

Ako se pretpostavi da je fluid nestlačiv, tj.  $\rho = \text{const.}$ , izraz (631c), nakon jednostavnih operacija, prelazi u Karmanov impulsni integralni odnos za ravninski granični sloj

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{v_\delta} \frac{dv_\delta}{dx} \frac{2\delta_2 + \delta_1}{\delta_2} = \frac{\tau_w}{\rho v_\delta^2}, \quad (631d)$$

gdje je

$$\delta_1 = \delta_1(x) = \int_0^{\delta(x); \infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\delta}\right) dy \quad (631e)$$

debljina istisnuća, koja daje iznos za koji je vanjsko potencijalno strujanje istisnuto prema van zbog smanjenja brzine strujanja u graničnom sloju (uobičajena je i oznaka  $\delta^*$ );

$$\delta_2 = \delta_2(x) = \int_0^{\delta(x); \infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\delta}\right) \frac{v_x}{v_\delta} dy \quad (631f)$$

impulsna debljina graničnog sloja, koja karakterizira gubitak količine gibanja u graničnom sloju u usporedbi s količinom gibanja potencijalnog strujanja (uobičajene su i oznake  $\delta^{**}$  i  $\vartheta$ ).

Alternativne gornje granice  $\infty$  integrala u izrazima (631e) i (631f) odnose se na tzv. asimptotski granični sloj.

Pohlhausen je primjerom ilustrirao opći postupak primjene Karmanove jednadžbe (631d). U Pohlhausenovom se postupku pretpostavi opći oblik bezdimenzijskog profila brzine u graničnom sloju kao jednoparametarske obitelji sličnih krivulja, gdje je parametar

$$A = A(x) = \frac{\delta^2 dv_\delta}{v dx}. \quad (632)$$

Na pretpostavljeni profil brzine postavi se što je moguće više rubnih uvjeta za  $y = 0$  i za  $y = \delta(x)$ , ili pri asimptotskom profilu brzine za  $y \rightarrow \infty$ . Ti se uvjeti za  $y = 0$  dobivaju iz Prandtlovih jednadžbi (625a) i njenih derivacija prvog i viših redova, a za  $y = \delta(x)$  ili  $y \rightarrow \infty$  ti se uvjeti svode na postizanje što boljeg stupnja izgladenosti s kojim taj profil brzine ulazi u profil konstantne brzine vanjskog strujanja. Pomoću tako obrađenog pretpostavljenog profila brzine proračunaju se veličine  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\tau_w$ , koje također ovisi o izabranom parametru, i kad se uvrste u Karmanovu jednadžbu (631d), dobiva se obična diferencijalna jednadžba u traženom parametru, npr. u Pohlhausenovom parametru (632). Rješenje te diferencijalne jednadžbe određuje taj parametar, a njime je određena i jednoparametarska obitelj profila brzine u graničnom sloju i sve ostale značajke graničnog sloja  $\delta(x)$ ,  $\delta_1(x)$ ,  $\delta_2(x)$  i  $\tau_w$ .

LIT.: H. Lamb, *Hydrodynamics*. Dover Publications, New York 1945. — K. Voronjec, N. Obradović, *Mehanika fluida*. Građevinska knjiga, Beograd 1965. — L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*. Macmillan and Co., London 1968. — R. H. Sabersky, A. J. Acosta, E. G. Hauptmann, *Fluid flow*. Macmillan Publishing Co., New York 1971. — M. Ridanović, *Hidrodinamika*. Zavod za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo 1972. — V. L. Streeter, E. B. Wylie, *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Book Co., New York 1975. — Л. И. Седов, *Механика сплошной среды I/II*. Наука, Москва 1976. — R. L. Daugherty, J. B. Franzini, *Fluid mechanics with engineering applications*. McGraw-Hill Book Co., New York 1977. — Л. Г. Лойцунский, *Механика жидкости и газа*. Наука, Москва 1978.

M. Fancev

**MEHANIKA KONTINUUMA**, dio mehanike koji proučava makroskopsko gibanje čvrstih, tekućih i plinovitih tijela. Mehanika kontinuuma ne uzima diskretnu, atomsku strukturu tvari, nego, nasuprot tome, uvodi pojam neprekidne sredine ili materijalnog kontinuuma. Prema tom pristupu pretpostavlja se da tvar neprekidno i potpuno ispunjava prostor koji zauzima tijelo. Pojam kontinuuma dopušta da se definiraju

naprezanje, deformacija i ostale veličine u geometrijskoj točki bez volumena pomoću limesa (graničnog prijelaza) na sličan način kako se uvodi pojam derivacije u infinitezimalnom računu. To omogućuje primjenu tog računa u mehanici kontinuuma. Makroskopski pristup proučavanju gibanja deformabilnih tijela zapravo je statistički pristup koji analizira prosječne vrijednosti fizikalnih veličina za više čestica, umjesto da analizira gibanje svake pojedine čestice.

Iako ne uzima atomsku strukturu tijela, mehanika kontinuuma omogućuje predviđanje ponašanja realnih tijela. Ta se predviđanja vrlo dobro slažu s mjerenjem, iako ponekad takav pristup ne daje dobre rezultate. Takvi su npr.: pojava pukotina pri cikličkom naprezanju (zamor materijala), problemi aerodinamike pri vrlo velikim visinama gdje je zrak vrlo rijedak, gibanje tekućine pri vrlo velikom gradijentu brzina, koncentracija naprezanja oko oštih uglova itd.

Mehanika kontinuuma radi s fizikalnim veličinama koje ne ovisi o izboru koordinatnog sustava, ali koje se najlakše opisuju pomoću komponenata u određenom koordinatnom sustavu. Iako fizikalna veličina ne ovisi o izboru sustava, njene komponente ovisi. Takve veličine su tenzori. Ako se znaju komponente tenzora za jedan koordinatni sustav, mogu se pomoću izraza za transformaciju odrediti njegove komponente bilo za koji drugi sustav. Zakoni mehanike kontinuuma opisuju se tenzorskim jednadžbama koje vrijede u svim koordinatnim sustavima. Ta je invarijantnost tenzorskih izraza glavna prednost primjene tenzorskog računa u mehanici kontinuuma.

Historijski, mehanika kontinuuma počela se razvijati kao nekoliko odvojenih grana mehanike: hidromehanika s aeromehanikom i mehanika elastičnih tijela. Danas mehanika kontinuuma, u užem smislu, obuhvaća sljedeće grane: mehaniku fluida, teoriju elastičnosti, teoriju plastičnosti, teoriju viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Teorija viskoelastičnosti i viskoplastičnosti obuhvaća prve tri grane kao posebne slučajeve. U klasičnoj mehanici kontinuuma pretpostavlja se da su materijali izotropni, homogeni i nepolarni. Materijal je izotropan ako su mu svojstva u svim smjerovima jednaka, inače je anizotropan. Ako su svojstva tijela u svim točkama jednaka, materijal je homogen, inače je nehomogen. U mikropolarnim materijalima uz obična naprezanja pojavljuju se i spregovi naprezanja, što uvjetuje da tenzor naprezanja postaje nesimetričan.

U širem smislu, mehanika kontinuuma obuhvaća i termodinamiku i magnetohidrodinamiku, a osim materijalnih tijela proučava različita polja, kao npr. elektromagnetska polja, polja zračenja, gravitacijska polja i slično.

Neke zakonitosti mehanike kontinuuma bile su poznate još u starom vijeku, npr. Arhimedov zakon. G. Galilei je 1638. proučavao problem savijanja štapa, a R. Hooke 1660. formulirao je po njemu nazvan zakon. E. Mariotte je Hookeov zakon primijenio na Galilejev problem savijanja štapa. C. L. Navier je 1821. izveo opće jednadžbe gibanja elastičnog tijela, koje je G. G. Stokes proširio i na tekućine. Brži razvoj mehanike kontinuuma započeo je nakon što je A. L. Cauchy 1822. definirao pojam naprezanja i deformacije. Za razvoj pojedinih grana mehanike kontinuuma zaslužni su I. Newton, J. L. Lagrange, L. Euler, J. i D. Bernoulli, L. da Vinci, Th. Young, Ch. Huyghens, B. Pascal, M. V. Lomonosov, J. L. Poiseuille, O. Reynolds, L. Prandtl, N. J. Žukovski, B. de St. Venant i mnogi drugi.

Braća Eugene i Francois Cosserat uveli su 1907. pojam mikropolarnog kontinuuma, dok je Sudria 1935. dalje razvio teoriju mikropolarnog kontinuuma uz upotrebu vektorskog računa.

U posljednje vrijeme istraživanja su usmjerena na formuliranje što sveobuhvatnijih konstitutivnih jednadžbi, u prvom redu anizotropnih, viskoelastičnih i mikropolarnih materijala. Na tom području rade mnogi istraživači: C. Truesdell, W. Noll, R. Toupin, A. C. Eringen, W. Prager, P. G. Hodge, H. Parkus, A. A. Iljušin, L. I. Sedov, W. Nowacki, R. Stojanović i drugi.

## ELEMENTI TENZORSKOG RAČUNA

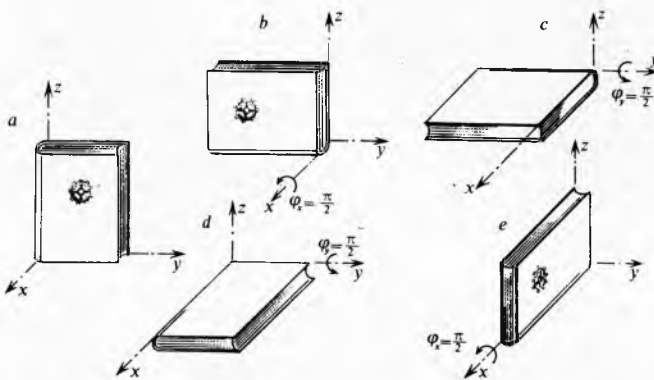
**Definicija tenzora.** U mehanici i drugim granama fizike postoje veličine kojima je za opisivanje potreban samo jedan podatak, npr.: masa, temperatura, volumen itd. Te se veličine zovu skalari. Nasuprot tome, da bi se opisala brzina, sila, jakost magnetskog polja i slične usmjerene veličine, potrebna su tri podatka. To mogu biti tri komponente ili, npr., apsolutna veličina i dva kuta koja određuju smjer. Te veličine su vektori. Ako je za opisivanje neke veličine potrebno devet podataka, veličina može biti tenzor drugog reda. Takve veličine su npr. tenzor naprezanja, tenzor deformacije, tenzor inercije itd. Očito su, ako se promatra problem u ravnini, za definiranje vektora potrebna samo dva podatka, dok su za definiranje tenzora drugog reda potrebna četiri podatka. U jednodimenzionalnom prostoru gubi se razlika između skalara, vektora i tenzora, jer je za svaki od njih dovoljan samo po jedan podatak. Pojam tenzora se poopćuje, pa se tako skalari još nazivaju i tenzorima

nultog reda, jer je za njihovo opisivanje potrebno  $3^0 = 1$  podatak, a vektori tenzorima prvog reda, jer je za njihovo opisivanje potrebno  $3^1 = 3$  podatka. Za opisivanje tenzora drugog reda potrebno je  $3^2 = 9$  podataka. Osim tenzora drugog reda, u fizici se upotrebljavaju i tenzori trećeg, četvrtog i viših redova. Općenito tenzor  $n$ -tog reda ima  $3^n$  komponenta. U tablici 1 prikazani su tenzori različitih redova.

Tablica 1  
KLASIFIKACIJA TENZORA

Red tenzora	Poseban naziv	Broj komponenta		Primjer	
		u prostoru	u ravnini	Oznaka	Naziv
0	Skalar	$3^0 = 1$	$2^0 = 1$	$m$ $T$	Masa Temperatura
1	Vektor	$3^1 = 3$	$2^1 = 2$	$v, v_i$ $F, F_i$	Brzina Sila
2	Tenzor	$3^2 = 9$	$2^2 = 4$	$\sigma, \sigma_{ij}$ $I, I_{ij}$	Naprezanje Tromost
3		$3^3 = 27$	$2^3 = 8$	$h, h_{ijk}$	Tenzor piezoelektričnosti
4		$3^4 = 81$	$2^4 = 16$	$C_{ijkl}$	Tenzor elastičnosti

Broj podataka, odnosno komponenta nije isključivo mjerodavan za procjenu da li je neka veličina tenzor ili nije. Tako npr. kut rotacije  $\varphi$  jest usmjerena veličina kojoj se pravac podudara s osi rotacije, apsolutna vrijednost je određena iznosom rotacije, a smisao je određen po pravilu desne ruke. Međutim, kut rotacije nije vektor u užem smislu, jer za njega ne vrijedi uobičajena vektorska algebra. Tako npr. za kut rotacije ne vrijedi zakon komutacije pri zbrajanju. To se jednostavno može provjeriti pomoću primjera na sl. 1. Ako se knjiga (sl. 1a) okrene oko osi  $x$  za  $\pi/2$ , a zatim oko osi  $y$  za  $\pi/2$ , doći će u položaj prikazan na slici 1c. Međutim, ako se knjiga okrene prvo oko osi  $y$  za  $\pi/2$ , pa zatim oko  $x$  za  $\pi/2$ , knjiga je u položaju prema slici 1e. Kako se vidi, položaji se 1c i 1e ne podudaraju, tj. ne vrijedi zakon komutacije.



