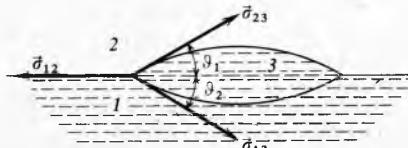


Ako je površinska napetost između plina i stjenke krutog tijela veća nego između kapljevine i krutog tijela, tj. ako je $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, tada je $\cos\theta > 0$ a kut dodira je oštar (sl. 14a i c). U tom slučaju kaže se da kapljevina kvasi krutu površinu, a površina da je hidrofilna. Ako je $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, tada je kut dodira tup (sl. 14b i d), pa se kaže da kapljevina ne kvasi površinu, a površina da je hidrofobna. Primjer prve kombinacije je dodir vode i čistog stakla ($\theta = 0$), a druge dodir žive i čistog stakla ($\theta = 150^\circ$) te vode i parafina ($\theta = 105^\circ$), sve u zraku kao trećem mediju.

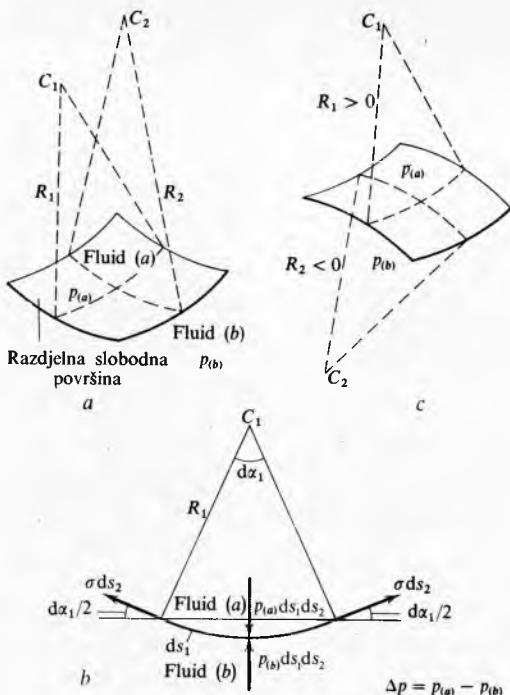
Ako od tri različite tvari u dodiru ni jedna nije kruta, npr. kaplja jedne kapljevine (3) na površini druge kapljevine (1), obje u dodiru s plinom (2), sl. 15, tada se kutovi dodira ϑ_1 i ϑ_2 određuju iz uvjeta ravnoteže pisanog u vektorskom obliku

$$\vec{\sigma}_{12} + \vec{\sigma}_{13} + \vec{\sigma}_{23} = 0. \quad (111)$$

Taj uvjet pokazuje da svaka pojedina od apsolutnih vrijednosti vektora σ_{12} , σ_{13} i σ_{23} ne smije biti veća od zbroja ostalih dviju, niti manja od njihove razlike. Ako to nije zadovoljeno, ravnoteža se ne može uspostaviti. Tako je u kombinaciji ulje, voda i zrak površinska napetost vode protiv zraka $\sigma_{12} = 0,0728 \text{ N/m}$ mnogo veća od zbroja površinskih napetosti ulja protiv zraka $\sigma_{23} = 0,0330 \text{ N/m}$ i ulja protiv vode $\sigma_{13} = 0,0182 \text{ N/m}$. Kao posljedica takva odnosa, površinska napetost σ_{12} voda–zrak razvlači uljinu kapljenu na vodi, tako da se ulje na vodi raširi u vrlo tanki površinski sloj reda veličine 10^{-6} mm . Tanji se slojevi ne formiraju već se raspadaju, čime se pokazuje da je debljina sloja reda veličine promjera molekule, tzv. monomolekularni sloj.



Sl. 15. Kutovi dodira dviju kapljevina i plina



Sl. 16. Skok tlaka preko zakrivljene razdjelne površine dvaju fluida

Za zakrivljenu slobodnu površinu, koja dijeli dva fluida (a) i (b), površinska napetost uzrokuje diskontinuitet ili skok tlaka pri prolazu kroz površinu. Na sl. 16a i c izrezan je iz zakrivljene slobodne površine element plohe omeđen lukovima ds_1 i ds_2 .

Pretpostavlja se da je u promatranoj točki ploha dvostruko zakrivljena, s glavnim polumjerima zakrivljenosti R_1 i R_2 koji su prema dogovoru pozitivni kad su središta zakrivljenosti C_1 i C_2 na strani fluida (a) u kojem vlada tlak $p_{(a)}$. U skladu s tim dogovorom, na sl. 16c koja pokazuje sedlastu plohu, polumer je zakrivljenosti R_2 negativan jer se C_2 nalazi na strani fluida (b) u kojem vlada tlak $p_{(b)}$. Pri proračunu skoka tlaka $\Delta p = p_{(a)} - p_{(b)}$ postavlja se jednadžba ravnoteže svih sila, koja uz $ds_1 = R_1 d\alpha_1$, $ds_2 = R_2 d\alpha_2$ i $\sin(d\alpha_1/2) \approx d\alpha_1/2$, $\sin(d\alpha_2/2) \approx d\alpha_2/2$, za smjer djelovanja tlakova prema sl. 16b poprima oblik

$$-p_{(a)} ds_1 ds_2 + p_{(b)} ds_1 ds_2 + 2\sigma ds_2 \frac{ds_1}{2R_1} + 2\sigma ds_1 \frac{ds_2}{2R_2} = 0. \quad (112)$$

Odatle slijedi

$$\Delta p = p_{(a)} - p_{(b)} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (113)$$

U izrazu (113) polumeri su zakrivljenosti R pozitivni kad su pripadna središta zakrivljenosti na strani na kojoj vlada tlak $p_{(a)}$.

Na kuglinoj je površini $R_1 = R_2 = R$, pa je u fluidu unutar sferne kaplje ili sferne šupljine tlak za $\Delta p = 2\sigma/R$ veći od tlaka u okolišnom fluidu.

Za šuplju kuglu s istovrsnim vanjskim i unutrašnjim fluidom (npr. balon od sapunice) skok tlaka preko opne iz vanjskog u unutrašnji prostor iznosi $\Delta p = 4\sigma/R$. Taj izraz, kao i izraz (113), pokazuje da se skok tlaka povećava sa smanjenjem polumjera kugle. Stoga, ako se dva balona od sapunice međusobno spoje cjevčicom, tada će manji balon kroz tu cjevčicu napuhavati veći balon dok ga potpuno ne nestane. Ta je pojava potpuno suprotna ponašanju dvaju napuhanih i međusobno spojenih gumenih balona.

Ako je slobodna površina dio kružne cilindrične plohe, na kojoj je $R_1 = R$, a $R_2 = \infty$, skok tlaka jest $\Delta p = \sigma/R$.

Za ravnu je razdjelnju plohu $R_1 = R_2 = \infty$, pa preko takve plohe ne postoji skok tlaka, tj. $\Delta p = 0$.

STATIKA FLUIDA

Statika fluida proučava fluid u stanju mirovanja. U statičkom fluidu nema tangencijalnih naprezanja ni gibanja čestica, što omogućuje i pojednostavljuje matematičko opisivanje i analizu pojava, pa je stoga statika fluida najegzaktniji dio mehanike fluida. Osnovni je zadatak statike fluida da odredi raspored normalnih tlačnih naprezanja unutar fluida. U praktičnoj primjeni to omogućuje proračun sila koje djeluju na elemente konstrukcija okruženih fluidom u stanju mirovanja. U statiku fluida uključeni su obično i problemi fluida u relativnom mirovanju, kad nema relativnog pomaka čestica jednih prema drugima, već se čitav fluid giba poput krutog tijela.

Jednadžba ravnoteže i Pascalov zakon. Jednadžba ravnoteže fluida u mirovanju, izraz (59), može se pisati u obliku

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{f}, \quad (114)$$

ili u komponentama pravokutnoga koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho f_z \end{aligned} \quad (114a)$$

Pomnoži li se jednadžba ravnoteže (114) skalarno s $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, dobiva se izraz za diferencijal tlaka pri tom pomaku u prostoru

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz). \quad (114b)$$

Ako ne postoje masene sile, $\vec{f} = 0$, npr. fluid u bestežinskom stanju, tada je $\operatorname{grad} p = 0$, pa je tlak u svim točkama kapljevine ili plina isti. Ta činjenica, poznata kao *Pascalov zakon*, izražava

se riječima: u fluidu u mirovanju tlak se širi jednoliko u svim smjerovima. Isto vrijedi i za fluid u mirovanju u kojem već postoji određeni raspored tlaka $p(x,y,z)$. Tada se konstantni tlak p_0 nametnut fluidu izvana raširi po fluidu na sve strane jednakom, ne mijenjajući gradijent postojeće razdiobe $p(x,y,z)$, jer je

$$\text{grad} [p(x,y,z) + p_0] = \text{grad} p(x,y,z). \quad (115)$$

Polje masenih sile $\vec{f}(x,y,z)$ mora zadovoljavati određeni uvjet da bi u tom polju fluid bio u statičkoj ravnoteži. Ako se, naime, jednadžba ravnoteže (114) piše u obliku

$$\vec{f} = \frac{1}{\varrho} \text{grad} p \quad (116)$$

i primjeni operator rotora na lijevu i desnu stranu,

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{f} &= \text{grad} \frac{1}{\varrho} \times \text{grad} p + \frac{1}{\varrho} \text{rot grad} p = \\ &= \text{grad} \frac{1}{\varrho} \times \text{grad} p = \text{grad} \frac{1}{\varrho} \times \varrho \vec{f}. \end{aligned} \quad (117)$$

gdje je primijenjen identitet $\text{rot grad} \equiv 0$, skalarno množenje tog izraza sa \vec{f} daje

$$\vec{f} \cdot \text{rot} \vec{f} = 0. \quad (118)$$

To je potreban uvjet za polje masenih sile $\vec{f}(x,y,z)$ da bi u njemu bila moguća statička ravnoteža fluida i da bi se mogla odrediti dva skalarna polja tlaka $p(x,y,z)$ i gustoće $\varrho(x,y,z)$ unutar fluida koja će zadovoljiti jednadžbu ravnoteže (114).

U geometrijskoj interpretaciji uvjet (118) pokazuje da se u vektorsko polje masene sile \vec{f} može položiti sustav površina koje ortogonalno probadaju silnice tog vektorskog polja. Općenito, ako je u neko vektorsko polje $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z)$ moguće položiti površine $F(x,y,z,C) = 0$ kroz koje ortogonalno prolaze vektorske krivulje polja \vec{a} , tada se to polje može izraziti u obliku

$$\vec{a} = |\vec{a}| \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|} = \lambda(x,y,z) \text{grad} F, \quad (119)$$

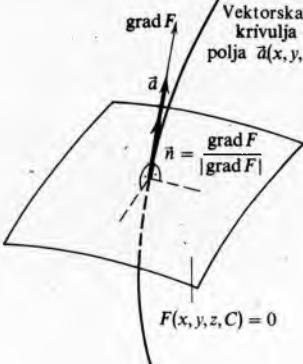
gdje se za $|\vec{a}|/|\text{grad} F|$ uvela skalarna funkcija $\lambda(x,y,z)$, sl. 17. Ako se nad tim izrazom provede operacija rotora

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{a} &= \text{grad} \lambda \times \text{grad} F + \lambda \text{rot grad} F = \\ &= \text{grad} \lambda \times \text{grad} F, \end{aligned} \quad (119a)$$

i skalarno pomnoži taj izraz sa \vec{a} , koji je kolinearan s $\text{grad} F$, slijedi

$$\vec{a} \cdot \text{rot} \vec{a} = 0, \quad (119b)$$

što je po obliku i sadržaju identično uvjetu (118). U vektorskem polju masene sile \vec{f} vektorske su krivulje silnice.



Sl. 17. Geometrijska interpretacija uvjeta $\vec{a} \cdot \text{rot} \vec{a} = 0$

Ako je tekućina nestlačiva i homogena, tj. $\varrho = \text{const.}$, tada operacija rotora nad jednadžbom ravnoteže (114) daje uvjet: $\text{rot} \vec{f} = 0$, (za $\varrho = \text{const.}$), što pokazuje da masene sile moraju imati potencijal $U = U(x,y,z)$, tako da je

$$\vec{f} = -\text{grad} U. \quad (120)$$

Prema tome, homogena nestlačiva tekućina može biti u statičkoj ravnoteži samo u potencijalnom (konzervativnom) polju vanjskih masenih sile.

Opći uvjet za masene sile (118) uvijek je zadovoljen potencijalnim poljem masenih sile oblika (120), tako da je za opći slučaj stlačivog fluida ($\varrho \neq \text{const.}$) u stanju mirovanja u takvu polju masenih sile ravnoteža moguća, i jednadžba ravnoteže glasi

$$\text{grad} p = -\varrho \text{grad} U. \quad (121)$$

Ako se pomnoži ta jednadžba skalarno s proizvoljno usmjerenim prirastom radivektora $d\vec{r}$, dobiva se jednadžba ravnoteže u diferencijalnom obliku

$$dp = -\varrho dU. \quad (121a)$$

Preko ekvipotencijalne plohe jest $U = \text{const.}$ i $dU = 0$, a (121a) pokazuje da je preko te plohe i $dp = 0$, iz čega slijedi da je $p = \text{const.}$, odnosno

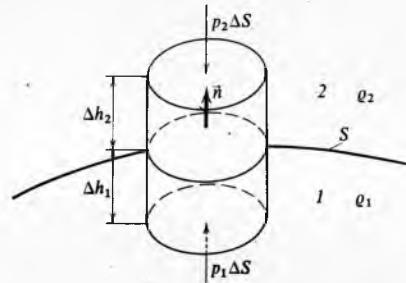
$$p = p(U). \quad (122)$$

Iz izraza (121a) slijedi da je $dp/dU = -\varrho$, pa je i

$$\varrho = \varrho(U). \quad (122a)$$

Površine konstantnog tlaka zovu se *izobare*, a površine konstantne gustoće *izostere*. Razmatranja kojima se došlo do izraza (122) i (122a) pokazuju da se pri statičkoj ravnoteži fluida (kapljevina i plinova) u potencijalnom polju masenih sile ekvipotencijalne plohe poklapaju s izobarama i izosterama.

Granica dvaju fluida koji se ne mijesaju, npr. granica vode i zraka, predstavlja površinu prekida gustoće, na kojoj se gustoća skokomije mijenja od vrijednosti ϱ_1 na vrijednost ϱ_2 . Ako se zanemare učinci površinske napetosti, lako se dokaže da je preko takve granice tlak neprekidan.



Sl. 18. Neprekidnost tlaka preko granice dvaju fluida koji se ne mijesaju

Na sl. 18 može se razmotriti ravnoteža elementa dvaju fluida u obliku cilindra kojemu su izvodnice okomite na njihovu granicu S , a presjek ΔS i visine Δh_1 i Δh_2 su malene. Ako su p_1 i p_2 tlakovi u fluidima gustoće ϱ_1 i ϱ_2 , jednadžba ravnoteže za smjer normale na S glasi:

$$(\varrho_1 \Delta h_1 \Delta S + \varrho_2 \Delta h_2 \Delta S) f_n = (p_1 - p_2) \Delta S,$$

gdje je f_n normalna komponenta masene sile, za koju se pretpostavlja da je neprekidna. Ako se podijeli ta jednakost sa ΔS i istodobno steže element u točku na granici S , slijedi

$$p_1 = p_2. \quad (122b)$$

Iz te neprekidnosti tlaka i neprekidnosti potencijala U dobiva se da izraz (121a) na površini prekida gustoća od ϱ_1 na ϱ_2 može biti zadovoljen samo sa $dU = dp = 0$. Odatle se zaključuje da se u tekućini u stanju mirovanja površina prekida gustoće poklapa s ekvipotencijalnom plohom $U = \text{const.}$ Očito je da prva derivacija tlaka pri prolazu kroz granicu ima skok od vrijednosti $dp/dU = -\varrho_1$, na strani okrenutoj prema fluidu 1, na vrijednost $dp/dU = -\varrho_2$, na strani prema fluidu 2.

Ravnoteža fluida u polju sile teže. Sila teže je masena konzervativna sila s potencijalom

$$U_{(g)} = gz, \quad (123)$$

gdje je koordinata z usmjerena vertikalno uvis. Komponente sile teže u horizontalnoj ravnini iščezavaju, pa je

$$f_x = -\partial U_{(g)}/\partial x = 0, \quad f_y = -\partial U_{(g)}/\partial y = 0, \quad (123a)$$

a vertikalna je komponenta

$$f_z = -\partial U_{(g)} / \partial z = -g. \quad (123b)$$

Uz potencijal dan izrazom (123) i na temelju razmatranja koja su dovela do (122) i (123) vrijedi i

$$p = p(z), \quad \varrho = \varrho(z), \quad (124)$$

gdje se prepostavlja da je unutar raspona koordinate z zane-mariva promjena ubrzanja sile teže g . Iz jednadžbe stanja koja povezuje tlak, gustoću i temperaturu fluida, $f(p, \varrho, T) = 0$, slijedi da je i temperatura

$$T = T(z). \quad (124a)$$

Prema tome, za horizontalne ekvipotencijalne plohe sile teže $U_{(g)} = \text{const.}$ u statičkom fluidu su i izobare $p = \text{const.}$ i izostere $\varrho = \text{const.}$ i izoterme $T = \text{const.}$ također horizontalne plohe $z = \text{const.}$

Iz diferencijalnog oblika jednadžbe ravnoteže (121a) i potencijala (123) dobiva se

$$\frac{dp}{dz} = -\varrho g < 0, \quad (125)$$

što pokazuje da tlak pada s visinom. Integracija jednadžbe (125) daje

$$p(z) = p_0(z = z_0) - \int_{z_0}^z \varrho g dz. \quad (126)$$

Integral na desnoj strani je težina stupca fluida visine $(z - z_0)$ s jediničnom površinom osnovice, i ta težina dovodi do razlike tlakova na visinama z i z_0 .

Hidrostatika

Ravnoteža nestlačivog fluida u polju sile teže. Za homogeni nestlačivi fluid gustoća je konstantna, pa uz konstantnu gravitaciju g jednakost (126) daje, nakon što se riješi integral na desnoj strani,

$$p(z) = p_0(z = z_0) - \varrho g(z - z_0).$$

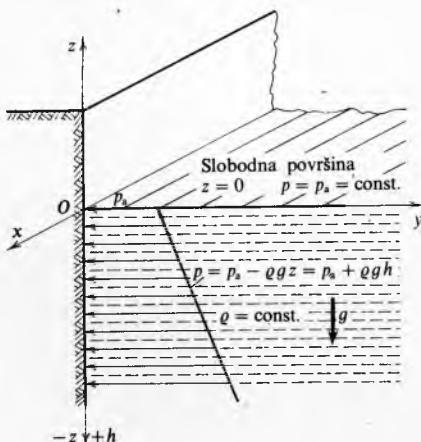
Ako se za proizvoljnu početnu visinu z_0 , na kojoj vlada tlak p_0 , stavi $z_0 = 0$, dobiva se zakon promjene hidrostatičkog tlaka u nestlačivom fluidu

$$p(z) = p_0 - \varrho g z, \quad (127)$$

ili supstitucijom $h = -z$, gdje je h dubina mjerena od $z = 0$,

$$p(h) = p_0 + \varrho gh. \quad (127a)$$

Primjećuje se da tlak linearno pada s visinom (127), odnosno linearno raste s dubinom (127a). Iz praktičnih se razloga $z = 0$ obično stavlja na horizontalnu slobodnu površinu, preko koje, kao razdjelne površine kapljevine i plina, vlada konstantni tlak p_0 . Za otvorene spremnike, bazene ili mora to je atmosferski tlak p_a (sl. 19). Formule (127) ili (127a) osnova su svih hidrostatičkih proračuna u tehničkoj primjeni.



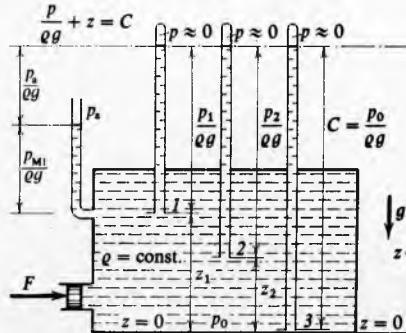
Sl. 19. Linearna promjena hidrostatičkog tlaka u homogenoj nestlačivoj tekućini

Linearni zakon promjene hidrostatičkog tlaka (127) prikladno je prikazati u obliku

$$\frac{p}{\varrho g} + z = C, \quad (128)$$

u kojemu svi članovi predstavljaju visine: $p/(\varrho g)$ je visina tlaka (s dimenzijom $[p/(\varrho g)] = L$, dakle $[p/\varrho g]_{SI} = m$ stupca fluida gustoće ϱ), tj. visina stupca tekućine na čijem gornjem kraju vlada nulti tlak, a u njegovoj osnovici tlak p ; z je geometrijska ili geodetska visina; $C = p_0/(\varrho g)$ je konstantna visina tlaka p_0 na nultoj visini $z = 0$.

