (8), a oduzeto mu je svojstvo viskoznosti.)

Prema kinetičkoj teoriji savršenog plina molekule plina nalaze se u neprekidnom kaotičnom gibanju sa slučajnim veličinama i smjerovima brzine. Udaranje molekula o stijenku posude, u kojoj je zatvoren plin, proizvodi tlak

$$p = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{3} m N \overline{c^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{c^2}, \quad (94)$$

gdje je m masa molekule, N broj molekula u jedinici volumena (tako da je $mN = \rho$), a $\overline{c^2}$ je srednja vrijednost kvadrata brzina kaotičnog gibanja molekula. Jednadžba stanja savršenog plina (8) može se napisati i u obliku

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_0}{M} T, \quad (95)$$

gdje je R_0 univerzalna plinska konstanta $8,3143 \text{ J/(K mol)}$, a M je molna masa, $[M]_{SI} = \text{kg/mol}$. Jednadžba (95) kombinirana sa (94) daje

$$\overline{c^2} = 3 \frac{R_0}{M} T. \quad (96)$$

Ta jednakost pokazuje da srednja vrijednost kvadrata brzina kaotičnog gibanja molekula zavisi od temperature i od prirode plina. Pisana u drugom obliku,

$$\frac{M \overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} R_0 T, \quad (97)$$

pokazuje da molna kinetička energija kaotičnog gibanja molekula savršenog plina zavisi samo od temperature.

Ako se uvede Avogadrov broj $N_A = M/m = 6,0225 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$, konstantan za sve tvari, i Boltzmannova konstanta $k = R_0/N_A = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, koja omogućuje direktno mjerenje temperature u energetske jedinici, jednadžba (97) može se pisati i u obliku

$$\frac{m \overline{c^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R_0}{N_A} T = \frac{3}{2} k T, \quad (98)$$

koji pokazuje da srednja kinetička energija pojedine molekule savršenog plina $m \overline{c^2}/2$ zavisi samo od temperature.

Viskoznost plinova, kao i vodljivost topline i difuzija, jedna je od pojava (molekularnog) prijenosa (količine gibanja, toplinske energije i mase), kojima se mehanizmi procesa mogu rastumačiti kinetičkom teorijom jednostavnog modela savršenog plina. Analiza otkriva kvalitativnu zavisnost viskoznosti plina od temperature i potvrđuje nezavisnost od manjih promjena tlakova, ali ne daje kvantitativne vrijednosti koje bi se slagale s eksperimentima.

D. M. Sutherland, uzimajući u obzir i intermolekularne sile, koje su u hipotezi savršenog plina zanemarene, dobiva za promjenu viskoznosti plina s temperaturom izraz

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + (S/T_0)}{1 + (S/T)}, \quad (99)$$

gdje je μ_0 vrijednost viskoznosti pri temperaturi T_0 , a S je konstantna temperatura. Za suhi je zrak $S = 110,4 \text{ K}$ i uz $\mu_0 = 1,716 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ pri $T_0 = 273,15 \text{ K}$ (99) postaje

$$\{\mu\} = 1,4579 \cdot 10^{-6} \frac{(\{T\})^3}{\{T\} + 110,4}, \quad (100)$$

gdje je $\{\mu\}$ u Pa s, a $\{T\}$ u K.

U dinamici plinova za orijentacijske proračune upotrebljava se jednostavniji izraz oblika

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^\omega, \quad (101)$$

gdje ω zavisi od T/T_0 , a približno se može uzeti konstantna vrijednost $\omega = 0,76$.

Zavisnost viskoznosti realnih plinova od gustoće (tlaka), obično se izražava empiričkim izrazima oblika

$$\mu_{p,T} = \mu_T + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n, \quad (102)$$

gdje je $\mu_T = f(T)$.