Sl. 1. Za kut rotacije ne vrijedi zakon komutacije. Ako se knjiga na sl. 1a okrene za  $\pi/2$  oko osi  $x$ , a zatim za  $\pi/2$  oko osi  $y$ , doći će u položaj prema sl. 1c. Ako se redosljed rotacija izmijeni, knjiga će doći u položaj 1e

Isto tako modul elastičnosti  $E$  ili Poissonov koeficijent  $\nu$  podsjećaju na skalare, ali će se poslije vidjeti da su to rudimenti (ostaci) tenzora elastičnosti  $C_{ijkl}$ , koji je tenzor četvrtog reda. Tenzori se označuju poludebelim kosim slovima. Npr. tenzor naprezanja  $\sigma$  ima komponente  $\sigma_{ij}$ , tenzor inercije  $I$  komponente  $I_{ij}$ , vektor  $v$  komponente  $v_i$  itd. Iznimno se skalari kao tenzori nultog reda označuju običnim kosim slovima. Vektori ili tenzori prvog reda često se označuju strelicom, npr.  $v \equiv \vec{v}$ . U literaturi je uobičajeno da se kaže tenzor  $T_{ijk}$ , a misli se na tenzor  $T$  koji ima komponente  $T_{ijk}$ . U daljem izlaganju upotrebljavat će se samo kartezijski tenzori, tj. tenzori kojima su komponente izražene u pravokutnim koordinatama.

Da bi se utvrdilo da li je neka veličina tenzor, treba vidjeti kako se njene komponente mijenjaju ili transformiraju pri rotaciji koordinatnog sustava. Temperatura, masa i drugi skalari imaju istu vrijednost neovisno o rotaciji koordinatnog sustava. Razmatrat će se jednadžbe za transformaciju tenzora prvog i tenzora drugog reda, i to radi jednostavnosti samo u ravnini. U tenzorskom računu je prikladno koordinatne osi označiti sa  $x_1, x_2$  i  $x_3$  umjesto sa  $x, y, z$ . Komponente vektora imaju indekse 1, 2 i 3 umjesto  $x, y, z$ . Stari se koordinatni sustav označuje sa  $Ox_1x_2x_3$ , a novi ili transformirani koordinatni sustav označivat će se s  $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ , (čita se iks jedan potez, iks dva potez itd.). Komponente vektora i tenzora koje se odnose na transformirani sustav imaju potez, dok se komponente bez poteza odnose na stari sustav, kako je prikazano na slici 2. Komponente vektora  $v$  u starom sustavu  $Ox_1x_2$  iznose

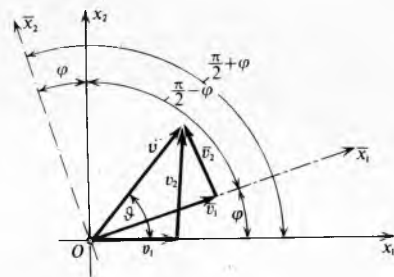
$$v_1 = v \cos \vartheta \quad v_2 = v \sin \vartheta, \quad (1)$$

a komponente u novom sustavu  $O\bar{x}_1\bar{x}_2$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v \cos(\vartheta - \varphi) = v \cos \vartheta \cos \varphi + v \sin \vartheta \sin \varphi \\ \bar{v}_2 &= v \sin(\vartheta - \varphi) = v \sin \vartheta \cos \varphi - v \cos \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Ako se uvrsti (1) u (2), dobije se:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi, \\ \bar{v}_2 &= -v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$



Sl. 2. Transformacija vektora pri rotaciji koordinatnog sustava

Jednadžba (3) predstavlja zakon transformacije komponenta vektora pri rotaciji koordinatnog sustava. Pomoću (3) mogu se odrediti komponente  $\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$  u novom sustavu, ako su poznate komponente  $v_1$  i  $v_2$  u starom sustavu, i kut  $\varphi$  za koji je novi sustav  $O\bar{x}_1\bar{x}_2$  zarotiran prema starom sustavu. Umjesto  $\sin \varphi$  i  $\cos \varphi$  u jednadžbi (3) prikladno je upotrijebiti kosinus kutova između novih i starih osi, koji se označuju sa  $a_{ij}$ . Koeficijenti  $a_{ij}$  definirani su na sljedeći način

$$a_{ij} = \cos(\angle \bar{x}_i, x_j) \quad i, j = 1, 2 \text{ ili } 3. \quad (4)$$

Tako se kosinus kuta između osi  $\bar{x}_2$  i  $x_1$  označuje sa  $a_{21}$  itd. Za ravninu (dvije dimenzije) (sl. 2) koeficijenti  $a_{ij}$  iznose

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\angle \bar{x}_1, x_1) = \cos \varphi, \\ a_{12} &= \cos(\angle \bar{x}_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$a_{21} = \cos(\angle \bar{x}_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi,$$

$$a_{22} = \cos(\angle \bar{x}_2, x_2) = \cos \varphi.$$

Ti koeficijenti tvore matricu transformacije

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pomoću (5) mogu se jednadžbe (3) preinačiti u

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2, \\ \bar{v}_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Jednadžbe (7) skraćeno se pišu u obliku

$$\bar{v}_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 \quad i = 1 \text{ ili } 2. \quad (8)$$

Ako se indeksu  $i$  u jednadžbi (8) dade vrijednost 1, dobije se prva jednadžba, a ako mu se dade vrijednost 2, dobije se druga jednadžba (7). Jednadžba (8) može se pisati kraće,

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} v_j, \quad (9)$$

odnosno, uz upotrebu Einsteinove konvencije, još kraće

$$v_i = a_{ij} v_j \quad i, j = 1 \text{ ili } 2. \quad (10)$$

Naime, prema Einsteinovu prijedlogu, treba izvršiti sumiranje po indeksu koji se u jednadžbi ponavlja dva puta. Takav indeks naziva se *ponovljenim* ili *nijemim* *indeksom*. Indeks koji se pojavljuje jednom, naziva se *slobodnim indeksom*.

**Indeksno zapisivanje.** Način na koji je napisana jednadžba (10) zove se indeksno zapisivanje. Indeksno zapisivanje uvelike smanjuje broj jednadžbi i broj članova u njima. Tako jednadžba (10) zamjenjuje dvije jednadžbe, svaku sa dva pribrojnika. Vidjet će se poslije da jedna jednadžba u indeksnom zapisivanju može zamijeniti mnogo jednadžbi, npr. jednadžba (132) zamjenjuje 81 jednadžbu, svaku s 81 pribrojanikom! Taj je način zapisivanja ne samo sažetiji nego i pregledniji. Pri indeksnom zapisivanju vrijede sljedeća pravila:

1. Indeksi na koje se odnose ta pravila označuju se malim latinskim slovima i poprimaju vrijednosti 1, 2 ili 3, ako drugačije nije naznačeno. Ti se indeksi ponekad zovu i *tenzorski indeksi*.

2. Indeks koji se pojavljuje jedanput u jednom pribrojaniku jednadžbe mora se pojaviti jedanput u svim pribrojanicima te jednadžbe. Taj se indeks zove *slobodni indeks*.

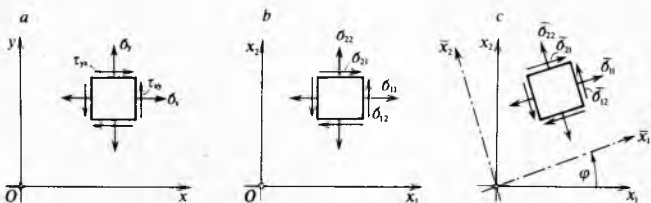
3. Indeks koji je dva puta ponovljen u jednom pribrojaniku ne mora se ponoviti u ostalim pribrojanicima iste jednadžbe, a zove se *ponovljeni indeks*. Po njemu se sumira od 1 do 3, ako nije drugačije označeno.

4. Slovo kojim je označen ponovljeni indeks smije se zamijeniti bilo kojim malim latinskim slovom koje još nije upotrijebljeno kao indeks u toj jednadžbi.

5. Indeks ne smije biti ponovljen tri ili više puta. Ako se u radu s indeksima to desi, onda je to greška.

6. Ako se želi da se na neki indeks ta pravila ne odnose, on se označuje na drugi način, npr. grčkim slovima, velikim latinskim slovima ili se indeks stavlja u zagradu ili na koji drugi način.

Kao primjer transformacije tenzora drugog reda prikazat će se tenzor naprezanja. Radi jednostavnosti uzet će se ravninsko stanje naprezanja. Na slici 3a upotrijebljene su oznake kao u nauci o čvrstoći. Na slici 3b isto stanje naprezanja prikazano je pomoću oznaka koje se upotrebljavaju u tenzorskom računu i mehanici kontinuuma. Slika 3c prikazuje naprezanje u istoj točki, ali za element koji se odnosi na novi sustav  $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ .



Sli. 3. Označavanje komponenata naprezanja

U nauci o čvrstoći izvode se jednadžbe za transformaciju komponenata naprezanja (v. *Nauka o čvrstoći*):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_y \sin^2 \varphi + \sigma_x \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy} \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Jednadžbe (11) u indeksnom zapisivanju glase:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \sigma_{11} a_{11}^2 + \sigma_{22} a_{12}^2 + \sigma_{12} a_{11} a_{12} + \sigma_{21} a_{12} a_{11}, \\ \bar{\sigma}_{22} &= \sigma_{11} a_{21}^2 + \sigma_{22} a_{22}^2 + \sigma_{12} a_{21} a_{22} + \sigma_{21} a_{22} a_{21}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12} &= \sigma_{11} a_{11} a_{21} + \sigma_{22} a_{12} a_{21} + \sigma_{12} a_{11} a_{22} + \sigma_{21} a_{12} a_{21}, \\ \bar{\sigma}_{21} &= \sigma_{11} a_{21} a_{11} + \sigma_{22} a_{22} a_{12} + \sigma_{12} a_{21} a_{12} + \sigma_{21} a_{22} a_{11}. \end{aligned} \quad (12)$$

Treća i četvrta jednadžba (12) jesu jednake, što proizlazi iz jednadžbe (5) i činjenice da je

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Jednadžbe (12) mogu se skraćeno pisati u obliku

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{i1} a_{j1} \sigma_{11} + a_{i1} a_{j2} \sigma_{12} + a_{i2} a_{j1} \sigma_{21} + a_{i2} a_{j2} \sigma_{22} \quad i = 1 \text{ ili } 2, \quad j = 1 \text{ ili } 2. \quad (13)$$

Ako se u (13) uvrsti  $i = 1, j = 1$ , dobit će se prva jednadžba (12). Uvrštenjem  $i = 2, j = 2$  dobit će se druga itd. Jednadžba (13), uz primjenu Einsteinove konvencije, može se skratiti tako da glasi

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}, \quad (14)$$

gdje su  $i, j$  slobodni, a  $p$  i  $q$  ponovljeni indeksi.

Jednadžbe (10) i (14) predstavljaju zakone transformacije vektora, odnosno tenzora drugog reda. One mogu poslužiti i za definiranje tenzora. Veličina koja je određena sa tri komponente  $v_i$ , koje se transformiraju prema (5), jest tenzor prvog reda ili vektor. Veličina određena sa devet komponenata, koje se transformiraju prema (14), jest tenzor drugog reda. Tako se definiraju i tenzori viših redova. Tako npr. tenzor četvrtog reda  $T_{ijkl}$  ima  $3^4 = 81$  komponentu, a transformira se prema zakonu

$$\bar{T}_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} T_{pqrs}. \quad (15)$$

Tenzor nultog reda ili skalar pri transformaciji ostaje nepromijenjen, tj.

$$\bar{S} = S, \quad (16)$$

gdje je  $S$  bilo koji skalar.

Poput vektora, transformiraju se i koordinate, tako je

$$\bar{x}_i = a_{ip} x_p, \quad (17)$$

što u razvijenom obliku glasi

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\ \bar{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\ \bar{x}_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Isto je tako

$$x_i = a_{pi} \bar{x}_p. \quad (19)$$

### Tenzorska algebra

**Zbrajanje.** Zbrajati i oduzimati mogu se samo tenzori istog reda. Zbraja se tako da se zbroje pripadne komponente. Zbrajanjem tenzora  $A_{ij}$  i  $B_{ij}$  dobije se tenzor  $C_{ij}$ , koji ima isti red kao i tenzori  $A_{ij}$  i  $B_{ij}$ , tj.

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \quad (20)$$

Tipične su komponente, npr.,  $C_{11} = A_{11} + B_{11}$ ,  $C_{23} = A_{23} + B_{23}$  itd.

**Množenje.** Međusobno se mogu množiti tenzori bilo kojih redova. Ako se pomnoži tenzor reda  $m$  i tenzor reda  $n$ , dobit će se tenzor reda  $m + n$ , npr. množenjem tenzora prvog reda  $A_i$  s tenzorom drugog reda  $B_{jk}$  dobit će se tenzor trećeg reda  $C_{ijk}$ ,

$$C_{ijk} = A_i B_{jk}. \quad (21)$$

Tipične su komponente, npr.,  $C_{111} = A_1 B_{11}$ ,  $C_{312} = A_3 B_{12}$  itd. *Dijeljenje* tenzora tenzorom nije definirano.