Zbroj visine tlaka i geometrijske visine $p/(\varrho g) + z$ zove se *piezometrička visina*, pa se osnovna jednadžba hidrostatike (128) može izraziti riječima: u nestlačivom fluidu u mirovanju piezometrička visina $p/(\varrho g) + z$ ostaje konstantna u svim točkama. Taj zakon zorno je prikazan na sl. 20, gdje je u zatvorenom spremniku djelovanjem sile F na stup nametnut tlak nestlačivom fluidu gustoće ϱ . U točkama 1, 2 i 3 tlakovi su mjereni visinom stupca istog fluida u *piezometrima*, tj. u staklenim cijevima kojima je donji kraj otvoren, a gornji zatvoren i pod potpunim vakuuumom, tako da je iznad razine fluida u piezometru tlak $p = 0$. Razdjelna površina kapljevine i plina ili kapljevine i druge kapljevine u piezometru zove se *meniskus* (polumjesec), zbog specifičnog oblika te površine uzrokovanih površinskim naporom. Zakon rasporeda hidrostatičkog tlaka (128) ilustriran je na sl. 20 konstantnim visinskim položajem meniskusa u piezometrima.



Sl. 20. Hidrostatički tlak u nestlačivoj homogenoj tekućini

Istom slikom može se ilustrirati i Pascalov zakon. Za tlakove unutar spremnika zbog djelovanja sile F na stup vrijedi

$$\frac{p_1}{\varrho g} + z_1 = \frac{p_2}{\varrho g} + z_2 = \frac{p_0}{\varrho g} = \text{const.} \quad (129)$$

Ako se sila F poveća za ΔF , tlak u pojedinim točkama fluida poraste. Neka u proizvoljnim točkama 1 i 2 te u točki 3 taj prirast tlaka bude Δp_1 , Δp_2 i Δp_3 . Tada ponovno mora biti zadovoljena jednadžba hidrostatike (128), tj.

$$\frac{p_1 + \Delta p_1}{\varrho g} + z_1 = \frac{p_2 + \Delta p_2}{\varrho g} + z_2 = \frac{p_0 + \Delta p_3}{\varrho g} = \text{const.},$$

što uz (129) odmah daje

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p.$$

Budući da je izbor točaka bio proizvoljan, zaključuje se da se tlak nametnut izvana širi jednako u sve točke fluida, što je sadržaj Pascalova zakona.

Instrumenti za mjerjenje tlaka kojima je jedan kraj priključen na mjerno mjesto u fluidu, a drugi otvoren prema atmosferi, mijere razliku između apsolutnog tlaka p i atmosferskog tlaka okoline p_a . Ta se razlika

$$p_M = p - p_a = \varrho gh \quad (130)$$

zove *manometarski tlak*. Ako je ta razlika veća od nule, u fluidu vlada *pretlak* ($p_M > 0$), a ako je manja od nule, vlada *podtlak* ($p_M < 0$). Iz definicije manometarskog tlaka (130) očite su dvije činjenice: da je manometarski tlak atmosferskog tlaka jednak

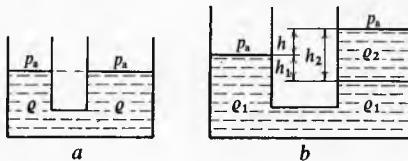
nuli, $p_{Ma} = 0$, i da se iz manometarskog tlaka dobiva apsolutni tlak pribrajanjem atmosferskog tlaka

$$p = p_M + p_a. \quad (130a)$$

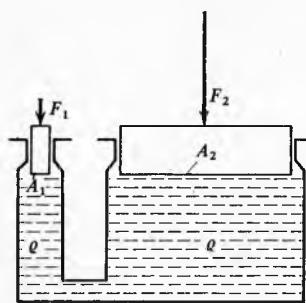
Piezometar na sl. 20, koji je jednim krajem priključen na lijevu stijenu spremnika na visini točke A , a drugi mu je otvoren prema atmosferi, mjeri svojim otklonom (stupcem) manometarski tlak u točki I : $p_{MI} = p_1 - p_a$. Tada je to pretlak $p_{MI} > 0$, ili izraženo visinama $h = p_1/(\rho g) - p_a/(\rho g) > 0$.

U sustavima otvorenim prema atmosferi, atmosferski tlak se prenosi u sve točke fluida i taj tlak okružuje čitav sustav. Stoga je često prikladnije raditi s manometarskim tlakom da se izbjegne u računu nepotrebno pojavljivanje jedne konstantne veličine.

Princip spojenih posuda, koji kaže da slobodne površine homogene kapljevine, otvorene prema istom tlaku, leže u istoj horizontalnoj ravnini u svim spojenim posudama (sl. 21a), tumači se horizontalnošću izobara u gravitacijskom polju Zemlje. To očito nije slučaj kad se u jednom kraku na fluid gustoće ρ_1 nadolije drugi fluid gustoće ρ_2 (sl. 21b), pa dolazi do razlike u visinama razina. Na sl. 21b, na dubinama h_2 u desnom i h_1 u lijevom kraku, koje leže na istoj horizontalni, vlada isti tlak $p_M = \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2$, odakle se za odnos tih dubina dobiva $h_1 = h_2 \rho_2/\rho_1$, pa je uz $\rho_2 < \rho_1$ očito $h_1 < h_2$, i razina u lijevom kraku je niža od one u desnom kraku.



Sl. 21. Spojene posude. a) homogena kapljevina u spojenim posudama, b) dvije kapljevine različitih gustoća u spojenim posudama



Sl. 22. Princip rada hidrauličke prese

Princip spojenih posuda primijenjen je u hidrauličkoj preši (sl. 22) koja služi za dizanje velikih tereta. Ispod stupova 1 i 2 vladaju isti pretlakovi $F_1/A_1 = F_2/A_2$, tako da se sila na veliki stup $F_2 = F_1 A_2/A_1$ izborom odnosa površina stupova A_2/A_1 može učiniti po volji velikom. Odnos pomaka stupova s_1 i s_2 upravo je obrnut, $s_1 = s_2 A_2/A_1$, što slijedi iz jednakosti radova, ako se zanemare sile inercije i trenja te promjena tlakova pri pomaku stupova.

Hidrostatski manometri. Zakon promjene hidrostatskog tlaka (127) ili (127a) osnova je principa rada hidrostatskih ili fluidnih (tekuciinskih) manometara kojima se mjeri tlak. Najjednostavniji među njima je piezometar. To je vertikalna staklena cijev kojoj je jedan kraj spojen s fluidom u posudi, a drugi je otvoren prema atmosferskom tlaku (sl. 23a). Fluid se iz posude podiže u cijev dok se ne uspostavi ravnoteža, a mjerilo za tlak je vertikalna udaljenost od meniskusa do točke u kojoj se mjeri tlak. Tako je za točku A (sl. 23a) ako se krene od meniskusa prema točki A

$$p_a + \rho g h = p_A, \quad (131)$$

a za manometarski tlak definiran sa (130)

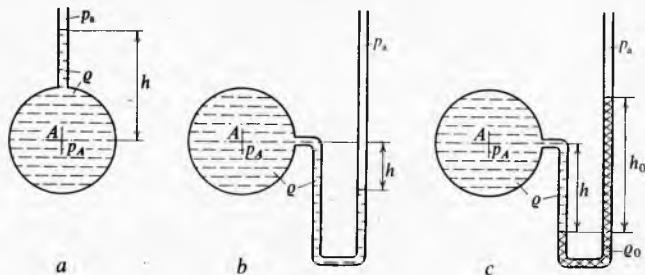
$$p_{MA} = p_A - p_a = \rho g h. \quad (131a)$$

Isti je rezultat ako se krene od točke A prema meniskusu

$$p_A - \rho g h = p_a, \quad (131b)$$

s jedinom razlikom od (131) da se oduzima iznos $\rho g h$, jer se išlo u smjeru prema gore, tj. u smjeru smanjenja hidrostatskog tlaka.

Takov tip manometra prikladan je za mjerjenje manjih pretlakova, a za veće pretlakove postaje nepraktičan jer je potrebna vrlo dugačka cijev (pretlak od $5 \cdot 10^5$ Pa zahtijeva bi za vodu cijev dugačku više od 50 m). Piezometar u tom obliku neće funkcionirati pri mjerjenju podtlaka, jer bi u posudu ulazio zrak.



Sl. 23. Hidrostatski ili tekuciinski manometri

Za mjerjenje manjih pretlakova i podtlakova, cijevi piezometra može se dati oblik slova U (sl. 23b), tako da meniskus u cijevi može doći i ispod i iznad točke A u kojoj se mjeri tlak. Za položaj meniskusa prikazan na sl. 23b, ako se krene od točke A , dobiva se

$$p_A + \rho g h = p_a, \quad (131c)$$

ili

$$p_{MA} = -\rho g h, \quad (131d)$$

što pokazuje da u točki A vlada podtlak.

Za mjerjenje većeg pretlaka i podtlaka kao mjerni fluid upotrebljava se fluid veće gustoće, npr. živa, kojeg će stupac biti približno 13,6 puta manji od stupca vode (sl. 23c). Podešli se od točke A preko srednjeg meniskusa do meniskusa na drugom kraju manometra, gdje vlada atmosferski tlak, vrijedi

$$p_A + \rho g h - \rho_0 g h_0 = p_a, \quad (132)$$

gdje je ρ gustoća radnog fluida, a ρ_0 gustoća mjernog fluida. Za manometarski tlak u točki A dobiva se

$$p_{MA} = \rho_0 g h_0 - \rho g h. \quad (132a)$$

Ako je u posudi plin, tada je ρ zanemariv prema ρ_0 , pa je

$$p_{MA} = \rho_0 g h_0. \quad (132b)$$

Izbor konfiguracije hidrostatskih manometara vrlo je širok i umjesto da se pamte formule za pojedini tip, razumije je registrirati postupak koji je zajednički za sve tipove. Primijenjen već kod tipova manometara na sl. 23a, b i c, taj se postupak sastoji u sljedećem: (a) polazi se s tlakom na jednom kraju manometra. Ako je tlak poznat, napiše se u pripadnoj jedinici, a ako je nepoznat, stavi se simbol. (b) Tom tlaku dodaje se svaka promjena tlaka idući od meniskusa do meniskusa, i to s pozitivnim predznakom ako se ide prema nižem meniskusu, a s negativnim ako se ide prema višem. (c) Zbrajanje i oduzimanje promjena u (b) nastavlja se do drugog kraja manometra i izraz se izjednačuje s nepoznatim ili poznatim tlakom na tom kraju. Izraz koji se dobiva tim postupkom zove se jednadžba hidrostatskog manometra, npr. izrazi (131) i (132).

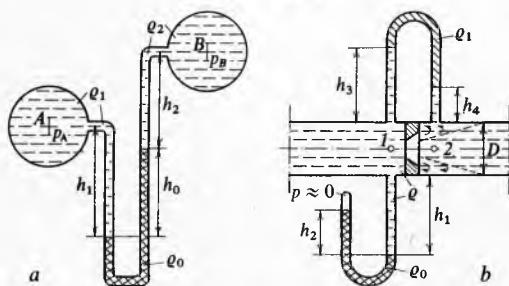
Diferencijalni manometar mjeri samo razliku tlakova u dvjema točkama istog fluida ili različitih fluida. Takav je manometar prikazan na sl. 24a, koji mjerim fluidom gustoće ρ_1 mjeri razliku tlakova u točki A fluida gustoće ρ_1 i točki B fluida gustoće ρ_2 . Primjena jednadžbe manometra za tu razliku daje izraz

$$p_A - p_B = -\rho_1 g h_1 + \rho_0 g h_0 + \rho_2 g h_2. \quad (133)$$

Na sl. 24b prikazan je diferencijalni manometar, priključen na vodomjernu dijafragmu za mjerjenje protoka fluida, u obliku

obrnute U-cijevi s mjernim fluidom gustoće ϱ_1 , manjom od gustoće ϱ radnog fluida. Razlika tlakova u točki 1 i 2 dana je izrazom

$$p_1 - p_2 = (h_3 - h_4)(\varrho - \varrho_1)g.$$



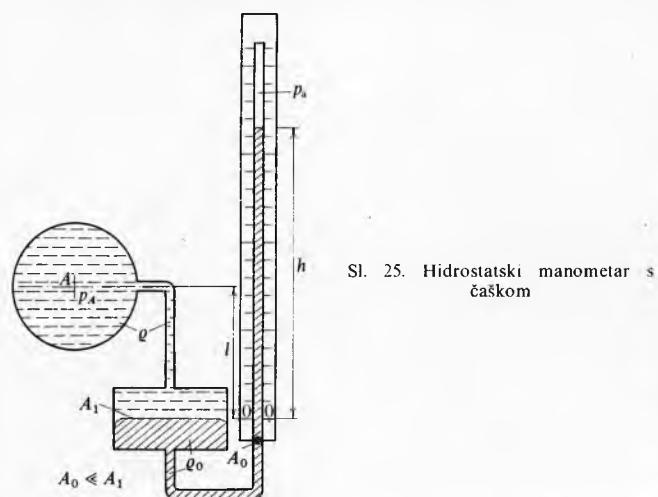
Sl. 24. Diferencijalni hidrostatski manometri

Na uređaj, prikazan na sl. 24b, priključen je i manometar u obliku U-cijevi koji mjeri apsolutni tlak. Tako se primjenom jednadžbe manometra od meniskusa ispod vakuuma $p=0$ preko radnog fluida i gornjega diferencijalnog manometra do točke 2 dobiva izraz za apsolutni tlak u točki 2

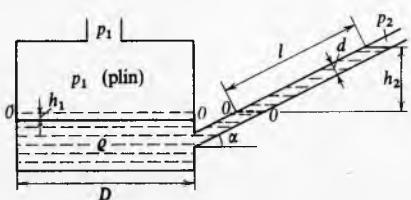
$$0 + \varrho_0 gh_2 - \varrho g(h_1 + D + h_3) + \varrho_1 g(h_3 - h_4) + \varrho g\left(\frac{h_4 + D}{2}\right) = p_2.$$

Posebnim rješenjima hidrostatskih manometara ostvaruju se ili praktičnija očitanja ili se povećava osjetljivost manometara.

Tako se na *manometru s čaškom* (sl. 25), s malim odnosom površina $A_0/A_1 \ll 1$, mjerjenje svodi na očitanje visine samo jednog kraja stupca, jer se spuštanje razine mjernog fluida u čaški može zanemariti ili se to spuštanje može uzeti u obzir jednostavnim korekcijskim članom.



Što je manja vrijednost odnosa razlike tlakova prema očitanju skale manometra, $\Delta p/h_M$, tj. što je dulji mjerni stupac fluida za što manju razliku tlakova, to je manometar osjetljiviji. To povećanje osjetljivosti ostvaruje se različitim rješenjima *mikromanometara*. Na sl. 26 prikazan je *mikromanometar s priklonjenom mjernom cijevi* pod kutom α prema horizontali. Budući da se razlika tlakova mjeri samo vertikalnim otklonom stupca mjernog fluida u kosoj cijevi, tj. visinom h_2 na sl. 26,



Sl. 26. Mikromanometar s cijevi priklonjenom prema horizontali

to vrijedi da se za istu razliku tlakova, tj. $h_2 = \text{const.}$, smanjenjem kuta α istodobno produžava kosi stupac mjernog fluida, označen sa l na sl. 26, koji se pri mjerjenju očitava. Dakle, što je pri istoj visini h_2 duljina stupca l veća, to će očitanje biti točnije. Ako se redom primijene jednadžba manometra, koja daje $(p_1 - p_2)/(\varrho g) = h_1 + h_2$, trigonometrijski odnos $h_2 = l \sin \alpha$ i jednadžba kontinuiteta, koja izražava održanje mase fluida

$$h_1 \frac{D^2 \pi}{4} = h_2 \frac{4}{\sin \alpha} = l \frac{D^2 \pi}{4},$$

odakle je $h_1 = l \left(\frac{d}{D} \right)^2$, dobiva se

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{1}{\varrho g} \frac{p_1 - p_2}{l} - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right].$$

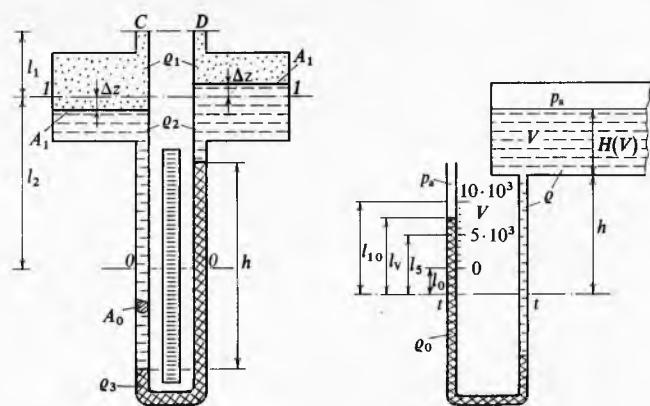
Tim izrazom određuje se kut α priklona cijevi prema horizontali za unaprijed zadatu ili traženu osjetljivost $(p_1 - p_2)/l$. Npr. ako se razlika tlaka od 0,001 bar = 100 Pa želi mjeriti duljinom $l = 250$ mm kosog stupca vode $\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kut priklona je $\alpha = 1^\circ 45' 52''$.

Diferencijalni mikromanometar s dva fluida koji se ne mijesaju a imaju podjednake gustoće, npr. vodom razrijedeni alkohol gustoće 830 kg/m^3 , bojen anilinskom bojom, i kerozin gustoće 790 kg/m^3 , koji ne otapa anilinskog boja, prikazan je na sl. 27. Težim fluidom veće gustoće ϱ_3 ispunji se donji dio U-cijevi do razine 0—0. Na oba se kraja nadolje lakši fluid gustoće ϱ_2 tako da ispunji ostatak U-cijevi i obje čaške do razine 1—1. Mjerna mjesta u kojima se mjeri razlika tlakova p_C i p_D priključuju se u C i D, te plin ili kapljevina gustoće ϱ_1 ispunji prostor iznad razine 1—1. Ako je tlak p_1 u C nešto veći od tlaka p_2 u D, meniskusi 1—1 i 0—0 pomiču se kako je prikazano na sl. 27. Ako je A_1 površina poprečnog presjeka čaške, a A_0 površina presjeka U-cijevi, tada je zbog kontinuiteta mase fluida razlika visine između razine 1—1 i meniskusa: $\Delta z =$

$$= \frac{h}{2} \frac{A_0}{A_1} \text{ pa jednadžba manometra daje}$$

$$p_C - p_D = hg \left[\varrho_3 - \varrho_2 \left(1 - \frac{A_0}{A_1} \right) - \varrho_1 \frac{A_0}{A_1} \right].$$

Budući da su maleni i odnos površina A_0/A_1 i razlika gustoća mjernih fluida ($\varrho_3 - \varrho_2$), instrument je vrlo osjetljiv, pa za male razlike tlakova ima veliki otklon h .



Sl. 27. Diferencijalni mikromanometar s dvije tekućine kojih se gustoće mnogo ne razlikuju

Sl. 28. Pokazivač količine tekućine u rezervoaru na principu hidrostatskog manometra

Princip rada hidrostatskih manometara može se iskoristiti i za mjerjenje količine ili razine fluida u rezervoaru. Jedan takav uređaj prikazan je na sl. 28. Sa $t-t$ označena je razina žive u U-cijevi kad je priključna cijev prazna. Kad je priključna cijev puna, odredi se jednadžbom manometra udaljenost l_0 od razine $t-t$ do označke nulte količine fluida u rezervoaru i udaljenost l_V do označke određene volumenske količine V tekućine

u rezervoaru. Tako je uz oznake na sl. 28 $l_0 = \frac{h\varrho}{2\varrho_0 - \varrho}$ i $l_v = \frac{[H(V) + h]\varrho}{2\varrho_0 - \varrho}$, gdje je dubina fluida u rezervoaru $H(V)$ funkcija volumena V . Oblik te funkcije zavisi od geometrije rezervoara; npr. za rezervoar u obliku pravokutnog paralelepipeda $H(V) = \frac{V}{LB}$, gdje su L i B duljina i širina rezervoara.

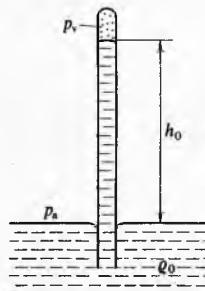
Barometar je hidrostatski manometar kojim se mjeri apsolutni atmosferski tlak (sl. 29). Otvoreni donji kraj cijevi uronjen je u merni fluid kojemu je slobodna površina izložena atmosferskom tlaku. Iz drugoga zatvorenog kraja isisan je zrak, pa se fluid u cijevi podigne, a iznad meniskusa vlada tlak zasićenja para mernog fluida p_v . Jednadžba manometra za atmosferski tlak p_a , prema sl. 29, daje

$$p_a = \varrho_0 gh_0 + p_v, \quad (133a)$$

ili, izraženo visinom stupca mernog fluida,

$$h_a = h_0 + h_v, \quad (133b)$$

gdje je $h_v = \frac{p_v}{\varrho_0 g}$ visina tlaka zasićenja para mernog fluida.