Intermolekularne sile, koje su se u kinetičkoj teoriji viskoznosti savršenog plina mogle zanemariti, za viskoznost kapljevine veoma su važne, a prijenos količine gibanja između slojeva tek je neznatni dio viskoznog otpora u kapljevina. Molekule kapljevine toliko su bliske jedna drugoj da se za svladavanje intermolekularnih sila privlačenja pri povlačenju jednoga molekularnog sloja preko njegova susjednog mora potrošiti znatna energija. U kapljevina u stanju makroskopskog mirovanja molekule povremeno imaju dovoljno toplinske energije da svladaju barijeru potencijalne energije polja sile privlačenja između molekula i da skoče iz svog položaja u susjedni ravnotežni položaj, pri čemu su svi smjerovi skoka jednako vjerojatni i ne postoji strujanje u bilo kojem smjeru. Ako se na sloj molekula u nekoj ravnini primijeni tangencijalna sila, mehaničkim radom na molekule toplinska energija potrebna za pomicanje molekula u smjeru tangencijalne sile je smanjena, a za pomicanje u suprotnom smjeru je povećana. Prema tom pojednostavnjenom modelu, a rigoroznija teorija ne postoji, viskoznost kapljevine potječe od intermolekularnih sila i mogućnosti toplinskih fluktuacija potpomognutih tangencijalnom silom koja proizvodi strujanja u tom smjeru. Stoga se viskoznost kapljevine smanjuje ako se temperatura povećava (upravo suprotno od plinova), i povećava s povećanjem tlaka, jer se molekule zbijaju bliže jedna drugoj, pa je za skokove molekula kroz energetske barijere intermolekularnih sila potreban veći rad. Obje ove promjene viskoznosti eksponencijalnog su karaktera, ona s temperaturom negativnog, a s tlakom pozitivnog eksponenta.

Za kapljevine zavisnost viskoznosti od temperature ima opći oblik

$$\mu = \mu_0 \exp \left(\frac{B}{C+T} - \frac{B}{C+T_0} \right), \quad (103)$$

gdje je μ_0 dinamički koeficijent viskoznosti pri T_0 , a temperaturne konstante B i C zavise od vrste kapljevine. Za destiliranu i odzračenu vodu je pri tlaku 1,01325 bar i $T_0 = 273,15 \text{ K}$: $\mu_0 = 1,792 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$, $B = 511,6 \text{ K}$ i $C = -149,4 \text{ K}$, pa je

$$\{\mu\} = 1,792 \cdot 10^{-3} \exp \left(\frac{511,6}{\{T\} - 149,4} - 4,1341 \right), \quad (104)$$

gdje je $\{\mu\}$ u Pa s, a $\{T\}$ u K.

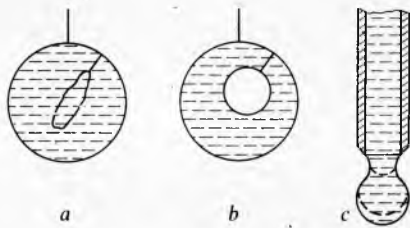
Opća zavisnost viskoznosti od tlaka ima oblik

$$\mu = \mu_0 \exp [\alpha(p - p_0)] \text{ uz } T = T_0 = \text{const.}, \quad (105)$$

gdje koeficijent α (u $1/\text{Pa}$) zavisi od vrste kapljevine.

Površinska napetost. Slobodna površina kapljevine kao razdjelna ili dodirna površina dviju različitih sredina, npr. granica vode i zraka, žive i zraka, itd., ponaša se u određenim prilikama na poseban način, o čemu svjedoče mnogi jednostavni eksperimenti. Kad se u tankom sloju sapunice razapetom unu-

