

$\varrho_c$ , koja se potpuno uključila u rotacijsko gibanje fluida gustoće  $\varrho_n$ . Djelovanje fluida na stranu čestice manifestira se elementarnim silama tlakova (sl. 55b)

$$d\vec{F}_n = -\vec{n}pdS_c \quad (207)$$

preko površine čestice  $S_c$ . Rezultanta elementarnih sila tlaka jest

$$\begin{aligned} F_n &= -\int_{S_c} \vec{n}pdS_c = -\int_{V_c} \text{grad } p dV = -\int_{V_c} \varrho_n \vec{f} dV_c = \\ &= -\int_{V_c} (-\varrho_n g \vec{k} + \varrho_n \omega^2 r \vec{e}_r) dV_c, \end{aligned} \quad (207a)$$

ili

$$\vec{F}_n = +G_n \vec{k} - m_n \omega^2 r_c \vec{e}_r, \quad (207b)$$

gdje je za nestlačivi fluid:  $G_n = \varrho_n g V_c$  absolutna vrijednost težine fluida istisnutog česticom,  $+G_n \vec{k}$  hidrostatski ili Arhimedov uzgon,  $m_n = \varrho_n V_c$  masa fluida istisnutog česticom,  $r_c$  udaljenost težišta volumena čestice  $V_c$  od osi rotacije, a  $-m_n \omega^2 r_c \vec{e}_r$  dodatna sila uzgona zbog centrifugalne komponente gradijenta tlaka, koja djeluje prema osi rotacije i općenito ne prolazi kroz težište volumena  $C$  (sl. 55c). Izraz (207a) je razvijen pomoću integralnog poučka Gauss-Ostrogradskoga (46b) i izraza (193) za rezultantnu masenu силу.

Dalja sudbina čestice zavisi od njene mase. Naime, u gravitacijskom Zemljinu polju i u polju centrifugalne sile na masu čestice djeluje rezultantna sila

$$\vec{F}_c = -G_c \vec{k} + m_c \omega^2 r_c \vec{e}_r, \quad (207c)$$

gdje je za homogenu česticu:  $G_c = \varrho_c g V_c$  absolutna vrijednost težine čestice, a  $m_c = \varrho_c V_c$  masa čestice. Rezultantno djelovanje na česticu jednako je zbroju sila (207b) i (207c), sl. 55c,

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_c = (G_n - G_c) \vec{k} - (m_n - m_c) \omega^2 r_c \vec{e}_r. \quad (208)$$

Iz toga je očito da će se čestica lakša od fluida,  $\varrho_n > \varrho_c$ , gibati prema gore i prema osi vrtnje te će isplivati na slobodnu površinu (sl. 55c). Obratno, ako je  $\varrho_n < \varrho_c$ , čestica će padati prema dolje i udaljavat će se od osi vrtnje.

Na tom načelu djeluju centrifugalni separatori. Tako u centrifugama za proizvodnju maslaca, zrnca formiranog maslaca specifički su lakša od okolišne vodenaste sirutke, pa isplivavaju na slobodnu površinu i skupljaju se u blizini osi centrifuge.

Pri rotaciji manjih masa stlačivog fluida može se zanemariti utjecaj gravitacije, pa diferencijal tlaka (195) poprima oblik

$$dp = \varrho \omega^2 r dr. \quad (208a)$$

Za integraciju tog izraza potrebno je poznavati odnos tlaka i gustoće, koji zavisi od termodinamičkog procesa.

Za savršeni plin, koji slijedi zakon jednadžbe stanja (8), i za izotermički proces odnos gustoće i tlaka dan je izrazom

$$\varrho = \frac{p}{R T_0}, \quad (209)$$

gdje je  $T_0$  konstantna temperatura plina. Ako se uvrsti taj odnos u diferencijal tlaka (208), dobiva se nakon integracije

$$p(r) = p_0 \exp\left(\frac{\omega^2}{2R T_0} r^2\right), \quad (209a)$$

gdje je  $p_0$  tlak na osi rotacije fluida. Toj promjeni tlaka odgovara promjena gustoće

$$\varrho(r) = \varrho_0 \exp\left(\frac{\omega^2}{2R T_0} r^2\right). \quad (209b)$$

Slično se dokaže da je za općeniti politropski proces  $p/\varrho^n = p_0/\varrho_0^n$  plina u jednolikoj rotaciji

$$p(r) = \frac{1}{p_0^{n-1}} \left| p_0 + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \varrho_0 \omega^2 r^2 \right|^{\frac{n}{n-1}}, \quad (209c)$$

gdje su  $p_0$  i  $\varrho_0$  tlak i gustoća uzduž osi rotacije.

## KINEMATIKA FLUIDA

Kinematika fluida opisuje gibanje fluida u vremenu i prostoru. Ako se podje od hipoteze o fluidu kao kontinuumu ili neprekidnoj sredini, omogućen je i takav opis koji vremenski i prostorno promjenljivim skalarnim, vektorskim i tenzorskim poljima odjednom zahvaća i cijelovito ponašanje fluida i ponašanje pojedinih njegovih čestica. Kinematika fluida ne ulazi u uzroke gibanja, zato u razmatranjima i opisima ne uzima u obzir sile. Ona klasificira strujanja prema njihovim osobitostima i razvija fizikalno-matematički aparat za njihovo opisivanje. Premda je tim aparatom i sama u stanju generirati različite modele strujanja, potpuna iskoristivost kinematike fluida realizira se njenom ulogom i primjenom u dinamici fluida.

**Prostor i vrijeme u Newtonovoj mehanici.** Prostor je skup točaka kojih je položaj određen koordinatama. U Euklidovu se prostoru sve točke mogu zadati koordinatama samo jednog kartezijskog koordinatnog sustava. U takvu prostoru je udaljenost između dviju točaka  $P(x_1, y_1, z_1)$  i  $Q(x_2, y_2, z_2)$  dana formулом

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (210a)$$

a kvadrat udaljenosti dviju bliskih točaka

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (210b)$$

Prostor vezan uz ravlinu dvodimenzionalni je Euklidov prostor. Prostor vezan uz sfersku površinu nije Euklidov prostor, ali se u neposrednom okolišu točke na sferskoj površini može podići kartezijski koordinatni sustav, pa se i takav prostor može smatrati Euklidovim.

Newtonovi zakoni gibanja formulirani su u Euklidovu prostoru. Ti zakoni imaju najjednostavniji oblik u inercijalnim sustavima. Takvih sustava je beskonačno mnogo i u svima su svojstva prostora i vremena jednaka i jednaki su svi zakoni mehanike. Ta eksperimentalno provjerena činjenica sadržaj je Galilejevih načela relativnosti.

Newtonova mehanika također je temeljena na apsolutnosti vremena. Naime, ako se jedan koordinatni sustav  $O$  u kojem neka točka ima radijektor  $\vec{r}$  giba translatory i pravocrtno konstantnom brzinom  $\vec{u}_0$  relativno prema drugom koordinatnom sustavu u kojem ta ista točka ima radijektor  $\vec{r}_1$ , tada je tok vremena u tim dvama sustavima jednak, tj.

$$t_1 = t, \quad (211a)$$

a radijektori  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}$  povezani su Galilejevom transformacijom

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{u}_0 t + \vec{r}_{10}, \quad (211b)$$

gdje je  $\vec{r}_{10}$  radijektor ishodišta  $O$  u sustavu  $O_1$  u početnom vremenskom trenutku  $t = 0$ .

Jednakost (211a) je pretpostavka apsolutnosti vremena i valjana je za brzine gibanja koje su mnogo manje od brzine svjetlosti. Kao što je poznato, u teoriji relativnosti ta pretpostavka nije valjana. U sustavima povezanim Galilejevom transformacijom (211b) zakoni Newtonove mehanike su identičnog oblika.

Strujanje fluida određuje se s obzirom na određeni koordinatni sustav. Premda u mehanici fluida važnu primjenu imaju različiti krivocrtni koordinatni sustavi, u ovom su članku teoretski izvodi formulirani ili u općem vektorskem obliku, nezavisnom od određenoga koordinatnog sustava, ili u pravokutnom kartezijskom (Descartesovu) sustavu  $Oxyz$ . Ovom se sustavu, osim jednostavnosti, ne pridaju nikakve druge prednosti, pa će se dati i formule kojima se pojedine formulacije mogu prikazati i u općim ortogonalnim krivocrtnim koordinatama  $q_1, q_2, q_3$ .

Mehanika fluida se mnogo oslanja na diferencijalni i integralni račun. Stoga se pretpostavlja da su funkcije koje opisuju gibanje fluida konačne i neprekidne i da imaju konačne parcijalne derivacije po svojim argumentima. Gibanja fluida podvrgnuta tim ograničenjima nazivaju se neprekidnim gibanjima. U takvu gibanju fluida relativna brzina dviju susjednih čestica bit će uvijek beskonačno malena, pa će i duljina njihove spojnica ostati uvijek istog reda veličine.

**Ortogonalne krivocrtne koordinate.** Položaj točke  $M$  u prostoru određen je radijvektorom  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (212)$$

i položaj točke  $M$  u prostoru potpuno je određen sjecištem triju ravnina  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  i  $z = \text{const.}$

Za određivanje položaja točke u prostoru mogu poslužiti i različite druge grupe od po tri površine, zakrivljene ili ravne, kojih sjecište određuje taj položaj. Svaku takvu površinu dodjeljuje se broj po kojem se ona prepozna, pa trojka brojeva  $(q_1, q_2, q_3)$  određuje položaj točke  $M(q_1, q_2, q_3)$  sjecištem površina (sl. 56a):

$$q_1 = \text{const.}, \quad q_2 = \text{const.}, \quad q_3 = \text{const.} \quad (213)$$

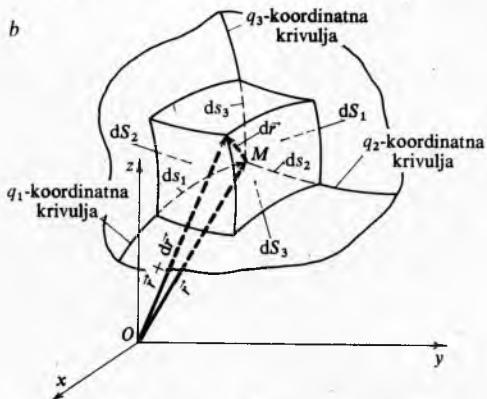
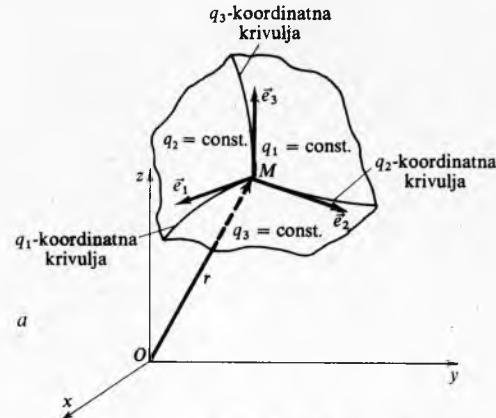
Ako se trojkama brojeva  $(q_1, q_2, q_3)$  i  $(x, y, z)$  opisuje položaj istih točaka u prostoru, tada one moraju biti u određenim funkcionalnim odnosaima

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z), \\ q_2 &= q_2(x, y, z), \\ q_3 &= q_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (214a)$$

i inverzno

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned} \quad (214b)$$

Kroz svaku točku prostora prolazi samo po jedna koordinatna površina od svake u trojki površina (213). Presjecište dviju koordinatnih površina određuje koordinatnu krivulju, tako da je, npr., krivulja  $q_1$  presjecište površine  $q_2$  i površine  $q_3$ . Uzduž svake koordinatne krivulje mijenja se samo ona koordinata koja daje naziv toj koordinatnoj krivulji.



Sl. 56. Ortogonalne krivocrtne koordinate

Jedinični vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  tangencijalni su na koordinatne krivulje u točki koju koordinate definiraju i gledaju u smjeru porasta pripadne koordinate. Pri ortogonalnim krivocrtnim koordinatama koje se razmatraju jedinični su vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  međusobno okomiti. Za razliku od jediničnih vektoru  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , koji su u kartezijskom pravokutnom sustavu konstantni vektori, jedinični vektori ortogonalnih krivocrtnih koordinata se mijenjaju od točke do točke.

Sustavom funkcija (214b) radijvektor  $\vec{r}$  može se izraziti krivocrtnim koordinatama

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (214c)$$

Pri graničnom prijelazu, kojim se definiraju parcijalne derivacije radijektora  $\vec{r}$  po koordinatama  $q_1, q_2, q_3$ , vrh radijektora šeće po odgovarajućoj koordinatnoj krivulji i stoga se može pisati

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = H_1 \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = H_2 \vec{e}_2, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = H_3 \vec{e}_3, \quad (215)$$

gdje se, primjenom (212) i funkcija (214b), za Laméove (G. Lamé) koeficijente  $H_1, H_2, H_3$  dobivaju izrazi:

$$H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2},$$

$$H_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2}, \quad (215a)$$

$$H_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2}. \quad (215b)$$

Ortogonalnost krivocrtnih koordinata izražava se sa

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0, \quad (216)$$

što se, uz parcijalnu derivaciju  $r^i$  po  $i$ -toj koordinati

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \hat{k}, \quad (216a)$$

moe izraziti u obliku triju jednakosti tipa

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0, \quad \text{za } \begin{cases} i \neq j, \\ i = 1, 2, 3, \\ j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (216b)$$

Diferencijal radijektora (214c), primjenom izraza (215), poprima u krivocrtnim koordinatama oblik

$$dr = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3. \quad (217)$$

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3 \quad (217a)$$

$$ds = |\vec{dr}| = \sqrt{H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2}. \quad (217b)$$

Elementarni krivocrtni paralelepiped što ga zatvaraju koordinatne površine (sl. 56b)

$$q_1 = \text{const.} \quad q_1 + dq_1 = \text{const.} \quad (218)$$

$$q_2 = \text{const.} \quad q_2 + dq_2 = \text{const.} \quad (218)$$

$$q_3 = \text{const.} \quad q_3 + dq_3 = \text{const.} \quad (218)$$

ima za bridove lukove (217a), tako da mu je merni broj volumena

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (218a)$$

Taj je volumen omeđen elementima koordinatnih površina

$$dS_1 = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

$$dS_2 = ds_3 ds_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1,$$

$$dS_3 = ds_1 ds_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2.$$

Za izražavanje pojedinih diferencijalnih operatora u krivocrtnim koordinatama poslužit će izrazi koje je lako dokazati:

$$\nabla = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (219)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220a)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220b)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \vec{e}_3 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_3, \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \vec{e}_3, \quad (220c)$$

Od čitave historije pojedinih čestica fluida interesantan je samo onaj njen dio kad čestice prolaze određenim točkama prostora, npr. točkama brodske oplate, točkama površine krila, točkama površine i prostora sapnici i sl. Eulerove su varijable koordinate točaka prostora  $\vec{r}(x, y, z)$  i vrijeme  $t$ , pa je gibanje fluida opisano skalarnim, vektorskim i tenzorskim poljima, npr.:

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, t) & \vec{v} &= \vec{v}(x, y, z, t) \\ \varrho &= \varrho(x, y, z, t) & \vec{a} &= \vec{a}(x, y, z, t) \\ T &= T(x, y, z, t) & T_\sigma &= T_\sigma(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (221)$$

Te funkcije daju sljedeće podatke:

(a) Ako su u funkcijama (221) koordinate točke  $x, y, z$  fiksne, one daju vremensku promjenu tlaka, gustoće, temperature, brzine, akceleracije i tenzora naprezanja u toj točki za vrijeme dok u tu točku ulaze i iz nje izlaze različite čestice fluida.

(b) Pri fiksnom vremenu  $t$  funkcije (221) daju prostorni raspored mehaničkih i termodynamičkih veličina povezanih s gibanjem fluida u tom vremenskom trenutku.

(c) Pri promjenljivim koordinatama  $x, y, z$  i promjenljivom vremenu  $t$  funkcije (221) daju prostorno vremenski zakon promjene karakterističnih fizikalnih veličina pri strujanju fluida.

**Individualna vremenska derivacija  $D/Dt$ .** Ako je  $F$  neka fizikalna skalarna, vektorska ili tenzorska veličina, npr. gustoća ili brzina, koja je svojstvo čestice fluida u gibanju i koja se općenito mijenja s gibanjem čestice, onda se ta veličina može prikazati Eulerovim opisom

$$F = F(\vec{r}, t) = F(x, y, z, t). \quad (222)$$

Brzina promjene veličine  $F$  u čestici fluida naziva se *individualnom vremenskom derivacijom*, koja prema G. G. Stokesu ima i posebnu oznaku  $DF/Dt$ .

Kad je veličina  $F$  opisana Eulerovim varijablama u obliku (222), pri proračunu individualne vremenske derivacije treba brzini vremenske promjene veličine  $F$  u nekoj čvrstoj točki prostora dodati i brzinu njene promjene s pomakom čestice u prostoru, tj. prema definiciji je

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{r} + \vec{v}\Delta t, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{r}, t) + (\vec{v}\Delta t \cdot \nabla)F + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t - F(\vec{r}, t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

ili

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)F. \quad (223)$$

U pravokutnim kartezijskim koordinatama ta derivacija ima oblik

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} + v_z \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (224)$$

Ako je  $F$  skalarna veličina, izraz (223) može se pisati u obliku

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}F, \quad (\text{za } F \text{ skalar}). \quad (225)$$

Individualna vremenska derivacija (223) zove se i supstancialna, materijalna ili puna derivacija veličine  $F$  po vremenu, ili derivacija koja slijedi fluid.

Operator

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (226)$$

naziva se *operatorom individualne vremenske derivacije*. Uputejavaju se i druge oznake za taj operator, kao što su:

$\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ ,  $D/dt$  i  $d/dt$ .

Djeluje li operator  $D/Dt$  na radijvektor  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , dobiva se

$$\frac{D\vec{r}}{Dt} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_\vec{r} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{r} = 0 + v_x \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{r}}{\partial z},$$

gdje indeks  $r(x, y, z)$  označuje čvrstu točku u prostoru, što uz

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$$

prelazi u

$$\frac{D\vec{r}}{Dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \vec{v}, \quad (227)$$

što je očito, jer individualna vremenska derivacija (ili derivacija koja slijedi fluid) radijvektora  $\vec{r}$  daje brzinu promjene radijvektora čestice fluida, što je po definiciji brzina čestice.