Sl. 29. Princip rada barometra

Sadržaj izraza (133a) i (133b) pokazuju da je za mjerjenje atmosferskog tlaka barometrom potrebno poznavati i tlak zasićenja para (ili, što je isto, tlak isparivanja) mernog fluida pri temperaturi okoline koja okružuje barometar. Za vodu i živu vodu su u tabl. 2 tlakovi zasićenja para za temperature od 0 do 40 °C. Kao što pokazuju podaci u tablici, voda bi zbog relativno visokih tlakova isparivanja i osjetnih promjena tlaka isparivanja u normalnom području temperatura okoline bila nezahvalan merni medij u barometru, jer bi uz očitanja visine vodenog stupca (koji bi i tako zbog male gustoće vode bio nepraktično visok, iznad 10 metara) bilo potrebno uvesti korekcijske faktore zavisne od temperature okoline. U tom smislu, prema podacima iz tabl. 2, živa je idealan merni fluid u barometru, jer je njen tlak isparivanja zanemarivo malen, $p_v \approx 0$, pa se izraz (133a) može pojednostaviti u

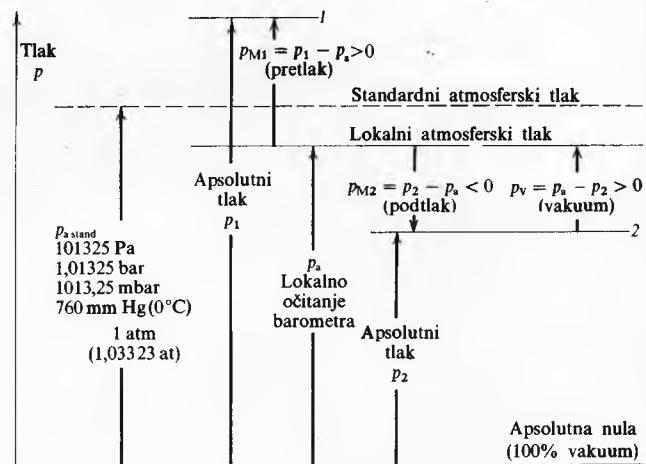
$$p_a = \varrho_0 gh_0, \quad (133c)$$

a zbog velike gustoće žive visina mernog stupca iznosi samo oko 760 milimetara.

Na sl. 30 prikazani su odnosi apsolutnih i manometarskih tlakova i veličina dogovorom prihvaćenoga standardnog atmosferskog tlaka, koji odgovara visini živine stupca od 760 mm, pri temperaturi 0 °C, gustoći žive 13 595,1 kg/m³ i standardnoj gravitaciji 9,806 65 m/s².

Tablica 2
TLAK ZASIĆENJA VODENIH I ŽIVINIH PARA

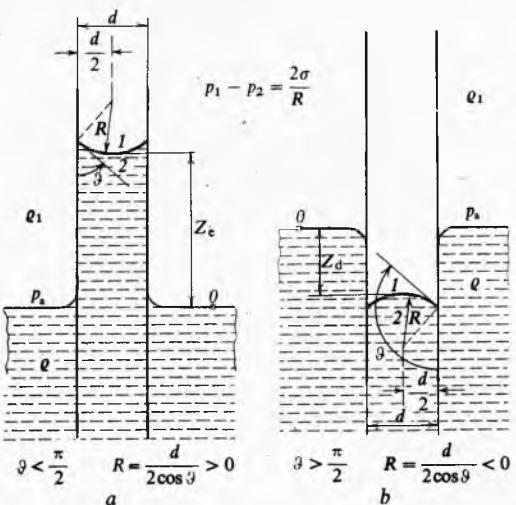
t °C	Voda		Živa	
	p_v Pa	$h_v = \frac{p_v}{\varrho_0 g}$ m	p_v Pa	$h_v = \frac{p_v}{\varrho_0 g}$ mm
0	611	0,062	0,0211	0,00016
10	1227	0,125	0,0668	0,00050
20	2337	0,239	0,1678	0,00126
30	4241	0,434	0,3758	0,00282
40	7375	0,758	0,8412	0,00631



Sl. 30. Odnos apsolutnih i manometarskih tlakova

Živin hidrostatski manometar upotrebljava se za mjerjenje tlakova do 3 bara. Za mjerjenje viših tlakova upotrebljavaju se metalni manometri, i to membranski tip za tlakove do 25 bara, a cijevni tip do 10000 bara. Redovno se u metalnim manometrima membrana ili cijev deformiraju pod opterećenjem razlike mjerjenog tlaka i okolišnog atmosferskog tlaka, kojima su izložene njihove dvije strane, i ta se deformacija sustavom zupčanika i poluga pretvara u pomak kazaljke, ispod koje je brojčanik graduiran u pripadnim jedinicama. Tlak mjerjen takvim manometrom jest pretlak ili podtlak koji vlada na visini osi kazaljke, i ako ta os nije na istoj visini kao točka u kojoj se želi izmjeriti tlak, jednadžbom manometra se ispravlja očitanje manometra za razliku u tim visinama, vodeći računa o gustoći fluida u priključnoj cijevi. *Aneroidai (suhii) barometar* radi na sličnom principu i pokazuje razliku tlaka između atmosfere i zrakoprasne (evakuirane) kutije ili cijevi, mijereći tako apsolutni atmosferski tlak.

Kapilarna elevacija i depresija. U cijevima hidrostatskih manometara promjera većeg od 15 mm kapilarni učinci su zanemarivi. Međutim, u cijevima manjih promjera kapilarni učinci, već prema veličini kuta dodira ϑ , udubile ili izboče meniskusa na granici dvaju fluida, i preko tako zakrivljenog meniskusa površinska napetost dovodi do diskontinuiteta tlaka, što uzrokuje kapilarnu elevaciju ili depresiju (sl. 31 a i b). Kad je promjer cijevi malen, meniskus poprima oblik dijela kugline plohe, za koju je, prema sl. 31, polujer $R = \frac{d}{2\cos\vartheta}$, pa je $R > 0$ za $\vartheta < \pi/2$, a $R < 0$ za $\vartheta > \pi/2$. Pri prijelazu od točke 1 do točke 2, s jedne na drugu stranu sfernog meniskusa, nastaje zbog površinske napetosti, prema izrazu (113), skok tlaka



Sl. 31. Kapilarna elevacija (a) i kapilarna depresija (b)

$$p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d},$$

ili pisano u obliku prirasta

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\frac{4\sigma \cos \vartheta}{d}. \quad (134)$$

Ako se ide od točke 0, gdje vlada tlak p_a , kroz fluid gustoće ϱ_1 do točke 1 na gornjoj strani meniskusa, zatim kroz sfernu plohu meniskusa do točke 2, pa se kroz fluid gustoće ϱ ponovno dođe do točke 0, jednadžba manometra, uz pozitivan Z prema gore i primjenom izraza (134), glasi

$$p_a - \varrho_1 g Z - \frac{4\sigma \cos \vartheta}{d} + \varrho g Z = p_a,$$

a odatle se dobiva

$$Z = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{g d(\varrho - \varrho_1)}. \quad (135)$$

Za $\vartheta < \pi/2$, bit će $Z = Z_e > 0$, i tada dolazi do pojave *kapilarne elevacije* (sl. 31a), a kad je $\vartheta > \pi/2$, onda je $Z = Z_d < 0$, pa dolazi do *kapilarne depresije* (sl. 31b). Kombinacija voda—zrak ($\sigma = 0,0728 \text{ N/m}$) u čistoj staklenoj kapilari ($\vartheta = 0$) promjera $1 \mu\text{m}$ daje kapilarnu elevaciju oko 30 m .

Do kapilarne elevacije i depresije dolazi i između dviju bliskih ravnih ploha uronjenih u kapljevinu. Tada meniskus poprima oblik dijela kružne cilindrične plohe, preko koje nastaje prirast tlaka $\Delta p = p_2 - p_1 = -\sigma/R = -2\sigma \cos \vartheta/\delta$, pa je kapilarna elevacija i depresija dana izrazom

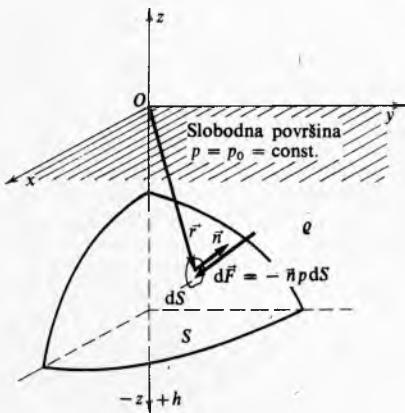
$$Z = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{g \delta(\varrho - \varrho_1)},$$

gdje je δ mali razmak između ravnih ploha.

Sila tlaka na površine. Zakon promjene hidrostatičkog tlaka prema izrazima (127) ili (127a) može se pisati

$$p = p_0 - \varrho g z = p_0 + \varrho g h, \quad (136)$$

gdje je p_0 konstantan tlak na slobodnoj površini. Taj je zakon osnova za proračun sile tlaka koji djeluje na ravne i zakriviljene krute stijenke različitih konstrukcija uronjenih u nestlačivi fluid u mirovanju. Zadatak se svodi na određivanje rezultantne sile tlaka i njena momenta.



Sl. 32. Sila tlaka na površini uronjenoj u statički nestlačiv fluid

Na element površine dS zakriviljene krute stijenke površine S (sl. 32), djeluje elementarna sila tlaka

$$d\vec{F} = -\vec{n} p dS, \quad (137)$$

gdje je \vec{n} vanjska normala na površinu S , s momentom s obzirom na ishodište

$$d\vec{M} = -\vec{r} \times \vec{n} p dS, \quad (137a)$$

gdje je \vec{r} radijvektor elementa dS .

Budući da se u općem slučaju radi o prostornom sustavu elementarnih sile $d\vec{F}$, njihovo vektorsko zbrajanje (integriranje)

po površini S ne mora dovesti do jedne rezultantne sile. Kako je poznato iz statike, da bi prostorni sustav sile $d\vec{F}$ imao jednu rezultantu

$$\vec{F} = -\int_S \vec{n} p dS, \quad (138)$$

moment tog sustava sile

$$\vec{M} = -\int_S \vec{r} \times \vec{n} p dS \quad (138a)$$

mora biti okomit na \vec{F} , što se izražava u obliku

$$\vec{F} \cdot \vec{M} = 0. \quad (138b)$$

Kad uvjet (138b) nije zadovoljen, prostorni sustav sile $d\vec{F}$ svodi se u proizvoljnoj točki na silu \vec{F} danu izrazom (138) i spreg sile momenta \vec{M} danog izrazom (138a).

Redovno se svi zadaci proračuna sile tlaka koja djeluje na krute stijenke mogu riješiti vektorskim integralima (138) i (138a), no u tehničkoj praksi za pojedine slučajeve razvijeni su iz tih izraza rutinski postupci proračuna.

Sila tlaka na ravne površine. Na ravnoj površini normala \vec{n} jest konstantan vektor i po veličini i po smjeru, a elementarne sile tlaka, definirane izrazom (137), predstavljaju sustav paralelnih sile kojemu se djelovanje uviđe može svesti na djelovanje jedne rezultante u određenoj točki, njenom hvatištu. Izraz (138), za rezultantu sile tlaka na ravnu krutu površinu A koja je orijentirana vanjskom normalom \vec{n} , daje

$$\vec{F} = -\vec{n} \int_A p dA \quad (139)$$

s hvatištem u točki C_F određenoj radijvektorom \vec{r}_{C_F} , koji definira vektorska jednadžba

$$\vec{r}_{C_F} \times \vec{F} = -\int_A \vec{r} p dA \times \vec{n} \quad (139a)$$

temeljena na izrazu (138a).

U praktičnoj realizaciji tih proračuna prikladno je razdvojiti proračune sile \vec{F}_0 konstantnog tlaka p_0 i sile \vec{F}_h promjenljivog hidrostatičkog tlaka

$$p_h = -\varrho g z = \varrho g h. \quad (140)$$

Ako se uvrsti konstantni tlak p_0 u izraz (139), dobiva se

$$\vec{F}_0 = -p_0 A \vec{n}, \quad (141)$$

a uvrštenjem u izraz (139a) dobiva se

$$\vec{r}_{C_F} \times \vec{F}_0 = -p_0 \int_A \vec{r} dA \times \vec{n} = -p_0 \vec{r}_C A \times \vec{n} = \vec{r}_C \times \vec{F}_0, \quad (141a)$$

gdje je \vec{r}_C radijvektor težišta C površine A . Budući da \vec{r}_{C_F} i \vec{r}_C leže u istoj ravnini, izraz (141a) pokazuje da je

$$\vec{r}_{C_F} = \vec{r}_C. \quad (141b)$$

Prema tome, sila F_0 konstantnog tlaka na ravnou površinu jednaka je umnošku tlaka i mjernog broja površine i djeluje okomito na površinu u njenu težištu.

Uz proračun sile \vec{F}_h hidrostatičkog tlaka p_h nacrtana je na sl. 33 ravnou površinu A uronjena u statički fluid gustoće ϱ , s pogledom u smjeru njene ravnine i priklonjena pod kutom ϑ prema horizontali. U toj je projekciji kroz ravninu položena os Oy , kojoj je ishodište O postavljen u *slobodnoj površini*. Iz točke O prema očima promatrača gleda os Ox . Na istoj je slici ravnina Oxy zarotirana za kut $\pi/2$ u ravninu slike, tako da se ravnina površina A vidi u svojoj punoj veličini. Dubina uronjaja h točaka površine A i njene koordinate y , kao što se vidi iz slike, stoje u odnosu $h = y \sin \vartheta$, pa se za element sile $d\vec{F}_h$ dobiva izraz

$$d\vec{F}_h = -p_h \vec{n} dA = -\vec{n} \varrho g h dA = -\vec{n} \varrho g y \sin \vartheta dA, \quad (142)$$

gdje je dA horizontalni element površine A na kojem vlada konstantan tlak. Integracija elemenata $d\vec{F}_h$ daje

$$\vec{F}_h = -\vec{n} \varrho g \sin \vartheta \int_A y dA = -\vec{n} \varrho g \sin \vartheta y_C A = -\vec{n} \varrho g h_C A, \quad (143)$$

ili

$$\vec{F}_h = -p_{hc} \vec{n} A, \quad (143a)$$

gdje je $p_{hc} = \rho g \sin \vartheta y_c = \rho g h_c$ hidrostaticki tlak u težištu površine A . U izrazu (143) integracija se statičkih momenata elemenata dA s obzirom na os Ox zamjenila statičkim momentom površine A , tj. $\int_A y dA = y_c A$, a to i jest definicijski izraz za udaljenost y_c težišta C površine A od osi Ox .

Ako se moment elementarnih sila $d\vec{F}_h$ s obzirom na os Ox piše u absolutnoj vrijednosti, jer su sile $d\vec{F}_h$ paralelne, tada vrijedi izraz

$$M = \int_A y dF_h = \int_A y \rho g \sin \vartheta y dA = \rho g \sin \vartheta I_{xx}, \quad (144a)$$

gdje je $I_{xx} = \int_A y^2 dA$ moment tromosti površine A s obzirom na os Ox .

Izražen rezultantnom silom F_h taj moment glasi

$$M = y_{C_{F_h}} \cdot F_h = y_{C_{F_h}} \cdot \rho g \sin \vartheta y_c A, \quad (144b)$$

gdje je $y_{C_{F_h}}$ udaljenost hvertišta C_{F_h} sile F_h od osi Ox .

Izjednačenje izraza (144a) i (144b) daje

$$y_{C_{F_h}} = \frac{I_{xx}}{y_c A}. \quad (145)$$

Točka C_{F_h} još se naziva i težištem hidrostatickog tlaka. Izraz (145) pokazuje da je udaljenost težišta hidrostatickog tlaka od slobodne površine dana omjerom momenta tromosti i statičkog momenta površine A s obzirom na os koja leži u slobodnoj površini.

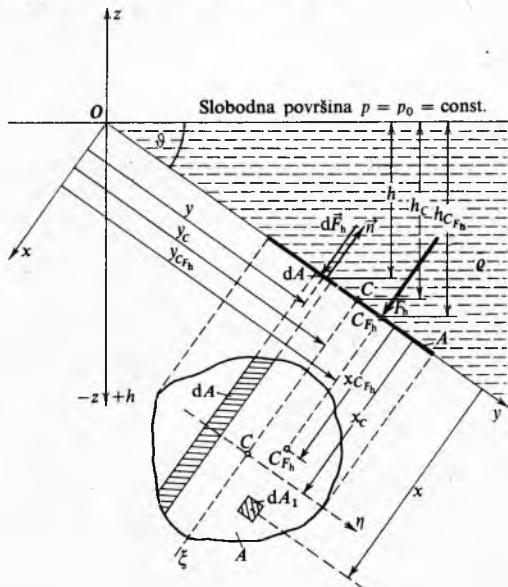
Primjenom Steinerova stavka

$$I_{xx} = y_c^2 A + I_{\xi\xi},$$

gdje je $I_{\xi\xi}$ moment tromosti površine A s obzirom na os $C\xi$ kroz težište površine A paralelnu s osi Ox (sl. 33), izraz (145) poprima alternativni oblik

$$y_{C_{F_h}} = y_c + \frac{I_{\xi\xi}}{y_c A} \quad (145a)$$

koji pokazuje da se težište hidrostatickog tlaka nalazi na udaljenosti $\frac{I_{\xi\xi}}{y_c A}$ ispod težišta površine A .



Sl. 33. Sila hidrostatickog tlaka i hvertište sile hidrostatickog tlaka na ravnoj površini

Iz momentne jednadžbe sile s obzirom na os Oy , tj. rezultante F_h i elementarnih sila dF_h na elementima dA_1 (od kojih je jedan prikazan na sl. 33):

$$x_{C_{F_h}} \cdot F_h = x_{C_{F_h}} \cdot \rho g \sin \vartheta y_c A = \\ = \int_A x \rho g \sin \vartheta y dA = \rho g \sin \vartheta (x_c y_c A + I_{\xi\xi}),$$

gdje je za centrifugalni moment tromosti I_{xy} primijenjen Steinerov stavak $I_{xy} = x_c y_c A + I_{\xi\xi}$, dobiva se za udaljenost $x_{C_{F_h}}$ težišta hidrostatickog tlaka od osi Oy izraz

$$x_{C_{F_h}} = x_c + \frac{I_{\xi\xi}}{y_c A}. \quad (146)$$

Moment tromosti $I_{\xi\xi}$ je uvijek pozitivna veličina, pa je prema izrazu (145a) težište hidrostatickog tlaka C_{F_h} uvijek ispod težišta površine C , dok centrifugalni moment tromosti $I_{\xi\xi}$, već prema obliku površine, može biti pozitivan ili negativan, pa izraz (146) pokazuje da težište hidrostatickog tlaka C_{F_h} može biti s jedne ili s druge strane osi $C\xi$ položene kroz težište površine C paralelno s osi Oy .

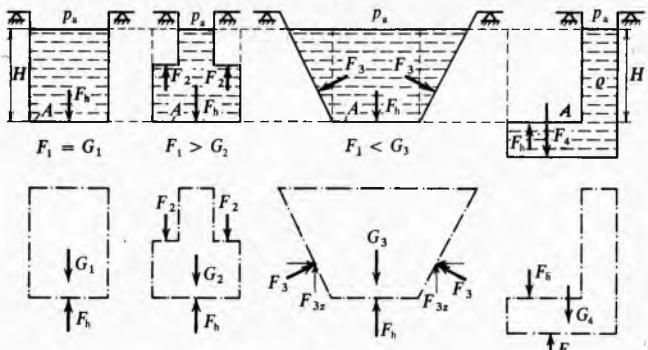
Iz izraza (143) vidi se da je sila F_h hidrostatickog tlaka p_h na ravnu površinu uronjenu u statički fluid i priklonjenu pod proizvoljnim kutom prema horizontali po veličini jednak težini cilindričnog stupca fluida kojemu je osnovica mjerni broj ravne površine, a visina uronjaj težišta površine ispod slobodne površine fluida, ili, što je prema izrazu (143) isto, da je jednak umnošku hidrostatickog tlaka u težištu površine i mjernog broja površine. Ta sila djeluje okomito na ravnu površinu u težištu hidrostatickog tlaka C_{F_h} kojemu su koordinate dane izrazima (145a) i (146). Pri djelovanju ukupnog tlaka $p = p_0 + \rho gh$ sili F_h u C_{F_h} dodaje se paralelna sila F_0 u težištu ravne površine C .

Na horizontalnu ravnu površinu, $\vartheta \rightarrow 0$, uronjenu u nestlačivu tekućinu, djeluje konstantni hidrostaticki tlak i sila se određuje opisanim postupkom za proračun sile konstantnog tlaka. Time se dokazuje hidrostatski paradoks: sila tlaka na horizontalno dno posude zavisi od dubine fluida u posudi i mjernog broja površine dna, a ne zavisi od oblika posude. Tako je u četirima posudama različitih oblika, prikazanim na sl. 34, i otvorenim prema istom tlaku, dubina vode H iznad jednakih površina A ista, pa je i sila hidrostatickog tlaka na dno svih posuda ista, i iznosi

$$F_h = \rho g H A.$$

Na sličicama u prvom redu na sl. 34 ucrtanim silama F na stjenke posuda nadomješten je učinak fluida na stjenke i njihov vektorski zbroj daje po veličini i smjeru težinu fluida u posudi. Ako se zanemari težina posuda, tu silu težine fluida preuzimaju ležaji na kojima su posude ovješene. Sličice u drugom redu na sl. 34, s ucrtanim silama hidrostatickih tlakova, pokazuju odnos sile F_h tlaka na dno i pripadnih težina fluida u pojedinim posudama. Iz tog odnosa jasno se razabire porijeklo razlika između uvijek iste sile F_h i različitih težina fluida u pojedinim posudama, što je sadržaj hidrostatskog paradoksa.