tar žičanog okvira, u kojem pliva zatvorena petlja niti (sl. 12a), uništi sloj sapunice unutar petlje, petlja zauzme oblik savršene kružnice (sl. 12b), tj. oblik koji od svih geometrijskih likova ima najmanji opseg. Ta težnja prema minimumu razdjelne površine dviju sredina pokazuje se nastojanjem kaplje u zraku (sl. 12c) ili mjehurica plina u kapljevinu (npr. mjehurici CO₂ u soda vodi) da zauzmu oblik kugle, koja od svih geometrijskih tijela ima za zadani volumen najmanje oplošje. Male kapljice žive ujediniuju se u veliku kaplju, kojoj je površina manja od zbroja površina manjih kapljica. U tim površinskim pojavama sudjeluju samo molekule koje se nalaze u razdjelnoj površini kapljevine. Budući da s povećanjem dimenzija prostora, koji zauzima kapljevinu, broj površinskih molekula postaje vrlo malen u usporedbi s brojem molekula u osnovnom volumenu, to površinski učinci za veće mase postaju zanemarivi. Tako se u većim masama težnja kapljevine da zauzme sferni oblik kaplje suprotstavlja sila teže, dok je u malenim kapljicama to djelovanje slabo i njihov je oblik blizak sfernom. Isto tako, kad nema masenih učinaka proporcionalnih s volumenom, npr. u bestežinskom stanju, proizvoljna slobodna masa kapljevine zauzima u plinu sferni oblik.



Sl. 12. Uz pojavu površinske napetosti

Molekule razdjelne (slobodne) površine okružene su samo s jedne strane istovrsnim molekulama, dok su s druge strane okružene molekulama onoga drugog fluida s kojim su u dodiru preko te površine. Zbog toga je energija molekula u polju intermolekularnih sila u površinskom sloju različita od energije molekula u unutrašnjoj osnovnoj masi fluida, u kojoj su molekule okružene sa svih strana istovrsnim molekulama. Razlika između energije svih molekula obiju sredina u blizini razdjelne površine i energije koju bi te molekule imale, kad bi se nalazile u unutrašnjosti, naziva se *površinskom energijom*. Povezano s tom dodatnom energijom razdjelne površine u sustavu se javljaju takve unutrašnje sile koje nastoje dovesti sustav u stanje minimalne energije, tj. takve sile koje nastoje što više umanjiti razdjelnu površinu, što potvrđuju i eksperimenti prikazani na sl. 12. Budući da intermolekularne sile vrlo naglo slabe s udaljenostima između molekula, površinska energija je praktički koncentrirana u vrlo tankom jednomolekularnom sloju razdjelne površine.

Očito je da je površinska energija E_S proporcionalna broju molekula u površinskom sloju, prema tome i mjernom broju slobodne površine S ,

$$E_S = \sigma S, \quad (106)$$

gdje je E_S površinska energija s dimenzijom $[E_S] = ML^2T^{-2}$, dakle $[E_S]_{SI} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{J}$, σ koeficijent površinske napetosti s dimenzijom $[\sigma] = MT^{-2}$, dakle $[\sigma]_{SI} = \text{kg}/\text{s}^2 = \text{N}/\text{m} = \text{J}/\text{m}^2$, a S mjerni broj razdjelne (slobodne) površine.

Koeficijent σ zavisi od vrste dodirnih fluida i njihova stanja. To je pozitivna veličina, jer bi u protivnom slučajju razdjelna površina težila neograničenom povećanju, tj. dodirni fluidi bi se međusobno pomiješali.

Ako se unutar okvira, prikazanog na sl. 13, kojemu je štap AB pomičan u smjeru x , razapne tanki sloj kapljevine (npr. sapunice), za održavanje tog sloja u okviru potrebno je priložiti vanjsku silu F . Ta je sila u ravnoteži sa silama kojima rub sloja fluida djeluje u suprotnom smjeru na štap AB , u težnji da smanji razdjelnu površinu. Ako se djelovanjem sile F štap AB pomakne za dx u smjeru x , čime slobodna površina na obje strane sloja priraće za $dS = 2l dx$, izvršenim radom $dW = F dx$ povećava se prema (106) površinska energija za

$dE_S = \sigma dS = \sigma 2l dx$. Izjednačenjem izvršenog rada s priraćom energije dobiva se