U izrazu za individualnu vremensku derivaciju (223) prvi član na desnoj strani  $\partial F/\partial t$  predstavlja brzinu promjene veličine  $F$  u zadanoj čvrstoj točki prostora  $M(x, y, z)$ , pa se zato naziva *lokalnom* ili *mjesnom vremenskom derivacijom*. U izrazu (223) drugi član desne strane  $(\vec{v} \cdot \nabla)F$  daje brzinu promjene veličine  $F$  s promjenom položaja čestice u prostoru, i naziva se *konektivnom* ili *prijenosnom vremenskom derivacijom*.

Operator  $D/Dt$  u ortogonalnim krivocrtim koordinatama. Primjenom izraza (219) za operator  $\nabla$  u ortogonalnim krivocrtim koordinatama operator  $D/Dt$  (226) dobiva oblik

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right), \quad (228)$$

gdje je

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \quad (229)$$

brzina strujanja izražena komponentama u smjerovima ortogonalnih krivocrtnih koordinata.

Kad operator (228) djeluje na vektorsknu veličinu izraženu komponentama, mora se voditi računa da su jedinični vektori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  u prostoru promjenljivi, pa pri parcijalnim derivacijama po  $q_1, q_2, q_3$  treba primijeniti izraze (220a), (220b) i (220c).

**Stacionarno i nestacionarno strujanje fluida i akceleracija čestice.** Ako u svakoj čvrstoj točki prostora kojim strui fluid sve fizikalne veličine ne zavise od vremena, strujanje se naziva *stacionarnim*.

Ako je  $F$  neka fizikalna skalarna, vektorska ili tenzorska veličina, tada se u Eulerovim varijablama stacionarnost strujanja izražava funkcijom oblika

$$F = F(x, y, z). \quad (230)$$

To dalje znači da je lokalna derivacija veličine  $F$  jednaka nuli, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (231)$$

pa je individualna vremenska derivacija

$$\frac{DF}{Dt} = (\vec{v} \cdot \nabla)F. \quad (232)$$

U stacionarnom strujanju fluida vektorsko polje brzine dano je funkcijom

$$\vec{v} = \vec{v}(r), \quad (233)$$

odnosno komponentama brzine

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z), \\ v_y &= v_y(x, y, z), \\ v_z &= v_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (234)$$

Pri nestacionarnom strujanju fluida sve fizikalne veličine opisane Eulerovim varijablama eksplicitno zavise i od vremena, tj.

$$F = F(x, y, z, t), \quad (235)$$

pa je

$$\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0. \quad (236)$$

U strujanju opisanom Eulerovim varijablama pri proračunu akceleracije čestice  $\vec{a}$  treba na polje brzine nestacionarnog strujanja primijeniti operator individualne vremenske derivacije (226), pa se dobiva

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (237)$$

ili komponente akceleracije

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (238)$$

U izrazu (237) prvi član desne strane  $\partial \vec{v} / \partial t$  jest lokalna ili mjesna akceleracija, a drugi je član  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  konvektivna ili prijenosna akceleracija. Pripadne komponente tih akceleracija lako se prepoznaju na desnim stranama izraza (238).

Pri stacionarnom strujanju ne postoji lokalna akceleracija, pa ostaje

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (239)$$

Ako se na konvektivnu akceleraciju  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  primijene pravila vektorske analize za operacije s operatorom  $\nabla$  i pravila vektorske algebre za razvoj trostrukog vektorskog produkta, dobiva se vrlo prikladan izraz

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \\ &= \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}. \end{aligned} \quad (240)$$

Time i izraz (237) za akceleraciju čestice prelazi u

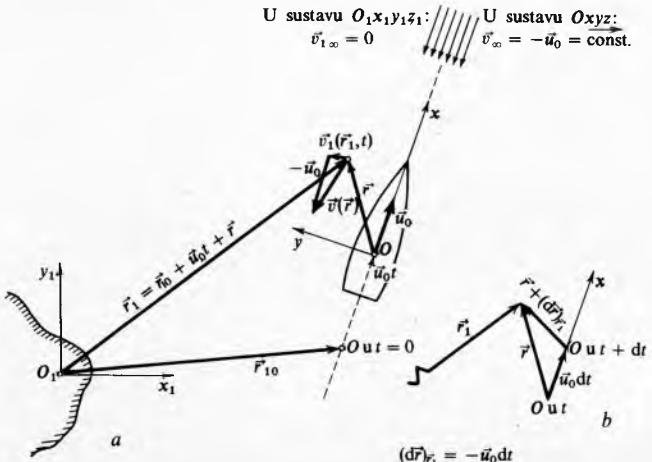
$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}. \quad (241)$$

Prema izboru koordinatnog sustava u kojem se proučava strujanje, isto strujanje može se u jednom sustavu pojaviti kao nestacionarno, a u nekom drugom kao stacionarno. Tako je, npr., strujanje vode oko motornog čamca koji se giba konstantnom brzinom  $\vec{u}_0$  nestacionarno s obzirom na inercijalni koordinatni sustav  $O_1x_1y_1z_1$ , koji je čvrsto vezan uz kopno (sl. 57 a), s nestacionarnim poljem brzine

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1(\vec{r}_1, t). \quad (242)$$

To isto strujanje za promatrača u inercijalnom koordinatnom sustavu  $Oxyz$ , čvrsto vezanom uz čamac, stacionarno je sa stacionarnim poljem brzine

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}). \quad (243)$$



Sl. 57. Nestacionarno strujanje fluida u sustavu  $O_1x_1y_1z_1$  postaje stacionarno u sustavu  $Oxyz$  koji se zajedno s čamcem giba konstantnom brzinom  $u_0$

Inercijalni sustavi  $O_1x_1y_1z_1$  i  $Oxyz$  vezani su međusobno Galilejevom transformacijom (211b).

Za promatrača u sustavu  $O_1x_1y_1z_1$  voda u beskonačnosti miruje tj.  $\vec{v}_{1\infty} = 0$ , a prema promatraču u sustavu  $Oxyz$  voda iz beskonačnosti nailazi paralelnim strujanjem konstantne brzine  $\vec{v}_\infty = -\vec{u}_0$ .

Budući da se lokalna akceleracija  $\partial \vec{v} / \partial t$  u sustavu  $O_1x_1y_1z_1$  određuje pri konstantnom  $\vec{r}_1$ , diferencijal izraza (211b) u vremenskom intervalu  $dt$  glasi

$$(d\vec{r})_{r_1} = -\vec{u}_0 dt, \quad (244)$$

što je prikazano i grafički na sl. 57b, pa vrijedi jednakost

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = -(\vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (245)$$

gdje su operator  $\nabla$  i brzina strujanja  $\vec{v}$  u sustavu  $Oxyz$ .

Akceleracija čestice u ortogonalnim krivocrtnim koordinatama. Dјeluje li operator  $D/Dt$  na vektor brzine definiran izrazom (229), dobiva se izraz za akceleraciju čestice

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left( \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3). \quad (246)$$

Pri toj operaciji treba voditi računa da su jedinični vektori  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  prostorno promjenljivi u krivocrtnim koordinatama; primjenom izraza (220a), (220b) i (220c) dobivaju se za komponente  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  akceleracije u smjeru tih koordinata sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} + \\ &+ \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2^2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_3^2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \\ a_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} - \\ &- \frac{v_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_2 v_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3^2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}, \\ a_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} - \\ &- \frac{v_1^2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{v_3 v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{v_2^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{v_3 v_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (247)$$

**Trajektorije, strujnice i krivulje obilježenih čestica.** Trajektorija ili putanja neke čestice fluida jest krivulja koju čestica fluida svojim gibanjem opisuje u prostoru. Prema toj definiciji element luka  $d\vec{r}$  trajektorije jednak je

$$d\vec{r} = \vec{v} dt. \quad (248)$$

Ako je strujanje fluida opisano Eulerovim varijablama, tada se raspolaze prostorno-vremenski promjenljivim poljem brzine strujanja. Neka je  $\vec{r}$  radiv vektor točke na putnji, tada je prema (248)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (249)$$

diferencijalna jednadžba trajektorije čestice u polju brzine.

Strujnica ili krivulja toka jest krivulja na koju se tangenta u svakoj njenoj točki u zadanom trenutku  $t_0$  poklapa sa smjerom vektora brzine  $\vec{v}$  u toj točki. Strujnice su vektorske krivulje vektorskog polja brzine, slično kao što su silnice vektorske krivulje vektorskog polja sile. Prema toj definiciji element luka strujnice  $d\vec{r}$  u svakoj je njenoj točki u danom trenutku kolinearan s vektorom brzine  $\vec{v}$

$$d\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t_0) d\lambda, \quad (250)$$

gdje je  $d\lambda$  slakarni pomoćni parametar koji se na svakoj strujnici  $\mathcal{S}$  može smatrati diferencijalom neke funkcije

$$\lambda = \lambda(s, \mathcal{S}). \quad (251)$$

Taj parametar zavisi od pomoćne dužinske koordinate  $s$  uzduž strujnice i od same strujnice  $\mathcal{S}$ .

Izraz (250) vodi do diferencijalne jednadžbe strujnice

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{v}(\vec{r}, t_0) \quad (252)$$

koja se razbija na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{d\lambda} = v_x(x, y, z, t_0), \quad \frac{dy}{d\lambda} = v_y(x, y, z, t_0), \quad \frac{dz}{d\lambda} = v_z(x, y, z, t_0). \quad (253)$$

U Eulerovim varijablama  $x, y, z$  i  $t$  poznato je polje brzine kao funkcija od  $\vec{r}$  i  $t$ , pa se određivanje strujnice koja prolazi kroz točku  $\vec{r}_0$  svodi na rješenje Cauchyjeva problema za sustav diferencijalnih jednadžbi (253) s početnim vrijednostima

$$x|_{(s=s_0, \mathcal{T})} = x_0, \quad y|_{(s=s_0, \mathcal{T})} = y_0, \quad z|_{(s=s_0, \mathcal{T})} = z_0. \quad (254)$$

U općem slučaju nestacionarnog strujanja, strujnice i trajektorije su bitno različite krivulje. Obitelj strujnica pri takvu strujanju daje trenutnu kompletну sliku strujanja i ta se slika s vremenom mijenja. Trajektorija je geometrijski zapis historije gibanja čestice, pa se ta krivulja oblikuje u toku vremena.

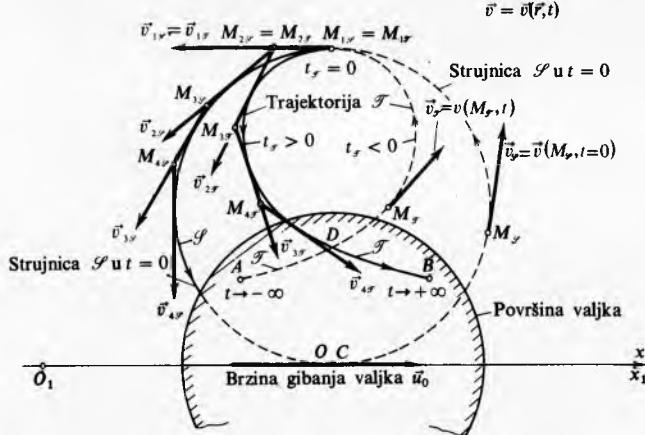
Prikazom približne konstrukcije strujnice i trajektorije nestacionarnog strujanja fluida, kroz koji se giba kružni valjak konstantnom brzinom  $\bar{u}_0$ , ilustrirana je na sl. 58 razlika između tih dviju krivulja. Za strujnicu  $\mathcal{S}$  i trajektoriju  $\mathcal{T}$  konstrukcija započinje u zajedničkoj točki  $M_{1,\mathcal{T}} = M_{1,\mathcal{S}}$  i u zajedničko vrijeme  $t = 0$  kad je središte valjka  $C$  ispod te točke. Približnost konstrukcije je u tome da se umjesto s diferencijalom luka trajektorije (248) i strujnice (250) radi s malim, ali konačnim prirastima. Pri konstrukciji trajektorije ti su prirasti

$$\Delta \vec{r}_{\mathcal{T}} = \vec{v}(M_{\mathcal{T}}, t) \Delta t, \quad (255)$$

a pri konstrukciji strujnice

$$\Delta \vec{r}_{\mathcal{S}} = \vec{v}(M_{\mathcal{S}}, t_0) \Delta \lambda, \quad (256)$$

gdje je za prostornu zavisnost polja brzine umjesto  $\vec{r}$  uvedena oznaka točke  $M$ .



Sl. 58. Približna konstrukcija trajektorije i strujnice nestacionarnog strujanja u sustavu  $O_1x_1$

Mali pomaci (255) i (256) šeću po približnim točkama trajektorije, odnosno strujnice. Što su pomaci manji, to su približenja bolja. Ako se zbog jednostavnosti izjednače prirasti vremena  $\Delta t$  i pomoćnog parametra  $\Delta \lambda$ , tada će se i prva približna točka trajektorije  $M_{2,\mathcal{T}}$  poklopiti s prvom približnom točkom strujnice  $M_{2,\mathcal{S}}$ , tj.

$$\Delta \vec{r}_{\mathcal{T}} = M_{1,\mathcal{T}} \vec{M}_{2,\mathcal{T}} = \vec{v}_{1,\mathcal{T}} \Delta t = \Delta \vec{r}_{\mathcal{S}} = \vec{M}_{1,\mathcal{S}} \vec{M}_{2,\mathcal{S}} = \vec{v}_{1,\mathcal{S}} \Delta \lambda, \quad (257)$$

jer su i brzine  $v_{1,\mathcal{T}}$  i  $v_{1,\mathcal{S}}$  u početnoj točki u početno vrijeme međusobno jednakе:

$$\vec{v}_{1,\mathcal{T}} = \vec{v}(M_{1,\mathcal{T}}, t = 0) = \vec{v}_{1,\mathcal{S}} = \vec{v}(M_{1,\mathcal{S}}, t = 0). \quad (258)$$

Dalje od točke  $M_{2,\mathcal{T}} = M_{2,\mathcal{S}}$  počinju se razlikovati točke trajektorije od točaka strujnice. Naime, premda su približne točke  $M_{2,\mathcal{T}}$  i  $M_{2,\mathcal{S}}$  identične, vrijeme za trajektoriju je tekuća varijabla, pa u točki  $M_{2,\mathcal{T}}$  ima vrijednost  $t = \Delta t$ , a za strujnicu je vrijeme konstantan parametar i u  $M_{2,\mathcal{S}}$  ostaje nepromjenjeno  $t = 0$ . Zbog toga se brzina kojom se konstruirala sljedeća približna točka trajektorije razlikuje po veličini i smjeru od brzine za konstrukciju sljedeće približne točke strujnice:

$$\vec{v}_{2,\mathcal{T}} = \vec{v}(M_{2,\mathcal{T}}, t = \Delta t) + \vec{v}_{2,\mathcal{S}} = \vec{v}(M_{2,\mathcal{S}}, t = 0). \quad (259)$$

Zato su i približne točke  $M_{3,\mathcal{T}}$  i  $M_{3,\mathcal{S}}$  različite

$$\overline{M_{2,\mathcal{T}} M_{3,\mathcal{T}}} = \vec{v}_{2,\mathcal{T}} \Delta t + \overline{M_{2,\mathcal{S}} M_{3,\mathcal{S}}} = \vec{v}_{2,\mathcal{S}} \Delta \lambda. \quad (260)$$

To udaljavanje točaka trajektorije i strujnice dalje se povećava, jer se zbog različitih točaka i vremena povećavaju razlike u brzinama

$$\begin{aligned} \vec{v}_{3,\mathcal{T}} &= \vec{v}(M_{3,\mathcal{T}}, t = 2 \Delta t), \\ \vec{v}_{3,\mathcal{S}} &= \vec{v}(M_{3,\mathcal{S}}, t = 0). \end{aligned} \quad (261)$$

Tako se postupak približne konstrukcije nastavlja, a trajektorija  $\mathcal{T}$  i strujnica  $\mathcal{S}$  dobivaju se upisivanjem krivulje u prijednoj poligon (sl. 58).

Očito je da svakom prirastu vremena  $\Delta t$  pri konstrukciji trajektorije odgovara i određeni pomak  $\vec{u}_0 \Delta t$  središta valjka. Tako se čestica, za koju je na slici približno konstruirana trajektorija, nalazila u točki  $A$  kad se valjak nalazio beskonačno daleko ulijevo, i kroz vrijeme od  $t \rightarrow -\infty$  do  $t = 0$  čestica je prešla put  $\overline{ADM_{1,\mathcal{T}}}$  (crtano označen na slici). U tom istom vremenu valjak je prešao put od lijeve beskonačnosti do položaja prikazanog na slici. Za vrijeme od  $t = 0$  do  $t \rightarrow \infty$  ta je ista čestica previla put  $\overline{M_{1,\mathcal{T}} DB}$  i završila svoje putovanje u točki  $B$ , dok je valjak za to isto vrijeme otisao od položaja prikazanog na slici u desnu beskonačnost. Primjećuje se da je čestica pri tom doživjela i jedan konačan pomak  $AB$  udesno. Taj se pomak može teoretski proračunati i fizikalno rastumačiti.

Isto je tako očito da se strujnica  $\mathcal{S}$ , ucrtana na slici, odnosi samo na prikazani položaj valjka. Ta se strujnica, a i čitava slika strujnica, premješta zajedno s valjkom, tako da se u sustavu  $O_1x_1$  koji miruje slika strujanja svaki trenutak mijenja, tj. ta se slika pomiče udesno brzinom  $\bar{u}_0$ .

Kolinearnost elementa strujnice  $d\vec{r}$  i vektora brzine  $\vec{v}$  u svakoj njenoj točki može se izraziti i diferencijalnom jednadžbom

$$d\vec{r} \times \vec{v} = 0. \quad (262)$$

Napisana u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \quad (263)$$

i razvijena po prvom retku daje sustav diferencijalnih jednadžbi strujnice

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{v_y(x, y, z, t_0)}{v_x(x, y, z, t_0)} = f_1(x, y, z, t_0), \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{v_z(x, y, z, t_0)}{v_x(x, y, z, t_0)} = f_2(x, y, z, t_0). \end{aligned} \quad (264)$$

Njihovo rješavanje ponovno vodi do rješenja Cauchyjeva problema, kao i pri rješavanju sustava jednadžbi (253). Kad su funkcije  $f_1$  i  $f_2$  vrlo složene, rješavanje sustava jednadžbi (264) provodi se numeričkim metodama, npr. Runge-Kuttinom metodom.

Strujnice se ne mogu presjecati osim u osobitim točkama, npr. u točki zastopa gdje je brzina jednaka nuli. Naime, u točki presjecanja strujnice trebala bi čestica fluida imati dvije brzine, tangencijalno na dvije grane koje izlaze iz presjecista, što je fizikalno bez smisla.