**Kontraktija** je operacija kojom se izjednačuju dva indeksa, pri čemu se red tenzora smanjuje za dva. Ako je  $T_{ijklm}$  tenzor petog reda, nakon kontraktije indeksa  $k$  i  $l$ , preći će u tenzor trećeg reda  $T_{ijkm} = T_{ijlm} = T_{ijsm}$ . Za ponovljeni indeks može se odabrati bilo koje slovo, osim slova  $i, j, m$ , koja su već upotrijebljena.

Zbrajanje, množenje i kontraktija jesu tenzorske operacije, što znači da se primjenom tih operacija na tenzorima dobiju opet tenzori.

**Kvocijentni zakon.** Ako se neki sustav brojeva  $m$ -tog reda pomnoži s tenzorom  $n$ -tog reda i pri tome dobije tenzor  $(m+n)$ -tog reda, sustav brojeva  $m$ -tog reda jest također tenzor  $m$ -tog reda. Ako su npr.  $B_{im}$  i  $C_{ijkim}$  tenzori drugog, odnosno petog reda, te ako vrijedi relacija

$$A_{ijk}B_{im} = C_{ijkim}, \quad (22)$$

tada je veličina  $A_{ijk}$  tenzor trećeg reda.

**Supstituirajući (Kroneckerov) tenzor**  $\delta_{ij}$  definiran je na sljedeći način:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

Matrica tog tenzora glasi

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Taj tenzor ima iste komponente u svim koordinatnim sustavima, pa se naziva još *izotropnim tenzorom*, tj.

$$\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij}. \quad (25)$$

Tenzor se naziva supstituirajućim, jer se pomoću njega može izvršiti zamjena indeksa, npr.

$$\delta_{ij}v_j = v_i, \quad (26)$$

što proizlazi iz

$$\delta_{ij}v_j = \delta_{i1}v_1 + \delta_{i2}v_2 + \delta_{i3}v_3.$$

Ako je  $i = 1$ ,  $\delta_{1j}v_j = v_1$ , jer je  $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$ . Za  $i = 2$ ,  $\delta_{2j}v_j = v_2$ , jer je  $\delta_{21} = \delta_{23} = 0$ . Isto tako je za  $i = 3$ ,  $\delta_{3j}v_j = v_3$ . Sve se tri jednadžbe skraćeno pišu:

$$\delta_{ij}v_j = v_i.$$

Još neki primjeri supstitucije jesu:

$$\delta_{ij}T_{jk} = T_{ik}, \quad \delta_{rs}T_{pqr} = T_{pqs}, \quad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}.$$

**Alternirajući tenzor**  $e_{ijk}$  definiran je na sljedeći način:  $e_{ijk} = +1$ , ako su  $i, j, k$  ciklička permutacija brojeva 1, 2, 3, tj.

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad (27)$$

$e_{ijk} = -1$ , ako su  $i, j, k$  anticiklička permutacija brojeva 1, 2, 3, tj.

$$e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1,$$

$e_{ijk} = 0$  u svim ostalim slučajevima.

I alternirajući tenzor ima jednake komponente u svim koordinatnim sustavima, tj. invarijantan je pri transformaciji koordinatnih osi.

Između tenzora  $e_{ijk}$  i  $\delta_{ij}$  vrijedi sljedeći odnos:

$$e_{ijk}e_{imk} = \delta_{ij}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{ji}. \quad (28)$$

**Skalarni produkt** dvaju vektora  $a \cdot b$  u indeksnom zapisivanju glasi:

$$a \cdot b = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (29)$$

**Vektorski produkt** vektora  $a$  i  $b$  jest vektor  $c$  kojemu su komponente određene izrazom

$$c_i = e_{ijk}a_j b_k. \quad (30)$$

U razvijenom obliku vektor  $c$  glasi:  $c = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)i_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i_3$ . Prema jednadžbama (30) i (27) vrijedi:

$$c_1 = e_{123}a_2 b_3 + e_{132}a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$c_2 = e_{231}a_3 b_1 + e_{213}a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$c_3 = e_{312}a_1 b_2 + e_{321}a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

tj. brojevi  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  podudaraju se s komponentama vektora  $c = a \times b$ .

**Simetrični i antisimetrični tenzori.** Tenzor bilo kojeg reda može biti simetričan ili antisimetričan s obzirom na bilo koja dva indeksa. Tako je tenzor  $T_{ijk}$  simetričan za indekse  $i$  i  $k$ , ako je

$$T_{ijk} = T_{kji}. \quad (31)$$

Tenzor je antisimetričan za indekse  $i$  i  $j$ , ako je

$$T_{ijk} = -T_{jik}. \quad (32)$$

Tenzor može biti simetričan ili antisimetričan za više parova indeksa istodobno. Svaki se tenzor 2. reda može rastaviti u simetričan i antisimetričan dio, npr.

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \quad (33)$$

gdje je

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad \text{simetrični, a} \quad (34)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad \text{antisimetrični dio.} \quad (35)$$

Produkt s kontrakcijom simetričnoga i antisimetričnog tenzora jednak je nuli, tj.

$$S_{ij}A_{ij} = 0. \quad (36)$$

**Simetrični tenzori drugog reda** veoma su važni u mehanici kontinuuma, pa će se navesti neka njihova svojstva. Tenzor drugog reda  $T_{ij}$  pridružuje svakom smjeru (definiranom jediničnim vektorom  $n_j$ ) neki vektor  $v_i$ , tj.

$$v_i = T_{ij}n_j. \quad (37)$$

Jednadžba (37) može se napisati u obliku

$$\lambda n_i = T_{ij}n_j, \quad (38)$$

gdje su  $n_i$  i  $n_j$  jedinični vektori, a  $\lambda$  je skalar.

Jednadžba (38) može se preinačiti u

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0, \quad (39)$$

odnosno

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0. \quad (40)$$

Jednadžba (40) predstavlja tri linearne jednadžbe sa tri nepoznanice, koje u razvijenom obliku glase:

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Netrivijalno rješenje sustava (41) postoji samo ako je determinanta sustava jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

Jednadžba predstavlja kubnu jednadžbu s nepoznicom  $\lambda$ . Naime, nakon razvoja determinante, dobije se

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (43)$$

gdje su  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  prva, druga, odnosno treća invarijanta simetričnog tenzora  $T_{ij}$ . Te se invarijante ne mijenjaju pri transformaciji koordinatnog sustava, tj. one su skalari. One su definirane jednadžbama:

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \\ &= T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{6}e_{ijk}e_{pqr}T_{ip}T_{jq}T_{kr} = \\ &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

Kubna jednadžba (42) ima tri realna rješenja  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  koja se nazivaju *glavnim vrijednostima* simetričnog tenzora  $T_{ij}$ . Svaka glavna vrijednost određena je jediničnim vektorom  $n_i$ , prema tome, postoje tri glavna pravca određena jediničnim vektorima  $n'_i$ ,  $n''_i$  i  $n'''_i$ . Ti se vektori mogu dobiti rješavanjem

sustava jednadžbi (41), uz uvjet da je

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (47)$$

Ako se u (41) uvrsti  $\lambda = \lambda_1$ , dobiju se komponente  $n_i$ . Za  $\lambda = \lambda_2$  dobiju se komponente  $n_i''$ , a za  $\lambda = \lambda_3$  komponente  $n_i'''$ . Glavne vrijednosti simetričnog tenzora ujedno su i ekstremne vrijednosti dijagonalnih komponenata, tj. jedna od njih je minimalna, a druga maksimalna. Izvandijagonalne komponente za glavne pravce jednake su nuli. Ako se kao koordinate osi odaberu glavni pravci, matrica simetričnog tenzora glasi:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

**Izotropni tenzori** jesu oni kojima se komponente ne mijenjaju pri transformaciji koordinatnog sustava. Vrlo su važni u mehanici kontinuuma, jer se pomoću njih opisuju svojstva izotropnih materijala.

Tablica 2  
IZOTROPNI TENZORI

Red tenzora	Opći oblik izotropnog tenzora
0	Svi skalari su izotropni
1	Nema izotropnog vektora
2	$\alpha \delta_{ij}$
3	$\alpha e_{ijk}$
4	$\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$

U tablici 2 prikazani su opći oblici izotropnih tenzora do četvrtog reda. Tu su  $\alpha, \beta, \gamma$  proizvoljni skalari. Tenzor trećeg reda  $\alpha e_{ijk}$  jest izotropan pri rotaciji koordinatnog sustava, ali nije pri zrcaljenju, tj. pri prijelazu od desnog na lijevi koordinatni sustav, pa se ne može u punom smislu smatrati izotropnim tenzorom.

**Tenzorska analiza**

U svakoj točki nekog područja koje obuhvaća kontinuum, fizikalne veličine, kao npr. temperatura, brzina, naprezanje itd., imaju određenu vrijednost koja se mijenja od točke do točke, a isto tako se mijenja u toku vremena. Tada se kaže da je to polje temperature, polje brzine, polje naprezanja itd. U tenzorskoj analizi razmatraju se skalarna, vektorska i općenito tenzorska polja.

**Deriviranje tenzora.** Ako se parcijalno derivira tenzor reda  $m$  po koordinatama  $x_i$ , dobije se tenzor reda  $m + 1$ . U indeksnom zapisivanju parcijalna derivacija označuje se zarezom iza indeksa, iza kojeg slijedi indeks koordinate po kojoj se derivira. Parcijalna derivacija može se označiti i tako da se pred veličinu koja se derivira stavi simbol  $\partial$  koji ima indeks koordinate po kojoj se derivira. Slijedi nekoliko primjera označavanja parcijalnih derivacija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &\equiv \partial_j v_i \equiv v_{i,j}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} &\equiv \partial_k \sigma_{ij} \equiv \sigma_{i,j,k}, \\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} &\equiv \partial_{jk} v_i \equiv v_{i,jk}. \end{aligned} \quad (48)$$

Primjeri *simboličkog zapisivanja* gradijenta, divergencije, rotora itd., koje je navedeno u prva dva stupca, i indeksnog zapisivanja, koje je navedeno u zadnja dva stupca:

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi &= \nabla \Phi && \text{odgovara } \Phi_{,i} = \partial_i \Phi, \\ \text{div } \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} && \text{odgovara } v_{i,i} = \partial_i v_i, \\ \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} && \text{odgovara } e_{ijk} v_{k,j} = e_{ijk} \partial_j v_k, \end{aligned} \quad (49)$$

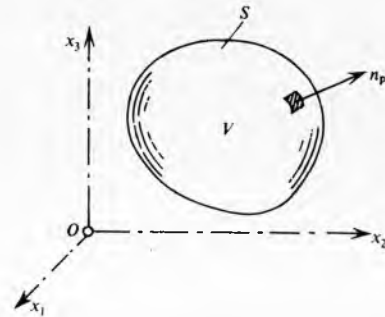
$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \nabla \cdot \nabla \Phi && \text{odgovara } \Phi_{,ii} = \partial_{ii} \Phi, \\ \nabla^4 \Phi &= \nabla^2 \cdot \nabla^2 \Phi && \text{odgovara } \Phi_{,iijj} = \partial_{iijj} \Phi. \end{aligned} \quad (49)$$

Primjeri deriviranja koordinata po koordinatama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} &= x_{i,j} = \delta_{ij}, \\ \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ik} x_k) = a_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = a_{ik} \delta_{ij} = a_{ij}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} &= \frac{\partial (a_{ki} \bar{x}_k)}{\partial \bar{x}_j} = a_{ki} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{x}_j} = a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji}. \end{aligned} \quad (50)$$

**Integriranje tenzora.** Integriranjem tenzora reda  $m$  prema smjeru koordinata dobiva se novi tenzor reda  $m + 1$ . Tako je  $\int T_{ij} dx_k$  tenzor trećeg reda. Integralni poučci koji vrijede u vektorskom računu, vrijede i u tenzorskom računu. Poučak Gaussa i Ostrogradskoga glasi:

$$\int_{(V)} T_{ijk...p} dV = \int_{(S)} n_p T_{ijk...} dS, \quad (51)$$

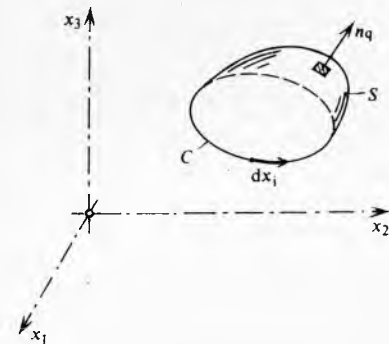


Sl. 4. Model za tumačenje poučka Gaussa i Ostrogradskoga

gdje je  $T_{ijk...}$  tenzor proizvoljnog reda,  $V$  volumen koji je obuhvaćen plohom  $S$ , a  $n_p$  vanjska normala (sl. 4). Stokesov poučak glasi:

$$\oint_{(C)} T_{ijk...} dx_i = \int_{(S)} n_q e_{qpi} T_{ijk...p} dS, \quad (52)$$

gdje je  $S$  zakrivljena ploha omeđena krivuljom  $C$ , a  $dx_i$  element tangente na krivulju  $C$  (sl. 5).