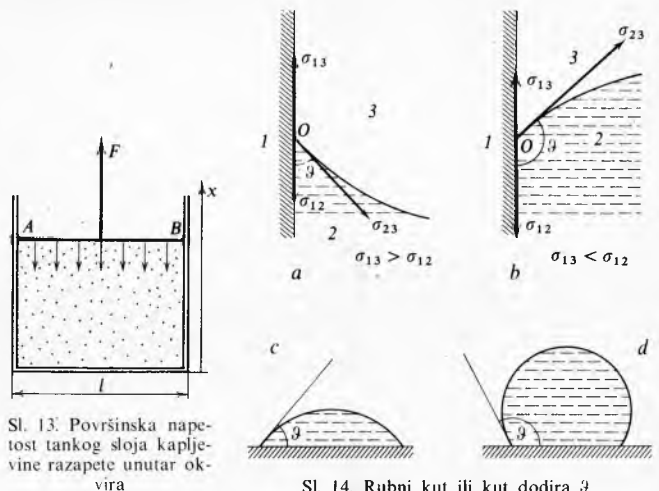
$$F = \sigma 2l. \quad (107)$$

Faktor 2 prisutan je zbog dviju strana slobodne površine sloja razapetog u okviru. U izrazu za silu na rubnoj konturi jednodijelne slobodne površine, ispod koje je masa fluida, nestaje faktor 2, pa se za element sile dF na elementu ds rubne konture razdjelne površine dviju sredina može općenito pisati

$$dF = \sigma ds. \quad (108)$$

S definicijom koeficijenta površinske napetosti σ prema izrazu (106) kao površinske energije na jedinicu površine, izraz (108) dozvoljava definiciju σ kao sile na jedinicu duljine rubne konture razdjelne površine.

Iz tih se razmatranja zaključuje da se površinski sloj razdjela dvaju različitih fluida ponaša kao napeta membrana, preko čijeg ruba djeluju unutrašnje sile tangencijalno na razdjelnu površinu u smjeru unutrašnje normale na rubnu konturu. Površinska se napetost ipak bitno razlikuje od elastične napetosti, npr. gumene membrane, po tome što pri povećanju ili smanjenju slobodne površine zadržava istu vrijednost, dok se elastična napetost mijenja u istom smislu s promjenom površine. Intenzitet unutrašnjih sila izražen na jedinicu duljine konture jednak je koeficijentu površinske napetosti σ . Zbog toga prisutnost razdjelnih slobodnih površina između fluida uvodi posebnu kategoriju pojava koje se nazivaju *kapilarnim pojavama*, u kojima je učinak površinske napetosti fundamentalan. Od tih pojava razmotrit će se kut dodira i skok tlaka preko zakrivljene slobodne površine.



Sl. 13. Površinska napetost tankog sloja kapljevine razapete unutar okvira

Sl. 14. Rubni kut ili kut dodira ϑ

Neka su uzduž neke konture u dodiru tri različite tvari: kruto tijelo, kapljica i plin, označeni indeksima 1, 2 i 3 na slici 14, gdje je sa O označeno presjecište konture s ravninom slike. Uzduž dodirne konture ucrtane su tri unutrašnje sile površinske napetosti, od kojih je svaka usmjerena tangencijalno na dodirnu površinu pripadnih dviju sredina u smjeru unutrašnje normale. Izražene po jedinici duljine, te su sile jednake pripadnim koeficijentima površinske napetosti σ_{12} (kruto tijelo—kapljica), σ_{23} (kapljica—plin) i σ_{13} (kruto tijelo—plin). Kut ϑ između površine kapljevine i ravne stijenke krutog tijela zove se *rubni kut* ili *kut dodira*. Veličina tog kuta određuje se uvjetom mehaničke ravnoteže, koja ne dozvoljava da postoji komponenta rezultante tih triju sila uzduž stijenke krutog tijela (komponenti tih sila okomito na stijenku suprotstavlja se stijenka), tako da mora biti

$$\sigma_{13} - \sigma_{12} - \sigma_{23} \cos \vartheta = 0, \quad (109)$$

iz čega slijedi

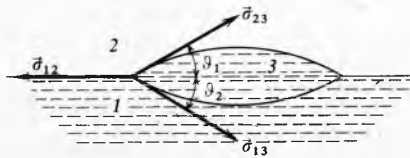
$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}. \quad (110)$$

Ako je površinska napetost između plina i stijenke krutog tijela veća nego između kapljevine i krutog tijela, tj. ako je $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, tada je $\cos \vartheta > 0$ a kut dodira je oštar (sl. 14 a i c). U tom slučaju kaže se da kapljevina kvasi krutu površinu, a površina da je *hidrofilna*. Ako je $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, tada je kut dodira tup (sl. 14 b i d), pa se kaže da kapljevina ne kvasi površinu, a površina da je *hidrofobna*. Primjer prve kombinacije je dodir vode i čistog stakla ($\vartheta = 0$), a druge dodir žive i čistog stakla ($\vartheta = 150^\circ$) te vode i parafina ($\vartheta = 105^\circ$), sve u zraku kao trećem mediju.