Kad je sustav sa svim stranama otvoren djelovanju istog tlaka, npr. kad atmosferski tlak djeluje na slobodnoj površini nestlačivog fluida i kad taj isti tlak djeluje na drugoj strani ravne površine uronjene u fluid, pri proračunu ukupne vanjske sile tlaka na površinu nije potrebno računati sile konstantnog tlaka,



$$F_h = G_1 = \rho g H A \quad F_h = G_2 + 2F_2 = \rho g H A = G_1 \quad F_h = G_3 - 2F_{3x} = \rho g H A = G_1 \quad F_h = F_4 - G_4 = \rho g H A = G_1$$

Sl. 34. Hidrostaticki paradoks

jer su te sile jednake na jednoj i na drugoj strani površine i, jer djeluju u suprotnim smjerovima u istoj točki površine, njihovo vanjsko djelovanje na površinu se potpuno poništava. (Takov proračun može biti potreban pri analizi unutrašnjih naprezanja u konstrukcijama.) To, međutim, nije slučaj kad je sustav na pojedinim dijelovima izložen djelovanju različitih konstantnih tlakova, jer tada je potreban proračun i sila tih konstantnih tlakova.

Kad je to prikladno za proračun sile tlaka, može se transformacijom u izrazu zakona o promjeni hidrostatičkog tlaka (127) ili (127a), odnosno u izrazu (136), umjesto konstantnog tlaka p_0 , koji vlada na stvarnoj slobodnoj površini i iznad nje, uvesti proizvoljan tlak p'_0 koji bi vladao na fiktivnoj slobodnoj površini i iznad nje kad bi se do nje prostirao promatrani nestlačivi fluid gustoće ϱ . Umjesto izraza (136) može se, dakle, pisati

$$p = p'_0 - \varrho g Z = p'_0 + \varrho g H, \quad (147)$$

gdje je

$$Z = z - z_0 \text{ i } H = h + h_0, \quad (148)$$

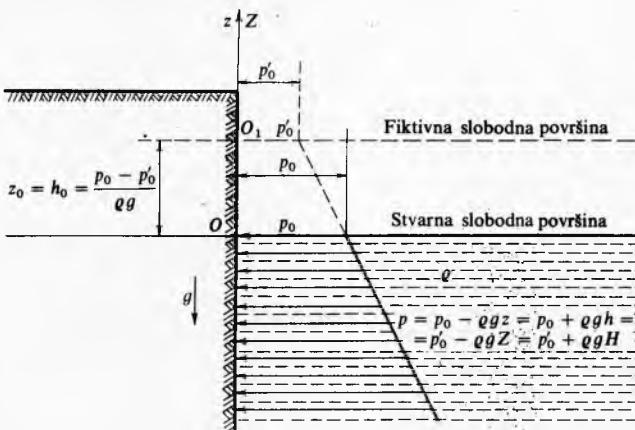
uz

$$z_0 = h_0 = \frac{p_0 - p'_0}{\varrho g}. \quad (149)$$

Očito je da tako transformirani izraz za tlak (147) daje ispravne vrijednosti tlaka samo u točkama ispod stvarne slobodne površine, tj. za

$$Z < -z_0 \text{ ili } H > h_0, \quad (150)$$

a ne i u točkama iznad stvarne slobodne površine, jer u njima vlada konstantni tlak p_0 (sl. 35). Isto tako je očito da se izraz (147) ispravno računa sila tlaka samo na površinama koje su ispod stvarne slobodne površine potpuno uronjene u nestlačivi fluid.



Sl. 35. Svođenje stvarne slobodne površine konstantnog tlaka p_0 na fiktivnu slobodnu površinu nultog konstantnog tlaka p'_0 .

Svođenje stvarne slobodne površine konstantnog tlaka p_0 na fiktivnu slobodnu površinu nultog konstantnog tlaka daje izraze

$$p = -\varrho g Z = \varrho g H, \quad (151)$$

gdje je

$$Z = z - z_0 \text{ i } H = h + h_0 \quad (151a)$$

uz

$$z_0 = h_0 = \frac{p_0}{\varrho g}, \quad (151b)$$

valjane za

$$Z < -z_0 \text{ ili } H > h_0. \quad (151c)$$

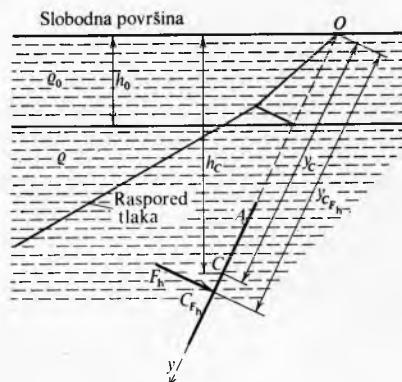
Prikazani izvod određivanja sile tlaka na ravnu površinu uronjenu u nestlačivi statički fluid daje potrebne elemente za snalaženje pri rješavanju i složenijih zadataka. Tako se za silu

hidrostatičkog tlaka na jednu stranu ravne ploče (sl. 36), uronjene u nestlačivi fluid gustoće ϱ iznad kojeg se nalazi sloj dubine h_0 nestlačivog fluida gustoće ϱ_0 , na temelju iznesenih razmatranja lako dobiva izraz

$$F_h = p_{hC} A = \varrho g h_C A \left[1 - \frac{h_0}{h_C} \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \right],$$

a za udaljenost hvatišta sile F_h od slobodne površine

$$y_{C_{F_h}} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{y_C A \left[1 - \frac{h_0}{h_C} \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \right]}.$$



Sl. 36. Proračun sile hidrostatičkog tlaka na ravnú površinu

Kao što se vidi, za razvijeni proračunski postupak treba poznavati geometrijske karakteristike površina, tj. položaj težišta i momenata tromosti površina, o kojima se podaci nalaze u matematičkim i tehničkim priručnicima. Osim tog rutinskog postupka, za rješavanje takvih zadataka služi i direktna integracija izraza (139) i (139a).

Hidrostatski ili Arhimedov uzgon. Djelovanje tlaka na zatvorenu površinu tijela koje je uronjeno u statički homogeni fluid također se uvijek svodi na samo jednu rezultantnu силу, koja se može jednostavno proračunati izrazom (138). Budući da je površina S zatvorena i da je na temelju izraza (127)

$$\text{grad}[p(z)] = \text{grad}(p_0 - \varrho g z) = -\varrho g \vec{k}, \quad (152)$$

što inače slijedi i izravno iz jednadžbe ravnoteže (59) u polju sile teže

$$\varrho \vec{f} = -\varrho g \vec{k} = \text{grad } p, \quad (152a)$$

primjenom poučka Gauss-Ostrogradskoga (46b) na izraz (138) dobiva se

$$\vec{F}_b = - \int_S \vec{n} p dS = - \int_V \text{grad } p dV = \varrho g \vec{k} \int_V dV = \varrho g V \vec{k}, \quad (153)$$

gdje je ϱ gustoća fluida, a V volumen tijela. Dobiveni rezultat

$$\vec{F}_b = \varrho g V \vec{k} \quad (153a)$$

pokazuje da je sila tlaka na tijelo uronjeno u fluid jednaka težini fluida istisnutog tim tijelom i usmjerena vertikalno uvis (sl. 37). Sila \vec{F}_b naziva se hidrostatskim ili Arhimedovim uzgonom.

Pri određivanju hvatišta hidrostatskog uzgona primjenjuje se poučak statike o jednakosti momenta rezultante i zbroja momenata komponenata, tj.

$$\vec{r}_{F_b} \times \vec{F}_b = - \int_S \vec{r} \times \vec{n} p dS. \quad (154)$$

Desna strana te jednakosti može se poučkom Gauss-Ostrogradskoga (46d) transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} - \int_S \vec{r} \times \vec{n} p dS &= \int_S \vec{n} \times p \vec{r} dS = \int_V \text{rot}(p \vec{r}) dV = \\ &= \int_V (\text{grad } p \times \vec{r} + \text{protr}) dV = - \int_V \vec{r} \times \text{grad } p dV = \end{aligned}$$

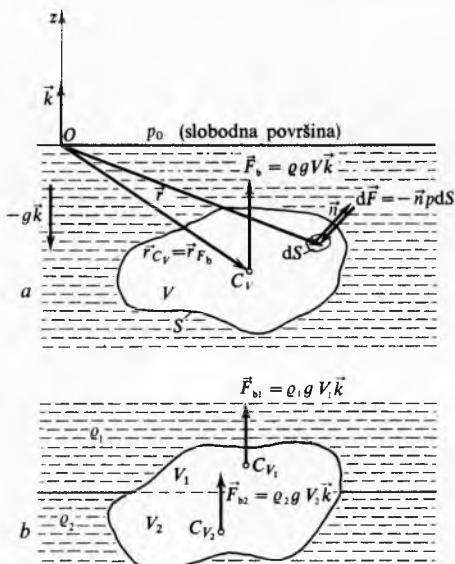
$$= - \int_V \vec{r} \times (-\varrho g \vec{k}) dV = \varrho g \int_V \vec{r} dV \times \vec{k} = \varrho g V \vec{r}_{C_v} \times \vec{k} = \\ = \vec{r}_{C_v} \times \varrho g V \vec{k} = \vec{r}_{C_v} \times \vec{F}_b, \quad (154a)$$

gdje su redom primijenjeni: a) svojstvo vektorskog umnoška $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, b) razvoj iz vektorske analize $\text{rot}(f \vec{a}) = f \text{grad} f \times \vec{a} + f \text{rot} \vec{a}$, c) činjenica da je $\text{rot} \vec{r} = 0$, d) izraz (152), e) poučak statike $\int_V \vec{r} dV = \vec{r}_{C_v} V$, gdje je \vec{r}_{C_v} radijvektor težišta C_v volumena V i f) izraz (153a).

Uvrštenjem (154a) u (154) slijedi da je

$$\vec{r}_{F_b} \times \vec{F}_b = \vec{r}_{C_v} \times \vec{F}_b. \quad (155)$$

Jednakost (155) pokazuje da pravac djelovanja hidrostatskog uzgona prolazi kroz težište volumena fluida istisnutog tijelom, odnosno kroz težište volumena tijela (sl. 37).



Sl. 37. Hidrostatski uzgon. a Arhimedov uzgon, b uzgon na granici dvaju fluida

Izvod i sadržaj izraza za hidrostatski uzgon (153a) i njegovo hvalište (155) pokazuju sljedeće:

a) Konstantni tlak p_0 ne proizvodi rezultirajuću silu na zatvorenu površinu. Taj je tlak ispašao iz razmatranja već u izrazu (152), kad se našao ispod operatora gradijenta, koji iščezava operirajući nad konstantom. Do tog rezultata dolazi se i izravnom integracijom elementarnih sile tlaka p_0 po zatvorenoj površini S

$$-\int_S \vec{n} p_0 dS = -p_0 \int_S \vec{n} dS = 0,$$

jer se primjenom poučka Gauss-Ostrogradskoga (46b) pokazuje da vrijedi

$$\int_S \vec{n} dS = \int_S \vec{n} \cdot \vec{1} dS = \int_V \text{grad } 1 dV = 0. \quad (156)$$

b) Horizontalne se komponente sile tlaka na tijelo međusobno poništavaju.

c) Uzgon na tijelo uronjeno u statički fluid nastaje i u kapljevinama i u plinovima, koji se pri manjim prirastima visina mogu smatrati fluidima konstantne gustoće s hidrostatskim zakonom promjene tlaka. Dalja sudbina takva tijela zavisi od njegove težine G i položaja težišta njegove mase C_m . Pri $G > F_b$ tijelo tone, pri $G < F_b$ diže se prema gore, a pri $G = F_b$ lebdi. Ako se težište mase C_m i težište uzgona C_v ne nalaze na istoj vertikali, uz spomenuta ponašanja tijela javit će se i spreg sila na tijelo, koji će tijelo zakretati do položaja u kojem će se oba težišta nalaziti na istoj vertikali.

Tijelom istisnuti fluid zove se *istisnina*, pa se govori o težini istisnine, koja je isto što i hidrostatski uzgon, i o volumenu istisnine.

Do svih ovih spoznaja o hidrostatskom uzgonu, izvedenih i izraženih bitno drugačijim matematičkim aparatom, došao je već Arhimed prije više od 2200 godina.

Kao mnoge druge pojave hidrostaticke, npr. princip spojnih posuda i hidrostatski paradoks, i pojave hidrostatskog uzgona može se jednostavno rastumačiti *principom solidifikacije* ili *otvrdnuća*, koji je postavio nizozemski matematičar S. Stevin (1548–1620), i koji glasi: fluid u stanju ravnoteže ostat će u ravnoteži ako je bilo koji njegov dio otvrdnuo zadržavši istu gustoću (ili Stevinovim riječima: Bilo koji dio vode zadržat će u vodi proizvoljan položaj). Tako je težina otvrdnute mase fluida podržavana silama tlaka okolišnog fluida, koje su na donjoj strani veće od onih na gornjoj, pa je njihova rezultanta jednaka težini otvrdnute mase fluida i djeluje prema gore, prolazeći kroz težište mase kroz koje prolazi i sila težine. Ako se otvrdnuta masa fluida zamijeni nekim drugim tijelom istog oblika, rezultanta sila tlakova na površinu tijela ostat će ista kao i prije zamjene, tj. na tijelo će djelovati uzgon koji je jednak težini fluida istisnutog tijelom i koji prolazi kroz težište mase istisnutog fluida.

Pojava hidrostatskog uzgona izražava se i identičnom činjenicom da tijelo uronjeno u fluid prividno toliko gubi na težini koliko teži tim tijelom istisnuti fluid.

Lako se pokazuje da je hidrostatski uzgon tijela koje se nalazi na granici dvaju fluida različite gustoće ϱ_1 i ϱ_2 (sl. 37b) jednak zbroju $\varrho_1 g V_1 + \varrho_2 g V_2$, gdje su V_1 i V_2 dijelovi volumena tijela uronjeni u ta dva fluida. Obično se težišta volumena V_1 i V_2 ne nalaze na istoj vertikali, pa zato ni rezultirajuća sila uzgona ne prolazi kroz težište cijelog volumena tijela $V = V_1 + V_2$.

Areometar je instrument za mjerjenje gustoće kapljivina, a djeluje na načelu hidrostatskog uzgona (sl. 38). Ako je V_0 dio volumena areometra uronjen u kapljevinu gustoće ϱ_0 , V_a dio volumena u zraku gustoće ϱ_a , a m masa čitavog areometra, tada jednadžbe ravnoteže za plutanje areometra u kapljevinama gustoće ϱ_0 (sl. 38a) i gustoće $\varrho > \varrho_0$ (sl. 38b) glase

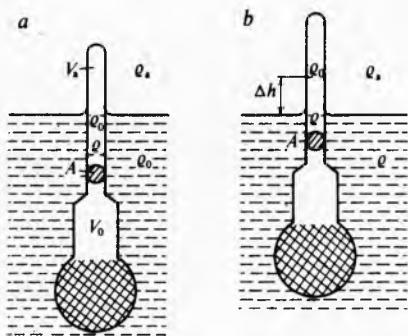
$$G = mg = F_b = \varrho_0 g V_0 + \varrho_a g V_a$$

$$G = mg = F_b = \varrho g (V_0 - A \Delta h) + \varrho_a g (V_a + A \Delta h),$$

gdje je A površina presjeka vrata areometra. Iz tih se jednadžbi za izronjaj Δh areometra u kapljevini veće gustoće ϱ dobiva

$$\Delta h = \frac{V_0 \varrho - \varrho_0}{A \varrho - \varrho_a}.$$

Taj je izraz osnova za graduiranje skale na vratu areometra.



Sl. 38. Areometar uronjen u dvije kapljivine različitih gustoća

Sila tlaka na zakrivljenu površinu. Djeđovanje tlaka na dijelove zakrivljenih (nezatvorenih) krutih površina uronjenih u fluid (sl. 32) određuje se izrazima (138) i (138a), a uvjetom prema izrazu (138b) provjerava se da li se to djelovanje svodi samo na jednu rezultantu ili na sustav sile i momenta. U praktičnom postupku proračuna određuju se dvije horizontalne komponente sile tlaka F_x i F_y i vertikalna komponenta F_z . Ako se pravci djelovanja svih triju komponenata sijeku u jednoj točki, sustav se može svesti na samo jednu rezultantu. Može biti i da se djelovanje tlaka na površinu svodi samo na spreg sile, pa će tada sve tri komponente biti jednake nuli.

Radi jednostavnijeg proračuna pojedinih komponenata i njihovih hvališta, u kategoriju zakrivljenih krutih površina često

se mogu svrstati i površine složene od dijelova ravnih površina različitih orijentacija, premda se sile tlaka na takve dijelove mogu proračunati i već opisanim postupkom.

Na sl. 39a prikazana je zakrivljena površina S uronjena u nestlačivi fluid gustoće ϱ , npr. kao ispunjenje u ugлу nekog bazena. Ako se izraz (138) za vektor sile tlaka na zakrivljenu površinu redom skalarno pomnoži sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} , dobivaju se izrazi za komponente sile tlaka na površinu S :

$$F_x = \vec{i} \cdot \vec{F} = - \int_S p \cos(n, x) dS = - \int_{S_x} p dS_x \quad (157a)$$

$$F_y = \vec{j} \cdot \vec{F} = - \int_S p \cos(n, y) dS = - \int_{S_y} p dS_y \quad (157b)$$

$$F_z = \vec{k} \cdot \vec{F} = - \int_S p \cos(n, z) dS = - \int_{S_z} p dS_z, \quad (157c)$$

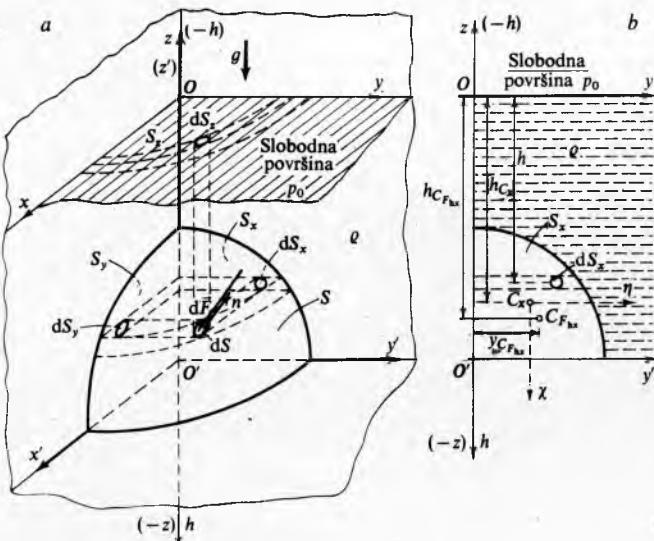
gdje su:

$$dS_x = dS \cos(n, x) \quad (157d)$$

$$dS_y = dS \cos(n, y) \quad (157e)$$

$$dS_z = dS \cos(n, z), \quad (157f)$$

a S_x , S_y i S_z jesu projekcije površine S na koordinatne ravnine Oyz , Ozx i Oxy (sl. 39a).



Sl. 39. Sila tlaka na zakrivljenu površinu

Element dS površine S , koji je pozitivna veličina, orijentiran je u prostoru normalom \vec{n} , i prema njenom smjeru elementi dF_x , dF_y i dF_z komponenata sile tlaka dobivaju predznake prema sljedećoj shemi:

$$\begin{cases} \forall(n, x) \\ \forall(n, y) \\ \forall(n, z) \end{cases} \begin{cases} \leq \frac{\pi}{2}, & \cos(n, x) \\ \geq 0, & \cos(n, y) \\ \geq 0, & \cos(n, z) \end{cases} \begin{cases} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{cases} \begin{cases} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{cases} \begin{cases} \geq 0, \\ \geq 0, \\ \geq 0. \end{cases} \quad (158)$$

U praktičnom proračunu komponenata F_x , F_y i F_z sile tlaka na zakrivljenu površinu prikladno je razdvojiti proračun komponenata F_{0x} , F_{0y} i F_{0z} sile konstantnog tlaka p_0 od proračuna komponenata F_{hx} , F_{hy} i F_{hz} sile hidrostatičkog tlaka $p_h = \varrho gh$. Ako se u izraze (157a), (157b) i (157c) uvrsti konstantni tlak p_0 , dobivaju se komponente

$$F_{0x} = -p_0 S_x, \quad (159a)$$

$$F_{0y} = -p_0 S_y, \quad (159b)$$

$$F_{0z} = -p_0 S_z. \quad (159c)$$

Hvatišta tih komponenata nalaze se u težištima C_x (sl. 39b), C_y i C_z ravnih projekcija S_x (sl. 39b), S_y i S_z , što se lako dokaže izvodom sličnim onome kojim je dobiven izraz (141b). Predznaci komponenata sile konstantnog tlaka zavise od ori-

jentacije površine S , odnosno od predznaka njenih projekcija prema shemi danoj izrazima (158). Iz sheme predznaka (158) vidi se da pri projicirajući površine S na koordinatne ravnine dijelovi pojedinih projekcija mogu se djelomično poništiti, a ako je površina zatvorena, mogu se projekcije i potpuno poništiti.