Sl. 5. Model za tumačenje Stokesova poučka

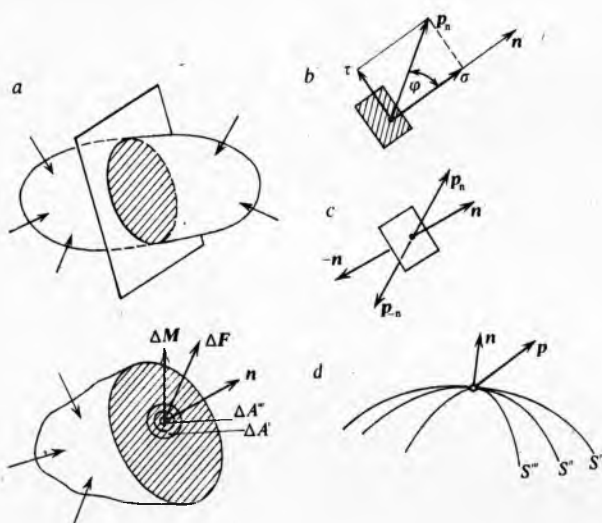
**TENZOR NAPREZANJA**

**Površinske i volumenske sile.** Vanjske sile koje djeluju na kontinuum ili njegov dio mogu se podijeliti na volumenske i površinske sile. Volumenske sile, kao npr. gravitacija, električne i magnetske sile, djeluju na daljinu i odnose se na jedinicu volumena. Površinske sile su kontaktne sile djelovanja između dvaju tijela ili između dvaju dijelova jednog tijela. Kad se uzme stvarna molekularna struktura tijela, vidi se da su i površinske sile, sile koje djeluju na daljinu. To su zapravo međumolekularne sile kratkog djelovanja.

Neka je mali element kontinuuma volumena  $V$  toliki da je još dovoljno velik da sadrži mnogo čestica (atoma i molekula). Rezultanta svih sila koje djeluju na daljinu na čestice unutar dijela volumena  $\Delta V$  neka je  $F_v$ . Volumenska sila  $f$  koja djeluje na jedinicu volumena definirana je jednadžbom

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_v}{\Delta V} \quad (53)$$

Ta definicija pretpostavlja prešutno da granični prijelaz definiran jednadžbom (53) postoji i da njegova vrijednost ne ovisi o načinu kako  $\Delta V$  teži prema nuli, tj. prema točki ( $\Delta V$  ne smije težiti prema nuli tako da prelazi u površinu ili krivulju).



Sl. 6. Model za definiranje vektora naprezanja

Slika 6 prikazuje dio tijela koje je zamišljeno da je presječeno ravninom na dva dijela. Dio presjeka površine  $A$  ima vanjsku normalu  $n$ . Na taj dio presjeka odsječeni desni dio tijela djeluje silama koje imaju rezultantu  $\Delta F$  i rezultirajući moment  $\Delta M$ . Srednji ili prosječni vektor naprezanja na dijelu presjeka  $\Delta A$  iznosi

$$p_{sr} = \frac{F}{A},$$

dok je srednji vektor momenta naprezanja

$$m_{sr} = \frac{M}{A}.$$

Ako sad  $\Delta A$  teži prema nuli preko niza  $\Delta A', \Delta A'', \Delta A'''$  tako da stalno obuhvaća točku  $T$ , tada  $p_{sr}$  teži prema pravom vektoru naprezanja u točki  $T$ , tj.

$$p_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (54)$$

Indeks  $n$  u oznaci  $p_n$  označuje da vektor naprezanja djeluje na presjeku koji je definiran vanjskom normalom  $n$ . Na sličan način  $p_{-n}$  označuje vektor naprezanja s vanjskom normalom  $-n$ . Ako je  $p_n$  vektor naprezanja kojim desni dio tijela djeluje na lijevi u točki  $T$ , onda je  $p_{-n}$  vektor naprezanja kojim lijevi dio djeluje na desni u istoj točki. Prema zakonu akcije i reakcije (sl. 6c) očito je

$$p_{-n} = -p_n \quad (55)$$

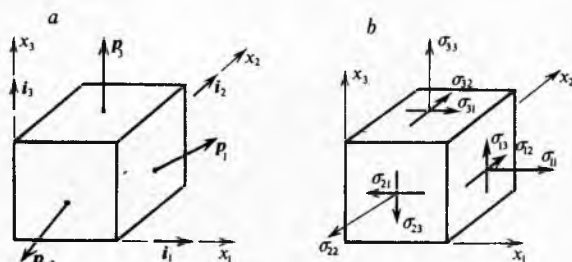
Kad  $\Delta A$  teži prema nuli, vektor sprega naprezanja koji potječe od kontinuirano raspodijeljenih unutrašnjih sila također teži prema nuli. To ne znači da se ne mogu pojaviti spregovi naprezanja koji su uzrokovani strukturom materijala. Materijali u kojima se pojavljuju spregovi naprezanja nazivaju se *mikropolarnim materijalima*.

U tehničkim proračunima vektor naprezanja  $p$  rastavlja se na dvije komponente: normalnu  $\sigma$  i posmičnu  $\tau$  (sl. 6b). Te komponente iznose:

$$\sigma = p_n \cos \varphi, \quad \tau = p_n \sin \varphi, \quad (56)$$

gdje je  $0 \leq \varphi \leq \pi$  kut između vektora  $p$  i normale  $n$ .

Pri definiranju vektora naprezanja  $p$  ne mora se zamisliti ravninski presjek niti tijelo mora biti u ravnoteži. Na slici 6d prikazano je nekoliko presjeka zakrivljenim ploham  $S', S'', S'''$  kroz točku  $T$ . Svi ti presjeci u točki  $T$  imaju zajedničku normalu  $n$ , pa je za sve presjeka vektor naprezanja isti. Ako u točki  $T$  presjeci nemaju istu normalu, vektor naprezanja je redovito različit.



Sl. 7. Grafički prikaz: a) vektora naprezanja, b) komponenta tenzora naprezanja

Neka su sa  $p_1, p_2, p_3$  označeni vektori naprezanja koji djeluju na presjecima  $x_1, x_2, x_3$ , tj. na presjecima koji su okomiti na koordinatne osi  $x_1, x_2$ , odnosno  $x_3$  (sl. 7a). Svaki se od tih triju vektora može rastaviti u komponente u smjeru koordinatnih osi  $x_1, x_2, x_3$ , odnosno u smjeru jediničnih vektora  $i_1, i_2, i_3$  (sl. 7b):

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}i_1 + \sigma_{12}i_2 + \sigma_{13}i_3, \\ p_2 &= \sigma_{21}i_1 + \sigma_{22}i_2 + \sigma_{23}i_3, \\ p_3 &= \sigma_{31}i_1 + \sigma_{32}i_2 + \sigma_{33}i_3, \end{aligned} \quad (57)$$

što se skraćeno može pisati u obliku:

$$p_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}i_j \quad i = 1, 2 \text{ ili } 3. \quad (58)$$

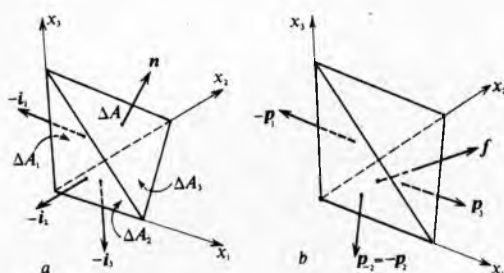
Devet brojeva  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$  tvore kvadratnu matricu

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (59)$$

U oznaci komponente tenzora naprezanja  $\sigma_{ij}$  prvi indeks označuje presjek na kojem djeluje naprezanje, dok drugi indeks označuje koordinatnu os u smjeru koje djeluje komponenta naprezanja. Tako je npr.  $\sigma_{32}$  komponenta koja djeluje na presjeku okomitom na  $x_3$ , a paralelna je s osi  $x_2$ . Normalne komponente imaju jednake, a posmične ili tangencijalne komponente različite indekse.

Presjek je pozitivan ako mu je vanjska normala usmjerena u pravcu  $i_1, i_2$  ili  $i_3$ . Ako je vanjska normala usmjerena suprotno od  $i_1, i_2$  ili  $i_3$ , presjek je negativan. Prema definiciji, komponenta je naprezanja pozitivna ako je na pozitivnom presjeku usmjerena pozitivno ili je na negativnom presjeku usmjerena negativno.

Pokazat će se da matrica (59) predstavlja matricu tenzora drugog reda, koji se naziva *tenzorom naprezanja*. U tu se svrhu razmatra tetraedar na slici 8a. Kako za svaku zatvorenu plohu vrijedi



Sl. 8. Iz ravnoteže elementarnog tetraedra slijedi da je naprezanje  $\sigma_{ij}$  tenzor

$$\oint_{(S)} \mathbf{n} dS = 0, \quad (60)$$

gdje je  $\mathbf{n}$  vanjska normala, a  $dS$  element plohe, to je

$$n \Delta A - i_1 \Delta A_1 - i_2 \Delta A_2 - i_3 \Delta A_3 = 0. \quad (61)$$

Uzastopnim skalarnim množenjem sa  $i_1, i_2, i_3$  dobije se

$$\Delta A_1 = \Delta A n_1, \quad \Delta A_2 = \Delta A n_2, \quad \Delta A_3 = \Delta A n_3, \quad (62)$$

gdje su  $n_1, n_2$  i  $n_3$  komponente normale  $\mathbf{n}$ .

Na elementarni tetraedar na slici 8b djeluju površinske sile  $p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}, p_n$  i volumenska sila  $f$  (koja može obuhvatiti i silu inercije). Jednadžbe gibanja tetraedra glase:

$$p_{-1} \Delta A_1 + p_{-2} \Delta A_2 + p_{-3} \Delta A_3 + p_n \Delta A + f \frac{1}{3} \Delta h \Delta A = 0, \quad (63a)$$

gdje je  $\Delta h$  visina spuštena iz  $O$  na  $\Delta A$ . Ako se uzmu jednadžbe (62) i (55) a zatim pokрати sa  $\Delta A$  i pusti da  $\Delta h$  teži prema nuli, dobit će se

$$p_n = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3. \quad (63b)$$

Taj se vektorski izraz može zamijeniti sa tri skalarna, koja se uz pomoć (57) mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} p_{(n)1} &= p_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3, \\ p_{(n)2} &= p_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3, \\ p_{(n)3} &= p_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3. \end{aligned} \quad (64)$$

Indeks  $n$  stavljen je u zagradu da se naglasi da on nije tenzorski indeks. Dok je vektor  $p$  pisan debelim slovom, nije moglo doći do zabune, pa indeks  $n$  nije stavljan u zagrade. Tamo gdje ne postoji mogućnost zabune, indeks  $n$  se ispušta. Jednadžba (64) u indeksnom zapisivanju glasi:

$$p_j = \sigma_{ij} n_i. \quad (65)$$

Kako su  $p_j$  i  $n_i$  vektori, prema kvocijentalnom zakonu (22)  $\sigma_{ij}$  jest tenzor drugog reda, pa se transformira prema tom zakonu:

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}. \quad (66)$$

Pokazat će se da je tenzor  $\sigma_{ij}$  simetričan, pa za njega vrijedi sve ono što vrijedi za simetrične tenzore drugog reda. Tako u svakoj točki postoje tri međusobno okomita pravca za koje su normalne komponente ekstremne, a posmične komponente jednake nuli. Te ekstremne vrijednosti označuju se sa  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  i nazivaju se *glavnim naprezanjima*.

**Sferni i devijatorski dio tenzora napreznja.** Pod srednjim normalnim naprezanjem podrazumijeva se veličina definirana jednadžbom

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad (67)$$

što je očito invarijanta koja ne ovisi o izboru koordinatnog sustava. Tenzor  $\sigma_{ij}$  može se rastaviti na dva dijela

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij}.$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani jest *sferni dio tenzora napreznja* i on predstavlja jednoliko rastezanje ili jednoliko tlačenje u svim smjerovima. Drugi pribrojnik jest *devijator tenzora napreznja* i predstavlja čisto smicanje. Kako je  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ , jednadžba (67) u matričnom obliku glasi

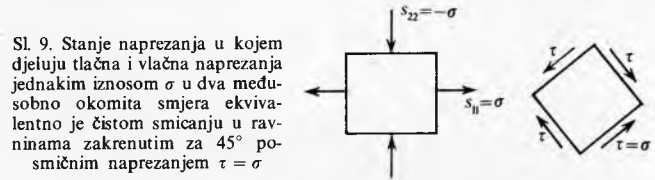
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \quad (68)$$

Da je prva invarijanta devijatora napreznja jednaka nuli, tj.  $s_{kk} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$ , proizlazi iz ovoga: ako se zbroje dijagonalni članovi u drugoj matrici jednadžbe (68), dobije se  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma = s_{11} + s_{22} + s_{33}$ , što je prema (67) jednako nuli. Odatle je  $s_{22} = -s_{11} - s_{33}$ , pa se devijator  $s_{ij}$  može rastaviti u tri dijela, tj.

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & s_{23} \\ s_{31} & s_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Prva matrica predstavlja tri smicanja za tri koordinatne ravnine. Rastezanje i sabijanje jednakim iznosom u dva međusobna okomita smjera (sl. 9) ekvivalentno je smicanju u ravninama zakrenutim za  $45^\circ$  (v. *Nauka o čvrstoći*). Slijedi da i preostale dvije matrice jednadžbe (69) predstavljaju smicanje. Kad su materijali izotropni, sferni dio uzrokuje promjenu volumena, a devijatorski dio promjenu oblika elementa kontinuuma.