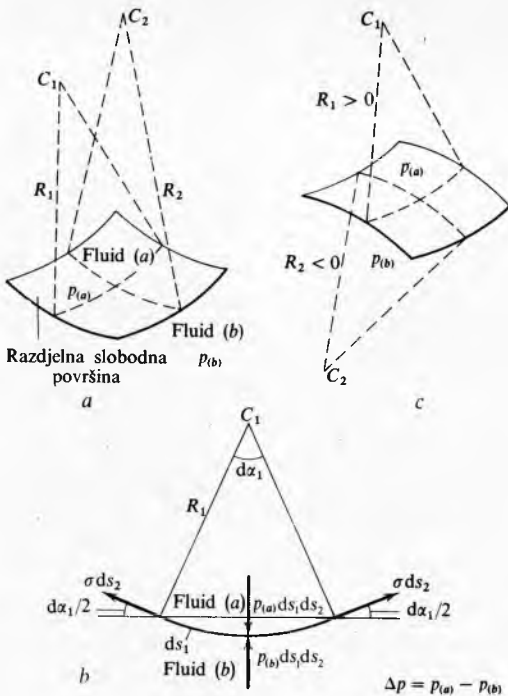
Ako od tri različite tvari u dodiru ni jedna nije kruta, npr. kaplja jedne kapljevine (3) na površini druge kapljevine (1), obje u dodiru s plinom (2), sl. 15, tada se kutovi dodira ϑ_1 i ϑ_2 određuju iz uvjeta ravnoteže pisanog u vektorskom obliku

$$\vec{\sigma}_{12} + \vec{\sigma}_{13} + \vec{\sigma}_{23} = 0. \quad (111)$$

Taj uvjet pokazuje da svaka pojedina od apsolutnih vrijednosti vektora σ_{12} , σ_{13} i σ_{23} ne smije biti veća od zbroja ostalih dviju, niti manja od njihove razlike. Ako to nije zadovoljeno, ravnoteža se ne može uspostaviti. Tako je u kombinaciji ulje, voda i zrak površinska napetost vode protiv zraka $\sigma_{12} = 0,0728$ N/m mnogo veća od zbroja površinskih napetosti ulja protiv zraka $\sigma_{23} = 0,0330$ N/m i ulja protiv vode $\sigma_{13} = 0,0182$ N/m. Kao posljedica takva odnosa, površinska napetost σ_{12} voda—zrak razvlači uljnu kaplju na vodi, tako da se ulje na vodi raširi u vrlo tanki površinski sloj reda veličine 10^{-6} mm. Tanji se slojevi ne formiraju već se raspadaju, čime se pokazuje da je debljina sloja reda veličine promjera molekule, tzv. monomolekularni sloj.



Sl. 15. Kutovi dodira dviju kapljevine i plina



Sl. 16. Skok tlaka preko zakrivljene razdjelne površine dvaju fluida

Za zakrivljenu slobodnu površinu, koja dijeli dva fluida (a) i (b), površinska napetost uzrokuje diskontinuitet ili *skok tlaka* pri prolazu kroz površinu. Na sl. 16 a i c izrezan je iz zakrivljene slobodne površine element plohe omeđen lukovima ds_1 i ds_2 .