Trajektorije se mogu presjecati, što znači da je ista čestica fluida dva puta u dva različita vremenska trenutka prošla kroz istu točku.

*Krivulja obilježenih čestica* je krivulja koja u danim vremenskim trenutak spaja sve čestice što su tokom vremena prošle kroz istu točku prostora. Ta je krivulja usko povezana s eksperimentalnom tehnikom vizualizacije strujanja.

Krivulje obilježenih čestica razlikuju se u općem nestacionarnom strujanju i od trajektorija i od strujnica.

U stacionarnom strujanju, kad je polje brzine  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ , sve su te krivulje iste.

I pri posebnom nestacionarnom strujanju, u kojem se u pojedinoj točki mijenja samo apsolutna vrijednost brzine, ali ne

i njen smjer, također su trajektorije, strujnice i krivulje obilježenih čestica iste krivulje. Takvo je polje brzine dano izrazom

$$\vec{v} = f(\vec{r}, t)\vec{v}_1(\vec{r}), \quad (265)$$

gdje je  $f$  skalarna funkcija prostora i vremena, a  $\vec{v}_1$  vektorska funkcija samo prostora.

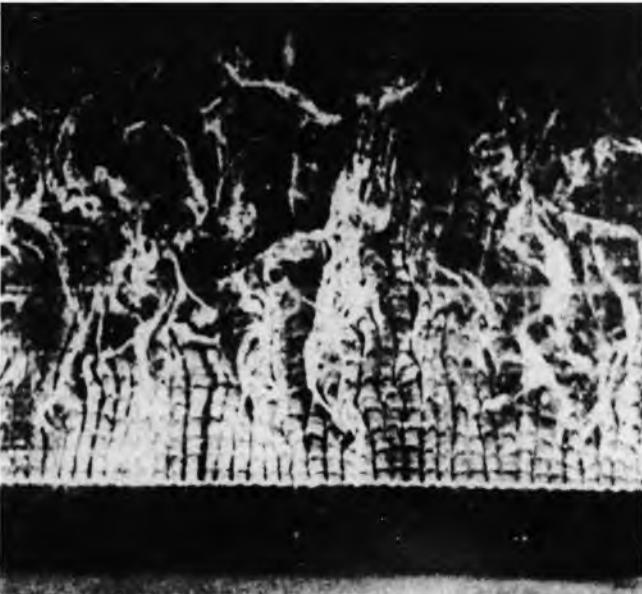
Kao što stacionarnost i nestacionarnost strujanja zavisi od izbora koordinatnog sustava, tako i izgled, tok i analitički opis trajektorija, strujnica i krivulja obilježenih čestica zavisi od koordinatnog sustava u kojem se istražuje strujanje.

**Vizualizacija strujanja fluida.** Trajektorije, strujnice i krivulje obilježenih čestica osnovne su krivulje koje pružaju opću sliku strujanja fluida pri teorijskom i eksperimentalnom proučavanju. U mehaniči fluida teško se može precijeniti važnost promatrana stvarnog strujanja fluida i informacija dobivenih iz takve slike. Mogućnosti takva promatrana postoje i zovu se zajedničkim imenom tehnika vizualizacije strujanja. Eksperimentom se nastoji ili provjeriti teorijski pretkazani model strujanja ili otkriti stvarni model strujanja u situacijama koje se uopće ne mogu zahvatiti teorijskim razmatranjima.

Premda se vizualizacijom strujanja rijetko može dobiti i dovoljno točna kvantitativna informacija, ta je tehnika u eksperimentalnoj mehaniči fluida vrlo popularna. Njome se u eksperimentu određuju slike trajektorija, strujnica i krivulja obilježenih čestica u polju strujanja. Kao temelj interpretacije takvih slika služe definicije tih krivulja i način na koji se mogu analitički odrediti.

Strujanje kapljevinu može se vizualizirati ubacivanjem boje, mjehurića ili stranih čvrstih čestica na izabrana mesta toka. Tako se, npr., pri vrlo niskim brzinama strujanja vode u eksperimentalnom tunelu strujanje može vizualizirati vodikovim mjehurićima što ih generira vrlo tanka razapeta žica koja kao negativna elektroda u istosmjernom strujnom krugu provodi elektrolizu vode. Struja vode odnosi sa sobom mjehuriće sa žice te različitim kombinacijama mjestimične izolacije žice i sporadičnog ili periodičkog uključivanja struje u strujni krug mogu se ostvariti i snimiti različite slike strujanja (sl. 59). Za brzine strujanja vode do 0,3 m/s tom se tehnikom mogu dobiti dovoljno točni podaci ne samo o konfiguraciji strujnica, trajektorija i krivulja obilježenih čestica nego i o brzini stacionarnog i nestacionarnog strujanja.

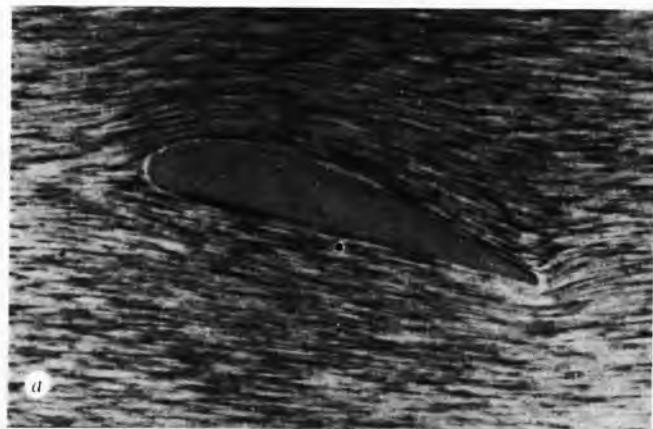
Radi vizualizacije u strujanje zraka uvodi se dim, neki strani plin ili se na izabranim mjestima postavlja izvor topline. Tako neke kemikalije, npr. titan(IV)-klorid i kositar(IV)-klorid, proizvode dim kad su u dodiru s vlažnim zrakom. U istu svrhu mogu poslužiti dimne bombice ili čisti dim trulog drveta što tinja.



Sl. 59. Strujanje u turbulentnom graničnom sloju vizualizirano mjehurićima vodika

Za vizualizaciju strujnica u strujanju kapljevinu i plinova služe kratke rese vune, konca ili najlona, koje se u struju fluida usmijere uzduž strujnica. Pri nestacionarnim periodičkim pojavama mogu se stroboskopom identificirati njihove pojedine faze.

U sredstva vizualizacije strujanja fluida ide i fotografski aparat i filmska kamera. Ubacivanjem aluminijske prašine u vodu i prikladnim osvjetljenjem vizualizirana je početna faza optjecanja vode oko krilnog profila i snimljena fotografskim aparatom koji miruje relativno prema profilu (sl. 60a). U tom koordinatnom sustavu strujanje je stacionarno, osim pri izlaznom bridu profila, gdje je upravo u formiranju početni vrtlog. Ista pojava, u nešto kasnijoj fazi, vizualizirana je istom tehnikom i snimljena fotografskim aparatom koji miruje relativno prema vodi podalje od profila (sl. 60b). Prema tome, na toj se snimci profil giba uljevo relativno prema fotografskom aparatu. U tom koordinatnom sustavu strujanje je načelno nestacionarno i prikazana fotografija je trenutna slika strujnica.

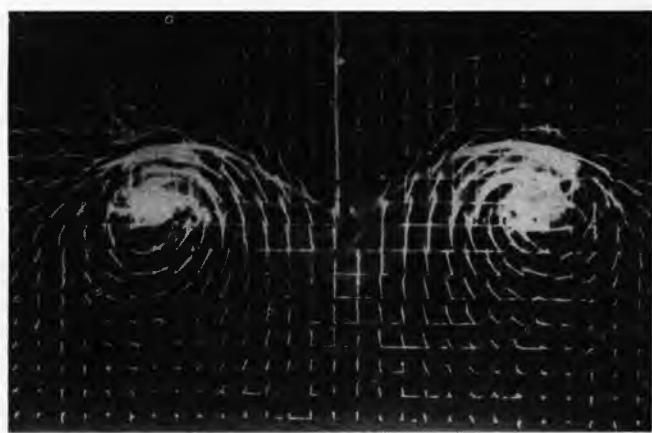


Sl. 60. Snimka strujanja u početnoj fazi optjecanja vode oko krilnog profila, vizualiziranog aluminijskim česticama. a fotografski aparat miruje relativno prema profilu, b fotografski aparat miruje relativno prema vodi udaljenoj od profila

Pri snimanju je fotografski aparat imao određeno eksponiranje i očito je da je brzina strujanja veća na mjestima gdje su dijelovi snimljenih strujnica duži, i obratno. S kratkom eksponicijom otvoreni fotografski aparat snimio je zapravo elemente trajektorija vizualiziranih čestica, a početni elementi luka strujnice i trajektorije međusobno su jednaki, kao što je pokazala približna konstrukcija strujnice i trajektorije (sl. 58 i izraz (257)), dok su im duljine proporcionalne brzini strujanja. Tako se na sl. 60 otkrivaju veće brzine strujanja u neposrednoj blizini profila, a podalje od profila, npr. u lijevom donjem i desnom gornjem uglu slike, voda strui vrlo malom brzinom.

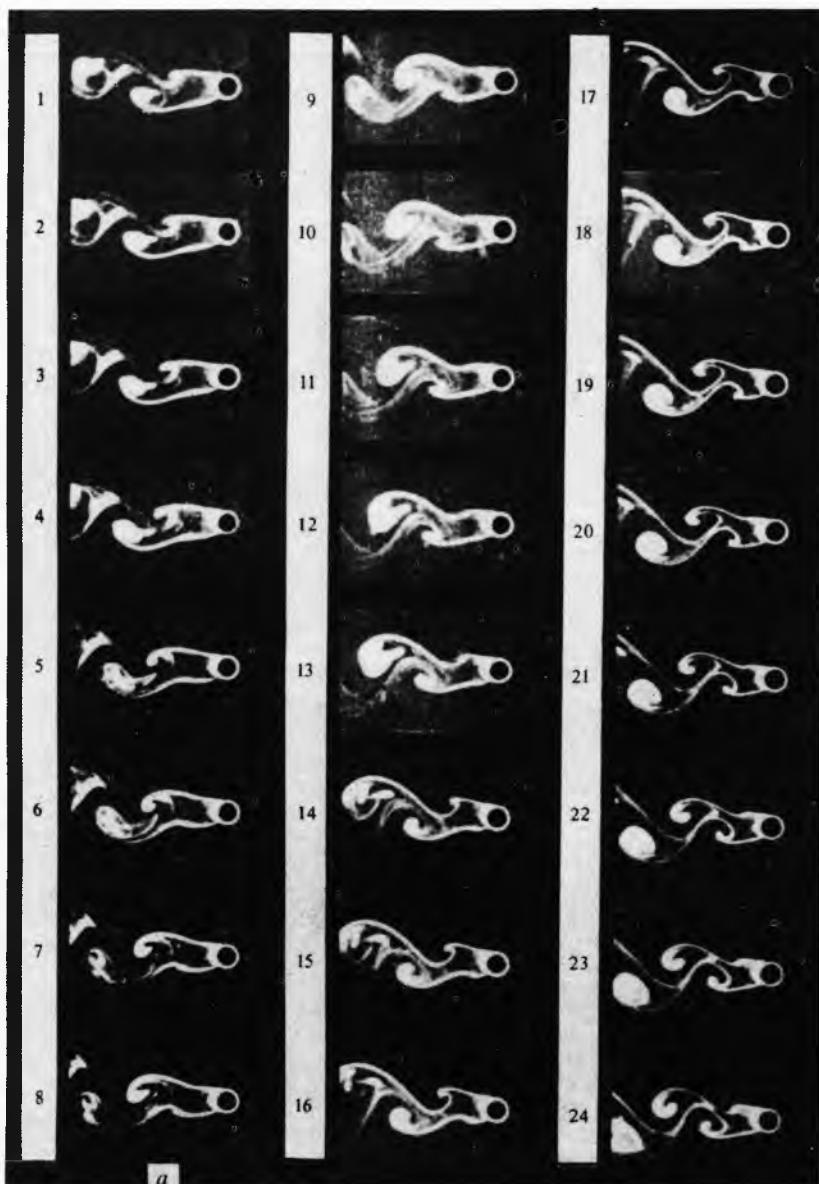
Vršni i slobodni vrtlozi pri strujanju zraka oko skošenog krila konačne širine vizualizirani su mrežom končića i snimljeni u uzvodnom smjeru (sl. 61).

U nestacionarnom vrtložnom tragu pri optjecanju kružnog cilindra vizualizirane su i filmski snimljene krivulje obilježenih



Sl. 61. Snimka strujnica oko skošenog krila konačne širine (gledajući uzvodno), vizualiziranih mrežom končića

čestica (sl. 62a), a iz snimaka otvorenim fotografskim aparatom s kratkim eksponiranjem rekonstruirane su strujnice (sl. 62b), a s dužim eksponiranjem trajektorije (sl. 62c).



Sl. 62. Eksperimentalno određivanje krivulja obilježenih čestica, strujnica i trajektorija u nestacionarnom vrtložnom tragu pri optjecanju kružnog valjka a) u zastopne filmske snimke krivulja obilježenih čestica vizualiziranih ispuštanjem mlijeka kroz rupice na bokovima valjka (perioda pojave proteže se kroz 13...14 sličica), b) rekonstruirane strujnice iz filmske snimke osamdeset perioda pojave, vizualizirane uvedenjem velikog broja uljnih kapljica u struju vode (pet rekonstruiranih snimaka prekriva polovicu perioda pojave s intervalima od 1/10 perioda), c) rekonstruirane trajektorije čestica iz filmske snimke; pojedine trajektorije vizualizirane su kapljicama ulja uvedenim u struju vode i jakim osvjetljenjem polja strujanja ispred otvorene filmske kamere

Općenito vrijedi pravilo da se pri vizualizaciji strujnica čitavo polje strujanja posipa s mnogo stranih čestica, a pri vizualizaciji trajektorija mora ih biti malo.

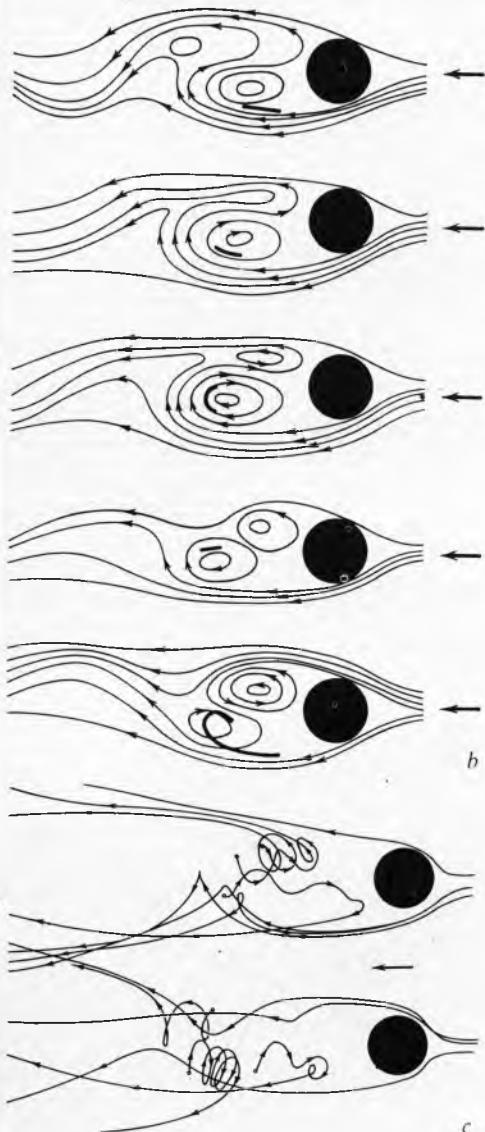
Sl. 62b i c dokazuju da se strujnice ne mogu presijecati, jer preko njih fluid ne protječe, a trajektorije se mogu presijecati i nekoliko puta.

**Osobitosti polja brzine strujanja.** Ako su na desnim stranama sustava diferencijalnih jednadžbi strujnice (264) funkcije  $f_1$  i  $f_2$  i njihove prve parcijalne derivacije po  $x, y, z$  jednoznačne i neprekidne, tada postoji jedinstveno rješenje Cauchyjeva problema u točkama prostora strujanja fluida u kojima je taj uvjet zadovoljen. Zato se svakom točkom tog prostora može povući samo jedna strujnica, pa se strujnice ne mogu presijecati.

Međutim, uvjeti što osiguravaju jedinstvenost rješenja Cauchyjeva problema mogu biti narušeni u pojedinim osobitim točkama polja strujanja, pa se u takvim točkama strujnice mogu presijecati ili granati, npr. u *točki zastoja* ili *stagnacije*, u kojoj je brzina strujanja jednaka nuli.

Singularne točke jednostavno je analizirati u ravninskom strujanju. Sustav diferencijalnih jednadžbi strujnice prelazi u jednu običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda oblika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}, \quad (266)$$



gdje je konstantni parametar  $t_0$  ispušten kao nebitan za analizu.

Budući da se integracija diferencijalne jednadžbe prvog reda svodi na geometrijsko spajanje elemenata lukova u integralne krivulje kojima se smjer tangenata u svakoj točki poklapa sa smjerom polja, strujnice su integralne krivulje diferencijalne jednadžbe (266).

U teoriji diferencijalnih jednadžbi prvog reda singularne točke analiziraju se na tipu jednadžbe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}, \text{ uz } A \cdot D - B \cdot C \neq 0. \quad (267)$$

Ishodište  $O(0,0)$  je izolirana singularna točka za tu jednadžbu. Osobitost ponašanja strujnica, kao integralnih krivulja, u blizini te singularne točke zavisi od korijena karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - (B + C)\lambda + B \cdot C - A \cdot D = 0, \quad (268)$$

i primjerenou toj osobitosti singularna točka dobiva svoj naziv.