Komponente sile F_h hidrostatičkog tlaka $p_h = \varrho gh$ na zakrivljenu površinu određe se pomoću izraza (157a), (157b) i (157c). Ti su izrazi za sve tri komponente sličnog oblika, ali zbog vertikalnog smjera djelovanja gravitacije g njihova praktična primjena razlikuje se pri određivanju horizontalnih komponenata F_{hx} i F_{hy} od one pri određivanju vertikalne komponente F_{hz} .

Budući da su projekcije S_x i S_y ravne vertikalne površine, izrazi (157a) i (157b) pokazuju da se proračun horizontalnih komponenata sile hidrostatičkog tlaka na zakrivljenu površinu sveo na već opisani postupak određivanja tih komponenata na ravnu uronjenu površinu pomoću formula (143), (143a), (145a) i (146), a ilustrira ga slika 33 uz $\vartheta = \pi/2$. Te formule primjenjene na proračun komponenata x i y sile F_h hidrostatičkog tlaka p_h na zakrivljenu površinu S daju sljedeće:

$$F_{hx} = -p_{hC_x} S_x = -\varrho g h_{C_x} S_x, \quad (160)$$

$$F_{hy} = -p_{hC_y} S_y = -\varrho g h_{C_y} S_y, \quad (161)$$

s hvatištima u težištima hidrostatičkog tlaka $C_{F_{hx}}$ (sl. 39b) i $C_{F_{hy}}$, s koordinatama

$$h_{C_{F_{hx}}} = h_{C_x} + \frac{I_{\eta\eta}}{h_{C_x} \cdot |S_x|} \quad (162a)$$

$$y_{C_{F_{hx}}} = y_{C_x} + \frac{I_{\eta x}}{h_{C_x} \cdot |S_x|} \quad (162b)$$

$$h_{C_{F_{hy}}} = h_{C_y} + \frac{I_{\xi\xi}}{h_{C_y} \cdot |S_y|} \quad (162c)$$

$$x_{C_{F_{hy}}} = x_{C_y} + \frac{I_{\xi x}}{h_{C_y} \cdot |S_y|}. \quad (162d)$$

Kao što pokazuju izrazi (160) i (161), smjerovi djelovanja komponenata F_{hx} i F_{hy} određeni su predznacima projekcija S_x i S_y koji se dobivaju iz sheme izraza (158). I dalje je valjano već spomenuto da se dijelovi projekcija površine S mogu međusobno poništavati.

Za vertikalnu komponentu sile hidrostatičkog tlaka F_{hz} izraz (157c) daje

$$F_{hz} = - \int_S p_h dS_z = -\varrho g \int_{S_z} h dS_z, \quad (163)$$

ili

$$F_{hz} = \mp \varrho g V, \quad (163a)$$

gdje je $V = \int_{S_z} h |dS_z|$ volumen fluida između zakrivljene površine S i slobodne površine fluida.

Izraz (163a) pokazuje da je vertikalna komponenta sile F_{hz} hidrostatičkog tlaka p_h jednaka težini fluida iznad površine S . Očito je da F_{hz} prolazi kroz težište mase fluida, što se pri homogenom nestlačivom fluidu poklapa s težištem volumena, jer kroz tu točku prolazi i sila težine. Za nehomogeni fluid gustoće ϱ mora se ostaviti ispod znaka integrala u izrazu (163). Predznak vertikalne komponente F_{hz} u izrazu (163a) zavisi od orijentacije površine S . Ako površina gleda prema gore (sl. 40a), komponenta je negativna, tj. ima smjer prema dolje, a ako površina gleda prema dolje (sl. 40b), komponenta je pozitivna, tj. usmjerena je prema gore. U primjeru prikazanom na sl. 40b, premda se iznad površine S može nalaziti dio neke konstrukcije a ne fluid, očito je da za proračun vertikalne komponente sile hidrostatičkog tlaka treba odrediti težinu fluida koji bi ispunio vertikalni prostor između S i slobodne površine.

Na dijelu zakrivljene površine S na kojoj se poništava njena horizontalna projekcija, poništava se i pripadna horizontalna komponenta sile hidrostatičkog tlaka. Razlog je u tome što je hidrostatički tlak konstantan na horizontali na

kojih se poništavaju elementi horizontalnih projekcija površine. Isto je tako i pri proračunu vertikalne komponente sile zglob konstantnog tlaka p_0 .

Na dijelu površine S na kojem se vertikalna projekcija S_z površine poništava različite su dubine točaka i u tim točkama vladaju različiti hidrostatski tlakovi. Na takvu dijelu površine dolazi samo do djelomičnog, a ne potpunoga poništavanja vertikalne komponente F_{hz} sile hidrostatičkog tlaka p_h . To je ilustrirano na sl. 40c i d, gdje je prikazano određivanje vertikalne komponente sile hidrostatičkog tlaka na zakriviljenu površinu S cilindričnog ispuštenja \widehat{ANB} , i to izbačenog izvan spremnika (sl. 40c) i uvučenog unutar spremnika (sl. 40d), ispunjenog nestlačivim fluidom gustoće ϱ . U oba primjera, prema izrazu (163a), od dviju vertikalnih komponenata

$$F_{hz1} = (+) \varrho g V_1 = (-) \varrho g (\overline{OAB} \widehat{BN} \overline{NM MO}) L$$

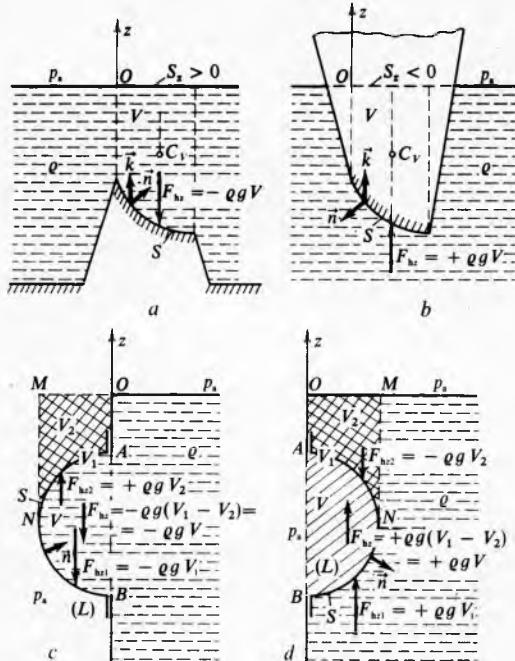
i

$$F_{hz2} = + \varrho g V_2 = + \varrho g (\overline{OA} \widehat{AN} \overline{NM MO}) L$$

ostaje

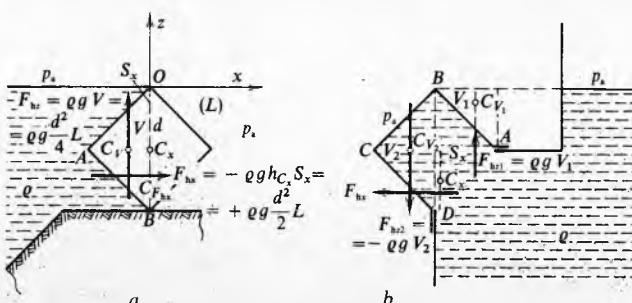
$$F_{hz} = (+) \varrho g (V_1 - V_2) = (-) \varrho g (\widehat{AB} \widehat{BN} \widehat{NA}) L,$$

gdje se gornji predznaci odnose na sl. 40c, a donji na sl. 40d.



Sl. 40. Određivanje predznaka vertikalne komponente sile hidrostatičkog tlaka i djelomično poništavanje te komponente

Pustupak kojim se određuju komponente sile tlaka na zakriviljene površine može se primijeniti i za proračun sile tlaka na površine složene od ravnih dijelova. Na sl. 41a prikazana je brana u obliku drvene grede kvadratičnog presjeka, koja je slijeva izložena hidrostatičkom tlaku. Na sl. 41b prikazana je konstrukcija kvadratična oblika, iznutra izložena djelovanju tlaka kapljivine gustoće ϱ . U oba primjera umjesto da se određuje postupkom proračuna za ravne površine na svakoj ravnoj površini sila hidrostatičkog tlaka koja na nju djeluje



Sl. 41. Određivanje komponenata sile hidrostatičkog tlaka na površine sastavljene od ravnih dijelova

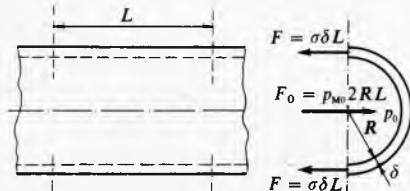
okomito, jednostavnije je na cijelu površinu izloženu hidrostatičkom tlaku primijeniti postupak određivanja sile hidrostatičkog tlaka na zakriviljene površine. Tako se pri proračunu horizontalnih komponenata može raditi s projekcijama cijelih površina, a pri proračunu vertikalne komponente s težinama fluida iznad pojedinih dijelova površine. Tako je učinjeno pri rješavanju zadatka prikazanih na sl. 41a i b, gdje su upisani iznosi pojedinih komponenata sile hidrostatičkog tlaka dobiveni pomoću izraza

$$F_{hx} = - p_{hC_x} S_x = - \varrho g h_{C_x} S_x \quad (164)$$

$$F_{hy} = - p_{hC_y} S_y = - \varrho g h_{C_y} S_y \quad (165)$$

gdje su h_{C_x} i h_{C_y} visine težišta C_x i C_y , a S_x i S_y projekcije površine S na ravnine Oyz i Oxz .

U tehničkoj praksi prikazani postupci služe za određivanje sila koje preuzimaju unutrašnja naprezanja u elementima konstrukcija ili stijenkama posuda ili cijevi. Pri tom se uz hidrostatička razmatranja primjenjuju i načela statike i čvrstoće. Tako naprezanja u stijenci donjega proširenog dijela posude, prikazane na sl. 34b, preuzimaju silu F_h kad je posuda ovješena kao na slici, a silu $2F_h < F_h$ kad je posuda svojim dnem položena na podlogu.



Sl. 42. Naprezanje u stijenci cijevi izloženoj unutrašnjem tlaku.

Na sl. 42 prikazan je dio cijevi duljine L , koji je isječen iz podužeg cjevovoda. U unutrašnjosti cijevi vlada konstantran pretlak p_{M0} . Sile vlačnog naprezanja $F = \sigma \delta L$ u stijenkama cijevi u ravnoteži su sa silom pretlaka fluida $F_o = p_{M0} 2RL$, koja djeluje na polovicu uzdužno rasječenog prstena. Sila F_o odredi se bilo kojim od izraza (159). Iz jednakosti $2F = F_o$ dobiva se za vlačno naprezanje σ u stijenci cijevi

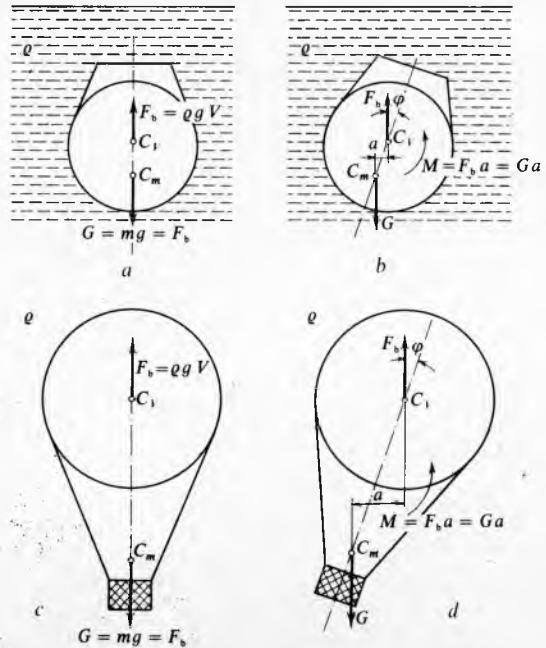
$$\sigma = \frac{p_{M0} R}{\delta} \quad (166)$$

Za veće cijevi, kroz koje strui nestlačivi fluid, može biti potrebno da se sila hidrostatičkog tlaka proračuna izrazima (160) i (161).

Lako se dokaza da je u stijenci sferne kugline ljske, u kojoj vlada pretlak p_{M0} , vlačno naprezanje

$$\sigma = \frac{p_{M0} R^2 \pi}{\delta 2 R \pi} = \frac{p_{M0} R}{2 \delta}$$

Statička stabilnost tijela. Neki je sustav stabilan ako pri pomaku iz ravnotežnog položaja u njemu nastaju takve sile



Sl. 43. Stabilnost tijela potpuno uronjenih u statički fluid

da ga vraćaju u prvobitni ravnotežni položaj. Ta definicija služi za postavljanje kriterija stabilnosti tijela potpuno uronjenih u statički fluid i tijela koja plivaju na slobodnoj površini kapljive.

Na sl. 43a prikazan je poprečni presjek podmornice potpuno uronjene u vodi. Da bi podmornica bila u uspravnom ravnotežnom položaju, potrebno je da su sila težine podmornice $G = mg$ i sila hidrostatskog uzgona $F_b = \rho g V$ međusobno jednake i da su hrvatišta tih sila (C_m hrvatište težine u težištu mase podmornice i C_V hrvatište uzgona u težištu volumena podmornice) na istoj vertikali. Ako se podmornica pomakne iz ravnotežnog položaja, dobivši bočni nagib za kut φ (sl. 43b), i ako pri tom ne dođe do pomaka masa na podmornici tako da težište sustava C_m ostane na istom mjestu, na podmornicu djeluje spreg sila

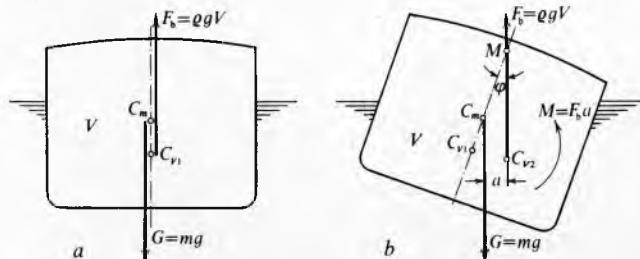
$$M = F_b \overline{C_V C_m} \sin \varphi = F_b a = G a \quad (167)$$

koji podmornicu vraća natrag u prvobitni uspravni ravnotežni položaj. Prema tome, podmornica je stabilna.

Kad bi se težište sustava C_m nalazilo iznad težišta istisnine C_V , na podmornicu u nagnutom položaju djelovao bi spreg sila, koji bi dalje povećavao njen nagib i prevrnuo je, pa, prema tome, podmornica ne bi bila stabilna.

Drugi je primjer tijela potpuno uronjena u statički fluid zračni balon (sl. 43c i d). I za zračni balon se lako dokaze da je stabilan kad je težište istisnine C_V iznad težišta sustava C_m .

Izneseni primjeri pokazuju da je za statičku stabilnost tijela potpuno uronjena u fluid prijeko potrebno da se težište istisnine nalazi iznad težišta sustava.



Sl. 44. Stabilnost broda

Taj uvjet stabilnosti nije potreban za tijela koja plivaju slobodnom površinom kapljive. Na sl. 44a prikazan je poprečni presjek površinskog broda u uspravnom ravnotežnom položaju, a na sl. 44b u nagnutom položaju, kad je brod izveden iz ravnoteže. Kao što se vidi, težište mase broda C_m u uspravnom položaju nalazi se iznad težišta istisnine C_{V1} , koje je u težištu volumena podvodnog dijela brodskog trupa. U nagnutom položaju broda (sl. 44b) promjenio se oblik podvodnog volumena broda, koji stvara hidrostatski uzgon, i zbog te se promjene oblika težište istisnine premjestilo iz točke C_{V1} u točku C_{V2} . Veličina podvodnog volumena nije se promjenila, jer je masa broda s kojom je uzgon u ravnoteži ostala ista. Uzgon F_b nagnutog broda, djelujući kroz točku C_{V2} , sijeće simetralu broda u točki M , koja se zove *metacentrom*. Ako je metacentar M iznad težišta sustava C_m , kao što je prikazano na sl. 44b, u sustavu nastaje spreg sila

$$M = F_b \overline{MC_m} \sin \varphi = \rho g V \overline{MC_m} \sin \varphi, \quad (168)$$

koji vraća brod u prvobitni uspravni ravnotežni položaj, pa je sustav stabilan.

Da se metacentar našao ispod težišta sustava, na brod bi u nagnutom položaju djelovao spreg sila koji bi povećavao njegov nagib, pa brod ne bi bio stabilan.

Iz tog primjera može se zaključiti i općenito: da bi tijelo koje pliva slobodnom površinom bilo stabilno, njegovo težište mase može biti i iznad težišta istisnine, ali metacentar mora biti iznad težišta mase (tj. težišta sustava).

Udaljenost metacentra od težišta sustava $\overline{MC_m}$ naziva se *metacentarskom visinom*, pa će plovilo biti stabilno ako je njegova metacentarska visina pozitivna, tj. ako je

$$\overline{MC_m} = \overline{MC_{V1}} - \overline{C_m C_{V1}} > 0. \quad (169)$$

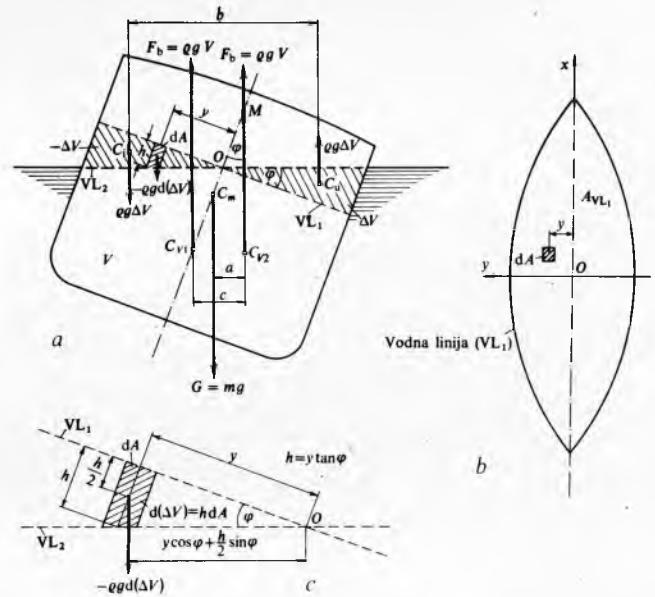
Za male se nagibe plovila metacentarska visina može jednostavno proračunati. Naime, pri nagibu broda na jednom boku broda iz vode izroni volumen ΔV u obliku uzdužnog kлина, a istodobno na drugom boku takav volumen uroni u vodu (sl. 45a). Za male nagibe broda φ ti su klinovi simetrični s obzirom na uzdužnu simetralu Ox vodne linije VL_1 (sl. 45b). Smatraljuci izronjeni klin kao negativan (izgubljen) uzgon, a uronjeni kao pozitivan (dobiven) uzgon, djelovanje uzgona $F_b = \rho g V$ nagnutog broda u težištu istisnine C_{V2} identički je jednako zbroju djelovanja uzgona $F_b = \rho g V$ u težištu istisnine C_{V1} i uzgona klinova $\pm \rho g \Delta V$ u njihovim težištima C_u i C_v (sl. 45a). Zbog toga i momenti tih dvaju identičkih sustava sila s obzirom na proizvoljnu točku moraju biti međusobno jednak. Tako moment s obzirom na točku C_{V1} daje

$$\rho g V c = \rho g \Delta V b, \quad (170)$$

gdje je

$$c = \overline{MC_{V1}} \sin \varphi, \quad (170a)$$

a b je horizontalna udaljenost između težišta klinova C_u i C_v



Sl. 45. Metacentarska visina broda

Budući da je desna strana u izrazu (170) čisti spreg sila, veličina kojeg ostaje ista za bilo koju točku, momenti elemenata uzgona klinova $\rho g d(\Delta V)$ mogu se umjesto s obzirom na uzdužnu os kroz točku C_{V1} uzeti s obzirom na os kroz O (sl. 45c) pa vrijedi

$$\rho g \Delta V b = \rho g \int_{A_{VL1}} h dA \left(y \cos \varphi + \frac{h}{2} \sin \varphi \right),$$

što uz $h = y \tan \varphi$ daje

$$\rho g \Delta V b = \rho g \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi \right) I_{xx}, \quad (170b)$$

gdje je $I_{xx} = \int_{A_{VL1}} y^2 dA$ moment tromosti površine vodne linije A_{VL1}

A_{VL1} s obzirom na uzdužnu simetralnu os Ox . Kad se (170b) uvrsti u izraz (170) i primijeni (170a), dobiva se

$$c = \overline{MC_{V1}} \sin \varphi = \frac{\Delta V b}{V} = \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi \right) \frac{I_{xx}}{V},$$

ili

$$\overline{MC_{V1}} = \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi \right) \frac{I_{xx}}{V}. \quad (171)$$

Taj je izraz valjan samo za male nagibe broda, pri kojima je približno $\tan^2 \varphi \approx \varphi^2 \approx 0$, pa se može pisati

$$\overline{MC}_{V1} = \frac{I_{xx}}{V}. \quad (171a)$$

Prema tome, kriterij stabilnosti plovila (169) poprima oblik

$$\overline{MC}_m = \frac{I_{xx}}{V} - \overline{C}_m \overline{C}_{V1} > 0. \quad (172)$$

Taj se kriterij odnosi na početnu stabilnost, tj. u blizini uspravnog položaja broda, i negativna vrijednost \overline{MC}_m ne znači da se plovilo mora prevrnuti, jer se stabilnost može pojaviti pri nekom većem kutu nagiba. Za te veće nagibe izraz (172) više nije valjan. Za plovilo oblika prizme, kojem je vodna linija pravokutnik, izraz (171) je valjan i za veće kutove nagiba φ .