Sl. 9. Stanje napreznja u kojem djeluju tlačna i vlačna napreznja jednakim iznosom  $\sigma$  u dva međusobno okomita smjera ekvivalentno je čistom smicanju u ravninama zakrenutim za  $45^\circ$  posmičnim naprezanjem  $\tau = \sigma$

KINEMATIKA KONTINUUMA

**Lagrangeov pristup.** Gibanje kontinuuma može se opisati prema sustavu prostornih koordinata  $x_i$ . Kontinuum se sastoji od niza djelića ili čestica. Gibanje jedne čestice kontinuuma potpuno je određeno ako se u svakom trenutku zna položaj čestice, tj. ako su poznate tri funkcije,

$$x_i = x_i(t), \quad (70)$$

gdje su  $x_i$  prostorne koordinate čestice, a  $t$  vrijeme. Gibanje kontinuuma je poznato ako se za svaki djelić kontinuuma pozna jednadžba (70). U tu svrhu potrebno je identificirati ili označiti pojedine čestice, npr. tako da se zada položaj svake čestice u određenom trenutku. Obično se bira početni trenutak  $t_0$ . Koordinate čestica u početnom trenutku označene su s  $y_i$ , a nazivaju se *materijalnim koordinatama*. Gibanje kontinuuma može se opisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, y_2, y_3, t), \\ x_2 &= x_2(y_1, y_2, y_3, t), \\ x_3 &= x_3(y_1, y_2, y_3, t), \end{aligned} \quad (71)$$

ili skraćeno:

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, t). \quad (72)$$

U literaturi se taj način opisivanja gibanja kontinuuma zove Lagrangeov način. Očito je za  $t = t_0$ :

$$x_i = y_i. \quad (73)$$

Ako se u jednadžbama (71) drže konstantnim koordinate  $y_i$ , a mijenja vrijeme  $t$ , dobije se zakon gibanja jedne čestice, i to upravo one koja u trenutku  $t_0$  zauzima položaj  $x_1 = y_1, x_2 = y_2$  i  $x_3 = y_3$ . Nasuprot tome, ako je  $t = t_1 = \text{const.}$ , a koordinatama  $y_i$  daju se sve moguće vrijednosti, dobije se položaj pojedinih čestica kontinuuma u zadanom trenutku  $t_1$ .

Koordinate  $x_i$  vezane su za prostor promatrača. Najčešće su vezane za Zemlju, ali mogu biti vezane za Sunce, brod, avion ili neko drugo vozilo, već prema potrebi. Nezavisne koordinate  $y_1, y_2, y_3$  i  $t$  nazivaju se Lagrangeovim koordinatama.

**Vektor pomaka  $u$ , brzine  $v$  i ubrzanja  $a$ .** Na slici 10 prikazano je gibanje dijela kontinuuma u vremenu  $\Delta t = t - t_0$ . Čestica  $y_i$ , tj. čestica koja u trenutku  $t_0$  ima prostorne koordinate  $y_i$ , nalazi se u točki  $A_0$  s vektorom položaja  $r_0$ , a čestica  $y_i + dy_i$  u točki  $B_0$  s vektorom položaja  $r_0 + dr_0$ .

U trenutku  $t > t_0$  čestica  $y_i$  nalazi se u točki  $A$  s vektorom položaja  $r$ , a čestica  $y_i + dy_i$  u točki  $B$  s vektorom položaja  $r + dr$ . Vektor koji spaja početni i konačni položaj neke čestice naziva se vektorom pomaka te čestice i označuje se sa  $u$ . Komponente tog vektora jesu  $u_i$ . Vektor položaja ima različite vrijednosti za različite čestice, tj. ovisi o  $y_i$ , a isto tako ovisi o vremenu  $t$ , pa se može pisati

$$u_i = u_i(y_1, y_2, y_3, t). \quad (74)$$

Očito je

$$x_i(y_1, y_2, y_3, t) = x_i(y_1, y_2, y_3, t_0) + u_i(y_1, y_2, y_3, t), \quad (75)$$

odnosno, uzevši u obzir (73),

$$x_i = y_i + u_i. \quad (76)$$

Brzina  $v$  čestice jest derivacija po vremenu vektora položaja te čestice, tj.

$$v = \frac{dr}{dt}, \text{ odnosno } v_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

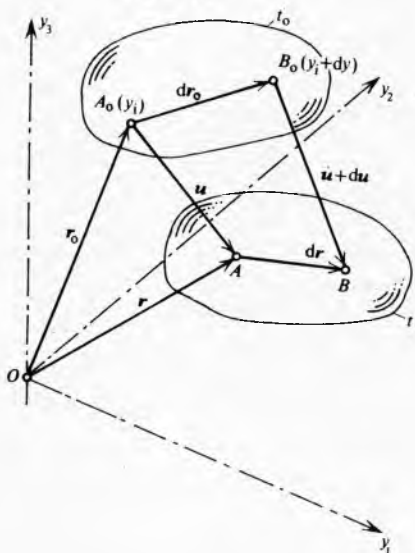
Uzme li se u obzir (76), bit će

$$v_i = \frac{d(y_i + u_i)}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \dot{u}_i, \quad (77)$$

jer  $y_i$  ne ovisi o vremenu.

Komponente vektora ubrzanja jesu

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \ddot{x}_i = \ddot{u}_i. \quad (78)$$



Sl. 10. Grafički prikaz uz definiciju pomaka deformacije. 1 početni položaj u trenutku  $t_0$ , 2 položaj u trenutku  $t$

**Eulerov pristup.** Prema tom pristupu kao nezavisne varijable usvajaju se prostorne koordinate  $x_1, x_2, x_3$  i vrijeme  $t$ . One se često nazivaju Eulerovim koordinatama. Prema tom pristupu gibanje se smatra zadanim, ako su zadani brzina  $v_i$ , ubrzanje  $a_i$ , temperatura  $T$  i druge veličine, ovisno o  $x_1, x_2, x_3$  i  $t$ , tj. ako je zadano

$$\begin{aligned} v_i &= v_i(x_1, x_2, x_3, t), \\ a_i &= a_i(x_1, x_2, x_3, t), \\ T &= T(x_1, x_2, x_3, t) \text{ itd.} \end{aligned} \quad (79)$$

Dok se u Lagrangeovu pristupu u prvom redu promatraju brzina, ubrzanje, temperatura i druge fizikalne veličine pojedinih materijalnih čestica, u Eulerovu pristupu promatraju se različite fizikalne veličine u pojedinim točkama prostora.

Materijalne koordinate mogu se izraziti pomoću prostornih inverzijom jednadžbe (72), tj. u obliku

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (80)$$

Ako se u (80) drži konstantnim  $x_1, x_2$  i  $x_3$ , a mijenja vrijeme  $t$ , dobiju se sve čestice koje će u toku vremena proći kroz zadanu točku prostora.

**Materijalna i lokalna derivacija.** Brzina promjene bilo kojeg skalarnog, vektorskog ili tenzorskog svojstva čestice  $P_{ij\dots}$ , kako je opaža promatrač koji se giba zajedno s česticom, naziva se *materijalnom, individualnom ili supstancijalnom* derivacijom. Materijalna derivacija označuje se simbolom  $\frac{d}{dt}$  ili točkom iznad

veličine

$$\dot{P}_{ij\dots} = \frac{dP_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(y_1, y_2, y_3, t)}{\partial t} \quad (81)$$

pri  $y_i = \text{const.}$

Ako je svojstvo  $P_{ij\dots}$  zadano prema prostornim koordinatama  $x_i$ , bit će

$$\dot{P}_{ij\dots} = \frac{dP_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\dots}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \quad (82)$$

Kako je  $\frac{dx_k}{dt} = v_k$ , bit će

$$\frac{dP_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}}{\partial t} + v_k \frac{\partial P_{ij\dots}}{\partial x_k}. \quad (83)$$

Prvi član na desnoj strani te jednadžbe karakterizira brzinu promjene promatranog svojstva u određenoj točki prostora i naziva se *lokalnom ili mjesnom brzinom promjene* (derivacija). Drugi član na desnoj strani naziva se *konvektivnom brzinom promjene*. Na temelju iznesenog uvodi se operator *materijalnog deriviranja*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (84)$$

**Tenzor deformacije.** Pri gibanju pojedini dijelovi kontinuuma mogu se deformirati, tj. mijenjati oblik i obujam. Deformiranje se kontinuuma matematički opisuje pomoću tenzora deformacije. Tenzor deformacije uspoređuje samo početno nedeformirano stanje i konačno ili deformirano stanje kontinuuma i ne razmatra trenutna stanja kontinuuma između tih dvaju krajnjih. Smatrat će se da je poznato deformiranje tijela u okolišu neke čestice ako se za svaku elementarnu dužinu koja prolazi kroz tu česticu može odrediti promjena njene duljine i njen zakret.

Slika 10 pokazuje kako se promijenio kvadrat elementarne dužine  $A_0B_0$ . Neka je  $ds_0 = A_0B_0 = dr_0$  i  $ds = AB = dr$ . Tada je

$$ds^2 - ds_0^2 = dr \cdot dr - dr_0 \cdot dr_0, \quad (85)$$

odnosno u indeksnom zapisivanju

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - dy_i dy_i. \quad (86)$$

Kako je  $x_i = y_i + u_i(y_1, y_2, y_3, t)$ , bit će

$$dx_i = dy_i + du_i = dy_i + \frac{\partial u_i}{\partial y_j} dy_j = dy_i + u_{i,j} dy_j,$$

pa se može pisati

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= (dy_i + u_{i,j} dy_j)(dy_i + u_{i,k} dy_k) - dy_i dy_i = \\ &= dy_i dy_i - u_{i,j} dy_j dy_i + u_{i,k} dy_k dy_i + u_{i,j} u_{i,k} dy_j dy_i - dy_i dy_i. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja i zamjene oznake ponovljenih indeksa do-bije se

$$ds^2 - ds_0^2 = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) dy_i dy_j = 2L_{ij} dy_i dy_j, \quad (87)$$

gdje je

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right). \quad (88)$$

*Lagrangeov tenzor konačnih deformacija.* Da je  $L_{ij}$  tenzor drugog reda, proizlazi iz kvocijentnog zakona. Naime, lijeva je strana jednadžbe (87) skalar, dok je desna umnožak sustava drugog reda  $L_{ij}$  i dvaju vektora  $dy_i$  i  $dy_j$ . Do istog zaključka moglo se doći, uzimajući da je  $L_{ij}$  dobiven tenzorskim operacijama nad vektorom  $u_i$ , pa je prema tome tenzor.

Na sličan način može se dobiti i Eulerov tenzor konačnih deformacija  $E_{ij}$ . Ako je pomak  $u_i$  zadan u ovisnosti o prostornim koordinatama  $x_i$ , bit će

$$y_i = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Odatle je  $dy_i = dx_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = dx_i - u_{i,k} dx_k$ , pa se može pisati

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - dy_i dy_i =$$



$$\begin{aligned} &= dx_i dx_i - (dx_i - u_{i,j})(dx_i - u_{i,k}) dx_j dx_k = \\ &= (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) dx_i dx_j = \\ &= 2 E_{ij} dx_i dx_j, \end{aligned}$$

gdje je

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (89)$$

tenzor drugog reda. Kako su  $L_{ij}$  i  $E_{ij}$  simetrični tenzori drugog reda, oni imaju svoje glavne osi i glavne vrijednosti koje se određuju na poznati način.

Prikazat će se dvije komponente tenzora  $E_{ij}$  u razvijenom obliku u tenzorskom zapisivanju i iste te u uobičajenom tehničkom zapisivanju. Tako je npr.

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (90)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \text{ itd.}$$

Iste komponente uz oznake  $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$  i  $u_1, u_2, u_3 = u, v, w$  glase:

$$E_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = E_{xx}, \quad (91)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = E_{xy}, \text{ itd.}$$

Na sličan način može se prikazati i tenzor  $L_{ij}$  u razvijenom obliku.

U metalnim i mnogim drugim konstrukcijama pomaci  $u_i$  i njihovi gradijenti  $u_{i,j}$  relativno su mali, pa se njihovi kvadrati mogu zanemariti. Tako se dolazi do tenzora malih deformacija  $\epsilon_{ij}$ . Kako je pri malim  $u_i$ ,  $x_i \approx y_i$ , tenzor malih deformacija ima isti oblik u materijalnim i prostornim koordinatama, tj.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (92)$$

i taj je tenzor simetričan.

Matrica tenzora malih deformacija glasi:

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (93)$$

Prva matrica je dana u tenzorskom zapisivanju, a druga na način kako je to uobičajeno u nauci o čvrstoći, odnosno drugim tehničkim disciplinama. Dijagonalni elementi ili dužinske deformacije predstavljaju zapravo relativna produljenja dužina paralelnih s osima  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Izvandijagonalni elementi predstavljaju promjenu pravog kuta (više o značenju komponenata malih deformacija v. *Nauka o čvrstoći*).