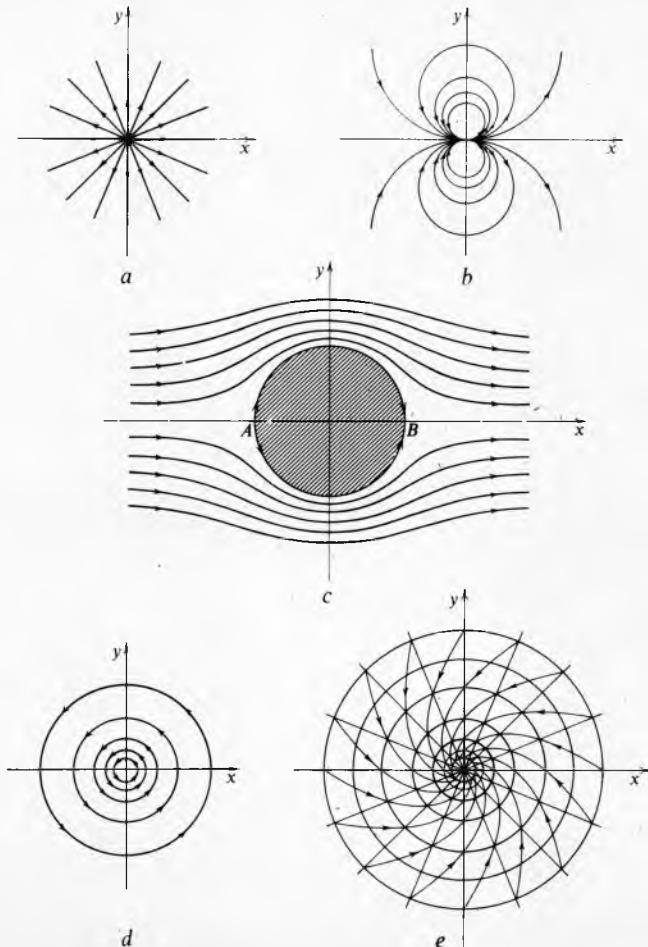
S obzirom na korijene karakteristične jednadžbe (268) razlikuju se sljedeća četiri slučaja:

a) Ako su korijeni realni i istog predznaka, sve integralne krivulje u okolišu singularne točke prolaze kroz singularnu točku, i to tako da u svakom smjeru kroz nju prolazi jedna strujnica (sl. 63a) ili da sve strujnice imaju zajedničku tangentu (sl. 63 b). Takva singularna točka zove se *čvorna točka*.

Strujanje prikazano na sl. 63a definirano je poljem brzine

$$v_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (269)$$

i naziva se ravninskim izvorom ako je  $Q > 0$ , odnosno ravninskim ponorom ako je  $Q < 0$ .



Sl. 63. Tipovi singularnih točaka u polju ravninskog strujanja. a) izvor (ponor); b) dipol (čvorne točke); c) točke zastoja A i B jesu sedlaste točke; d) vrtlog (središte); e) ponor (izvor) i vrtlog u istoj točki tvore žarište ili fokus.

Kad se komponente brzine (269) uvrste u jednadžbu (266), korijeni karakteristične jednadžbe (268) jesu  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , a strujnice su dane izrazom  $y = Cx$ , gdje je  $C$  konstanta.

Veličina  $Q$  je kapacitet izvora (ponora), s dimenzijom  $[Q] = L^3 T^{-1} L^{-1} = L^2 T^{-1}$ , dakle  $[Q]_{SI} = \frac{m^3/s}{m} = m^2/s$ .

Strujnice prikazane na sl. 63b pripadaju strujanju *dipola*, tj. kombinaciji ponora na osi x s lijeve strane ishodišta i izvora s desne strane, dovedenih u samo ishodište graničnim prijelazom

$$\lim_{|Q| \rightarrow \infty} \frac{Q \cdot h}{h} = \text{const.}, \quad (270)$$

gdje je  $h$  udaljenost ponora i izvora od ishodišta.

Singularnost ishodišta pri strujanju izvora (ponora) i dipola sastoji se i u tome što u njemu brzina postaje beskonačna.

b) Ako su korijeni realni i suprotnog predznaka, kroz singularnu točku prolaze dvije strujnice. Takva se singularna točka zove *sedlasta točka*. Neposredan okoliš točaka A i B (sl. 63c) posjeduje singularnost sedlastih točaka. Pri strujanju fluida takve točke su točke zastoja, u kojima je brzina strujanja jednaka nuli.

c) Ako su korijeni čisto imaginarni, onda je singularna točka okružena zatvorenim strujnicama (sl. 63d). Takva se singularna točka zove *središte*.

Strujnice prikazane na sl. 63d definirane su poljem brzine

$$v_x = -C \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = C \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (271)$$

gdje je  $C$  konstanta s dimenzijom  $[C] = L^2 T^{-1}$ , dakle  $[C]_{SI} = m^2/s$ . Takvo se strujanje naziva *vrtlogom u ravnini*.

Diferencijalna jednadžba strujnice (266) ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (272)$$

a njezina je karakteristična jednadžba (268)

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

s korijenima:  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ .

Rješenje diferencijalne jednadžbe (272) daje jednadžbu strujnica

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \quad (273)$$

što predstavlja jednadžbu kružnica koncentričnih s ishodištem (sl. 63d). U ishodištu je brzina strujanja beskonačna.

d) Ako su korijeni konjugirano kompleksni, strujnice su krivulje što bezbroj puta spiralno okružuju singularnu točku (sl. 63e). Takva singularna točka ima naziv *žarište* ili *fokus*.

Strujnice prikazane na slici pripadaju kombinaciji strujanja definiranih poljima brzine (269) i (271), tj. kombinaciji strujanja ravninskog izvora (ponora) i vrtloga. Za takvu kombinaciju strujanja u kojem je polje brzine dano zbrojem komponenata (269) i (271) diferencijalna jednadžba strujnice (267) ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\pi Cx + Qy}{Qx - 2\pi Cy}. \quad (274)$$

U polarnim koordinatama rješenje je te jednadžbe

$$r = C_1 \exp\left(\frac{Q}{2\pi C}\theta\right), \quad (275)$$

pa su strujnice logaritamske zavojnice. Na sl. 63e prikazan je vrtlog u kombinaciji s ponorom ( $Q < 0$ ).

U prostornom strujanju postoje također singularne točke, u načelu sličnih tipova kao u ravninskom strujanju.

**Strujna površina i strujna cijev.** Ako se u određeni vremenski trenutak  $t_0$  poljem strujanja položi proizvoljna krivulja  $C$  i kroz svaku njenu točku povuče strujnicu, dobiva se površina kojoj u svakoj točki vektor brzine leži u tangencijalnoj ravnini (sl. 64a). Tako dobivena površina naziva se strujnom površinom ili površinom toka. Ona se može odrediti samo ako krivulja  $C$  nije strujnica. Strujna površina je vektorska površina vektorskog polja brzine strujanja. Prema njenoj definiciji očito je da kroz strujnu površinu nema protjecanja fluida.

Ako je u trenutku  $t = t_0$  jednadžba strujne površine

$$\mathcal{F}(x, y, z, t_0) = 0,$$

tada je preko te površine

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (277)$$

gdje je

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } \mathcal{F}}{|\text{grad } \mathcal{F}|}, \quad (278)$$

normalna na površinu  $\mathcal{F}$ .

Uvjet (277) u pravokutnom koordinatnom sustavu ima oblik

$$v_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0. \quad (279)$$

Rješenje te linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe jest funkcija  $\mathcal{F}$  koja opisuje strujnu površinu. To rješenje je obitelj karakteristika jednadžbe (279), tj. obitelj strujnica dobivenih iz sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (264) koje se mogu pisati u obliku dvostrukе jednakosti

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (280)$$

Cauchyev problem za jednadžbu (279) ima smisla ako krivulja  $C$  nije karakteristika, tj. ako krivulja  $C$  nije strujnica.



Sl. 64. Definicija strujne površine i strujne cijevi. a strujna površina položena krivuljom  $C$ , b strujna cijev položena zatvorenom krivuljom  $C$ , c elementarna strujna cijev

Prema tome određivanje strujne površine  $\mathcal{F}$  pokazuje metodu kojom se rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika (279) svodi na integriranje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (v. Diferencijalne jednadžbe, parcijalne, TE 3, str. 273).

Strujna površina položena zatvorenom krivuljom  $C$  jest strujna cijev ili cijev toka (sl. 64b). Za izvođenje osnovnih poučaka dinamike fluida važno je svojstvo strujne cijevi da preko njena strujnog plasta ne protječe fluid, nego čitava masa fluida koja uđe na ulazu strujne cijevi mora izići na njenu izlazu. Za primjenu tog svojstva strujne cijevi poželjno je znati kada se u vektorsko polje brzine mogu položiti i takve površine koje strujnice normalno probadaju. Izvod ilustriran sl. 17 daje uvjet (119b) za postojanje takvih površina u proizvolnjem prostorno promjenljivom vektorskem polju  $\vec{v}$ , pa taj uvjet primijenjen na vektorsko polje brzine  $\vec{v}$  glasi

$$\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0. \quad (281)$$

Iz tog uvjeta se zaključuje da vektor brzine  $\vec{v}$  mora biti okomit na vektor  $\text{rot } \vec{v}$  da bi se u vektorsko polje brzine strujanja fluida mogle položiti površine ortogonalno probadane strujnicama. Kad je  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , očito je uvjet (281) također zadovoljen. Takvo se strujanje naziva bezvrtložnim ili potencijalnim strujanjem.

Uvjet (281) uvijek je zadovoljen pri ravninskem strujanju, jer je rotor brzine okomit na ravninu strujanja. Naime, ako je, npr., strujanje u ravnini  $Oxy$ , tada je  $v_z = 0$ , pa je

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (282)$$

$$\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) \cdot \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0. \quad (283)$$

Pri tzv. zavojnom strujanju vektori brzine  $\vec{v}$  i rotora brzine jesu kolinearni:  $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = 0$ , pa je  $\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} = |\vec{v}| |\text{rot } \vec{v}| \neq 0$ , i uvjet (281) nije zadovoljen, te se u takvo polje ne mogu položiti

površine ortogonalne na strujnice. Primjer takva polja

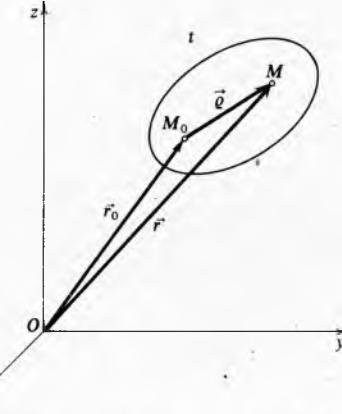
$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \left( -\sin \frac{x}{A} + \cos \frac{x}{A} \right), \\ v_y &= v_0 \left( \frac{y}{A} + \frac{z}{A} \right) \sin \frac{x}{A}, \\ v_z &= v_0 \left( \frac{y}{A} + \frac{z}{A} \right) \cos \frac{x}{A}. \end{aligned} \quad (284)$$

Lako se dokaže da je u tom polju  $\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{A} \vec{v}$ .

Ako je zatvorena krivulja  $C$  infinitezimalna,  $\Delta C$ , na njoj konstruirana strujna površina zove se elementarna strujna cijev (sl. 64c). Kroz elementarnu strujnu cijev uvijek se može postaviti normalni ravni presjek  $\Delta A$ , tj. okomit na vektor brzine. Osim te prednosti, u izvodima poučaka dinamike fluida elementarna strujna cijev ima i sljedeća svojstva: preko njena plašta nema istjecanja fluida, a zbog male veličine normalnog presjeka  $\Delta A$  fizikalne veličine kao što su tlak  $p$ , gustoća  $\rho$ , temperatura  $T$  i brzina  $v$  mogu se smatrati konstantnima.

### Analiza gibanja čestice fluida

**Komponente gibanja čestice fluida i tenzor brzine deformacije.** Deformabilnost fluida daje polju brzine strujanja fluida osobitosti kojih nema u polju brzine gibanja krutog tijela. Te će se razlike bolje istaknuti ako se paralelno razmotri gibanje čestice fluida i gibanje čestice krutog tijela.



Sl. 65. Čestica apsolutno krutog tijela ili fluida

Neka se u prostoru, opisanom koordinatnim sustavom  $Oxyz$ , giba čestica krutog tijela, odnosno čestica fluida. Unutar čestice izabrana je u vremenskom trenutku  $t$  točka  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  kao pol (sl. 65). Također je unutar čestice u istom vremenskom trenutku  $t$  izabrana proizvoljna točka  $M(x, y, z)$ , bliska polu  $M_0$ . Relativni radijvektor  $M_0M$ , označen sa  $\vec{q}$ , iznosi

$$\vec{q} = \overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}, \quad (285a)$$

tako da je radijvektor točke  $M$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q} = (x_0 + \xi) \vec{i} + (y_0 + \eta) \vec{j} + (z_0 + \zeta) \vec{k}. \quad (285b)$$

Relativne koordinate  $\xi, \eta, \zeta$  paralelne su s koordinatama  $x, y, z$ , pa vrijede identiteti

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \frac{\partial}{\partial z}. \quad (285c)$$

Ako je brzina pola  $M_0$  u trenutku  $t$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(\vec{r}_0, t) = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t), \quad (286a)$$

tada je brzina bliske točke  $M$

$$\vec{v} = \vec{v}(M, t) = \vec{v}(\vec{r}_0 + \vec{q}, t) = \vec{v}(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta, t). \quad (286b)$$

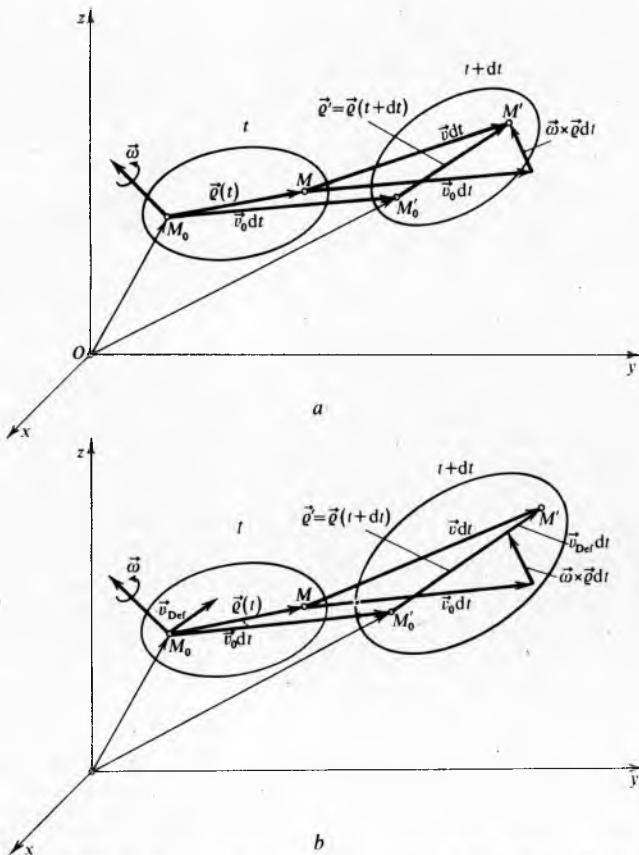
Pripada li čestica prikazana na sl. 65 apsolutno krutom tijelu, tada se polje brzine njena gibanja sastoji od brzine

translacijske  $\vec{v}_0$  pola  $M_0$  i obodne brzine  $\vec{\omega} \times \vec{q}$  zbog rotacije čestice kutnom brzinom  $\vec{\omega}$  oko trenutne osi rotacije položene polom (sl. 66a). Zato je brzina točke  $M$

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}(\vec{r}_0 + \vec{q}, t) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{q}, \quad (287a)$$

ili izraženo komponentama brzine

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y \zeta - \omega_z \eta, \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z \xi - \omega_x \zeta, \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x \eta - \omega_y \xi. \end{aligned} \quad (287b)$$



Sl. 66. Gibanje čestice. a) čestica apsolutno krutog tijela, b) čestica fluida

Primjenom identiteta (285c) za parcijalne derivacije komponenata tog polja brzine dobivaju se izrazi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\omega_z, & \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \omega_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \omega_z, & \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\omega_x, \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} &= -\omega_y, & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \omega_x, & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (288)$$

Od tih parcijalnih derivacija one koje su različite od nule javljaju se u komponentama rotora brzine, pa iz (288) slijede odnosi

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \vec{v} &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x, \\ \text{rot}_y \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y, \\ \text{rot}_z \vec{v} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z, \end{aligned} \quad (289a)$$

odnosno

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} \quad (289b)$$

ili

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}. \quad (289c)$$

Prema tome se izraz (287a) za brzinu proizvoljne točke  $M$  unutar čestice krutog tijela može pisati u obliku

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times \vec{q} \quad (290a)$$

ili u komponentama

$$v_x(M, t) = v_{0x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \zeta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \eta, \quad (290b)$$

$$v_y(M, t) = v_{0y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \xi - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \zeta, \quad (290b)$$

$$v_z(M, t) = v_{0z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \eta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \xi, \quad (290b)$$

odnosno

$$v_x(M, t) = v_{0x} + \frac{1}{2} (\text{rot}_y \vec{v}) \zeta - \frac{1}{2} (\text{rot}_z \vec{v}) \eta, \quad (290c)$$

$$v_y(M, t) = v_{0y} + \frac{1}{2} (\text{rot}_z \vec{v}) \xi - \frac{1}{2} (\text{rot}_x \vec{v}) \zeta, \quad (290c)$$

$$v_z(M, t) = v_{0z} + \frac{1}{2} (\text{rot}_x \vec{v}) \eta - \frac{1}{2} (\text{rot}_y \vec{v}) \xi. \quad (290c)$$

Ako je čestica na sl. 65 izdvojena iz mase fluida u strujanju, mikrostruktura gibanja čestice može se analizirati neprekidnim vektorskim poljem brzine u Eulerovim varijablama:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (290d)$$

Raspolažući tako zadanim poljem brzine, brzina gibanja točke  $M$  bliske polu  $M_0$  može se odrediti razvojem u Taylorov red polja (290d) u okolisu pola  $M_0$ , zadržavši samo linearne članove. Time se dobiva

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}(\vec{r}_0 + \vec{q}, t) = \vec{v}_0 + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (291a)$$

ili u komponentama

$$v_x(M, t) = v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta, \quad (291b)$$

$$v_y(M, t) = v_{0y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta, \quad (291b)$$

$$v_z(M, t) = v_{0z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta, \quad (291b)$$

gdje se parcijalne derivacije računaju u točki  $M_0$ .

U izrazu (291b) parcijalne derivacije komponenata brzine tvore tenzor derivacije vektora brzine  $\vec{v}$  po radijvektoru  $\vec{q}$  ili tenzor gradijenta vektora brzine

$$\frac{d\vec{v}}{d\vec{q}} \equiv \nabla \vec{v} \equiv \text{Grad } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (291c)$$

gdje su primjenjeni identiteti (285c).