Pretpostavlja se da je u promatranoj točki ploha dvostruko zakrivljena, s glavnim polumjerima zakrivljenosti R_1 i R_2 koji su prema dogovoru pozitivni kad su središta zakrivljenosti, C_1 i C_2 na strani fluida (a) u kojem vlada tlak $p_{(a)}$. U skladu s tim dogovorom, na sl. 16c koja pokazuje sedlastu plohu, polumjer je zakrivljenosti R_2 negativan jer se C_2 nalazi na strani fluida (b) u kojem vlada tlak $p_{(b)}$. Pri proračunu skoka tlaka $\Delta p = p_{(a)} - p_{(b)}$ postavlja se jednadžba ravnoteže svih sila, koja uz $ds_1 = R_1 d\alpha_1$, $ds_2 = R_2 d\alpha_1$ i $\sin(d\alpha_1/2) \approx d\alpha_1/2$, $\sin(d\alpha_2/2) \approx d\alpha_2/2$, za smjer djelovanja tlakova prema sl. 16b poprima oblik

$$-p_{(a)} ds_1 ds_2 + p_{(b)} ds_1 ds_2 + 2\sigma ds_2 \frac{ds_1}{2R_1} + 2\sigma ds_1 \frac{ds_2}{2R_2} = 0. \quad (112)$$

Odatle slijedi

$$\Delta p = p_{(a)} - p_{(b)} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (113)$$

U izrazu (113) polumjeri su zakrivljenosti R pozitivni kad su pripadna središta zakrivljenosti na strani na kojoj vlada tlak $p_{(a)}$.

Na kuglinoj je površini $R_1 = R_2 = R$, pa je u fluidu unutar sferne kaplje ili sferne šupljine tlak za $\Delta p = 2\sigma/R$ veći od tlaka u okolišnom fluidu.

Za šuplju kuglu s istovrsnim vanjskim i unutrašnjim fluidom (npr. balon od sapunice) skok tlaka preko opne iz vanjskog u unutrašnji prostor iznosi $\Delta p = 4\sigma/R$. Taj izraz, kao i izraz (113), pokazuje da se skok tlaka povećava sa smanjenjem polumjera kugle. Stoga, ako se dva balona od sapunice međusobno spoje cjevčicom, tada će manji balon kroz tu cjevčicu napuhavati veći balon dok ga potpuno ne nestane. Ta je pojava potpuno suprotna ponašanju dvaju napuhanih i međusobno spojenih gumenih balona.

Ako je slobodna površina dio kružne cilindrične plohe, na kojoj je $R_1 = R$, a $R_2 = \infty$, skok tlaka jest $\Delta p = \sigma/R$.

Za ravnu je razdjelnu plohu $R_1 = R_2 = \infty$, pa preko takve plohe ne postoji skok tlaka, tj. $\Delta p = 0$.

STATIKA FLUIDA

Statika fluida proučava fluid u stanju mirovanja. U statičkom fluidu nema tangencijalnih naprezanja ni gibanja čestica, što omogućuje i pojednostavnjuje matematičko opisivanje i analizu pojava, pa je stoga statika fluida najezgakniji dio mehanike fluida. Osnovni je zadatak statike fluida da odredi raspored normalnih tlačnih naprezanja unutar fluida. U praktičnoj primjeni to omogućuje proračun sila koje djeluju na elemente konstrukcija okruženih fluidom u stanju mirovanja. U statiku fluida uključeni su obično i problemi fluida u relativnom mirovanju, kad nema relativnog pomaka čestica jednih prema drugima, već se čitav fluid giba poput krutog tijela.

Jednadžba ravnoteže i Pascalov zakon. Jednadžba ravnoteže fluida u mirovanju, izraz (59), može se pisati u obliku

$$\text{grad } p = \rho \vec{f}, \quad (114)$$

ili u komponentama pravokutnoga koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho f_z. \end{aligned} \quad (114a)$$

Pomnoži li se jednadžba ravnoteže (114) skalarno s $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, dobiva se izraz za diferencijal tlaka pri tom pomaku u prostoru

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz). \quad (114b)$$

Ako ne postoje masene sile, $\vec{f} = 0$, npr. fluid u bestežinskom stanju, tada je $\text{grad } p = 0$, pa je tlak u svim točkama kapljevine ili plina isti. Ta činjenica, poznata kao *Pascalov zakon*, izražava