**Tenzor brzine deformacije.** Slika 11 prikazuje dvije čestice kontinuuma s njihovim putanjama. U nekom trenutku  $t$  čestica  $A$  ima položaj  $x_i$  i brzinu  $v_i$ , a čestica  $B$  položaj  $x_i + dx_i$  i brzinu  $v_i + dv_i$ . Kako je  $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ , može se pisati

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j,$$

Gradijent brzina  $v_{i,j}$  jest očito tenzor drugog reda, koji se može rastaviti na simetrični i antisimetrični dio, tj.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (94)$$

odnosno

$$v_{i,j} = e_{ij} + d_{ij}, \quad (95)$$

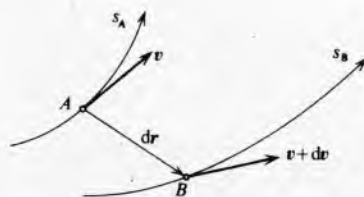
gdje je

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (96)$$

tenzor brzine deformacije, a

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (97)$$

tenzor vrtloženja.



Sl. 11. Grafički prikaz uz definiciju brzine deformacije.  $s_A$  i  $s_B$  putanje čestica  $A$  i  $B$

Derivacija po vremenu tenzora deformacije  $\epsilon_{ij}$  dobije se na sljedeći način:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \quad \text{i} \quad u_i = u_i(y_1, y_2, y_3, t),$$

pa je

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d}{dt} (\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{du_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{du_j}{dt} \right) \right],$$

odnosno

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right). \quad (98)$$

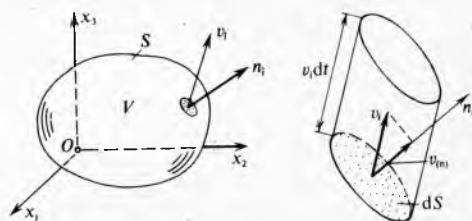
Usporede li se jednadžbe (96) i (98), vidi se da se tenzori  $\dot{\epsilon}_{ij}$  i  $e_{ij}$  općenito ne podudaraju, ali je pri malim pomacima  $x_i \approx y_i$ , pa je

$$\dot{\epsilon}_{ij} \approx e_{ij}. \quad (99)$$

### OPĆI ZAKONI MEHANIKE KONTINUUMA

**Protok ili fluks kroz zatvorenu plohu.** Volumen  $V$ , koji je omeđen plohom  $S$  (sl. 12a), u danom trenutku obuhvaća dio kontinuuma. Kako se kontinuum nalazi u gibanju, on na dijelu plohe  $S$  napušta volumen  $V$ , a na dijelu plohe ulazi u volumen  $V$ . Kroz element plohe  $dS$  u vremenu  $dt$  istekne kontinuum kojemu je volumen  $dV$  jednak valjku osnovice  $dS$  i visine  $v_{(n)} dt$  (sl. 12b), gdje je  $v_{(n)} = v_i n_i$  normalna komponenta brzine. Ako se elementarni volumen  $v_i n_i dS dt$  pomnoži s gustoćom  $\rho$ , dobit će se količina mase koja u vremenu  $dt$  protekne kroz element površine  $dS$ . Ako je produkt  $v_i n_i$  pozitivan, radi se o istjecanju, a ako je negativan, radi se o utjecanju mase u volumen  $V$ . Prema tome, brzina istjecanja mase kroz element plohe  $dS$  ili elementarni protok mase iznosi  $\frac{\rho v_i n_i dS dt}{dt} = \rho v_i n_i dS$ . Ukupni protok (fluks) mase  $Q_m$  kroz  $S$  dan je jednadžbom

$$Q_m = \int_{(S)} \rho v_i n_i dS. \quad (100)$$



Sl. 12. Grafički prikaz uz definiciju protoka mase

Ako se u podintegralnu jednadžbu mjesto  $\rho$  uvrsti  $\rho v_j$ ,  $\frac{1}{2}\rho v_j v_j$  itd., dobit će se protok količine gibanja  $Q_p$ , kinetičke energije itd.

$$Q_p = \int_{(S)} \rho v_j v_i n_i dS. \quad (101)$$

**Zakon o očuvanju mase.** Protok mase kroz zatvorenu plohu  $S$  jednak je smanjenju mase unutar volumena  $V$ , tj.

$$\int_{(S)} \rho v_i n_i dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho dV. \quad (102)$$

Kako je zapaženi, tzv. kontrolni volumen konstantan, bit će

$$\int_{(S)} \rho v_i n_i dS + \int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0, \quad (103)$$

odnosno nakon primjene Gaussova poučka (51),

$$\int_{(V)} \left[ (\rho v_i)_{,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0. \quad (104)$$

Volumen  $V$  može se odabrati proizvoljno, pa podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad (105)$$

odnosno u simboličkom pisanju

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (106)$$

Ta se jednadžba zove *jednadžba kontinuiteta*. Ako se provede naznačeno deriviranje, bit će

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_i v_i + \rho v_{i,i} = 0. \quad (107)$$

Kako je  $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$  funkcija ne samo vremena  $t$  nego i koordinata  $x_i$ , koje su također funkcije vremena, bit će

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_i v_i. \quad (108)$$

Na temelju (108) može se jednadžba (107) pisati u obliku

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0, \quad (109)$$

odnosno u simboličkom obliku

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (110)$$

Jednadžba (109) u razvijenom obliku glasi:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = 0,$$

odnosno

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (111)$$

**Zakon količine gibanja.** Promjena po vremenu količine gibanja kontinuuma volumena  $V$  jednaka je rezultanti svih sila koje djeluju na kontinuum, tj.

$$\int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \int_{(S)} (\rho v_i) v_j n_j dS = \int_{(V)} f_i dV + \int_{(S)} p_i dS. \quad (112)$$

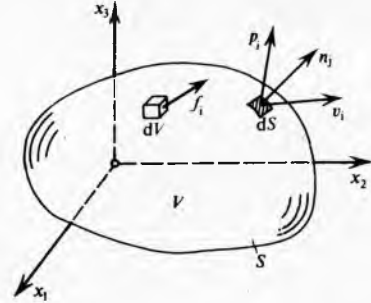
Prvi integral na lijevoj strani predstavlja promjenu količine gibanja koja je nastala zbog promjene gustoće, odnosno brzine unutar volumena  $V$ . Drugi integral na lijevoj strani predstavlja promjenu količine gibanja koja nastaje zbog protjecanja mase, a s njom i količine gibanja kroz  $S$ . Prvi integral na desnoj strani predstavlja rezultantu volumenskih sila, a drugi rezultantu površinskih sila koje djeluju po površini  $S$ , kako je prikazano na slici 13. Prema (65) može se pisati  $p_i = \sigma_{ji} n_j$ . Nakon primjene Gaussova poučka jednadžba (112) prelazi u

$$\int_{(V)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + (\rho v_i v_j)_{,j} - f_i + \sigma_{ji,j} \right] dV = 0. \quad (113)$$

Kako je  $V$  proizvoljan, bit će podintegralna funkcija jednaka nuli, pa se nakon sređivanja može pisati

$$v_i \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\rho v_j)_{,j} \right] + \rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \right] - f_i - \sigma_{ij,j} = 0. \quad (114)$$

Prema (105), prva uglata zagrada iščezava, dok prema (84), druga uglata zagrada predstavlja materijalnu derivaciju brzine, tj. ubrzanje  $a_i = \dot{v}_i = \ddot{u}_i$ .



Sl. 13. Grafički prikaz uz zakon količine gibanja

Sada se može pisati

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \dot{v}_i. \quad (115)$$

Taj izraz predstavlja *jednadžbe gibanja*, koje u razvijenom obliku glase:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho v_1 \quad \text{itd.}, \quad (116)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho \dot{v}_x, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho \dot{v}_y, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= \rho \dot{v}_z. \end{aligned} \quad (117)$$

**Zakon momenta količine gibanja.** Taj je zakon u mehanici krutih tijela izveden za sustav čestica. On glasi: 'Derivacija po vremenu momenta količine gibanja jednaka je momentu vanjskih sila, tj.

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (118)$$

gdje je  $L$  moment količine gibanja, a  $M$  moment vanjskih sila. Oba momenta odnose se na istu točku. Dio kontinuuma volumena  $V$  (sl. 14) može se smatrati sustavom čestica, pa za njega vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} (e_{ijk} x_j \rho v_k) dV + \int_{(S)} e_{imk} x_m (\rho v_k) v_i n_i dS &= \\ = \int_{(V)} e_{ijk} x_j f_k + \int_{(S)} e_{ijk} x_j p_k. \end{aligned} \quad (119)$$

Prvi integral na lijevoj strani predstavlja promjenu momenta količine gibanja koja nastaje unutar  $V$  zbog promjene gustoće, brzine i položaja pojedinih djelića kontinuuma, a drugi integral predstavlja promjenu momenta količine gibanja zbog protoka mase kroz kontrolnu površinu  $S$ . Prvi integral na desnoj strani predstavlja moment volumenskih sila, a drugi moment površinskih sila. Ako se u (119) uvrsti prema (65)  $p_k = \sigma_{lk} n_l$ , zamijeni ponovljeni indeks  $m$  sa  $j$  i zatim primijeni Gaussov

poučak, dobije se

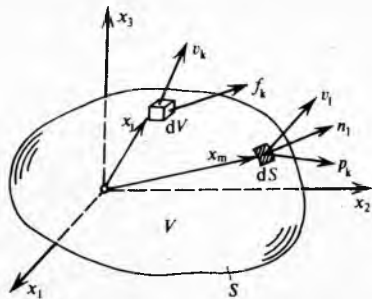
$$\int_{(V)} e_{ijk} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (x_j \rho v_k) + (x_j \rho v_k v)_i - (x_j \sigma_{ik})_i \right] dV = 0. \quad (120)$$

Volumen  $V$  je proizvoljan, pa je podintegralna jednadžba jednaka nuli. Nakon sređivanja dobije se

$$e_{ijk} \left\{ x_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + (\rho v_k v)_i - f_k - \sigma_{ik,i} \right] + \left[ \frac{\partial x_j}{\partial t} \rho v_k + x_{j,i} \rho v_k v_i - x_{j,i} \sigma_{ik} \right] \right\} = 0. \quad (121)$$

Prva uglatu zagradu prema (113) iščezava. Isto tako je  $\frac{\partial x_j}{\partial t} = v_j$  i  $x_{j,i} = \delta_{ji}$ , te  $\delta_{ji} v_j = v_i$  i  $\delta_{ji} \sigma_{ik} = \sigma_{jk}$ , pa se može pisati

$$2e_{ijk} \rho v_k v_j - e_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (122)$$



Sl. 14. Grafički prikaz uz zakon momenta količine gibanja

Prvi član predstavlja produkt simetričnoga i antisimetričnog tenzora za indekse  $j$  i  $k$ , pa je jednak nuli. Sada (122) prelazi u oblik

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (123)$$

Kako je  $e_{ijk}$  antisimetričan, bit će  $\sigma_{jk}$  simetričan, tj. bit će

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}, \quad (124)$$

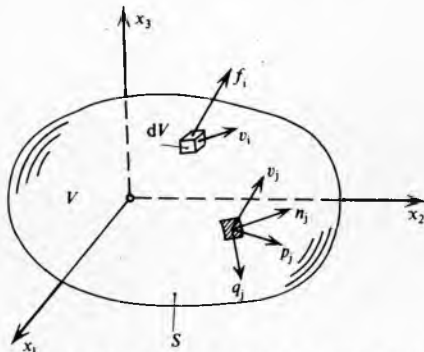
odnosno u razvijenom obliku

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad \text{i} \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (125)$$

**Zakon o očuvanju energije.** Dio kontinuuma volumena  $V$  omeđen je površinom  $S$  prema slici 15. Zakon o očuvanju energije može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i + \rho U \right) dV + \int_{(S)} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i + \rho U \right) v_j n_j dS = \\ = \int_{(V)} (f_i v_i + Q) dV + \int_{(S)} p_i v_i dS - \int_{(S)} q_j n_j dS, \end{aligned} \quad (126)$$

gdje je  $\rho U$  unutrašnja mehanička energija po jedinici volumena koja potječe od nesređenog (toplinskog) gibanja čestica i polja



Sl. 15. Grafički prikaz uz zakon o očuvanju energije

intermolekularnih sila,  $\frac{1}{2} \rho v_i v_i$  kinetička energija po jedinici volumena koja potječe od makrogibanja kontinuuma,  $Q$  gustoća izvora topline,  $-q_j n_j$  toplinski tok (predznak je minus jer toplina struji od toplijega prema hladnijem tijelu),  $f_i v_i$  snaga volumenskih sila, a  $p_i v_i$  snaga površinskih sila.