To je općenito nesimetričan tenzor i kao svaki takav tenzor može se prikazati zbrojem simetričnog i antisimetričnog dijela:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (291d)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial y} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (291d)$$

Unutar drugih zagrada desnih strana tih identiteta prepoznavaju se pripadne komponente rotora brzine (289a). Ako se uz to parcijalne derivacije  $\partial v_x/\partial x$ ,  $\partial v_y/\partial y$ ,  $\partial v_z/\partial z$  i prvi članovi desnih strana identiteta (291d) označe sa

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (291e)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad (291f)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

izrazi (291b) za komponente brzine točke  $M$  bliske izabranom polu  $M_0$  unutar čestice fluida dobivaju oblik

$$v_x(M, t) = v_{0x} + \frac{1}{2} (\text{rot}_y \vec{v}) \zeta - \frac{1}{2} (\text{rot}_z \vec{v}) \eta + \varepsilon_{xx} \xi + \gamma_{xy} \eta + \gamma_{xz} \zeta,$$

$$v_y(M, t) = v_{0y} + \frac{1}{2} (\text{rot}_z \vec{v}) \zeta - \frac{1}{2} (\text{rot}_x \vec{v}) \zeta + \gamma_{yx} \xi + \varepsilon_{yy} \eta + \gamma_{yz} \zeta,$$

$$v_z(M, t) = v_{0z} + \frac{1}{2} (\text{rot}_x \vec{v}) \eta - \frac{1}{2} (\text{rot}_y \vec{v}) \xi + \gamma_{zx} \xi + \gamma_{zy} \eta + \varepsilon_{zz} \zeta. \quad (292)$$

Prva tri člana desnih strana u tim izrazima nalaze se i u izrazima (290c) za komponente brzine gibanja točke  $M$  čestice krutog tijela, pa se u gibanju čestice fluida taj dio vektora brzine naziva *brzinom kvazikrutog gibanja*  $\vec{v}_{KK}$

$$\vec{v}_{KK} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \times \vec{\varrho} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}. \quad (293)$$

Taj je izraz identičnog oblika kao i izrazi (290a) i (287a). Odnos komponenata kutne brzine  $\vec{\omega}$  i rotora brzine dan je izrazima (289c) i (289a), tj.

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \text{rot}_x \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \text{rot}_y \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (294)$$

U izrazu (290c) za komponente brzine točke unutar čestice krutog tijela nema preostalih članova komponenata brzine točke unutar čestice fluida u izrazu (292), jer su ti članovi svojstveni isključivo deformabilnom gibanju čestice fluida. Stoga se taj dio brzine gibanja čestice fluida i naziva *brzinom deformacijskog gibanja*  $\vec{v}_{Def}$  čestice fluida:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Def} &= (\varepsilon_{xx} \xi + \gamma_{xy} \eta + \gamma_{xz} \zeta) \vec{i} + \\ &+ (\gamma_{yx} \xi + \varepsilon_{yy} \eta + \gamma_{yz} \zeta) \vec{j} + \\ &+ (\gamma_{zx} \xi + \gamma_{zy} \eta + \varepsilon_{zz} \zeta) \vec{k}.\end{aligned}\quad (295)$$

Prema tome, na temelju izraza (292), (293) i (295) brzina gibanja čestice fluida može se izraziti zbrojem

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_{KK} + \vec{v}_{Def}. \quad (296)$$

To je sadržaj *prvog Helmholtzova* (H. L. F. Helmholtz 1821–1894) poučka, koji glasi: Gibanje elementarne čestice fluida može se u svakom trenutku vremena sastaviti od kva-

zkrutog gibanja brzinom  $\vec{v}_{KK}$  prema izrazu (293) i deformacijskog gibanja brzinom  $\vec{v}_{Def}$  prema izrazu (295). Taj je poučak ilustriran sl. 66b.

Iz izraza (288) ili iz transformacije izraza (291c) primjenom identiteta (291d) primjećuje se da se rotacijska komponenta gibanja elementarne čestice fluida može prikazati antisimetričnim tenzorom, tj. tenzorom rotacijskog gibanja fluida

$$T_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (297a)$$

ili

$$T_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (297b)$$

Devet skalarnih veličina definiranih izrazima (291e) i (291f) tvore tenzor drugog ranga  $T_v$ , koji se naziva *tenzorom brzine deformacije*

$$T_v = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (297c)$$

ili

$$T_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (297d)$$

Očito je tenzor brzine deformacije *simetričan*.

Primjenom izraza (297a, b) i (297c, d) izraz (291c) za  $\text{Grad} \vec{v}$  može se pisati u obliku

$$\text{Grad} \vec{v} = T_\omega + T_v. \quad (297e)$$

Označi li se skalarni produkt vektora  $\vec{a}$  i tenzora  $T$  sa  $\vec{a} T$ , a skalarni produkt tenzora  $T$  i vektora  $\vec{a}$  sa  $T \vec{a}$ , rezultat takvih množenja daje vektore sa  $p$ -komponentama

$$(\vec{a} T)_p = \sum_{q=1}^3 a_q T_{qp}, \quad p = 1, 2, 3, \quad (298a)$$

i

$$(T \vec{a})_p = \sum_{q=1}^3 T_{pq} a_q, \quad p = 1, 2, 3, \quad (298b)$$

s time da su za simetrični tenzor te dvije jednakosti međusobno ekvivalentne.

Primjenom tih izraza može se brzini deformacije (295) dati sljedeći oblik

$$\vec{v}_{Def} = T_v \vec{\varrho}, \quad (299)$$

pa je sadržaj prvog Helmholtzova poučka (296) definiran sa

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \times \vec{\varrho} + T_v \vec{\varrho} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\varrho} + T_v \vec{\varrho}. \quad (300)$$

Uvede li se kvadratična forma

$$\Phi = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \xi^2 + \varepsilon_{yy} \eta^2 + \varepsilon_{zz} \zeta^2 + 2 \gamma_{xy} \xi \eta + 2 \gamma_{yz} \eta \zeta + 2 \gamma_{zx} \zeta \xi), \quad (301)$$

izraz (295) za brzinu deformacije može se pisati u obliku

$$\vec{v}_{Def} = \text{grad} \Phi. \quad (302)$$

Prema tome brzina deformacije  $\vec{v}_{\text{Def}}$  je potencijalni vektor koji uvršten u (300) daje

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \times \varrho + \operatorname{grad} \Phi. \quad (303)$$

U određenom je vremenskom trenutku translatorna brzina pola  $\vec{v}_0$  u izrazima (291a), (293) i (300) konstantan prenosivi vektor koji se izravno prenosi u sve točke čestice fluida, pa se može izraziti potencijalom

$$\vec{v}_0 = \operatorname{grad}(\vec{v}_0 \cdot \vec{\varrho}). \quad (304a)$$

Napiše li se

$$\varphi = \vec{v}_0 \cdot \vec{\varrho} + \Phi, \quad (304b)$$

polje brzine unutar čestice fluida može se prikazati dijelovima rotacijskog gibanja i potencijalnog strujanja

$$\vec{v}(M, t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{\varrho} + \operatorname{grad} \varphi, \quad (305)$$

što je još jedan od oblika analitičkog zapisa Helmholtzova poučka.

Kao svaki simetrični tenzor, tako i tenzor brzine deformacije  $T_\epsilon$  ima glavne osi. Oznaće li se te osi sa  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , tada tenzor brzine deformacije u tim koordinatama ima oblik

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{z_1} \end{bmatrix} \quad (306)$$

gdje su  $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$  glavne komponente tenzora brzine deformacije.

Kvadratična forma (301) u glavnim koordinatama  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  dobiva jednostavan oblik

$$\Phi = \frac{1}{2} (\epsilon_{x_1} \xi_1^2 + \epsilon_{y_1} \eta_1^2 + \epsilon_{z_1} \zeta_1^2). \quad (307)$$

Tenzorska površina  $\Phi = \text{const.}$  predstavlja elipsoid ako su svih članova dijagonale tenzora (306) istog predznaka, ili hiperboloid ako ti članovi imaju različite predznake. Inače je zbroj tih dijagonalnih članova linearna invarijanta tenzora brzine deformacije  $T_\epsilon$ . To znači da je zbroj dijagonalnih članova tenzora (306) u glavnim koordinatama jednak zbroju dijagonalnih članova tog istog tenzora izraženog u proizvoljnom koordinatnom sustavu, npr. u sustavu  $Oxyz$ , u kojem taj tenzor ima oblik (297c):

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} + \epsilon_{y_1} + \epsilon_{z_1} &= \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} = \\ &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned} \quad (307a)$$

Očito je da i tensorska površina  $\Phi = \text{const.}$  ne zavisi od izbora koordinata.

Ako je skalarni produkt  $T_\epsilon \vec{a}$ , definiran sa (298b), jednak vektoru kojemu se smjer poklapa sa smjerom vektora  $\vec{a}$  i kojemu je veličina uvećana  $\epsilon$  puta, tj. ako je

$$T_\epsilon \vec{a} = \epsilon \vec{a}, \quad (308)$$

smjer vektora  $\vec{a}$  naziva se *glavnim smjerom tenzora  $T_\epsilon$* , a veličina  $\epsilon$  *glavnom vrijednosti tenzora  $T_\epsilon$* . Na temelju definicije (298b) i oblika (297c) tenzora brzine deformacije  $T_\epsilon$  jednadžba (308) može se pisati u obliku

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} a_x + \gamma_{xy} a_y + \gamma_{xz} a_z &= \epsilon a_x, \\ \gamma_{yx} a_x + \epsilon_{yy} a_y + \gamma_{yz} a_z &= \epsilon a_y, \\ \gamma_{zx} a_x + \gamma_{zy} a_y + \epsilon_{zz} a_z &= \epsilon a_z. \end{aligned} \quad (309)$$

To je sustav od tri linearne homogene jednadžbe u  $a_x, a_y, a_z$ , koji ima rješenje različito od nultog trivijalnog samo ako je determinanta sustava jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} - \epsilon & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} - \epsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (310)$$

To je kubna jednadžba u  $\epsilon$

$$-\epsilon^3 + I_1 \epsilon^2 - I_2 \epsilon + I_3 = 0, \quad (310a)$$

koja za simetrični tenzor  $T_\epsilon$  ima tri realna korijena

$$\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}, \quad (310b)$$

tj. tri glavne komponente tenzora brzine deformacije  $T_\epsilon$ .

Vrate li se redom ta tri korijena (310b) natrag u sustav jednadžbi (309), moguće je odrediti odnose

$$a_x : a_y : a_z, \quad (310c)$$

primjerene svakom od korijena (310b). Ti odnosi određuju smjerove triju glavnih koordinata  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ .

U kubnoj jednadžbi (310a)  $I_1$  je linearna invarijanta (307a) tenzora  $T_\epsilon$ ,  $I_2$  je kvadratična invarijanta:

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xz} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{yx} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} \end{vmatrix} = \\ &= \epsilon_{x_1} \epsilon_{y_1} + \epsilon_{y_1} \epsilon_{z_1} + \epsilon_{z_1} \epsilon_{x_1}, \end{aligned} \quad (310d)$$

a  $I_3$  je kubna invarijanta:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = \epsilon_{x_1} \epsilon_{y_1} \epsilon_{z_1}. \quad (310e)$$

Premda je polazno polje brzine (291b) unutar čestice fluida, izraženo tenzorom derivacije vektora brzine  $\vec{v}$  po radij-vektoru  $\vec{r}$ , formalno jednostavnije od tog istog polja transformirano identitetima (291d) u oblik (292), ta transformacija ima u dinamici fluida osnovnu važnost i određen fizički sadržaj. Naime, u strujanjima fluida s viskoznim tangencijalnim naprezanjima uvijek je prisutna rotacijska komponenta gibanja čestice fluida, tj.  $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega} \neq 0$ . Strujanja sa samo deformacijskom komponentom gibanja čestice, tj. kad je  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , mogu se generirati samo s poljem normalnih tlačnih naprezanja.

U prirodi su sva strujanja u načelu viskozna, dakle s poljem tangencijalnih naprezanja i sa  $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$ , i takva se strujanja nazivaju *vrtložnim* ili *rotacijskim strujanjima fluida*. Međutim, podalje od krutih granica (npr. podalje bočno od tijela što se giba u fluidu), tj. izvan relativno tankog viskoznog graničnog sloja, može se utjecaj viskoznosti fluida potpuno zanemariti, pa se strujanje može smatrati samo deformacijskim gibanjem čestica. Takva se strujanja nazivaju *bezvrtložnim* ili *irotacijskim strujanjima fluida*. Zapravo je baš to deformacijsko gibanje čestice fluida uzrok induciranim tangencijalnim naprezanjima u realnom viskoznom fluidu. Naime, ako fluid započinje strujanje iz stanja mirovanja, u početnom trenutku strujanje je bezvrtložno i zato čisto deformacijsko, ali istodobno u fluidu nastaju i viskozna tangencijalna naprezanja koja su proporcionalna brzini deformacije, pa strujanje prelazi u vrtložno. Zadatak je dinamike fluida da ustanovi analitički oblik fizikalne zavisnosti tenzora naprezanja  $T_\sigma$  (izraz (35)) od tenzora brzine deformacije  $T_\epsilon$  (izrazi (297c) i (297d)). Ako se uvrste takve zavisnosti u desnu stranu diferencijalne jednadžbe gibanja fluida (izrazi (48) i (48a)), ta jednadžba, barem u načelu, postaje integrabilna, što nije bila u obliku (48).

**Fizikalna interpretacija komponenata gibanja čestice fluida.** Pri rezultantnom gibanju čestice fluida u malom vremenskom intervalu  $Dt$  relativni radij-vektor  $\vec{q} = \vec{M}_0 \vec{M}$  promijeni zbog prostorno promjenljivog polja brzine i smjer i veličinu, pa je  $\vec{q}' = \vec{M}'_0 \vec{M}'$  (sl. 65 i 66). Budući da se i u izrazu za brzinu točke  $M$  čestice javlja translatorna brzina  $\vec{v}_0$  pola  $M_0$ , to je promjena relativnog radij-vektora  $\vec{q}$  uzrokovana samo rotacijskom i deformacijskom komponentom gibanja čestice, tj. ta se promjena zbiva pod utjecajem drugog i trećeg člana desne strane izraza (303), pa vrijedi

$$\vec{q}(t + Dt) = \vec{q}' = \vec{q} + (\vec{\omega} \times \vec{q})Dt + \operatorname{grad} \Phi Dt, \quad (311)$$

gdje je primijenjen odnos (289c).

U izrazu (311) za diferencijal vremena  $t$  pisano je simbolički  $Dt$ , jer se radi o promjeni vektora  $\vec{q}$  povezanoj sa slijedom čestice u njenu gibanju. Taj izraz predstavlja besko-

načno malu afinu transformaciju koju je čestica fluida doživjela u beskonačno kratkom vremenskom intervalu  $Dt$ .

Brzina promjene relativnog radijvektora  $\vec{\varrho}$  na temelju izraza (311) i definicije brzine iznosi

$$\frac{D\vec{\varrho}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}}{\Delta t} = \vec{\omega} \times \vec{\varrho} + \text{grad } \Phi. \quad (312)$$

Taj je izraz osnova za fizikalnu interpretaciju komponente gibanja čestice fluida.

*Brzina relativnog istezanja i brzina relativnog volumenskog širenja čestice fluida.* Označi li se sa  $\varepsilon_{|\vec{\varrho}|}$  brzina relativnog istezanja čestice fluida u proizvoljnom smjeru relativnog radijvektora  $\vec{\varrho}$ , ta je brzina definirana graničnim prijelazom

$$\varepsilon_{|\vec{\varrho}|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{|\vec{\varrho}|} \frac{|\vec{\varrho}'| - |\vec{\varrho}|}{\Delta t} = \frac{1}{|\vec{\varrho}|} \frac{D|\vec{\varrho}|}{Dt}, \quad (313)$$

gdje je  $|\vec{\varrho}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ .

Budući da je  $\vec{\varrho} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = 0$ , i ako se primjeni izraz (312), može se izraz (313) dalje razviti u

$$\varepsilon_{|\vec{\varrho}|} = \frac{1}{|\vec{\varrho}|^2} \left( \vec{\varrho} \cdot \frac{D\vec{\varrho}}{Dt} \right) = \frac{1}{|\vec{\varrho}|^2} (\vec{\varrho} \cdot \text{grad } \Phi). \quad (314)$$

Izraz (314) pokazuje da rotacijska komponenta gibanja čestice, koja je dio kvazikrute komponente tog gibanja, ništa ne pridonosi brzini relativnog istezanja čestice fluida.

U pravokutnom Descartesovu sustavu izraz (314) ima oblik

$$\varepsilon_{|\vec{\varrho}|} = \frac{1}{|\vec{\varrho}|^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta \right) = \frac{2\Phi}{|\vec{\varrho}|^2}, \quad (315)$$

ili primjenom izraza (301):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{|\vec{\varrho}|} &= \varepsilon_{xx} \frac{\xi^2}{|\vec{\varrho}|^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\eta^2}{|\vec{\varrho}|^2} + \varepsilon_{zz} \frac{\zeta^2}{|\vec{\varrho}|^2} + 2\gamma_{xy} \frac{\xi}{|\vec{\varrho}|} \frac{\eta}{|\vec{\varrho}|} + \\ &+ 2\gamma_{yz} \frac{\eta}{|\vec{\varrho}|} \frac{\zeta}{|\vec{\varrho}|} + 2\gamma_{zx} \frac{\zeta}{|\vec{\varrho}|} \frac{\xi}{|\vec{\varrho}|}. \end{aligned} \quad (316)$$

U tom su izrazu

$$\frac{\xi}{|\vec{\varrho}|} = \cos(\vec{\varrho}, x), \quad \frac{\eta}{|\vec{\varrho}|} = \cos(\vec{\varrho}, y), \quad \frac{\zeta}{|\vec{\varrho}|} = \cos(\vec{\varrho}, z). \quad (317)$$

kosinusim smjera relativnog radijvektora  $\vec{\varrho}$ .

Ako se  $\vec{\varrho}$  usmjeri u smjeru osi  $Ox$ , tada je

$$\vec{\varrho} = \xi \vec{i},$$

pa definicija (313), izraz  $\vec{\varrho} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = 0$  i prvi od izraza (291e) daju

$$\varepsilon_\xi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\xi' - \xi}{\Delta t} = \frac{1}{\xi} \frac{D\xi}{Dt} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (318)$$

Slično bi se dobilo i za smjerove  $Oy$  i  $Oz$ :

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_\zeta = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (319)$$

Izrazi (318) i (319) pokazuju da parcijalne derivacije komponenata brzine strujanja fluida u smjerovima tih komponenta  $\partial v_x/\partial x$ ,  $\partial v_y/\partial y$  i  $\partial v_z/\partial z$  fizikalno predstavljaju brzine relativnog istezanja čestice u tim smjerovima.