U razmatranjima stabilnosti plovila koja su dovela do izraza (172) pretpostavljeno je da su mase na plovilu nepomične, tj. da se položaj težišta sustava C_m pri nagibu ne mijenja. Ako se s nagibom broda pomaknu i neke mase na brodu, pomaknut će se i težište sustava C_m . Za taj pomak težišta sustava C_m trebalo bi se ispraviti izraz (172). Tako se s nagibom plovila koje prevozi kapljevine sa slobodnom površinom pomiče i težište te kapljevitih mase, jer se njena slobodna površina nastoji održati u svom horizontalnom ravnotežnom položaju. Dakle, uz pomicanje težišta istisnine C_{V1} i težište se sustava C_m pri nagibu plovila također pomiče, i to u istom smjeru kao i C_{V1} , pa se stabilnost smanjuje. Zbog toga se kapljevine koje se prevoze, npr. nafta, smještaju na brodu u posebne spremnike, odijeljene međusobno uzdužnim pregradama, da bi se slobodna površina kapljevitog tereta razdjelila na više manjih dijelova i time pomicanje kapljevina bilo što manje (v. Brod, stabilnost, TE 2, str. 178). Može se pokazati da se pri malim nagibima metacentarska visina smanjuje za iznos $\rho_k l_{\xi}/(\rho V)$ za svaki spremnik, gdje je ρ_k gustoća kapljevine koja se prevozi, l_{ξ} moment tromosti slobodne površine oko uzdužne osi kroz njeno težište, ρ gustoća vode u kojoj pliva brod, a V volumen istisnine broda.

Kao jednostavan primjer proračuna stabilnosti tijela koje pliva slobodnom površinom odredit će se stabilnost plivanja homogene kocke gustoće ρ_0 koja pliva na kapljevini gustoće ρ (sl. 46). Ako se zanemari uzgon u zraku, iz jednakosti

$$F_b = \rho g V = \rho g a^2 H = G = \rho_0 g a^3$$

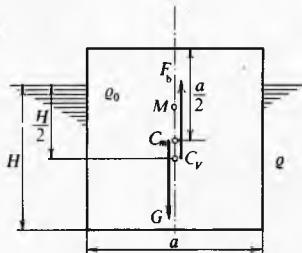
doviva se da je gaz kocke $H = a\rho_0/\rho$. Izrazom (172) određuje se metacentarska visina

$$\overline{MC}_m = \frac{a^3 a}{12 a^2 H} - \left(\frac{a}{2} - \frac{H}{2} \right) = \frac{a \rho}{12 \rho_0} - \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right).$$

Ako se taj izraz izjednači s nulom, dobiva se kvadratna jednadžba za odnos gustoća ρ_0/ρ :

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{1}{6} = 0$$

s dva rješenja $\frac{\rho_0}{\rho} = 0,5 \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$, tj. $\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)_1 = 0,7887$ i $\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)_2 = 0,2113$.



Sl. 46. Stabilnost homogene kocke

Lako se dokaže da je metacentarska visina MC_m pozitivna, tj. homogena kocka je stabilna za odnose gustoća

$$0 < \frac{\rho_0}{\rho} < 0,2113 \text{ i } 0,7887 < \frac{\rho_0}{\rho} < 1.$$

U području odnosa gustoća $0,2113 < \frac{\rho_0}{\rho} < 0,7887$ kocka je nestabilna, a tek će pri većim nagibima stići stabilnost i plavit će stabilno u nagnutom položaju. Budući da se radi o plovilu s kvadratnom vodnom linijom i s vertikalnim bokovima, za proračun \overline{MC}_{V1} pri većim nagibima može se primijeniti izraz (171). Ako se tako proračunat \overline{MC}_{V1} uvrsti u izraz (172) pa se čitav izraz izjednači s nulom, dobiva se da je kut nagiba homogene kocke u nestabilnom području odnosa gustoća ρ_0/ρ :

$$\varphi = \arctan \left[\pm \sqrt{12 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\rho_0}{\rho} - 2} \right].$$

Tako je za $\rho_0/\rho = 0,5$ kut nagiba $\varphi = \pm 45^\circ$, tj. kocka stabilno pliva na vodnoj liniji kojoj je širina dijagonala stranice kocke.

Ravnoteža atmosfere

Kad se u dosadašnjim razmatranjima statike fluida pored hidrostatickog tlaka p_h pojavljivao i konstantan tlak p_0 , taj se pripisivao djelovanju prisutnog plina. Zbog relativno male gustoće plinova prema gustoći kapljevinama, promjena hidrostatickog tlaka u plinovima s manjim visinama mogla se zanemariti. Tako pri temperaturi od $15^\circ C$ i tlaku od 1,01325 bar odnos gustoće vode $\rho_{H_2O} = 999,0 \text{ kg/m}^3$ i gustoće zraka $\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$ iznosi 816, pa bi se isti prirast hidrostatickog tlaka s dubinom vode od 1 m u zraku ostvario s visinom od 816 m stupca zraka konstantne gustoće ρ_a . U usporedbi sa životom taj se odnos penje na 11100.

Međutim, pri promatranju pojava u atmosferi odnosi se potpuno mijenjaju. Zračni balon ispunjen plinom, lakšim od zraka, lebdi u zraku podržavan istim hidrostatskim ili Arhimedovim uzgonom $\rho_a g V$ koji se javlja i u kapljevinama. (U vodi bi za isti taj volumen uzgon bio 816 puta veći.) Isti takav uzgon diže u dimnjaku tople plinove izgaranja koji su lakši od okolišne atmosfere.

Statika fluida posebno je važna za razmatranje ravnoteže velikih masa plinova, kao što je plinoviti sferni omotač Zemlje nazvan atmosferom.

Ravnoteža stlačivog fluida u gravitacijskom polju Zemlje opisana je diferencijalnom jednadžbom (125). U toj se jednadžbi s visinom z sve mijenja: p , ρ i g . Za integraciju jednadžbe (125) potrebno je poznavati promjenu gustoće zraka $\rho = \rho(p(z))$, koju opisuju termodinamički odnosi uz neminovno uvođenje i termodinamičke ili apsolutne temperature T kao bitne varijable.

Geopotencijalna visina. Gravitacija g se do visine od približno 32 km smanji za 1% od vrijednosti na Zemljinoj površini i obično se njena promjena s visinom zanemaruje. Za točnije proračune uvodi se u meteorologiju i aeronautiku geopotencijalna visina Z definirana izrazom

$$Z = \int_0^z \frac{g(z)}{g_0} dz, \quad (173)$$

gdje je z geometrijska visina, $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ standardna vrijednost gravitacije na Zemljinoj površini na 45° geografske širine, a $g(z)$ vrijednost gravitacije na visini z .

Dobro približenje za geopotencijalnu visinu jest izraz

$$Z = 1,0018 \left(\frac{z}{1 + \frac{z}{R_0}} - 3,44 \cdot 10^{-3} z \cos^2 \varphi \right), \quad (173a)$$

gdje je φ geografska širina u stupnjevima ili radijanima, $R_0 = 6370,1 \cdot 10^3 \text{ m}$ polumjer Zemlje na širini $\varphi = 45^\circ$, a z i Z jesu visine u metrima.

Budući da je $g(z) < g_0$, očito da je $Z < z$. Geopotencijalna visina je vrsta normalizirane visine, a njena dinamička definicija glasi: rad potreban za podizanje jedinične mase od razine mora do fiktivne geopotencijalne visine Z u fiktivnom konstantnom gravitacijskom polju g_0 jednak je radu potrebnom za podizanje te iste mase do stvarne geometrijske visine z u stvarnom promjenjivom gravitacijskom polju $g(z)$. U prva dva stupca tabl. 3 uspoređene su visine z i Z na geografskoj širini $45^\circ N$, prema američkoj standardnoj atmosferi iz 1966. godine.

Tablica 3

VRIJEDNOSTI TLAKA I GUSTOĆE UNUTAR SEGMENTA LINEARNIH TEMPERATURNIH PROMJENA ATMOSFERE DO GEOPOTENCIJALNE VISINE $Z = 88743 \text{ m}$ NA GEOGRAFSKOJ ŠIRINI 45° N ZA PROLJEĆE I JESEN

Geopotencijalna visina Z m	Geometrijska visina z m	Temperatura T (t)		Temperaturni gradijent $-\alpha = \frac{dT}{dZ}$	Eksponent politrope $n = \frac{g_0}{g_0 - \alpha R}$	Tlak, izraz (178a) ili (179) p mbar	Gustoća, izraz (180a) ili (180b) ϱ kg/m ³	Američka standardna atmosfera (1966)	
		K	°C	K/m			kg/m ³	mbar	ϱ kg/m ³
0	0	288,15	(+15,0)	-0,0065	1,235	1013,25	1,225	1013,250	1,225
5 000	5 004	255,65	(-17,5)			540,18	0,7361	540,2	0,7361
10 000	10 016	223,15	(-50,0)			264,35	0,4129	264,4	0,4127
11 000	11 019	216,65	(-56,5)			226,31	0,3639	226,3	0,3639
15 000	15 035	216,65	(-56,5)	0	1,0	120,43	0,1937	120,4	0,1937
20 000	20 063	216,65	(-56,5)			54,742	0,08802	54,75	0,08804
30 000	30 142	226,65	(-46,5)	+0,001	0,972	11,716	0,01801	11,72	0,01801
32 000	32 162	228,65	(-44,5)			8,6783	0,01322		
40 000	40 253	251,05	(-22,1)	+0,0028	0,924	2,7745	0,003850	2,775	0,003851
47 000	47 350	270,65	(-2,5)			1,1087	0,001427		
50 000	50 396	270,65	(-2,5)	0	1,0	0,75920	0,0009772	0,7594	0,0009775
52 000	52 429	270,65	(-2,5)			0,58981	0,0007592		
60 000	60 572	254,65	(-18,5)	-0,002	1,062	0,20828	0,0002849	0,2084	0,0002850
61 000	61 591	252,65	(-20,5)			0,18203	0,0002510		
70 000	70 779	221,65	(-51,5)	-0,03444	1,112	0,049687	0,00007809	0,04901	0,00007844
79 000	79 995	190,65	(-82,5)			0,011149	0,00002037		
80 000	81 020	190,65	(-82,5)			0,009320	0,00001703	0,009066	0,00001657
88 743	90 000	190,65	(-82,5)	0	1,0	0,001945	0,00000356		

Ravnoteža politropske i izotermičke atmosfere. Izraz (173) može se pisati u diferencijalnom obliku

$$g(z)dz = g_0 dz, \quad (173b)$$

tako da diferencijalna jednadžba ravnoteže (125) prelazi u

$$\frac{dp}{dz} = -\varrho g_0. \quad (174)$$

Suhi i čisti zrak uz razinu mora smjesa je od nekoliko plinova, od kojih dušik (78,084%), kisik (20,946%) i argon (0,934%) zauzimaju 99,964% ukupnog volumena. Budući da je i vodena para uvijek prisutna u zraku, ali u nepostojanom postotnom iznosu koji se vremenski stalno mijenja, standardna svojstva zraka obično se odnose na suhi i čisti zrak uz razinu mora, za standardni atmosferski tlak od 1,01325 bar i temperaturu $t = 15^\circ \text{ C}$ ($T = 288,15 \text{ K}$). Relativna molekularna masa suhog zraka jest $M = 28,966$. Eksperimenti pokazuju da su sastojci zračne smjese, uključujući i vodenu paru, savršeni plinovi, za koje je valjana jednadžba stanja oblika (8), pa je i zrak savršen plin plinske konstante $R = 287,04 \text{ J/(kg K)}$.

Jednadžba stanja savršenog plina (8) omogućuje da se gustoća ϱ izrazi tlakom p i temperaturom T

$$\varrho = \frac{p}{R T}, \quad (175)$$

gdje se T mijenja s geopotencijalnom visinom $T = T(Z)$. Kad se izraz (175) uvrsti u diferencijalnu jednadžbu (174), dobiva se izraz

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 dz}{R T(Z)}, \quad (175a)$$

kojemu je integral

$$p(Z_2) = p(Z_1) \exp \left[-\frac{g_0}{R} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dz}{T(Z)} \right]. \quad (176)$$

Izraz (176) još uvijek zavisi od promjene temperature s visinom $T(Z)$. Da bi se proračun pojednostavio, temperaturne promjene u atmosferi određene su približno segmentima linearnih promjena oblika

$$T(Z) = T(Z_1) - \alpha(Z - Z_1) \quad (177)$$

za segment: $Z_1 < Z < Z_2$, gdje je $-\alpha = \frac{dT}{dZ}$ temperaturni građijent.

Za područje geopotencijalnih visina od 0 do $Z = 88743 \text{ m}$ ($z = 90000 \text{ m}$) dana su u tabl. 3 područja geopotencijalnih visina Z kao segmenta linearnih promjena temperature s padnim temperaturama i temperaturnim građijentima za pojedini segment.

Za linearne temperaturne segmente u kojima je temperatura opisana izrazom (177), integral u (176) poprima vrijednost

$$-\frac{g_0}{R} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dz}{T(Z_1) - \alpha(Z - Z_1)} = \frac{g_0}{\alpha R} \ln \frac{T(Z_2)}{T(Z_1)} = \frac{g_0}{\alpha R} \ln \left[\frac{T(Z_2)}{T(Z_1)} \right]^{g_0 \over \alpha R},$$

što uvršteno u (176), uz identitet $\exp \ln A \equiv A$, daje

$$p(Z_2) = p(Z_1) \left[\frac{T(Z_2)}{T(Z_1)} \right]^{g_0 \over \alpha R} \quad (178)$$

Za geopotencijalnu visinu Z unutar intervala $Z_1 < Z < Z_2$ taj se izraz može napisati u općenitijem obliku

$$p(Z) = p(Z_1) \left[\frac{T(Z_1) - \alpha(Z - Z_1)}{T(Z_1)} \right]^{g_0 \over \alpha R}. \quad (178a)$$

U tabl. 3 primjećuju se visine atmosfere na kojima je temperaturni građijent $-\alpha = 0$, tj. postoje segmenti atmosfere konstantne temperature. Ako se ta konstantna temperatura označi sa T_0 , integracija izraza (176) u intervalu $Z_1 < Z < Z_2$ daje

$$p(Z) = p(Z_1) \exp \left[-\frac{g_0}{R T_0} (Z - Z_1) \right]. \quad (179)$$

Promjena gustoće koja odgovara promjenama tlakova i temperature dobiva se pomoću jednadžbe stanja savršenog plina (175):

$$\varrho(Z) = \varrho(Z_1) \frac{p(Z)}{p(Z_1)} \frac{T(Z_1)}{T(Z)}, \quad (180)$$

što za linearne temperaturne segmente, uvrstivši (178a), daje

$$\varrho(Z) = \varrho(Z_1) \left[\frac{T(Z_1) - \alpha(Z - Z_1)}{T(Z_1)} \right]^{g_0 \over \alpha R}^{-1}, \quad (180a)$$

a za izotermičke segmente, uvrstivši (179), daje

$$\varrho(Z) = \varrho(Z_1) \exp \left[-\frac{g_0}{R T_0} (Z - Z_1) \right]. \quad (180b)$$

Za standardne temperaturne profile prikazane u tabl. 3, proračunane su i prikazane u nastavku iste tablice vrijednosti tlakova i gustoća za navedene geopotencijalne visine. Te se vrijednosti vrlo dobro slažu s podacima američke standardne atmosfere.

Odnosi apsolutnog tlaka p i gustoće ϱ plinova karakteriziraju određene politropske procese prikazane općim oblikom

$$\frac{p}{\varrho^n} = \text{const.}, \quad (181)$$

gdje je n eksponent politrope. Za izotermički proces očito je $n = 1$, a za adijabatski proces savršenog plina $n = \kappa = c_p/c_v$, gdje su c_p i c_v specifične topline pri konstantnom tlaku i konstantnom volumenu (dimenzija $[c_p] = [c_v] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$, dakle jedinice u SI su $[c_p]_{SI} = [c_v]_{SI} = m^2/s^2 K = J/kg K$). Za suhi zrak je $c_p = 1015 J/kg K$ i $c_v = 724 J/kg K$, pa je $\kappa = 1,402$.

I odnos tlakova i gustoća atmosfere izražen sa (178a) i (180a) može se prikazati politropskim procesom (181). Ako se odnos temperatura u (180a) izrazi odnosom gustoća i taj se odnos uvrsti u (178a), dobiva se

$$\frac{p(Z)}{p(Z_1)} = \left| \frac{\varrho(Z)}{\varrho(Z_1)} \right|^{\frac{g_0}{g_0 - \alpha R}}, \quad (182)$$

gdje je eksponent politrope

$$n = \frac{g_0}{g_0 - \alpha R}. \quad (182a)$$

Podaci o eksponentu politrope za pojedine linearne temperaturne segmente atmosfere dani su u tabl. 3. Primjećuje se da su svi ti eksponenti manji od eksponenta adijabate $\kappa = 1,402$. Stoga se pomoću izraza (182a) može potražiti temperaturni gradijent koji bi odgovarao adijabatskom odnosu tlaka i gustoće

$$\left(\frac{dT}{dZ} \right)_{ad} = -\alpha_{ad} = -\frac{g_0 \kappa - 1}{R \kappa} = -0,0098 \text{ K/m.}$$

Taj temperaturni gradijent javlja se kao važan kriterij u razmatranjima vertikalne statičke stabilnosti atmosfere.

Za ilustraciju predodžbe o veličini atmosfere interesantno je razmotriti njene različite fiktivne visine.

Kad bi atmosfera bila homogena, nestlačiva i gustoće $\varrho_0 = 1,2250 \text{ kg/m}^3$, koju zrak ima uz površinu Zemlje, njena bi visina bila $Z_0 = \frac{p_0}{\varrho_0 g_0} = \frac{101325}{1,225 \cdot 9,80665} = 8434,5 \text{ m}$.

Ta se visina naziva *visinom homogene atmosfere*. Na toj bi visini vladao tlak $p = 0$ i temperatura $T = 0$, tako da bi temperaturni gradijent za takvu atmosferu iznosio: $dT/dZ = -\alpha_0 = -0,0342 \text{ K/m}$, dakle više od pet puta brži pad temperature s visinom od stvarnog pada.

Kad bi atmosfera i nakon jedanaestog kilometra zadržala isti pad temperature $-\alpha = -0,0065 \text{ K/m}$, njena bi ukupna visina, prema izrazu (178a) ili (180a), iznosila

$$Z_\alpha = \frac{T_0}{\alpha} = 44331 \text{ m.}$$

Da je atmosfera izotermička, njena bi visina prema izrazu (179) težila u beskonačnost.

Ravnoteža fluida u relativnom mirovanju

Jednadžba ravnoteže statičkog fluida u obliku (59) ili (114) valjana je za mirovanje fluida u inercijalnom koordinatnom sustavu. U normalnoj tehničkoj i laboratorijskoj primjeni sustav čvrsto vezan uz površinu Zemlje može se s dovoljnom točnošću prihvati kao inercijalni sustav. Ipak, utjecaji neinercijalnosti tog istog sustava ponekad se ne mogu zanemariti, npr. djelovanje Coriolisove inercijalne sile na velike mase geofluida, atmosfere i oceana.

Svaki sustav koji se giba pravocrtno, translatoryno i konstantnom brzinom relativno prema jednom inercijalnom sustavu,

također je inercijalni sustav. Stoga su jednadžba ravnoteže (114) i njeni integrali valjani i za fluid zatvoren u spremnik, prema kojem fluid relativno miruje kad se spremnik giba pravocrtno, translatoryno i konstantnom brzinom, relativno prema Zemlji kao inercijalnom sustavu.

Sustav koji se prema inercijalnom sustavu giba vremenski i po smjeru promjenljivom brzinom neinercijalan je sustav. Prema d'Alembertovu principu mehanike, za fluid koji relativno miruje u neinercijalnom sustavu, jednadžba ravnoteže fluida može i dalje zadržati oblik (59) ili (114), tako da se u vanjske masene sile uključe i inercijalne sile. Tako se u sustavu koji se giba translatoryno jednolikou ubrzano akceleracijom \vec{a} u masene sile uključuje inercijalna sila konstantne gustoće dana izrazom (19), a u sustavu koji rotira konstantnom kutnom brzinom ω pojavljuje se nehomogena masena centrifugalna sila dana izrazom (20). Da bi se mogao primijeniti taj princip i jednadžba ravnoteže (114), potrebno je da fluid relativno miruje, tj. da nema relativnog pomicanja čestica fluida jednih prema drugima, već da se čitav fluid giba poput krutog tijela. Naime, samo će tada tada površinskih sile unutar i na granici fluida ostati samo tlak, prikazan degeneriranim tenzorom naprezanja (55), pa nije potrebno postavljati jednadžbu gibanja individualnih čestica, npr. jednadžbu (48a) ili (60), i integrirati je, jer se ta jednadžba gibanja degenerira u jednadžbu ravnoteže (114) koju je vrlo jednostavno integrirati.