Nakon primjene Gaussova poučka i jednadžbe  $p_i = \sigma_{ji} n_j$  slijedi:

$$\int_{(V)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v_i v_i + U \right) - f_i v_i \right] - Q + \left[ \rho v_j \left( \frac{1}{2} v_i v_i + U \right) \right]_j - (\sigma_{ji} v_i - q_j)_j \right\} dV = 0. \quad (127)$$

Kao i prije, podintegralna jednadžba jednaka je nuli. Nakon sređivanja dobije se

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_j)_j \right] \left( \frac{1}{2} v_i v_i + U \right) + \rho \left( v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \rho v_j (v_i v_{i,j} + U_{,j}) - f_i v_i - Q - \sigma_{ji} v_{i,j} - \sigma_{j,i} v_i + q_{j,j} = 0. \quad (128)$$

Uglatu zagradu prema (105) jednaka je nuli, pa je

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + v_j U_{,j} \right] + \rho v_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \right) - f_i v_i - \sigma_{j,i} v_i = \\ = Q + \sigma_{ji} v_{i,j} - q_{j,j} \end{aligned} \quad (129)$$

Prema (84) uglatu zagradu je jednaka  $\dot{U}$ , a okrugla  $\dot{v}_i$ . Isto je tako prema (95)  $\sigma_{ji} v_{i,j} = \sigma_{ji} e_{ij} + \sigma_{ji} d_{ij}$ . Međutim je  $\sigma_{ji} d_{ij} = 0$ , jer je  $\sigma_{ji}$  simetričan, a  $d_{ij}$  antisimetričan tenzor. Sada je

$$\rho \dot{U} + v_i (\rho \dot{v}_i - f_i - \sigma_{ji,j}) = Q + \sigma_{ji} e_{ij} - q_{j,j}. \quad (130)$$

Prema (115) zagradu je jednaka nuli. Kako je  $e_{ij} \approx \dot{\epsilon}_{ij}$ , bit će

$$\rho \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + Q - q_{j,j}. \quad (131)$$

Jednadžba (131) predstavlja zakon o očuvanju energije. U njemu su obuhvaćene samo toplinska i mehanička energija. Međutim, lako se može proširiti da obuhvati i ostale oblike energije.

### KLASIFIKACIJA MATERIJALA

Sve do sada izvedene jednadžbe odnose se na opći kontinuum, tj. na sve materijale: čvrste, tekuće i plinovite. Isto tako pojmovi pomaka, brzine, deformacije, naprezanja itd. definirani su neovisno o posebnim svojstvima materijala. Na žalost, nepoznatih veličina je više nego općih jednadžbi mehanike, pa je potrebno u razmatranje uvesti dopunske jednadžbe. Te se jednadžbe nazivaju *odredbenima*, *fizikalnima* ili *konstitutivnima*, a ovise o vrsti materijala. Opće jednadžbe mehanike kontinuuma prikazane su u tablici 3, a nepoznate veličine u tablici 4.

Tablica 3  
OPĆE JEDNADŽBE MEHANIKE KONTINUUMA

Fizikalni zakon	Jednadžbe	Broj jednadžbi
Očuvanje mase	$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0$	1
Količina gibanja	$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ji,j} + f_i$	3
Očuvanje energije	$\rho \dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + Q - q_{k,k}$	1
Moment količine gibanja	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	3

Ima 14 nepoznanica i 5 jednadžbi. Jednadžba  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  je implicitno uzeta time što se uzelo da  $\sigma_{ij}$  ima samo 6 nepoznanica. Brzina deformacije ne predstavlja dopunske nepoznanice, jer, poznavajući brzinu, može se odrediti i brzina deformacije. Prema tome, nedostaje 9 jednadžbi. Ako se isključe iz razmatranja toplinske pojave, za 10 nepoznanica ostat će samo 4 jednadžbe.

Jednadžbe koje nedostaju jesu jednadžbe koje povezuju naprezanje, deformaciju i brzinu deformacije. Prema obliku tih jednadžbi kontinuum se klasificira u različite materijale: elastične, plastične, elastoplastične i fluide.

Tablica 4  
NEPOZNANICE

Naziv	Oznaka	Broj nepoznanica	Primjedba
Gustoća	$\rho$	1	
Brzina	$v_i$	3	
Naprezanje	$\sigma_{ij}$	6	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Unutrašnja energija	$U$	1	
Brzina deformacije	$\dot{\epsilon}_{ij}$	0	$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$
Toplinski tok	$q_k$	3	

### Elastični materijali

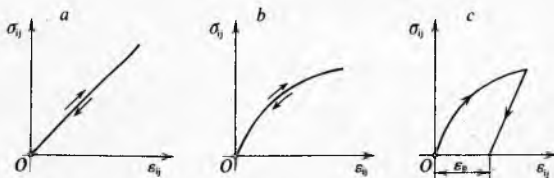
Ima više definicija elastičnog kontinuuma, odnosno elastičnog materijala. Neke od njih jesu:

1) Materijal je elastičan ako je rad deformacije po bilo kojem zatvorenom ciklusu jednak nuli.

2) Ako je materijal elastičan, pri konstantnoj temperaturi postoji jednoznačna veza između naprezanja i deformacija.

3) Pri rasterećenju elastično tijelo potpuno se vraća u prvobitni oblik i dimenzije.

Prva definicija je najopćenitija i obuhvaća preostale dvije. Sve tri definicije obuhvaćaju linearno elastične i nelinearno elastične materijale. Materijal je linearno elastičan ako naprezanja linearno ovise o deformacijama, kako je ilustrirano na slici 16. Dalje će se razmatrati samo linearno elastični materijali.



Sl. 16. Dijagrami deformiranja: a) linearno elastičnog materijala, b) nelinearno elastičnog materijala, c) neelastičnog materijala

**Anizotropni materijali.** Materijal je anizotropan ako njegova elastična svojstva ovise o smjeru. Npr. drvo je anizotropan materijal jer se drugačije rasteže u smjeru vlakanca nego u smjeru poprečno na vlakanca.

Kod najopćenitije anizotropnog materijala svaka komponenta naprezanja ovisi o svakoj komponenti deformacije i obratno, tj.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (132)$$

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (133)$$

gdje je  $C_{ijkl}$  tenzor elastičnosti, a  $S_{ijkl}$  tenzor podatljivosti. Komponente  $C_{ijkl}$  mogu se izraziti pomoću komponenata  $S_{ijkl}$  i obratno. Elastično tijelo ima elastični potencijal  $\Phi$

$$\Phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}, \quad (134)$$

za koji vrijedi

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (135)$$

Tenzori  $C_{ijkl}$  i  $S_{ijkl}$  imaju općenito 81 komponentu, međutim, sve među njima nisu međusobno nezavisne. Kako je  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  i  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , bit će

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk}, \quad (136)$$

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{jilk}, \quad (137)$$

što uvjetuje da se broj nezavisnih komponenata smanjuje na

36. Jednadžba (134) uvjetuje simetričnost tenzora  $C_{ijkl}$  i  $S_{ijkl}$  za grupe indeksa  $ij$  i  $kl$ , tj.

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}. \quad (138)$$

Ta simetričnost dalje smanjuje broj nezavisnih konstanti elastičnosti na 21. Većina tehničkih materijala ima različite oblike elastične simetrije. Za primjer neka posluži elastični materijal koji ima jednu ravninu elastične simetrije, npr. ravninu  $Ox_2x_3$ . To znači da pri zrcaljenju koordinatnih osi na toj ravnini (sl. 17) komponente tenzora  $C_{ijkl}$  ostaju nepromijenjene. Pri tom desni sustav  $Ox_1x_2x_3$  prelazi u lijevi sustav  $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ , tj.

$$\bar{x}_1 = -x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3, \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (140)$$

gdje je matrica transformacije

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Kako se pri zrcaljenju konstante ne mijenjaju, bit će

$$C_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}, \quad (142)$$

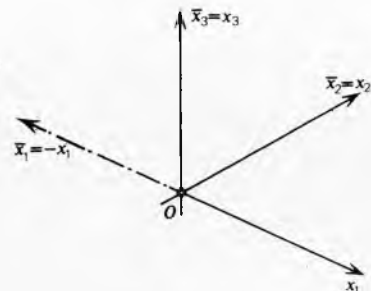
odnosno

$$C_{ijk} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{s} C_{pqrs}. \quad (143)$$

Bilo koja komponenta  $C_{ABCD}$  iznosi

$$C_{ABCD} = a_{Ap} a_{Bq} a_{Cr} a_{Ds} C_{pqrs}. \quad (144)$$

Indeksi označeni velikim slovima  $A, B, C$  i  $D$  imaju jednu, određenu vrijednost 1, 2 ili 3, a indeksi označeni malim slovima mogu imati bilo koju od tri vrijednosti 1, 2 i 3. Prema (141) koeficijenti  $a_{Ap}, a_{Bq}, a_{Cr}$  i  $a_{Ds}$  razlikuju se od nule samo ako su oba indeksa jednog koeficijenta jednaka, i tada imaju vrijednost 1 ili  $-1$ .



Sl. 17. Transformacija koordinata zrcaljenjem na ravnini  $Ox_2x_3$

Prema tome se može pisati

$$C_{ABCD} = (-1)^n C_{ABCD}, \quad (145)$$

gdje je  $n$  broj indeksa koji imaju vrijednost 1. Ako je  $n$  neparno, bit će

$$C_{ABCD} = -C_{ABCD}, \quad (146)$$

tj. bit će  $C_{ABCD} = 0$ . Sve moguće nezavisne kombinacije indeksa (ima ih ukupno 21) navedene su u tablici 5.

Tablica 5  
INDEKSI NEZAVISNIH KOMPONENTATA TENZORA ELASTIČNOSTI  $C_{ijkl}$

1111	<u>1112</u>	<u>1113</u>	1122	<u>1123</u>	1133
	1212	<u>1213</u>	<u>1222</u>	<u>1223</u>	<u>1233</u>
		1313	<u>1322</u>	<u>1323</u>	<u>1333</u>
			2222	<u>2223</u>	2233
				2323	<u>2333</u>
					3333

Kombinacije indeksa koje imaju neparan broj jedinica potcrtane su ravnom crtom u tablici 5. Pripadne komponente tenzora  $C_{ijkl}$  jednake su nuli, tj.

$$\begin{aligned} C_{1112} &= C_{1113} = C_{1222} = C_{1223} = \\ &= C_{1233} = C_{1322} = C_{1323} = C_{1333} = 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Tih komponentata ima 8, pa materijal s jednom ravninom simetrije ima  $21 - 8 = 13$  nezavisnih konstanti elastičnosti.

**Ortotropni materijali.** Materijal koji ima tri međusobno okomite ravnine elastične simetrije naziva se ortotropnim. Takvi materijali sve se više upotrebljavaju u tehnici. To su u prvom redu stakloplastici i drugi armirani materijali. Ako materijal ima dvije međusobno okomite ravnine simetrije, onda je i treća ravnina okomita na njih također ravnina simetrije. Za materijal koji ima dvije ravnine simetrije  $Ox_2x_3$  i  $Ox_1x_3$ , sličnim razmatranjem kao u već prikazanom, može se pokazati da su komponente koje imaju neparan broj jedinica i neparan broj dvojkiju jednake nuli. Komponente s neparnim brojem dvojkiju valovito su potcrtane u tablici 5. Vidi se da su 4 komponente već bile potcrtane u prethodnom primjeru. Prema tome, preostaju 4 komponente, osim onih u (147), koje su jednake nuli, tj.

$$C_{1213} = C_{1123} = C_{2223} = C_{2333} = 0. \quad (148)$$

Sada materijal ima samo  $13 - 4 = 9$  nezavisnih konstanti elastičnosti. Ako materijal ima tri ravnine elastične simetrije, bit će sve komponente koje imaju neparan broj jedinica, ili neparan broj dvojkiju, ili neparan broj trojki, jednake nuli. U tablici 5 vidi se da se sve komponente koje imaju neparan broj trojki podudaraju bilo s komponentama s neparnim brojem jedinica bilo s neparnim brojem dvojkiju, tj. treća ravnina elastične simetrije uvjetovana je prvim dvjema.

**Izotropni materijali.** U izotropnim materijalima elastična svojstva ne ovise o smjeru. Tada je tenzor elastičnosti izotropan tenzor četvrtog reda. Njegov najopćenitiji oblik glasi:

$$I_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (149)$$

gdje su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  skalari. U (149)  $C_{ijkl}$  simetrično je za indekse  $i, j$  i  $k, l$ , pa se tenzor  $I_{ijkl}$  može preinačiti u

$$I_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (150)$$

gdje su:  $\lambda = \alpha$ ,  $\mu + \nu = \beta$ ,  $\mu - \nu = \gamma$ .

Prva su dva člana simetrična za indekse  $i, j$  i  $k, l$ , dok je treći član antisimetričan za oba para indeksa, pa je za tenzor elastičnosti u najopćenitijem obliku dovoljno usvojiti prva dva člana, tj.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (151)$$

Tada Hookeov zakon glasi

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl}, \quad (152)$$

odnosno

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (153)$$

Vidi se da u izotropnim materijalima postoje samo dvije nezavisne konstante elastičnosti  $\lambda$  i  $\mu$ . One se zovu *Laméove konstante*. U nauci o čvrstoći upotrebljavaju se druge konstante elastičnosti: Youngov modul elastičnosti  $E$ , modul smicanja  $G$ , prostorni modul elastičnosti  $K$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ . Modul klizanja podudara se s Laméovom konstantom  $\mu$ , tj.

$$\mu = G. \quad (154)$$

### Plastični materijali

U elastičnim i plastičnim materijalima deformacije ovise o naprezanjima i obratno, međutim, naprezanja i deformacije ne ovise o vremenu, tj.

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}). \quad (155)$$

Dok je u elastičnih materijala ta veza jednoznačna, u plastičnih materijala naprezanje ovisi ne samo o veličini deformacije nego i o čitavom procesu deformiranja. Mnogi materijali koji se pri normalnim temperaturama i malim naprezanjima pona-

šaju elastično, pri povišenim temperaturama ili pri velikom naprezanju ponašaju se plastično. Prema tome, treba govoriti o plastičnom stanju materijala.