U izrazu za brzinu relativnog istezanja čestice u proizvoljnom smjeru, kako pokazuje izraz (316), sudjeluju i sve preostale parcijalne derivacije komponenata brzine.

Ako se unutar čestice fluida u trenutku  $t$  formira mali pravokutni paralelepiped s bridovima  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$ , njegov je volumen

$$V_0 = \xi \eta \zeta. \quad (320)$$

U vremenskom intervalu  $Dt$  bridovi se paralelepeda promijene u

$$\xi' = \xi + \varepsilon_{xx} \xi Dt, \quad \eta' = \eta + \varepsilon_{yy} \eta Dt, \quad \zeta' = \zeta + \varepsilon_{zz} \zeta Dt, \quad (321)$$

pa mu se promjeni i volumen u

$$V(t + Dt) = V = (\xi + \varepsilon_{xx} \xi Dt)(\eta + \varepsilon_{yy} \eta Dt)(\zeta + \varepsilon_{zz} \zeta Dt). \quad (322)$$

Definira li se brzina relativnog širenja volumena čestice fluida  $\varepsilon_V$  graničnim prijelazom

$$\varepsilon_V = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow 0}} \frac{V' - V_0}{V_0 \Delta t}, \quad (323)$$

primjenom izraza (320) i (322) dobiva se

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \vec{v}. \quad (324)$$

Taj izraz pokazuje da divergencija brzine strujanja fluida fizikalno predstavlja brzinu relativnog volumenskog širenja čestice fluida.

Iz općih svojstava afinskih transformacija poznato je da dobiveni rezultat, izražen sa (324), ne zavisi od posebnog oblika malog volumena  $V_0$ . Tako, ako se unutar čestice fluida postavi glavni koordinatni sustav tenzora brzine deformacije  $Ox_1y_1z_1$  i u trenutku  $t$  se od točaka čestice formira mala kugla

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2, \quad (325)$$

a njen je volumen u tom trenutku

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \xi_1 \eta_1 \zeta_1, \quad (326)$$

gdje je  $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = R$  polumjer kugle.

U vremenskom intervalu  $Dt$  polumjeri kugle u smjerovima glavnih osi promijene se u

$$\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon_{x_1} \xi_1 Dt, \quad \eta_1' = \eta_1 + \varepsilon_{y_1} \eta_1 Dt, \quad \zeta_1' = \zeta_1 + \varepsilon_{z_1} \zeta_1 Dt, \quad (327a)$$

i kugla prijeđe u elipsoid

$$\frac{x_1^2}{(1 + \varepsilon_{x_1} Dt)^2} + \frac{y_1^2}{(1 + \varepsilon_{y_1} Dt)^2} + \frac{z_1^2}{(1 + \varepsilon_{z_1} Dt)^2} = R^2, \quad (327b)$$

kojemu je volumen

$$V(t + Dt) = V' = \frac{4}{3} \pi R^3 (1 + \varepsilon_{x_1} Dt)(1 + \varepsilon_{y_1} Dt)(1 + \varepsilon_{z_1} Dt). \quad (327c)$$

Provede li se s volumenima (326) i (327c) granični prijelaz (323), dobiva se

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{y_1} + \varepsilon_{z_1} = \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} = \text{div } \vec{v}. \quad (328a)$$

Taj je rezultat identičan rezultatu (324), izvedenom s česticom fluida u obliku malog pravokutnog paralelepippeda, jer je zbroj

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{y_1} + \varepsilon_{z_1} = \text{div } \vec{v} \quad (328b)$$

invariјanta simetričnog tenzora brzine deformacije.

*Rotacijsko gibanje i kutna brzina deformacije čestice fluida.* Beskonačno mala afina transformacija definirana izrazom (311) može se razbiti na dvije uzastopne transformacije, i to na transformaciju izraženu tenzorom brzine deformacije

$$\vec{\varrho}_1 = \vec{\varrho} + \text{grad } \Phi Dt \quad (329a)$$

i transformaciju izraženu kutnom brzinom  $\vec{\omega}$

$$\vec{\varrho}' = \vec{\varrho}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_1) Dt. \quad (329b)$$

Pri tom je redoslijed primjene transformacije nebitan, ali je očito da se pri strujanju fluida te dvije transformacije zbiraju istodobno.

Diferencijal vektora  $\vec{\varrho}_1$  pri transformaciji kutnom brzinom  $\vec{\omega}$ , tj. izrazom (329b), iznosi

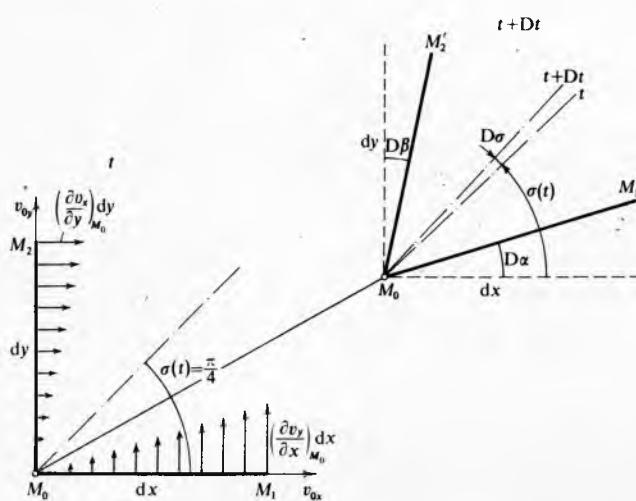
$$D\vec{\varrho}_1 = \vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_1 = (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_1) Dt. \quad (330)$$

Pomnožen skalarno sa  $\vec{\varrho}_1$  taj izraz daje

$$\vec{\varrho}_1 \cdot D\vec{\varrho}_1 = 0, \quad (330a)$$

što pokazuje da je diferencijal  $D\vec{\varrho}_1$  okomit na vektor  $\vec{\varrho}_1$ . Prema tome, nakon što je relativni radijvektor  $\vec{\varrho}$  unutar čestice fluida, sastavljen od točaka fluida, doživio deformaciju uzrokovano

tenzorom brzine deformacije, za proizvoljan smjer unutar čestice vrijedi  $\epsilon_{ij}\bar{g}_{ij} = 0$ , pa se čestica ponaša kao kruto tijelo. I stvarno, kad bi čestica fluida trenutno otvrdnula, npr. kad bi se čestica vode trenutno smrznila, ona bi se dalje okretala kutnom brzinom  $\vec{\omega}$ .



Sl. 67. Fizikalna interpretacija komponentnih gibanja čestice fluida

Umjesto interpretacije dvjema uzastopnim transformacijama (329a) i (329b), do istih se predodžbi dolazi i analizom rezultantnog položaja i oblika čestice u  $t + Dt$ , što ga je čestica, prvo bitno u vremenu  $t$  obliku pravokutnog paralelepippeda, primila postojanjem i djelovanjem ukrižanih parcijalnih derivacija  $\partial v_x / \partial y$ ,  $\partial v_y / \partial x$ ,  $\partial v_y / \partial z$ , itd. Na sl. 67 prikazano je djelovanje parcijalnih derivacija  $\partial v_y / \partial x$  i  $\partial v_x / \partial y$  u ravnini  $Oxy$  na krakove  $dx = M_0M_1$  i  $dy = M_0M_2$ , sastavljene od točaka fluida, u vremenskom intervalu između  $t$  i  $t + Dt$ . U rezultantnoj deformaciji u  $t + Dt$  zakret simetrale za kut

$$D\sigma = \frac{1}{2}(D\alpha - D\beta) \quad (331a)$$

posljedica je postojanja rotacije čestice, a smanjenje pravog kuta što su ga materijalni bridovi  $dx$  i  $dy$  zauzimali u trenutku  $t$  za iznos

$$-D[\star(dx, dy)] = D\alpha + D\beta \quad (331b)$$

pozitivna je kutna deformacija čestice u ravnini  $Oxy$ .

Iz sl. 67 proizlaze očite jednakosti

$$D\alpha = \frac{\partial v_y}{\partial x} Dt, \quad D\beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} Dt. \quad (331c)$$

Za  $z$ -komponentu kutne brzine čestice, na temelju izraza (331a) i jednakosti (331c), dobiva se

$$\omega_z = \frac{D\sigma}{Dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v}. \quad (331d)$$

Za brzinu kutne deformacije u ravnini  $Oxy$  izrazi (331b) i (331c) daju

$$-\frac{D[\star(dx, dy)]}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (331e)$$

Iz čisto formalnih razloga, brzina kutne deformacije definirana izrazima (291e) dobiva faktor  $1/2$ , tj.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{D[\star(dx, dy)]}{Dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (331f)$$

Sličnim razmatranjima došlo bi se i do ostalih komponenta kutne brzine rotacije i brzine kutne deformacije.

Kad bi čestica odjednom otvrdnula, komponente tenzora brzine deformacije bi se odjednom izjednačile s nulom, jer bi nestalo deformacijske komponente u gibanju čestice fluida. Tada bi se iz izraza (291f) dobili odnosi

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (332)$$

koji bi uvršteni u komponente kutne brzine rotacijskog gibanja čestice dali

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial z}, & \omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (332a)$$

To su upravo komponente kutne brzine rotacije krutog tijela (izrazi (288)). Prema tome bi odjednom otvrdnula čestica fluida nastavila rotirati kao kruto tijelo.

**Jednadžba kontinuiteta nestlačivog fluida.** Izrazi (323) i (324) pokazali su da divergencija brzine strujanja fluida predstavlja brzinu relativnog volumenskog širenja čestice fluida. Ako je fluid nestlačiv, individualna čestica fluida mijenjat će tokom vremena samo svoj oblik, tako da će volumen koji ta čestica zauzima uvijek imati isti mjereni broj. To slijedi iz definicije gustoće (2), prema kojoj za  $\rho = \text{const.}$ , što definira nestlačivi fluid, proizlazi  $dm = \text{const.} \times dV$ , odnosno za  $dm = \text{const.}$  (što vrijedi za individualnu česticu) proizlazi  $dV = \text{const.}$  Prema tome su za nestlačiv fluid volumeni  $V_0$  i  $V'$  u izrazu (323) jednaki, pa je brzina relativnog volumenskog širenja  $\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$ , odnosno prema izrazu (324) mora biti

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (333a)$$

To je jednadžba kontinuiteta nestlačivog fluida koja održavanjem konstantnog volumena svake individualne čestice takva fluida osigurava i održavanje konstantne mase u toj čestici. Izraz (333a) je matematički oblik zakona o održanju mase u strujanju nestlačivog fluida.

U pravokutnom kartezijskom sustavu jednadžba kontinuiteta nestlačivog fluida (333a) ima oblik

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (333b)$$

Prema tome sve tri parcijalne derivacije na lijevoj strani tog izraza ne mogu imati isti predznak: ako su, npr., prve dvije pozitivne, treća mora biti negativna. Naime, samo tada čestica u obliku pravokutnog paralelepippeda pri svojoj deformaciji može zadržati konstantan volumen, a time i svoju konstantnu nestlačivu masu, tj. ako se širi u smjerovima  $x$  i  $y$ , paralelepiped se mora sužavati u smjeru  $z$ .

Vektorsko polje kojemu je divergencija jednaka nuli naziva se *solenoidalnim*. Prema tome je vektorsko polje brzine strujanja nestlačivog fluida solenoidalno.

### Kinematika bezvrtložnog (potencijalnog) i vrtložnog (rotacijskog) strujanja fluida

**Cirkulacija brzine i tok ili fluks vektora, protok.** Ako se u prostornoj promjenljivom vektorskog polja  $\vec{a}(\vec{r})$  položi bilo kakva prostorna krivulja  $\mathcal{L}$ , što spaja dve točke  $A(\vec{r}_A)$  i  $B(\vec{r}_B)$ , krivuljni integral

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \Gamma_{AB} = \int \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int |\vec{a}| \cos(\vec{a}, d\vec{r}) |d\vec{r}| \quad (334)$$

naziva se *cirkulacijom vektora  $\vec{a}$  po krivulji  $\mathcal{L}$*  (sl. 68).

U pravokutnom kartezijskom sustavu izraz (334) ima oblik

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (334a)$$

Općenito cirkulacija  $\Gamma_{\mathcal{L}}$  zavisi i od krajnjih točaka  $A$  i  $B$  i od krivulje  $\mathcal{L}$ .

Očito da promjena smjera integriranja po krivulji  $\mathcal{L}$  mijenja predznak cirkulacije, tj.

$$\Gamma_{BA} = -\Gamma_{AB}. \quad (334b)$$

Ako se, npr., za vektor  $\vec{a}$  uzme vektor sile  $\vec{F}$  koja djeluje na materijalnu točku, a za  $\mathcal{L}$  putanja te točke, cirkulacija sile  $\vec{F}$  po krivulji  $\mathcal{L}$

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W \quad (334c)$$

predstavlja rad sile  $\vec{F}$  pri premještanju materijalne točke iz  $A$  u  $B$ .

Ako je vektor  $\vec{a}$  vektor brzine strujanja fluida  $\vec{v}$ , tada je krivuljni integral

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) \quad (335)$$

cirkulacija brzine po krivulji  $\mathcal{L}$ .

Ako vektor  $\vec{a}$  ima potencijal  $f$ , tako da je

$$\vec{a} = \operatorname{grad} f, \quad (336a)$$

tada je

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} = \int_{AB} df = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A), \quad (336b)$$

tj. cirkulacija vektora  $\operatorname{grad} f$ , gdje je  $f$  jednoznačna funkcija, jednaka je po proizvoljnoj krivulji  $\mathcal{L}$  razlici vrijednosti funkcije u točkama  $B$  i  $A$ , dakle ne zavisi od oblika krivulje  $\mathcal{L}$ , već samo od njenih krajnjih točaka.

Posebno, cirkulacija vektora  $\operatorname{grad} f$  po zatvorenoj krivulji  $C$  jednaka je nuli, jer se točke  $B$  i  $A$  na takvoj krivulji poklapaju, pa je

$$\Gamma_C = \int_C \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} = 0. \quad (336c)$$

Vrijedi i obratno: ako je cirkulacija vektora  $\vec{a}$  preko svake zatvorene krivulje  $C$  jednaka nuli, vektor  $\vec{a}$  je gradijent neke skalarne funkcije  $f$ . Naime, zatvorena krivulja  $C$  može se rasštaviti na dva proizvoljna dijela  $\mathcal{L}_1$  i  $\mathcal{L}_2$  (sl. 69), pa uz

$$0 = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{L}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (336d)$$

vrijedi

$$\Gamma_{AB} = \int_{\mathcal{L}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{L}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{-\mathcal{L}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A), \quad (336e)$$

tj. cirkulacija od  $A$  do  $B$  ne zavisi od krivulje integracije, već samo od radijvektora točke  $B(\vec{r})$  držeći čvrsto točku  $A(\vec{r}_0)$ . Diferencijal jednakosti (336e) daje

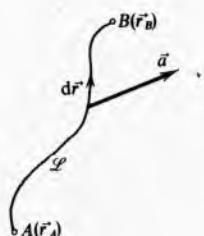
$$d\Gamma_{AB} = \vec{a} \cdot d\vec{r} = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}, \quad (336f)$$

ili

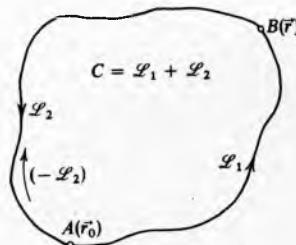
$$df = \vec{a} \cdot d\vec{r} = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}, \quad (336g)$$

odakle

$$(\vec{a} - \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (336h)$$



Sl. 68. Definicija cirkulacije vektora  $\vec{a}$  po krivulji  $\mathcal{L}$



Sl. 69. Uz svojstva cirkulacije potencijalnog vektora  $\vec{a} = \operatorname{grad} f$

Ta jednakost pokazuje da je vektor  $(\vec{a} - \operatorname{grad} f)$  okomit na proizvoljan smjer, što je moguće samo ako je

$$\vec{a} = \operatorname{grad} f. \quad (336i)$$

Budući da je i svaki konstantni vektor  $\vec{a}_0$  potencijalni vektor,

$$\vec{a}_0 = \operatorname{grad} (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}), \quad (336j)$$

to je i cirkulacija konstantnog vektora po zatvorenoj krivulji jednaka nuli, tj.

$$\Gamma_C = \int_C \vec{a}_0 \cdot d\vec{r} = \int_C \operatorname{grad} (\vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (336k)$$

To slijedi i izravno iz

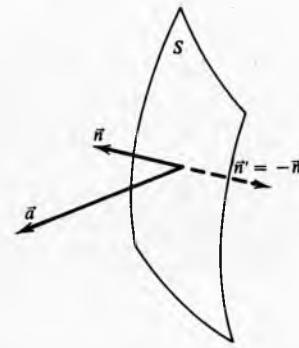
$$\Gamma_C = \int_C \vec{a}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{a}_0 \cdot \int_C d\vec{r} = \vec{a}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0. \quad (336l)$$

Cirkulacija brzine ima veliku praktičnu i teoretsku važnost u mehanici fluida.

Ako se u prostornoj promjenljivom vektorskom polju  $\vec{a}(\vec{r})$  položi zatvorena ili otvorena površina  $S$ , površinski integral

$$F_S(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS \quad (337)$$

naziva se *tokom* ili *fluksom vektora  $\vec{a}$  kroz plohu  $S$*  (sl. 70).



Sl. 70. Definicija toka ili fluksa vektora  $\vec{a}$  kroz površinu  $S$

U pravokutnom kartezijskom sustavu izraz (337) ima oblik

$$F_S(\vec{a}) = \int_S [a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)] dS. \quad (337a)$$

Ako je vektor  $\vec{a}$  vektor brzine strujanja fluida  $\vec{v}$ , njegov tok kroz površinu  $S$  naziva se *volumenskim protokom* ili, jednostavno, *protokom  $Q$*  fluida kroz površinu  $S$ :

$$Q = F_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (337b)$$

Očito je da tok vektora kroz površinu, dakle i protok fluida, mijenja predznak s promjenom orientacije plohe, koja je određena jednim od dva moguća smjera normale  $\vec{n}$  na plohu, npr. ako se na sl. 70 orientacija normalom  $\vec{n}$  promijeni u orientaciju normalom  $\vec{n}' = -\vec{n}$ . Slično, ako je zatvorena površina  $S$  orientirana vanjskom normalom s obzirom na volumen fluida koji zatvara, pozitivna vrijednost protoka kroz  $S$  označuje da postoji višak istjecanja fluida iz tog volumena.