Translatoryno pravocrtno gibanje fluida. Prema izloženom principu, jednadžba ravnoteže fluida u spremniku koji se translatoryno giba konstantnom akceleracijom \vec{a} u gravitacijskom polju Zemlje i dalje zadržava opći oblik

$$\text{grad } p = \varrho \vec{f}, \quad (114)$$

gdje je sada \vec{f} zbroj masene sile gravitacije (18) i inercijalne sile (19),

$$\vec{f} = \vec{f}_{(g)} + \vec{f}_{(a)} = -g \vec{k} - \vec{a}. \quad (183)$$

U neinercijalnom koordinatnom sustavu O_Nxyz , čvrsto vezanom za spremnik, os O_Nz usmjerena je vertikalno uvis, a koordinatna ravnina O_Nxy je horizontalna.

Uvrštenje izraza (183) u (114) daje jednadžbu ravnoteže relativnog mirovanja

$$\text{grad } p = \varrho(-g \vec{k} - \vec{a}), \quad (184)$$

koja skalarno pomnožena s diferencijalom radivektora $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ daje prirast tlaka u tom smjeru

$$dp = -\varrho a_x dx - \varrho a_y dy - \varrho(g + a_z)dz. \quad (184a)$$

Za nestlačivi fluid $\varrho = \text{const.}$, i jer je \vec{a} konstantan vektor, diferencijal (184a) vrlo se jednostavno integrira u

$$p(x, y, z) = p_0 - \varrho a_x(x - x_0) - \varrho a_y(y - y_0) - \varrho(g + a_z)(z - z_0), \quad (185)$$

gdje je p_0 konstanta integracije

$$p_0 = p(x_0, y_0, z_0), \quad (185a)$$

tj. tlak u točki (x_0, y_0, z_0) .

U polju tlaka koje je opisano izrazom (185) jednostavno je odrediti oblik površina konstantnih tlakova, izobara, pridavajući lijevoj strani izraza (185) konstantne vrijednosti tih tlakova. Izobare su, očito, paralelne ravnine. Do istog se rezultata dolazi i izravno iz diferencijalne jednadžbe izobare. Budući da je uzduž izobare $dp = 0$, iz izraza (184a) dobiva se diferencijalna jednadžba izobare

$$a_x dx + a_y dy + (g + a_z)dz = 0, \quad (186)$$

a njen integral daje jednadžbu izobare

$$a_x x + a_y y + (g + a_z)z = C, \quad (186a)$$

gdje je za nestlačivi fluid

$$C = \frac{1}{\varrho} [p(x = 0, y = 0, z = 0) - p_{\text{const.}}] \quad (186b)$$

konstanta koja u izrazu (186a) definira izobaru $p = p_{\text{const.}}$

Izrazom (185) ili (186a) određen je oblik slobodne površine kapljevine ili razdjelne površine dviju kapljevina koje se ne

miješaju. Ova zadnja mogućnost proizlazi iz razmatranja koja su slijedila izraze (121a), (122) i (122a), jer i kompozitna masena sila (183) ima potencijal

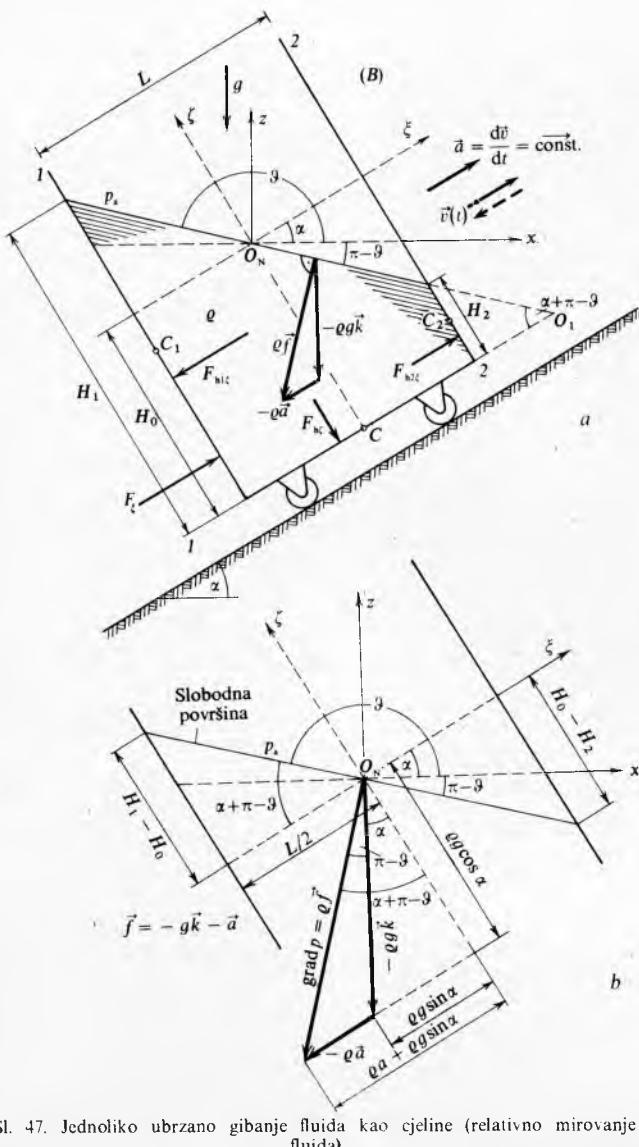
$$U = U_{(g)} + U_{(a)} = gz + \vec{a} \cdot \vec{r}, \quad (187)$$

pa se površina prekida gustoće poklapa s ekvipotencijalnom površinom $U = \text{const.}$, a ta se, kako pokazuje i usporedba izraza (186a) i (187), poklapa s izobarom $p = \text{const.}$

Pri određivanju položaja slobodne površine ili površine prekida gustoće mora se primijeniti i jednadžba kontinuiteta, koja osigurava jednakost mase kapljevina u originalnom stanju apsolutnog mirovanja i u stanju relativnog mirovanja.

Izraz (185) pokazuje da se u fluidu uspostavlja linearni raspored tlaka. Zato se sile tlaka na ravne i zakrivenje površine uronjene u fluid, koji se čitav giba jednoliko ubrzano, određuju u načelu istim postupcima kao sile hidrostatičkog tlaka.

Iznesena razmatranja primjenjena su na proračun rasporeda tlaka u kapljevini gustoće ϱ koja se zajedno sa spremnikom čitava giba uz (ili niz) kosinu priklonjenu pod kutom α prema horizontali (sl. 47). Akceleracija (ili deceleracija) \vec{a} spremnika je konstantna i paralelna s ravninom kosine. Za vrijeme početne periode ubrzavanja može se pojaviti i oscilatorno gibanje fluida u spremniku, ali nakon toga slobodna površina zauzme položaj prikazan na sl. 47 i fluid miruje relativno prema spremniku. Uz spremnik i fluid čvrsto je vezan neinercijalni koordinatni sustav O_{Nxyz} , a gibanje je paralelno s ravninom



Sl. 47. Jednoliko ubrzano gibanje fluida kao cijeline (relativno mirovanje fluida)

O_{Nxz} . Ishodište O_N proizvoljno je postavljeno na sredini slobodne površine, tj. u točku oko koje se zakreće slobodna površina jer je spremnik pravokutnog oblika. U ishodištu O_N ($x = 0$, $z = 0$) vlada atmosferski tlak p_a .

Vektor akceleracije \vec{a} ima komponente

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_z \vec{k} = a \cos \alpha \vec{i} + a \sin \alpha \vec{k}, \quad (188a)$$

pa, uz $x_0 = 0$ i $z_0 = 0$ i $p(x_0, z_0) = p_a$, izraz (185) određuje raspored tlaka u fluidu

$$p(x, z) = p_a - \varrho a \cos \alpha x - \varrho(g + a \sin \alpha)z, \quad (188b)$$

iz kojeg se za slobodnu površinu $p = p_a = \text{const.}$ dobiva jednadžba pravca (ravnine)

$$z = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} x. \quad (188c)$$

Taj pravac (ravnina) ima kut nagiba

$$\vartheta = \arctan\left(-\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}\right) \quad (188d)$$

prema osi O_{Nx} (sl. 47a i b). Za gibanje spremnika po horizontalnoj ravnini $\alpha = 0$ taj bi kut nagiba slobodne površine iznosio

$$\vartheta = \arctan(-a/g). \quad (188e)$$

Masa fluida u spremniku iznosi $m = \varrho L H_0 B$, gdje je L duljina, B širina spremnika, a H_0 dubina fluida u spremniku u stanju mirovanja na horizontalnoj ravnini. Sila potrebna za jednolik gibanje te mase fluida uz kosinu iznosi

$$F_\xi = G \sin \alpha + ma = \varrho L H_0 B(g \sin \alpha + a), \quad (189)$$

gdje je os $O_{N\xi}$ paralelna s kosinom.

S obzirom na fluid, sila F_ξ može se ostvariti samo djelovanjem sile tlakova na fluid $(-F_{h1\xi})$ i $(-F_{h2\xi})$ preko stijenki 1-1 i 2-2 (sl. 47a) koje su okomite na vektor akceleracije. Naime, iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je $H_1 - H_0 = H_0 - H_2$, a iz sl. 47b vidi se da je

$$\tan(\alpha + \pi - \vartheta) = \frac{H_1 - H_0}{L/2} = \frac{H_0 - H_2}{L/2} = \frac{a + g \sin \alpha}{g \cos \alpha},$$

tako da su sile tlakova

$$-F_{h1\xi} = +p_{C_1} H_1 B = \varrho g \cos \alpha \frac{H_1}{2} H_1 B$$

$$-F_{h2\xi} = -p_{C_2} H_2 B = -\varrho g \cos \alpha \frac{H_2}{2} H_2 B,$$

a njihova je rezultanta

$$F_\xi = (-F_{h1\xi}) + (-F_{h2\xi}) = \varrho g \cos \alpha H_0 L \tan(\alpha + \pi - \vartheta) B = \\ = \varrho g H_0 B L (a + g \sin \alpha). \quad (189a)$$

Dakle, izraz (189a) je jednak izrazu (189) koji je dobiven razmatranjem dinamike gibanja mase fluida.

Sila tlaka na koso dno spremnika jest

$$F_{h\xi} = -p_C LB = -\varrho g \cos \alpha H_0 LB,$$

i jednaka je komponenti sile težine fluida u smjeru osi ξ

$$G = -G \cos \alpha = -\varrho g L H_0 B \cos \alpha.$$

Kad se spremnik giba jednoliko ubrzano u smjeru negativne osi ξ s akceleracijom jednakom gravitaciji g , tj. kad je $\vec{a} = -g \vec{k}$, na fluid u spremniku ne djeluje nikakva masena sila

$$\vec{f} = \vec{f}_{(g)} + \vec{f}_{(a)} = -g \vec{k} - \vec{a} = 0,$$

pa u fluidu vlada konstantan tlak (bestežinsko stanje).

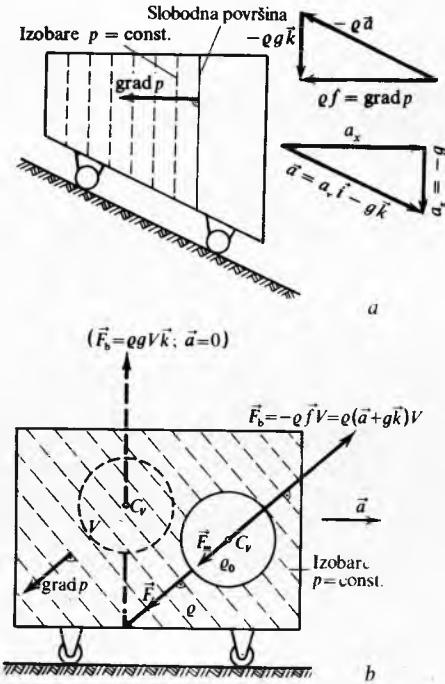
Ako je akceleracija $\vec{a} = a_x \vec{i} - g \vec{k}$ (sl. 48a), izobare su vertikalne, pa i slobodna površina zauzme takav položaj. Zato kad se na brzim vozilima, npr. avionima, određuje smještaj usisnog voda iz rezervoara s gorivom, treba računati s pomicanjem fluida u spremniku. Usisni vod mora biti tako priključen da i kod djelomično ispunjenog spremnika, pri najvećim ubrzanjima ili usporenjima vozila, ne ostane bez goriva.

Na tijelo potpuno uronjeno u fluid koji se čitav giba konstantnom akceleracijom \vec{a} također djeluje sila uzgona. Istom

tehnikom proračuna kojom je dobiven izraz (153), budući da je u ovom slučaju vektor masene sile \vec{f} konstantan, dobiva se

$$\vec{F}_b = - \int_S p \vec{n} dS = - \int_V \text{grad } p dV = - \varrho \vec{f} V = \varrho(\vec{a} + g\vec{k})V. \quad (190)$$

Lako se dokaže da sila uzgona \vec{F}_b prolazi težištem volumena tijela V .



Sl. 48. Raspored tlaka i sile uzgona u fluidu koji se jednoliko ubrzano giba kao cijelina

Na sl. 48b prikazana je homogena kugla gustoće ρ_0 uronjena u fluid gustoće $\rho > \rho_0$. Fluid se zajedno sa spremnikom jednoliko ubrzano giba u horizontalnom smjeru akceleracijom a . Sila uzgona dana je izrazom (190), a na masu kugle djeluje inercijalna sila $-m\vec{a} = -\rho_0\vec{a}V$ i sila težine $-mg\vec{k} = -\rho_0g\vec{k}V$, tj.

$$\vec{F}_m = -\rho_0(\vec{a} + g\vec{k})V, \quad (191)$$

koja djeluje u suprotnom smjeru od sile uzgona, tako da je sila u niti na koju je pričvršćena kugla

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_m = (\rho - \rho_0)(\vec{a} + g\vec{k})V. \quad (191a)$$

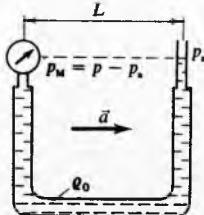
Kao što je prikazano na sl. 48b, sile \vec{F}_b , \vec{F}_m i \vec{F} stoje okomito na izobare.

Na sl. 49 prikazan je akcelerometar na principu rasporeda tlaka u fluidu u jednoliko ubranom gibanju. Pomoću izraza (185) dobiva se izraz za akceleraciju

$$a = \frac{p_M}{\rho_0 L}, \quad (192)$$

gdje je $p_M = p - p_a$ očitanje manometra.

Ako je mjeri fluid živa, a duljina uređaja $L = 1 \text{ m}$, osjetljivost akcelerometra jest $p_M/a = \rho_0 L = 13600 \text{ Pa}/(\text{m/s}^2)$.



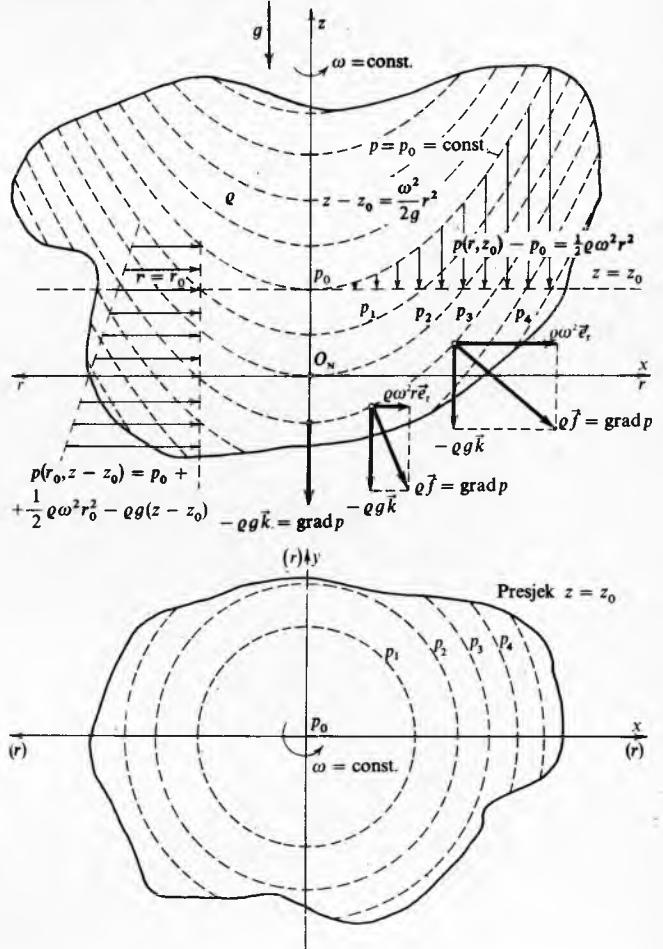
Sl. 49. Akcelerometar na principu rasporeda tlaka u fluidu koji se giba jednoliko ubrzano kao cijelina

Rotacija fluida oko vertikalne osi. Drugi slučaj relativnog mirovanja fluida jest okretanje čitavog fluida oko vertikalne osi konstantnom kutnom brzinom ω . Pri takvu gibanju fluida kao krutog tijela na svaku česticu fluida djeluje masena sila

Zemljine gravitacije i inercijalna centrifugalna sila definirana izrazom (20), pa je rezultantno polje vanjske masene sile dano izrazom

$$\vec{f} = \vec{f}_{(g)} + \vec{f}_{(c)} = -g\vec{k} + \omega^2 r \vec{e}_r, \quad (193)$$

gdje je, u neinercijalnom koordinatnom sustavu O_Nxyz (sl. 50) koji zajedno s fluidom rotira oko osi O_Nz konstantnom brzinom ω , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cilindarska koordinata (to nije apsolutna vrijednost radijektora, koja je označena sa $|\vec{r}|$), $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ jedinični vektor u smjeru porasta koordinate r , a θ cilindarska koordinata.



Sl. 50. Raspored tlaka u nestlačivu fluidu koji kao cijelina rotira konstantnom kutnom brzinom oko vertikalne osi

U pravokutnim koordinatama izraz (193) ima oblik

$$\vec{f} = -g\vec{k} + \omega^2 x\vec{i} + \omega^2 y\vec{j}. \quad (193a)$$

Izraz (193) ili (193a) uvršten u jednadžbu ravnoteže (114) daje jednadžbu ravnoteže fluida koji u Zemljinoj gravitacijskom polju jednolikom rotira oko vertikalne osi

$$\text{grad } p = \rho \omega^2 r \vec{e}_r - \rho g \vec{k} = \rho \omega^2 x \vec{i} + \rho \omega^2 y \vec{j} - \rho g \vec{k}. \quad (194)$$

Jednadžba (194) skalarno pomnožena s proizvoljnim pri-rastom radijektora $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + dz\vec{k} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ daje diferencijal tlaka

$$dp = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz = \rho \omega^2 x dx + \rho \omega^2 y dy - \rho g dz. \quad (195)$$

Za nestlačivi fluid $\rho = \text{const.}$ integracijom tog diferencijala dobiva se izraz za raspored tlaka unutar fluida

$$p(r, z) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - r_0^2) - \rho g(z - z_0), \quad (196)$$

ili

$$p(x, y, z) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2) - \rho g(z - z_0), \quad (196a)$$

gdje je p_0 konstanta integracije, tj. zadani tlak u točki (r_0, z_0)

$$p_0 = p(r = r_0, z = z_0) = p(x = x_0, y = y_0, z = z_0). \quad (196b)$$

Ako je tlak zadan u nekoj točki na osi rotacije $(r_0 = 0, z_0)$, izrazi (196) i (196a) prelaze u

$$p(r, z) = p_0 + \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 - \varrho g(z - z_0) \quad (197)$$

$$p(x, y, z) = p_0 + \frac{1}{2} \varrho \omega^2 (x^2 + y^2) - \varrho g(z - z_0). \quad (197a)$$

Izrazi (197) i (197a) pokazuju da tlak u nestlačivom fluidu koji čitav rotira konstantnom kutnom brzinom oko vertikalne osi raste s kvadratom udaljenosti od osi rotacije i linearno raste s dubinom $h = -z$ (sl. 50).

Ako se uvrste na lijevu stranu izraza (197) ili (197a) konstantne vrijednosti tlakova $p_{\text{const.}}$ dobivaju se izrazi za izobare

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C, \quad (198)$$

gdje je za nestlačivi fluid konstanta C , koja odgovara izobari $p = p_{\text{const.}}$ definirana sa

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\varrho g} [p(r = 0, z = 0) - p_{\text{const.}}] = \\ &= \frac{1}{\varrho g} [p(x = 0, y = 0, z = 0) - p_{\text{const.}}]. \end{aligned} \quad (198a)$$

Iz izraza (198) i (198a) za izobaru koja odgovara tlaku $p = p_0 = p(r = 0, z = z_0) = p_{\text{const.}}$ uz

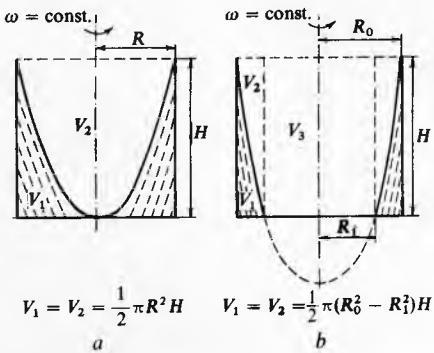
$$C = \frac{1}{\varrho g} [p(r = 0, z = 0) - p(r = 0, z = z_0)] = -\varrho g z_0,$$

dobiva se izraz za rotacijski paraboloid

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (198b)$$

koji je prikazan na sl. 51.

Jednadžba izobare (198) pokazuje da su izobare u fluidu što rotira konstantnom kutnom brzinom oko vertikalne osi, površine kongruentnih rotacijskih paraboloida kojih se os podjeljuje s osi rotacije.



Sl. 51. Geometrijska svojstva slobodne površine u obliku rotacijskog paraboloida pri rotaciji fluida konstantnom kutnom brzinom ω

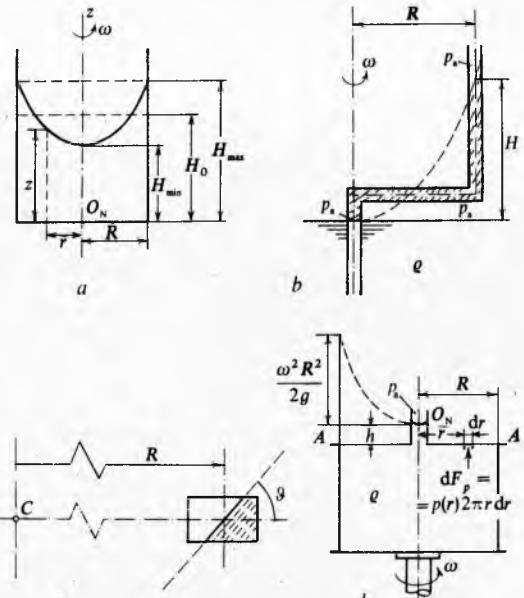
Izrazom (198) određen je i oblik slobodne površine kapljivine koja otira kao kruto tijelo i oblik razdjelne površine dviju kapljivina koje se ne mijesaju. I te površine imaju oblik rotacijskog paraboloida, a da bi se odredile, mora se primijeniti i jednadžbu kontinuiteta. Iz geometrijskih svojstava rotacijskog paraboloida prikazanog na sl. 51a proizlazi da je volumen njegove šupljine V_2 jednak vanjskom volumenu ispod njegove površine V_1 :

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 H. \quad (199a)$$

Ako rotacijski paraboloid slobodne površine presijeca dno posude, volumeni V_1 i V_2 (sl. 51b) također su međusobno jednaki i iznose

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2} R_0^2 \pi H - V_3 = \frac{1}{2} \pi (R_0^2 - R_1^2) H. \quad (199b)$$

Zbog kvadratičnog zakona promjene tlaka (197), pri proračunu sile tlaka na površine uronjene u fluid koji čitav jednoliko rotira ne mogu se primijeniti jednostavniji postupci razvijeni za proračun sile linearnoga hidrostatičkog tlaka. Zato je tada potrebno složiti prikidan izraz za diferencijal sile tlaka i zatim ga u komponentama integrirati po zadanoj površini.



Sl. 52. Rotacija fluida kao krutog tijela

Na sl. 52 prikazano je nekoliko primjera primjene razvijenih izraza za opis ponašanja nestlačivog fluida u jednolikoj rotaciji oko vertikalne osi.

Dubina kapljivine u kružnoj cilindričnoj posudi (sl. 52a) u stanju mirovanja iznosi H_0 . Kad posuda zajedno s kapljevinom rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi, slobodna površina kao površina konstantnog tlaka poprima prema izrazu (198) oblik rotacijskog paraboloida

$$z = H_{\min} + \frac{\omega^2}{2g} r^2, \quad (200)$$

gdje se z mjeri od dna posude.

Na rubu posude taj izraz daje

$$H_{\max} = H_{\min} + \frac{\omega^2}{2g} R^2. \quad (200a)$$

Prema jednadžbi kontinuiteta, masa fluida u stanju mirovanja $\varrho R^2 \pi H_0$ jednaka je masi fluida ispod rotacijske paraboloidne šupljine slobodne površine $\varrho R^2 \pi H_{\min} + \varrho \frac{1}{2} R^2 \pi (H_{\max} - H_{\min})$, pa primjenivši odnos (200a), slijedi

$$H_{\min} = H_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (200b)$$

$$H_{\max} = H_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Kad započne izljevanje fluida preko ruba posude ili nakon što je slobodna površina taknula dno posude, ti izrazi prestaju biti valjani (sl. 51).

Ako se cijev (sl. 52b) prije okretanja napuni fluidom do koljena između njezina horizontalnog i vanjskoga vertikalnog dijela, okretanjem cijevi fluid se može podići do proizvoljne visine H . Kutna brzina, koja odgovara visini H , prema izrazu (198b) iznosi

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{R}. \quad (201)$$

Na sl. 52c prikazan je oblik slobodne površine goriva u rezervoaru vozila (npr. aviona, automobila ili motornog čamca) koje se giba brzinom v po horizontalnoj kružnoj putanji poluprečnika R . Kut nagiba θ slobodne površine prema horizontalni određen je kutom tangente na rotacijski paraboloid (198b)

$$\theta = \arctan \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)_{r=R} \right] = \arctan \left(\frac{\omega^2 R}{g} \right) = \arctan \left(\frac{v^2}{gR} \right), \quad (202)$$

gdje je primijenjen odnos $\omega = v/R$.

Zbog malih dimenzija rezervoara prema polumjeru putanje R , taj se problem može svrstati u gibanje čitavog fluida konstantnom centripetalnom akceleracijom

$$\begin{aligned} a_r &= -\omega^2 R = -\frac{v^2}{R}, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (202a)$$

Pri takvu gibanju, prema izrazu (188e), nagib slobodne površine prema horizontali iznosi

$$\theta = \arctan\left(-\frac{a_r}{g}\right) = \arctan\left(\frac{v^2}{gR}\right). \quad (202b)$$

što je jednako izrazu (202).

Na horizontalni poklopac $A-A$ cilindrične posude (sl. 52d) djeluje tlak rotirajućeg fluida. Prema izrazima (197) i (130) na poklopac s unutrašnje strane djeluje pretlak

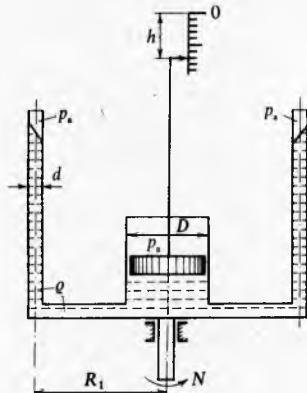
$$p(r) - p_a = \rho g h + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2, \quad (203)$$

pa je sila pretlaka na poklopac

$$F_p = \int_0^R [p(r) - p_a] 2\pi r dr = \rho g R^2 \pi \left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right), \quad (203a)$$

gdje je zanemaren odbitak sile pretlaka preko male površine cjevčice u središtu poklopcu.

Vidi se da je sila F_p jednaka težini fiktivnog fluida u kružnom cilindričnom prostoru polumjera R , koji je s donje strane omeđen ravninom poklopcu, a s gornje rotacijskim paraboloidom $p = p_a = \text{const}$. Vrh tog paraboloida je u točki O_N na slobodnoj površini u cjevčici, a njegova visina na rubu prostora jest $\omega^2 R^2/(2g)$ (sl. 52d).



Sl. 53. Tahometar na principu rasporeda tlaka u fluidu koji rotira konstantnom kutnom brzinom oko vertikalne osi

Na sl. 53 prikazan je tahometar za mjerjenje broja okretaja u jedinici vremena. Tahometar radi na principu rasporeda tlaka u fluidu koji čitav rotira konstantnom kutnom brzinom oko vertikalne osi. Ako kazaljka tahometra pokazuje nulu kad uređaj miruje, lako se dokaže da između kutne brzine okretanja ω i spuštanja kazaljke h postoji odnos

$$\omega = C\sqrt{h}, \quad (204)$$

gdje je C karakteristika uređaja dana izrazom

$$C = \sqrt{\frac{2g \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \right]}{R_1^2 - \frac{1}{8} D^2}}, \quad (204a)$$

s dimenzijom $[C] = L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$, dakle $[C]_{SI} = m^{-\frac{1}{2}} s^{-1}$, tako da je uz $[h]_{SI} = m$, ω u rad/s.

Broj okretaja u minuti N iznosi pri tome

$$N = \frac{30}{\pi} \omega = \frac{30}{\pi} C \sqrt{h}. \quad (204b)$$

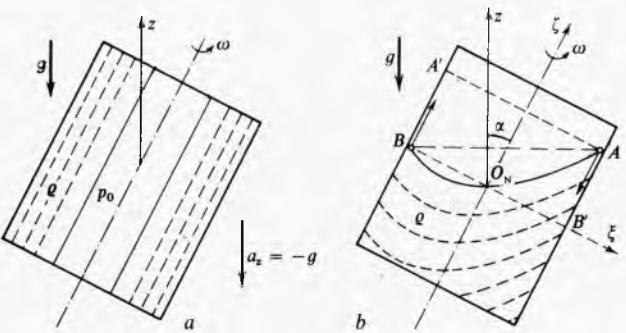
Ako spremnik koji rotira zajedno s nestlačivim fluidom istodobno i slobodno pada (ili se nalazi u bestezinskom stanju), djelovanja gravitacijske masene sile $-g\vec{k}$ i inercijalne masene sile $-a_z\vec{k} = +g\vec{k}$ međusobno se poništavaju, pa je raspored tlaka u fluidu, prema izrazu (197), dan sa

$$p(r) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2, \quad (205)$$

gdje je p_0 konstantan tlak uzduž osi rotacije.

U polju tlaka definiranog izrazom (205) izobare su površine kružnih cilindara koaksijalnih s osi vrtnje. Pri tom je orien-

tacija osi rotacije potpuno proizvoljna i nije potrebno da je vertikalna. Ako je spremnik djelomično ispunjen kapljevinom, slobodna površina će također primiti oblik koaksijalnog cilindra (sl. 54a).

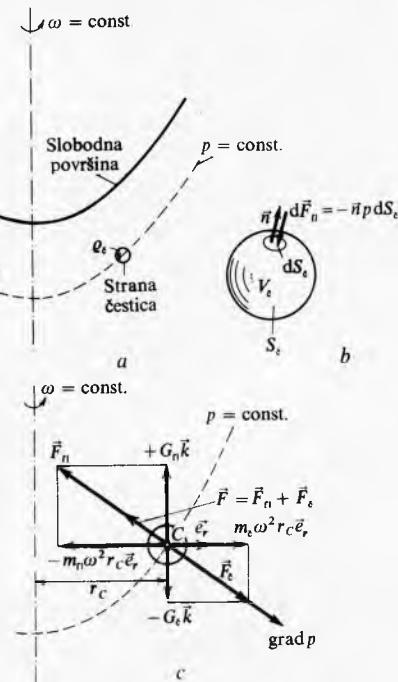


Sl. 54. Rotacija nestlačivog fluida oko kose osi. a izobare u nestlačivu fluidu koji rotira kao kruto tijelo u bestezinskom stanju, b izobare u nestlačivu fluidu koji rotira u gravitacijskom polju

Situacija se, međutim, bitno mijenja pri rotaciji nestlačivog fluida oko kose osi u gravitacijskom polju (sl. 54b). Lako je dokazati da bi se primjenom razvijenih matematičkih izraza definirala kontura slobodne površine u ravnini $O_N\xi$ jednadžbom

$$\zeta = (\tan \alpha) \xi + \frac{\omega^2}{2g \cos \alpha} \frac{1}{\xi^2}, \quad (206)$$

gdje je α kut između vertikalne osi $O_N\xi$ i kose osi rotacije $O_N\xi$. Ali se također pokazuje da bi se pri takvoj slobodnoj površini čestica koja se u određenom trenutku nalazi u točki A , nakon zakreta od pola okretaja našla u točki B , i da bi se čestica prvobitno u B našla u A . I sve ostale čestice fluida doživjele bi pomake, i to relativno prema spremniku i relativno jedne prema drugima. Prema tome, to više nije stanje relativnog mirovanja, već je to strujanje fluida, na koje se ne može primijeniti razvijena teorija relativnog mirovanja. Stoga ni izraz (206) ni ucrtane izobare na sl. 54b nemaju nikakav realni smisao.



Sl. 55. Sila uzgona u fluidu koji rotira kao cjelina

Na tijelo uronjeno u fluid koji čitav rotira, uz silu Arhimedova uzgona, pojavit će se i dodatna uzgonska sila zbog komponente gradijenta tlaka uzrokovane centrifugalnom inercijalnom silom. Na sl. 55a prikazana je strana homogena čestica gustoće

ϱ_c , koja se potpuno uključila u rotacijsko gibanje fluida gustoće ϱ_n . Djelovanje fluida na stranu čestice manifestira se elementarnim silama tlakova (sl. 55b)

$$d\vec{F}_n = -\vec{n}pdS_c \quad (207)$$

preko površine čestice S_c . Rezultanta elementarnih sila tlaka jest

$$\begin{aligned} F_n &= -\int_{S_c} \vec{n}pdS_c = -\int_{V_c} \text{grad } p dV = -\int_{V_c} \varrho_n \vec{f} dV_c = \\ &= -\int_{V_c} (-\varrho_n g \vec{k} + \varrho_n \omega^2 r \vec{e}_r) dV_c, \end{aligned} \quad (207a)$$

ili

$$\vec{F}_n = +G_n \vec{k} - m_n \omega^2 r_c \vec{e}_r, \quad (207b)$$

gdje je za nestlačivi fluid: $G_n = \varrho_n g V_c$ absolutna vrijednost težine fluida istisnutog česticom, $+G_n \vec{k}$ hidrostatski ili Arhimedov uzgon, $m_n = \varrho_n V_c$ masa fluida istisnutog česticom, r_c udaljenost težišta volumena čestice V_c od osi rotacije, a $-m_n \omega^2 r_c \vec{e}_r$ dodatna sila uzgona zbog centrifugalne komponente gradijenta tlaka, koja djeluje prema osi rotacije i općenito ne prolazi kroz težište volumena C (sl. 55c). Izraz (207a) je razvijen pomoću integralnog poučka Gauss-Ostrogradskoga (46b) i izraza (193) za rezultantnu masenu силу.

Dalja sudbina čestice zavisi od njene mase. Naime, u gravitacijskom Zemljinu polju i u polju centrifugalne sile na masu čestice djeluje rezultantna sila

$$\vec{F}_c = -G_c \vec{k} + m_c \omega^2 r_c \vec{e}_r, \quad (207c)$$

gdje je za homogenu česticu: $G_c = \varrho_c g V_c$ absolutna vrijednost težine čestice, a $m_c = \varrho_c V_c$ masa čestice. Rezultantno djelovanje na česticu jednako je zbroju sila (207b) i (207c), sl. 55c,

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_c = (G_n - G_c) \vec{k} - (m_n - m_c) \omega^2 r_c \vec{e}_r. \quad (208)$$

Iz toga je očito da će se čestica lakša od fluida, $\varrho_n > \varrho_c$, gibati prema gore i prema osi vrtnje te će isplivati na slobodnu površinu (sl. 55c). Obratno, ako je $\varrho_n < \varrho_c$, čestica će padati prema dolje i udaljavat će se od osi vrtnje.

Na tom načelu djeluju centrifugalni separatori. Tako u centrifugama za proizvodnju maslaca, zrnca formiranih maslaca specifički su lakši od okolišne vodenaste sirutke, pa isplivavaju na slobodnu površinu i skupljaju se u blizini osi centrifuge.

Pri rotaciji manjih masa stlačivog fluida može se zanemariti utjecaj gravitacije, pa diferencijal tlaka (195) poprima oblik

$$dp = \varrho \omega^2 r dr. \quad (208a)$$

Za integraciju tog izraza potrebno je poznavati odnos tlaka i gustoće, koji zavisi od termodinamičkog procesa.

Za savršeni plin, koji slijedi zakon jednadžbe stanja (8), i za izotermički proces odnos gustoće i tlaka dan je izrazom

$$\varrho = \frac{p}{R T_0}, \quad (209)$$

gdje je T_0 konstantna temperatura plina. Ako se uvrsti taj odnos u diferencijal tlaka (208), dobiva se nakon integracije

$$p(r) = p_0 \exp\left(\frac{\omega^2}{2 R T_0} r^2\right), \quad (209a)$$

gdje je p_0 tlak na osi rotacije fluida. Toj promjeni tlaka odgovara promjena gustoće

$$\varrho(r) = \varrho_0 \exp\left(\frac{\omega^2}{2 R T_0} r^2\right). \quad (209b)$$

Slično se dokaže da je za općeniti politropski proces $p/\varrho^n = p_0/\varrho_0^n$ plina u jednolikoj rotaciji

$$p(r) = \frac{1}{p_0^{n-1}} \left| p_0 + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \varrho_0 \omega^2 r^2 \right|^{\frac{n}{n-1}}, \quad (209c)$$

gdje su p_0 i ϱ_0 tlak i gustoća uzduž osi rotacije.

KINEMATIKA FLUIDA

Kinematika fluida opisuje gibanje fluida u vremenu i prostoru. Ako se pode od hipoteze o fluidu kao kontinuumu ili neprekidnoj sredini, omogućen je i takav opis koji vremenski i prostorno promjenljivim skalarnim, vektorskim i tenzorskim poljima odjednom zahvaća i cijelovito ponašanje fluida i ponašanje pojedinih njegovih čestica. Kinematika fluida ne ulazi u uzroke gibanja, zato u razmatranjima i opisima ne uzima u obzir sile. Ona klasificira strujanja prema njihovim osobitostima i razvija fizikalno-matematički aparat za njihovo opisivanje. Premda je tim aparatom i sama u stanju generirati različite modele strujanja, potpuna iskoristivost kinematike fluida realizira se njenom ulogom i primjenom u dinamici fluida.

Prostor i vrijeme u Newtonovoj mehanici. Prostor je skup točaka kojih je položaj određen koordinatama. U Euklidovu se prostoru sve točke mogu zadati koordinatama samo jednog kartezijskog koordinatnog sustava. U takvu prostoru je udaljenost između dviju točaka $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ dana formулом

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (210a)$$

a kvadrat udaljenosti dviju bliskih točaka

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (210b)$$

Prostor vezan uz ravlinu dvodimenzionalni je Euklidov prostor. Prostor vezan uz sfersku površinu nije Euklidov prostor, ali se u neposrednom okolišu točke na sferskoj površini može podići kartezijski koordinatni sustav, pa se i takav prostor može smatrati Euklidovim.

Newtonovi zakoni gibanja formulirani su u Euklidovu prostoru. Ti zakoni imaju najjednostavniji oblik u inercijalnim sustavima. Takvih sustava je beskonačno mnogo i u svima su svojstva prostora i vremena jednaka i jednaki su svi zakoni mehanike. Ta eksperimentalno provjerena činjenica sadržaj je Galilejevih načela relativnosti.

Newtonova mehanika također je temeljena na apsolutnosti vremena. Naime, ako se jedan koordinatni sustav O u kojem neka točka ima radijektor \vec{r} giba translatory i pravocrtno konstantnom brzinom \vec{u}_0 relativno prema drugom koordinatnom sustavu u kojem ta ista točka ima radijektor \vec{r}_1 , tada je tok vremena u tim dvama sustavima jednak, tj.

$$t_1 = t, \quad (211a)$$

a radijektori \vec{r}_1 i \vec{r} povezani su Galilejevom transformacijom

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{u}_0 t + \vec{r}_{10}, \quad (211b)$$

gdje je \vec{r}_{10} radijektor ishodišta O u sustavu O_1 u početnom vremenskom trenutku $t = 0$.

Jednakost (211a) je pretpostavka apsolutnosti vremena i valjana je za brzine gibanja koje su mnogo manje od brzine svjetlosti. Kao što je poznato, u teoriji relativnosti ta pretpostavka nije valjana. U sustavima povezanim Galilejevom transformacijom (211b) zakoni Newtonove mehanike su identičnog oblika.

Strujanje fluida određuje se s obzirom na određeni koordinatni sustav. Premda u mehanici fluida važnu primjenu imaju različiti krivocrtni koordinatni sustavi, u ovom su članku teoretski izvodi formulirani ili u općem vektorskem obliku, nezavisnom od određenoga koordinatnog sustava, ili u pravokutnom kartezijskom (Descartesovu) sustavu $Oxyz$. Ovom se sustavu, osim jednostavnosti, ne pridaju nikakve druge prednosti, pa će se dati i formule kojima se pojedine formulacije mogu prikazati i u općim ortogonalnim krivocrtnim koordinatama q_1, q_2, q_3 .

Mehanika fluida se mnogo oslanja na diferencijalni i integralni račun. Stoga se pretpostavlja da su funkcije koje opisuju gibanje fluida konačne i neprekidne i da imaju konačne parcijalne derivacije po svojim argumentima. Gibanja fluida podvrgnuta tim ograničenjima nazivaju se neprekidnim gibanjima. U takvu gibanju fluida relativna brzina dviju susjednih čestica bit će uvijek beskonačno malena, pa će i duljina njihove spojnica ostati uvijek istog reda veličine.