Ako je ploha  $S$  zatvorena, tok vektora može se primjenom poučka Gauss-Ostrogradskoga (46c) izraziti volumenskim integralom

$$F_S(\vec{a}) = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (337c)$$

Budući da je

$$\operatorname{div} \vec{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = 3, \quad (337d)$$

mjerni broj volumena  $V$  zatvorenog unutar površine  $S$  može se pomoću (337c) izraziti tokom radijvektora  $\vec{r}$  kroz površinu  $S$ , tj.

$$V = \frac{1}{3} \int_V \vec{r} \cdot \vec{n} dS, \quad (337e)$$

gdje je  $\vec{n}$  vanjska normala.

**Bezvrtložno (potencijalno) strujanje fluida.** Analitički zapis Helmholtzova poučka u obliku (305) pokazuje mogućnost podjele strujanja fluida na bezvrtložna strujanja, u kojima je  $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega} = 0$ , i na vrtložna, kad je  $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$ .

Uvjet bezvrtložnosti strujanja

$$\operatorname{rot} \vec{v} \equiv 0, \quad (338)$$

što u komponentama vodi do identiteta

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} \equiv \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} \equiv \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (338a)$$

pokazuje takvu srodnost prostornih funkcija  $v_x$ ,  $v_y$  i  $v_z$  da je linearna diferencijalna forma  $v_x dx + v_y dy + v_z dz$  totalni diferencijal neke skalarne funkcije  $\varphi$ , tj. da je

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi. \quad (339)$$

Funkcija

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) \quad (339a)$$

naziva se *potencijalom brzine*, a bezvrtložno strujanje naziva se *potencijalnim strujanjem*.

Iz (339) slijedi

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (339b)$$

odnosno

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi. \quad (339c)$$

Isti rezultat odmah daju i razmatranja koja su dovela do izraza (305), uvrsti li se u njega identitet (338).

Na temelju izraza (336b) pri potencijalnom strujanju je cirkulacija brzine po  $C$

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A), \quad (339d)$$

dok je po zatvorenoj krivulji  $C$

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (339e)$$

Budući da je

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0,$$

slijedi ako je strujanje potencijalno da je ono i bezvrtložno.

Uvrsti li se brzina izražena sa (339c) u jednadžbu kontinuiteta *nestlačivog* fluida (333a), dobiva se

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0, \quad (340)$$

gdje je  $\Delta$  Laplaceov operator ili laplasijan.

U pravokutnom kartezijskom koordinatnom sustavu izraz (340) ima oblik

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (340a)$$

Linearna parcijalna jednadžba drugog reda (340), odnosno (340a), jest Laplaceova jednadžba i ona je osnovna diferencijalna jednadžba potencijalnog (bezvrtložnog) strujanja nestlačivog fluida.

U ortogonalnim krivocrtim koordinatama, na temelju izraza (219), komponente brzine strujanja (339b) imaju oblik

$$v_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad v_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad v_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}, \quad (341a)$$

a Laplaceova diferencijalna jednadžba (340a):

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) = 0. \quad (341b)$$

**Kinematički elementi vrtložnog strujanja.** Pri vrtložnom je strujanju fluida  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ , pa u istom prostoru kojim strui fluid, uz vektorsko polje brzine

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (342a)$$

postoji i polje rotora brzine ili, što je isto, polje vektora dvostrukog kutnog rotacije čestica

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} = \vec{\Omega}(\vec{r}, t). \quad (342b)$$

To polje i polje vektora brzine (342a) može biti *nestacionarno* ili *stacionarno*, već prema tome da li zavisi ili ne zavisi od vremena.

Vektorske krivulje polja  $\vec{\Omega}$  jesu *vrtložne krivulje* ili *vrtložnice*. Tangenta u svakoj točki vrtložne krivulje poklapa se sa

smjerom vektora  $\vec{\Omega}$ . Ako je  $d\vec{r}$  element vrtložne krivulje, tada je po definiciji te krivulje

$$d\vec{r} \times \vec{\Omega} = 0, \quad (343)$$

što vodi do sustava diferencijalnih jednadžbi vrtložne krivulje

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \quad (343a)$$

U tom sustavu jednadžbi vrijeme  $t$  je parametar, tj. predstavlja vremenski trenutak  $t_0$  u kojem se određuje sustav vrtložnih krivulja.

Ako se u određenom vremenskom trenutku poljem  $\vec{\Omega}$  položi proizvoljna krivulja  $C$  koja nije vrtložna, pa se kroz svaku njenu točku povuče vrtložna krivulja, dobiva se *vrtložna površina*. Postupkom sličnim onome koji je doveo do diferencijalne jednadžbe strujne površine, prema izrazu (279), dobiva se diferencijalna jednadžba vrtložne površine u obliku

$$\Omega_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0, \quad (344)$$

a rješenje te jednadžbe

$$\mathcal{F}(x, y, z, t_0) = 0 \quad (344a)$$

predstavlja vrtložnu površinu.

Ako je krivulja  $C$  zatvorena, vrtložna površina položena njome je *vrtložna cijev*.

Budući da je divergencija rotora identički jednak nuli, vrijedi

$$\text{div}(\text{rot } \vec{v}) \equiv 0,$$

ili

$$\text{div } \vec{\Omega} \equiv 0, \quad (345)$$

što pokazuje da je polje  $\vec{\Omega}$  (342b) solenoidalno.

Primjenom izraza (337c) na solenoidalno polje  $\vec{\Omega}$  za tok vektora  $\vec{\Omega}$  kroz zatvorenu površinu  $S$  položenu u to polje dobiva se

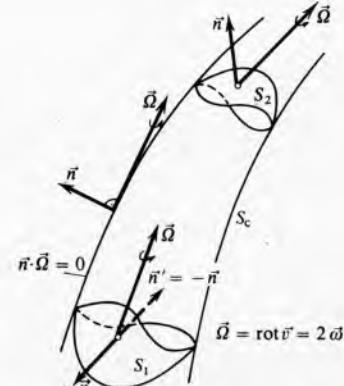
$$F_S(\vec{\Omega}) = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dS = \int_S \text{div } \vec{\Omega} dV = 0, \quad (346)$$

tj. taj je tok jednak nuli.

*Drugi Helmholtzov poučak.* Ako se u polju  $\vec{\Omega}$  zatvorena površina formira od plašta vrtložne cijevi  $S_c$  i dva proizvoljna presjeka te cijevi  $S_1$  i  $S_2$  (sl. 71), primjena jednakosti (346) na tu zatvorenu površinu daje

$$\int_{S_1} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dS + \int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dS = 0, \quad (347)$$

gdje je primijenjena činjenica da je preko plašta vrtložne cijevi  $\vec{n} \cdot \vec{\Omega} = 0$ , pa je tok vektora  $\vec{\Omega}$  kroz  $S_c$  jednak nuli.



Sl. 71. Uz definiciju drugog Helmholtzova teorema

Promijeni li se orientacija površine  $S_1$  od normale  $\vec{n}$  na normalu  $\vec{n}' = -\vec{n}$ , izraz (347) može se pisati u obliku

$$\int_{S_1} \vec{n}' \cdot \vec{\Omega} dS = \int_{S_2} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dS. \quad (347a)$$

Budući da su presjeci  $S_1$  i  $S_2$  proizvoljni, vrijedi

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dS = \text{const.}, \quad (347\text{b})$$

gdje je  $S$  proizvoljan presjek vrtložne cijevi.

Izraz (347b) sadržaj je *drugog Helmholtzova poučka*, koji glasi: Tok rotora brzine, a također i vektora kutne brzine  $\vec{\omega}$ , kroz proizvoljan presjek vrtložne cijevi konstantan je u danim trenutak vremena uzduž čitave vrtložne cijevi.

Veličina konstante u (347b)

$$i = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} dS \quad (347\text{c})$$

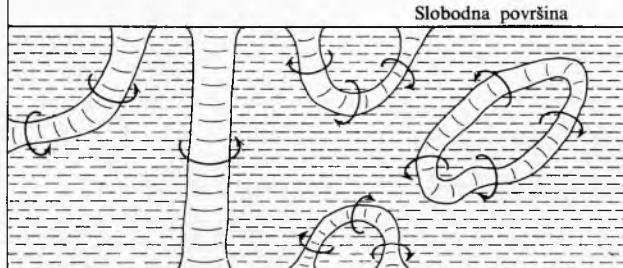
služi kao *mjera intenziteta vrtložne cijevi*.

U elementarnu vrtložnu cijev moguće je položiti normalne ravne presjeke  $A$ , pa je za takvu cijev drugi Helmholtzov poučak

$$\Omega A = \text{const.}, \quad (347\text{d})$$

gdje je  $\Omega$  apsolutna vrijednost rotora brzine, odnosno dvostruka vrijednost kutne brzine rotacije čestica fluida.

Oblak (347d) Helmholtzova poučka pokazuje da se kutna brzina rotacije čestica fluida smanjuje kad se površina presjeka vrtložne cijevi povećava i, obratno, ta se brzina povećava pri smanjenju presjeka. Iz održanja intenziteta vrtložne cijevi i iz neprekidnosti polja  $\vec{\Omega}$  slijedi zaključak da vrtložne cijevi ne mogu započeti niti završiti unutar fluida. Naime, kad bi vrtložna cijev završila nultim presjekom u točki unutar fluida, kutna brzina rotacije čestica postala bi beskonačna, što je fizikalno nemoguće, a kad bi unutar fluida završila nekim kočnjim presjekom, bila bi narušena neprekidnost polja  $\vec{\Omega}$ . Prema tome, vrtložne cijevi mogu biti ili zatvorene, ili mogu započeti i završiti na granici fluida (sl. 72), ili mogu oticiti u beskonačnost ako je fluid neograničen.



Sl. 72. Moguće konfiguracije vrtložnih cijevi u fluidu

*Stokesov poučak*. Neka je u fluidu u vrtložnom strujanju položena jednostavno zatvorena krivulja  $C$  i nad njome razapeta jednostruko suvisla (otvorena) površina  $S$ , preko koje je polje brzine neprekidno i derivabilno (sl. 73a). Gledano s vrha normale  $\vec{n}$ , na površini  $S$  pozitivno je obilaženje krivulje  $C$  pri krivuljnoj integraciji u smjeru suprotnom od smjera hoda kazaljke sata, tj. s desne na lijevu stranu. Površina  $S$  razbijena je poprečnim i obodnim krivuljama na  $N$  malih elementarnih površina  $\Delta S_i$ , koje su obrubljene zatvorenim elementarnim krivuljama  $\Delta C_i$  (sl. 73b). Cirkulacija brzine po rubnoj krivulji  $C$  može se prikazati zbrojem cirkulacija brzine  $\Delta \Gamma_i$  po  $N$  elementarnih krivulja  $\Delta C_i$

$$\Gamma_C = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \Delta \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \int_{\Delta C_i} \vec{v} \cdot d\vec{q}, \quad (348)$$

jer se u tom zbroju svaka stranica krivulja  $\Delta C_i$ , osim onih stranica koje pripadaju rubu  $C$ , obilaze po dva puta u dva suprotna smjera, pa se doprinose tih stranica u tom zbroju poštavaju, a ostaje cirkulacija brzine po rubu  $C$ .

Pri proračunu

$$\Delta \Gamma_i = \int_{\Delta C_i} \vec{v} \cdot d\vec{q} \quad (349)$$

izabire se unutar  $\Delta S_i$  pol  $O_i$  (sl. 73c), a brzina strujanja fluida  $\vec{v}$  se na temelju prvog Helmholtzova poučka i izraza (303) u neposrednom okolišu pola  $O_i$  razbija na dijelove

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times \vec{q} + \text{grad } \Phi. \quad (303)$$

U tom je izrazu  $\vec{v}_0$  konstantan vektor u okolišu pola  $O_i$ , pa je na temelju (336k) i (336c)

$$\int_{\Delta C_i} (\vec{v}_0 + \text{grad } \Phi) \cdot d\vec{q} = 0. \quad (350)$$

Budući da je  $i \text{rot } \vec{v}$ , koji zavisi samo od izbora pola  $O_i$ , u neposrednom okolišu tog pola konstantan vektor do male veličine višeg reda, uvrštenje (303) u (349) daje

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_i &= \int_{\Delta C_i} \left( \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \times \vec{q} \right) \cdot d\vec{q} = \text{rot } \vec{v} \cdot \left( \int_{\Delta C_i} \frac{1}{2} \vec{q} \times d\vec{q} \right) = \\ &= \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}_i \Delta S_i, \end{aligned} \quad (351)$$

gdje je prema sl. 73c i prema definiciji vektorskog produkta primijenjen odnos

$$\frac{1}{2} \vec{q} \times d\vec{q} = \vec{n}_i d(\Delta S_i) \quad (351\text{a})$$

i poznati odnos vektorske algebre:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

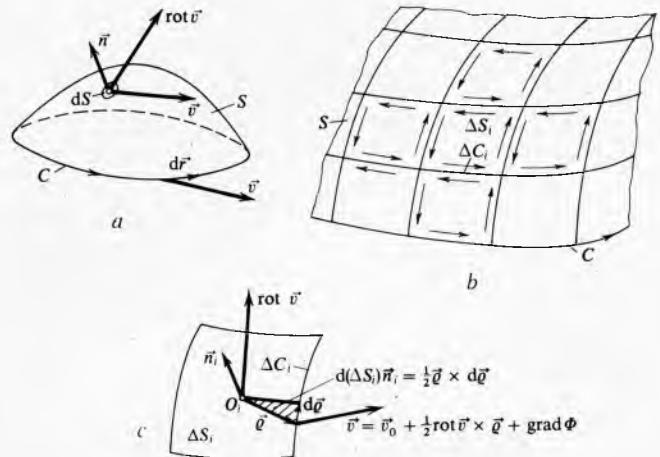
Uvrsti li se (351) u (348) i pusti li se da  $N \rightarrow \infty$ , pri čemu se elementi mreže preko površine  $S$  stežu u točke, vrijedi

$$\Gamma_C = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}_i \Delta S_i = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} dS \quad (352)$$

ili

$$\Gamma_C = F_S(\text{rot } \vec{v}). \quad (352\text{a})$$

To je sadržaj *Stokesova poučka*: Cirkulacija brzine po zatvorenoj krivulji  $C$  jednaka je toku rotora brzine kroz (otvorenu) površinu razapetu nad krivuljom  $C$  kao rubom te površine.



Sl. 73. Uz izvod Stokesova teorema

U pravokutnom kartezijiskom sustavu Stokesov poučak (352) ima oblik

$$\begin{aligned} &\int_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \\ &= \int_S \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned} \quad (352\text{b})$$

Stokesov poučak je primjenljiv i na bilo koje drugo neprekidno i derivabilno vektorsko polje  $\vec{a}$ , tj.

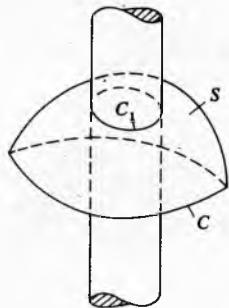
$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} dS. \quad (352c)$$

Iz Stokesova poučka (352) primjeće se važna činjenica da površinski integral

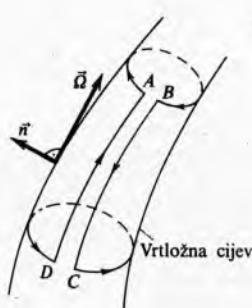
$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} dS \quad (352d)$$

ne zavisi od oblika i veličine površine, već samo od njena ruba  $C$ .

Uvjet jednostrukog suvislosti što ga mora zadovoljavati područje primjenljivosti Stokesova poučka sastoji se u tome da se svaka zatvorena krivulja  $C$  na površini  $S$  može stegnuti u točku ne napuštajući  $S$ . Takva je, očito, površina prikazana na sl. 73a, ali takva nije, npr., površina  $S$  probodena beskonačno dugačkim valjkom (sl. 74), jer se  $C$  koji ostaje u području definicije može najdalje stegnuti do  $C_1$ , ali ne i do točke.



Sl. 74. Primjer područja  $S$  na koje nije primjenljiv Stokesov teorem



Sl. 75. Izvod drugog Helmholtzova teorema primjenom Stokesova teorema

Jedna od važnih posljedica Stokesova poučka jest da je cirkulacija brzine po zatvorenoj krivulji koja sva leži na površini vrtložne cijevi, ali je ne opasuje, jednak nuli. Na takvoj je površini  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0$ , pa površinski integral u (352) isčezava. Time se može još jednom dokazati drugi Helmholtzov poučak. Naime, ako se površinom vrtložne cijevi položi zatvorena krivulja oblika prikazanog na sl. 75, cirkulacija brzine po toj krivulji jednak je nuli, tj.

$$\Gamma = \Gamma_{\widehat{AB}} + \Gamma_{\widehat{BC}} + \Gamma_{\widehat{CD}} + \Gamma_{\widehat{DA}} = 0. \quad (353)$$

Približi li se točka  $B$  točki  $A$  i točka  $C$  točki  $D$  tako da se i lukovi  $\widehat{DA}$  i  $\widehat{BC}$  poklope, zbog suprotnih smjerova obilaženja tih luka vrijedi

$$\Gamma_{\widehat{BC}} + \Gamma_{\widehat{DA}} = 0, \quad (353a)$$

pa uvrštenje u (353) daje

$$\Gamma_{\widehat{CD}} = -\Gamma_{\widehat{AB}}. \quad (353b)$$

Promijeni li se smjer obilaženja luka  $\widehat{AB}$  od  $A$  prema  $B$  na smjer od  $B$  prema  $A$  okolo vrtložne cijevi, dobiva se

$$\Gamma_{\widehat{CD}} = \Gamma_{\widehat{BA}}. \quad (353c)$$

Prema toj jednakosti i Stokesovu poučku tokovi rotora brzine kroz proizvoljne presjeke vrtložne cijevi razapete nad zatvorenim krivuljama  $\widehat{CD}$  i  $\widehat{BA}$  također su jednaki, o čemu govori i drugi Helmholtzov poučak.

Jednakosti (33e) za potencijalno (bezvrtložno) strujanje i (33c) za bilo koje polje potencijalnog vektora također se izravno dobivaju primjenom Stokesova poučka.

Stokesov poučak ima važnu primjenu i pri eksperimentalnim istraživanjima vrtložnih strujanja, jer se rotor brzine ne može izravno mjeriti nekim instrumentom, pa bi se iz snimke polja brzine strujanja morala ustanoviti prostorna zavisnost komponenata tog polja da bi se mogle odrediti parcijalne derivacije koje ulaze u  $\vec{Q}$ .

*Kelvinov kinematički teorem o vrtložima* glasi (W. Thomson, Kelvin of Largs, 1824—1907): Individualna vremenska deriva-

cija cirkulacije brzine po zatvorenoj krivulji, koja se sastoji uvijek od istih čestica, jednaka je cirkulaciji akceleracije po toj krivulji, tj.

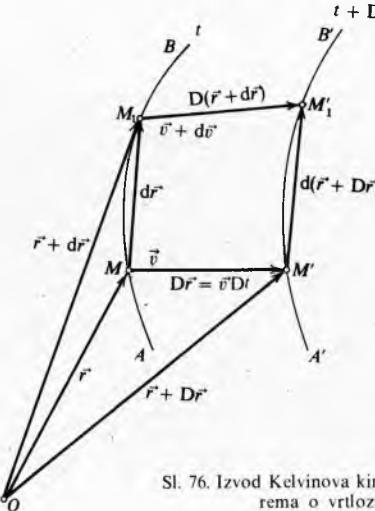
$$\frac{D}{Dt} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r}. \quad (354)$$

U tom izrazu zatvorena krivulja  $C(t)$  mijenja s vremenom i svoj položaj u prostoru i svoj oblik i veličinu, ali se na njoj nalaze uvijek iste čestice.

U izrazu (354) i dalje u dokazu poučka simbol  $d$  odnosi se na prostorni diferencijal neke veličine, a simbol  $D$  na diferencijal neke veličine povezan s pomakom čestice. Tako su na sl. 76 u trenutku  $t$  na luku  $\widehat{AB}$  izabrane dvije bliske točke  $M(\vec{r})$  i  $M_1(\vec{r} + d\vec{r})$ , u kojima su brzine strujanja fluida  $\vec{v}$  i  $\vec{v} + d\vec{v}$ . U vremenskom intervalu  $Dt$  čestice iz  $M$  i  $M_1$  priđu u točke  $M'$  i  $M'_1$  s radijvektorima

$$\vec{r}'_M = \vec{r} + D\vec{r} = \vec{r} + \vec{v} Dt, \quad (355a)$$

$$\vec{r}'_{M_1} = \vec{r} + d\vec{r} + D(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{r} + d\vec{r} + D\vec{r} + D(d\vec{r}). \quad (355b)$$



Sl. 76. Izvod Kelvinova kinematičkog teorema o vrtložima

Tu je primijenjen očiti odnos

$$D\vec{r} = \vec{v} Dt. \quad (355c)$$

Na isti je način i

$$D(\vec{r} + d\vec{r}) = (\vec{v} + d\vec{v}) Dt, \quad (355d)$$

što uvršteno u (355b) daje

$$\vec{r}'_{M_1} = \vec{r} + d\vec{r} + D\vec{r} + D(d\vec{r}) = \vec{r} + d\vec{r} + \vec{v} Dt + d\vec{v} Dt. \quad (355e)$$

S obzirom na prostorni prirast radijvektora točke  $M'_1$  relativno prema točki  $M'$ , može se pisati

$$\vec{r}'_{M'_1} = \vec{r}'_M + d(\vec{r}'_M) = \vec{r} + D\vec{r} + d\vec{r} + D(D\vec{r}). \quad (355f)$$

Usporedba (355b) i (355f) pokazuje važnu činjenicu da je dopušteno zamijeniti redoslijed individualnog i prostornog diferenciranja, tj.

$$D(d\vec{r}) = d(D\vec{r}). \quad (355g)$$

Uvrsti li se (355c) u (355e), vidi se da je

$$D(d\vec{r}) = d\vec{v} Dt. \quad (355h)$$

Derivira li se individualno po vremenu cirkulacija brzine po luku  $\widehat{AB}$ ,

$$\Gamma_{\widehat{AB}} = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{r}, \quad (356)$$

slijedi

$$\frac{D\Gamma_{\widehat{AB}}}{Dt} = \int_{\widehat{AB}} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{AB}} \vec{v} \cdot \frac{D(d\vec{r})}{Dt}. \quad (356a)$$

Uvrsti li se u drugi član desne strane tog izraza jednakost (355h), vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma_{AB}}{Dt} &= \int_{AB} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \\ &= \int_{AB} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \int_{AB} d\left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \\ &= \int_{AB} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2). \end{aligned} \quad (356b)$$

Ako je krivulja  $\widehat{AB}$  zatvorena krivulja  $C$ , tada se točke  $A$  i  $B$  poklapaju, pa otpada član  $\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$  i izraz (356b) prelazi u (354), što je sadržaj Kelvinova kinematičkog poučka o vrtlozima.

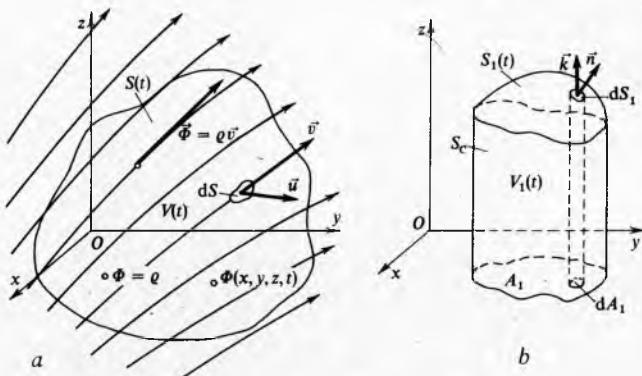
### Reynoldsov transportni teorem

Za matematički prikaz zakona održanja u dinamici fluida često je potrebno vremenski derivirati volumenske integrale s vremenski promjenljivim granicama različitih fizikalnih veličina izraženih u Eulerovim varijablama  $\vec{r}$  i  $t$ . Tehnika određivanja takve derivacije poznata je kao Reynoldsov transportni teorem. Poseban je slučaj Reynoldsova transportnog teorema individualna (ili materijalna) vremenska derivacija volumenskog integrala kojemu se unutar granica nalazi uvijek ista identificirana mase fluida.

Preko čestice fluida u nestacionarnom strujanju može se točkama područja strujanja pridružiti skalarno ili vektorsko polje neke dinamičke veličine, izražene po volumenu, u Eulerovim varijablama, sl. 77a,

$$\Phi = \Phi(\vec{r}, t). \quad (357)$$

Primjeri takve veličine jesu volumenska gustoća mase fluida  $\Phi = \varrho(\vec{r}, t)$ , volumenska gustoća količine gibanja  $\vec{\Phi} = \varrho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$  i volumenska gustoća kinetičke energije  $\Phi = \frac{1}{2}\varrho v^2$ .



Sl. 77. Izvod Reynoldsova transportnog teorema

U području strujanja fluida odabrana je neka zatvorena i po dijelovima glatka vremenski promjenljiva površina  $S(t)$  koja ograničuje vremenski promjenljiv volumen  $V(t)$ . Vremenski zakon promjene volumena  $V(t)$  zadan je zakonom razdiobe brzine  $\vec{u}$  točaka njegove granice  $S(t)$ , u obliku

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t), \quad (358a)$$

i u općem je slučaju potpuno nezavisan od zakona gibanja materijalnih čestica fluida danog poljem brzina

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (358b)$$

U posebnom su slučaju brzine  $\vec{u}$  na granici  $S(t)$  upravo jednake brzinama čestica  $\vec{v}$ .

Sadržaj  $J$  fizikalne veličine, zadane volumenskom gustoćom  $\Phi$ , u volumenu  $V(t)$  dan je volumenskim integralom

$$J(t) = \iiint_{V(t)} \Phi(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (359)$$

Budući da volumen  $V(t)$  tokom vremena mijenja oblik, veličinu i položaj u prostoru, a polje gustoće  $\Phi$  također je funkcija točaka prostora i vremena, taj volumen prekriva različite dijelove polja  $\Phi$ , pa je očito i sadržaj  $J$ , kao što je označeno u izrazu (359), funkcija vremena. U formulacijama zakona održanja javlja se vremenska derivacija takvih sadržaja. Ta se derivacija određuje sljedećim postupkom:

Površina  $S(t)$  rastavi se na konačan broj takvih dijelova da je za točke svakog dijela jedna prostorna koordinata funkcija preostalih dviju koordinata i vremena. Na sl. 77b prikazan je jedan dio  $V_1(t)$  ukupnog volumena  $V(t)$ . Taj je dio ograničen cilindričnom površinom  $S_C$  koja ima izvodnice paralelne s osi  $Oz$  i s površinama  $z = 0$  i  $z = \varphi(x, y, t)$ , gdje je

$$z = \varphi(x, y, t) \quad (360)$$

jednadžba upravo jednog takvog dijela  $S_1(t)$  površine  $S(t)$ . U ravnnini  $Oxy$ , tj.  $z = 0$ , volumen  $V_1(t)$  ograničen je ravnom plohom  $A_1$ . Cilindrična površina  $S_C$  i ploha  $A_1$  nepomične su u prostoru.

Izraz (359) za sadržaj  $J_1$  u  $V_1(t)$  ima oblik

$$J_1(t) = \iint_{A_1} \left[ \int_{z=0}^{z=\varphi(x,y,t)} \Phi(x, y, z, t) dz \right] dx dy. \quad (361)$$

Za vremensku derivaciju  $dJ_1/dt$  može se napisati sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J_1(t + \Delta t) - J_1(t)}{\Delta t} = \\ &= \iint_{V_1(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy dz + \\ &+ \iint_{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Phi[x, y, \varphi(x, y, t), t] dx dy = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2. \end{aligned} \quad (362)$$

Iz sl. 77b vidi se da postoji jednakost

$$dx dy = dA_1 = (\vec{n} \cdot \vec{k}) dS_1 = \cos(n, z) dS_1,$$

gdje je  $\vec{n}$  vanjska normala na  $S_1$ , pa se za dio  $\mathcal{D}_2$  u (362) može pisati

$$\mathcal{D}_2 = \iint_{\substack{S_1(t) \\ [z = \varphi(x, y, t)]}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Phi(x, y, z, t) \cos(n, z) dS_1. \quad (362a)$$

U tom je izrazu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, t) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{z}}{\partial t} = \frac{1}{\partial t} = u_z \quad (362b)$$

brzina gibanja površine  $S_1(t)$ , definirane sa  $z = \varphi(x, y, t)$ , u smjeru osi  $Oz$ , tj. brzina gibanja po pravcu  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  točke presjecišta površine  $S_1$  i tog pravca.

Izrazu (362b) može se dati i drugi oblik ako se jednadžba obitelji površina  $S_1(t)$

$$z - \varphi(x, y, t) = 0$$

riješi po  $t$  u eksplicitnu funkciju  $F$

$$t = F(x, y, z). \quad (362c)$$

Tim je zapisom promjena obitelji površina  $S_1(t)$  u vremenu dana površinama  $t = \text{const.}$  Budući da grad  $t$  ima isti smjer kao i vanjska normala na  $S_1(t)$ , vrijedi

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial n} \vec{n} = \frac{\vec{n}}{\frac{\partial n}{\partial n}} = \frac{\vec{n}}{u_n} = \frac{\vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}}, \quad (362d)$$

gdje je  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = \partial n / \partial t$  brzina gibanja površine  $S_1(t)$  u smjeru vanjske normale.

Pomnoži li se skalarno izraz (362d) sa  $\vec{k}$ , dobiva se

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\cos(n, z)}{\vec{u} \cdot \vec{n}},$$

što uvršteno u (362b) daje

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u_z = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\cos(n, z)},$$

tako da se dio  $\mathcal{D}_2$  vremenske derivacije, izraz (362a), može pisati

$$\mathcal{D}_2 = \int_{S_1(t)} \Phi(x, y, z, t) \vec{u} \cdot \vec{n} dS_1. \quad (362e)$$

Zbroje li se dijelovi  $\mathcal{D}_1$  i  $\mathcal{D}_2$ , dobiva se izraz za vremensku derivaciju:

$$\frac{dJ_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV_1 = \int_{V_1(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV_1 + \int_{S_1(t)} \Phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS_1. \quad (362f)$$

Ako se ista tehnika primjeni i na ostale dijelove površine  $S(t)$ , preko kojih se jedna prostorna koordinata prikazuje funkcijom preostalih dviju i vremena, i ako se zbroje sve te vremenske derivacije koje su sastavljene svaka od dva dijela,  $\mathcal{D}_1$  i  $\mathcal{D}_2$ , dobiva se

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \Phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (363)$$

To je *Reynoldsov transportni teorem*, prema kojemu je vremenska derivacija, tj. brzina promjene sadržaja fizikalne veličine zadane Eulerovim poljem volumenske gustoće  $\Phi(\vec{r}, t)$ , sastavljena od dva dijela. Prvi je dio vremenska (lokalna) zavisnost gustoće  $\Phi$  unutar volumena  $V(t)$ . Taj dio doprinosi brzini promjene sadržaja  $J$  veličinu  $(\partial \Phi / \partial t) dV$  u svakom elementu volumena  $dV$ . Drugi dio, pomicna površina  $S(t)$  zauzima tokom vremena neka nova područja polja  $\Phi$ , a napušta neka koja je ranije prekrivala, pri čemu svaki element površine  $dS$  doprinosi brzini promjene sadržaja  $J$  iznos  $\Phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ .

Ako je volumen integracije  $V(t)$  nepomičan i vremenski nepromjenljiv, tj. ako je  $V(t) = V_0$  tako da je  $\vec{u} = 0$ , izraz (363) daje

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \Phi(\vec{r}, t) dV = \int_{V_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV. \quad (364)$$

Vrlo je važna primjena Reynoldsova transportnog teorema kad je  $V(t)$  materijalni volumen  $V_m(t)$ , koji se sastoji uvek od istih čestica fluida. Takav je volumen ograničen zatvorenom *materijalnom površinom*  $S_m(t)$  na kojoj su brzine točaka površine jednake brzinama čestica na površini  $S_m(t)$ , pa je

$$\vec{u} = \vec{v}. \quad (365)$$

Tada vremenska derivacija sadržaja  $J$  fizikalne veličine izražene Eulerovim poljem  $\Phi(\vec{r}, t)$  u materijalnom volumenu  $V_m(t)$  postaje individualna ili materijalna vremenska derivacija, pa Reynoldsov transportni teorem poprima oblik

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} \Phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (366)$$

Taj je izraz vrlo prikladan za prevođenje dinamičkih zakona sustava materijalnih čestica u dinamičke zakone fluida kao neprekidne sredine.

Jednostavan primjer primjene izraza (366) jest interpretacija fizikalnog značenja divergencije polja brzine strujanja fluida kao brzine relativnog volumenskog širenja čestice fluida. Stavi li se  $\Phi = 1$ , što je bez dimenzije jer se radi o »volumenskoj gustoći volumena«, izraz (366) daje

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} dV = \frac{DV_m}{Dt} = \int_{S_m(t)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_m(t)} \operatorname{div} \vec{v} dV,$$

gdje je primijenjen teorem Gauss-Ostrogradskoga (46c). Pusti li se da  $V_m \rightarrow 0$ , dobiva se

$$\lim_{V_m \rightarrow 0} \frac{1}{V_m} \frac{DV_m}{Dt} = \operatorname{div} \vec{v}, \quad (367)$$

što ima isti sadržaj kao i izrazi (323) i (324).

Ako je  $\Phi(\vec{r}, t)$  skalarna funkcija, mogu se izrazi (363) i (366) transformirati pomoću teorema Gauss-Ostrogradskoga u oblike:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi \vec{u}) \right] dV, \quad (368)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV = \int_{V_m(t)} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi \vec{v}) \right] dV. \quad (369)$$

Ako je  $\Phi$  vektorska veličina, tada se Reynoldsov transportni poučak u tom obliku može primijeniti na njene pojedine skalarne komponente.

U analitičkim prikazima potreban je i izraz koji povezuje materijalnu vremensku derivaciju sadržaja fizikalne veličine zadane gustoćom  $\Phi(\vec{r}, t)$  u materijalnom volumenu  $V_m(t)$ , izraz (366), i vremenske derivacije sadržaja te iste veličine u nematerijalnom volumenu  $V(t)$  koji se mijenja nezavisno od gibanja čestica fluida, izraz (363). Pri tom se pretpostavlja da je gustoća  $\Phi$  u oba slučaja zadana u istom prostorno-vremenskom koordinatnom sustavu  $\vec{r}, t$ . Ako se u određeni vremenski trenutak  $t = t_0$  volumeni  $V_m(t_0)$  i  $V(t_0)$  i njihove granice  $S_m(t_0)$  i  $S(t_0)$  podudaraju, tj. ako je

$$\begin{aligned} V_m(t_0) &\equiv V(t_0), \\ S_m(t_0) &\equiv S(t_0), \end{aligned} \quad (370)$$

tada su i prvi članovi desnih strana izraza (366) i (363) međusobno jednaki

$$\int_{V_m(t_0)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV = \int_{V(t_0)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV,$$

što vodi do jednakosti

$$\begin{aligned} \left[ \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]_{t=t_0} &= \left[ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]_{t=t_0} + \\ &+ \int_{S_m(t_0) = S(t_0)} \Phi [(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{n}] dS. \end{aligned} \quad (371)$$

**Lema vezana uz proizvoljnost volumena integracije.** Zakoni održanja su formulirani u diferencijalnom obliku i u integralno-diferencijalnom obliku. Pri pretvaranju drugog oblika u prvi primjenjuje se sljedeća važna lema više matematičke analize. Ako je  $f$  neprekidna funkcija zadana u trodimenzijskom Euklidovu prostoru, te je

$$\int_V f(M) dV = 0 \quad (372a)$$

za proizvoljan volumen integracije, tada mora biti

$$f(M) \equiv 0 \quad (372b)$$

u tom prostoru.

Kada bi, naime, u nekoj proizvoljnoj točki  $M_1$  funkcija  $f(M_1)$  bila različita od nule, npr.  $f(M_1) > 0$ , tada zbog neprekidnosti funkcije  $f$  i u nekom malom volumenu  $\Delta V$  oko točke  $M_1$  vrijedi  $f(M) > 0$ . Primjeni li se teorem srednje vrijednosti integralnog računa na integral (372a) po volumenu  $\Delta V$ , slijedi

$$\int f(M) dV = f(\mu) \Delta V > 0, \quad (372c)$$

gdje je  $\mu$  neka točka u  $\Delta V$ . Rezultat (372c) proturjeći pretpostavci da je integral (372a) jednak nuli za proizvoljan volumen integracije, što znači da funkcija  $f(M)$  mora biti identički jednak nuli u svakoj točki prostora definicije.