**Kriteriji plastičnosti** ili kriteriji tečenja materijala jesu zakoni koji definiraju granicu između elastičnog i plastičnog ponašanja materijala. Kriteriji plastičnosti imaju oblik

$$f(\sigma_{ij}) \geq C. \quad (156a)$$

Ako je u nekoj točki  $f(\sigma_{ij}) < C$ , u okolišu te točke materijal se ponaša elastično. Ako je  $f(\sigma_{ij}) > C$ , materijal se plastificirao, tj. ponaša se plastično. U graničnom je slučaju

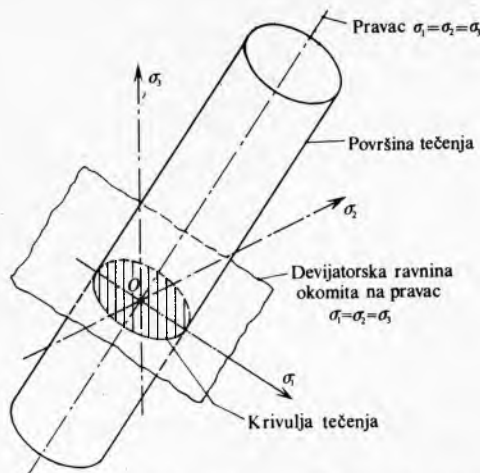
$$f(\sigma_{ij}) = C. \quad (156b)$$

Kad bi se mogla lako i točno simulirati u laboratoriju sva moguća naprezanja i pri tome registrirati razina naprezanja pri kojoj nastupa tečenje materijala, ne bi bio potreban kriterij plastičnosti. Međutim, kako je nemoguće u laboratoriju uvijek imitirati sva stanja naprezanja koja se javljaju u tehničkim konstrukcijama, potrebno je naći način da se predvidi tečenje u konstrukcijama, koji bi se zasnivao na rezultatima pokusa što se mogu jednostavno provesti u laboratoriju. Najčešće se provode pokusi jednoosnog rastezanja i tlačnja (sabijanja), smicanja, a ponekad i troosnog jednolikog tlačnja. Očito, osim ovog praktičnoga, kriteriji plastičnosti imaju i teorijsko značenje.

**Izotropni materijali.** Ako je materijal izotropan, kriterij se plastičnosti može prikazati u jednostavnom obliku

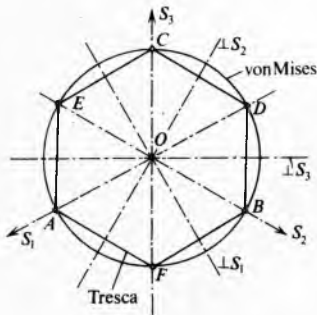
$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (157)$$

pri čemu glavna naprezanja  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  imaju jednak utjecaj na tečenje. Pokusi provedeni na izotropnim materijalima pokazuju da je tečenje neovisno o jednolikom troosnom tlačnju (sabijanju) ili rastezanju. Zbog toga površina popuštanja koja je definirana jednadžbom (157), u koordinatnom sustavu  $(O\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$  predstavlja simetrično tijelo kojemu je pravac  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  os simetrije (sl. 18). Ravnina koja prolazi kroz ishodište, a stoji okomito na pravac  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , naziva se *devijatorskom ravninom*. Krivulja po kojoj devijatorska ravnina siječe površinu tečenja naziva se *krivuljom tečenja*. Ona ima sljedeća svojstva: krivulja ne prolazi kroz ishodište; krivulja je simetrična prema osima  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$ ; ako materijal ima jednaka vlačna i tlačna svojstva, krivulja je simetrična s obzirom na tri osi koje su okomite na  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$ ; krivulja je konveksna.

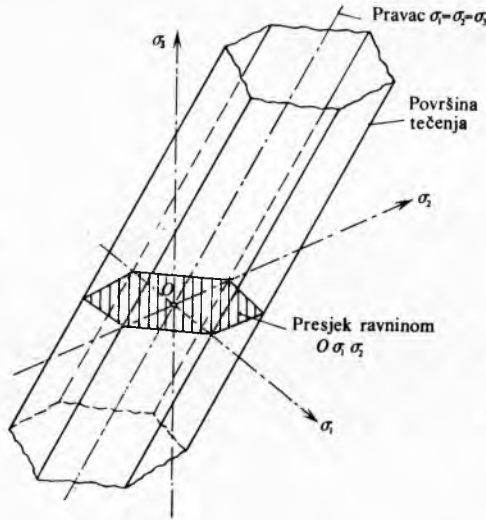


Sl. 18. Površina tečenja prema von Misesovu kriteriju

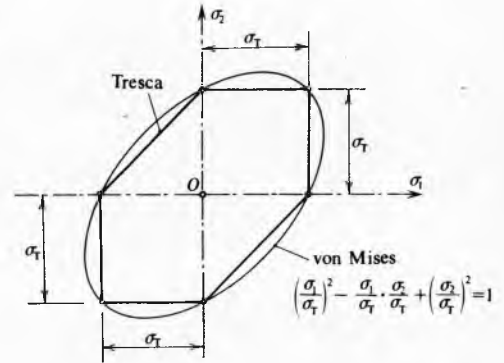
Osi  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  su projekcije osiju  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  na devijatorsku ravninu i predstavljaju glavne vrijednosti devijatorskog dijela tenzora naprezanja. Dvije moguće krivulje jesu kružnica i šesterokut (sl. 19). Šesterokut predstavlja kriterij najvećih posmičnih naprezanja, koji je postavio H. Tresca. Pripadna površina tečenja jest pravilna šesterostrana prizma (sl. 20), kojoj je presjek ravninom  $O\sigma_1\sigma_2$  šesterokut (sl. 21). Kružnica predstavlja R. von Misesov kriterij, kojemu odgovara površina tečenja u obliku kružnog valjka. Taj valjak siječe ravninu  $O\sigma_1\sigma_2$



Sl. 19. Krivulje tečenja u devijatorskoj ravni: a) kružnica (von Misesov kriterij), b) pravilni šesterokut (Trescino kriterij)



Sl. 20. Površina tečenja prema Trescino kriteriju



Sl. 21. Presjek površine tečenja ravninom \$O\sigma\_1\sigma\_2\$

u elipsi. Kriteriji tečenja imaju sličan oblik s teorijama čvrstoće koje se obrađuju u nauci o čvrstoći, pa se dopunska objašnjenja mogu naći u tom poglavlju (v. *Nauka o čvrstoći*).

**Anizotropni materijali.** Opći kriterij tečenja anizotropnih materijala glasi:

$$(\Pi_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (\Pi_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots \geq 1. \quad (158)$$

Za većinu tehničkih materijala dovoljno je uzeti prva dva člana uz eksponente \$\alpha = 1, \beta = 1/2\$. Tada kriterij ima oblik

$$\Pi_{ij}\sigma_{ij} + (\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{1/2} \geq 1. \quad (159)$$

Kad su vlačna i tlačna svojstva jednaka, onda je \$\Pi\_{ij} = 0\$, pa (159) prelazi u

$$\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1. \quad (160)$$

Veličine \$\Pi\_{ij}, \Pi\_{ijkl}, \Pi\_{ijklmn} \dots\$ nazivaju se tenzorima plasičnosti 2, 4, 6 ... reda.

**Tekućine**

Pod nazivom tekućine, u širem smislu, podrazumijevaju se tekućine u užem smislu ili kapljevine i plinovi. U tekućinama je otpor na promjenu oblika zanemarivo malen prema otporu na promjenu volumena. U stanju mirovanja vektor naprezanja je okomit na površinu na kojoj djeluje, tj. kolinearan je s normalom. Svi pravci su pravci glavnih naprezanja, pa se može pisati

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (161)$$

$$p_j = \sigma_{ij}n_i = -pn_j. \quad (162)$$

Sve su realne tekućine više ili manje viskozne, tj. pri gibanju realne tekućine pojavljuju se i posmične komponente naprezanja, tj.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (163)$$

gdje je \$\tau\_{ij}\$ tenzor viskoznog naprezanja.

**Idealna tekućina** je neviskozna i nestlačiva, pa za nju i pri gibanju vrijedi

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (164)$$

Ta jednadžba predstavlja eksperimentalno utvrđeni Pascalov zakon. Često se voda, zrak i druge tekućine mogu smatrati idealnim tekućinama.

U stlačivim tekućinama tlak \$p\$, gustoća \$\rho\$ i apsolutna temperatura \$T\$ povezani su jednadžbom stanja

$$p = f(\rho, T). \quad (165)$$

Npr. za idealni plin vrijedi

$$p = \rho RT, \quad (166)$$

gdje je \$R\$ plinska konstanta. Ako je gibanje tekućine takvo da tlak ne ovisi o temperaturi, tj. ako je

$$p = f(\rho), \quad (167)$$

gibanje je *barotropno*.

**Newtonova i Stokesova tekućina.** U realnim tekućinama tenzor viskoznog naprezanja ovisi o tenzoru brzine deformacije

$$\tau_{ij} = f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}). \quad (168)$$

Ako je veza nelinearna, tekućina se naziva Stokesovom, a ako je linearna, tekućina je Newtonova. Za anizotropne Newtonove tekućine (168) prelazi u

$$\tau_{ij} = K_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}. \quad (169)$$

Tenzor viskoznosti \$K\_{ijkl}\$ očito je simetričan za indekse \$i, j\$ i \$k, l\$. Ako je Newtonova tekućina izotropna, može se sličnim razmatranjem kao kod izotropnih elastičnih materijala doći do

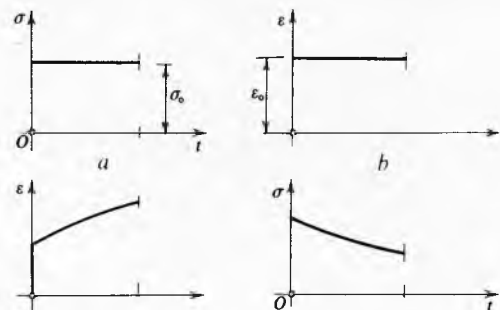
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (170)$$

gdje su \$\lambda^\*\$ i \$\mu^\*\$ konstante viskoznosti analogne Laméovim konstantama elastičnosti.

**Viskoelastični materijali**

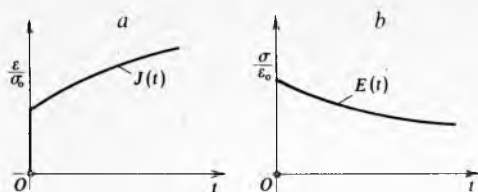
Viskoelastični materijali imaju svojstva elastičnih tijela i viskozni tekućina, tj. u njima naprezanje ovisi i o deformaciji i o brzini deformacije. U posljednje vrijeme teorija viskoelastičnosti doživjela je velik napredak. Tome je pridonijela sve veća upotreba polimernih materijala koji se pretežno ponašaju viskoelastično. Međutim, i mnogi drugi materijali kao beton, asfalt, metali pri povišenim temperaturama itd. imaju viskoelastična svojstva.

Svojstva realnih viskoelastičnih materijala utvrđuju se pokusima puzanja i relaksacije i dinamičkim pokusima. Puzanje je pojava porasta deformacije pri konstantnom naprezanju \$\sigma\_0\$.



Sl. 22. Dijagrami: a) puzanja, b) relaksacije

Relaksacija je opadanje napreznja u modelu koji je podvrgnut konstantnoj deformaciji  $\epsilon_0$ . Rezultati pokusa puzanja i relaksacije prikazani su na slici 22. Omjeri  $J(t) = \epsilon(t)/\sigma_0$  i  $E(t) = \sigma(t)/\epsilon_0$  nazivaju se funkcijom puzanja, odnosno funkcijom relaksacije (sl. 23). Ako su  $J(t)$  i  $E(t)$  neovisni o  $\sigma_0$  odnosno  $\epsilon_0$ , materijal je *linearno viskoelastičan*. Dalje se razmatraju samo linearno viskoelastični materijali.



Sl. 23. Grafički prikaz: a) funkcije puzanja  $J(t)$ , b) funkcije relaksacije  $E(t)$

Dinamičko ponašanje viskoelastičnih materijala ispituje se na dva načina: a) uzorak materijala podvrgne se sinusoidnom napreznju  $\sigma = \sigma_a \sin(\omega t)$  i bilježi deformacija  $\epsilon = \epsilon_a \sin(\omega t + \varphi)$ , b) uzorak se podvrgne sinusoidnoj deformaciji  $\epsilon_a = \sin(\omega t)$  a bilježi napreznje  $\sigma_a \sin(\omega t + \varphi)$ .

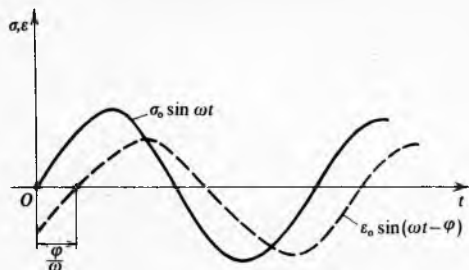
Rezultati prvog pokusa prikazani su na slici 24. Kompleksni modul materijala definiran je jednađbom

$$E^*(i\omega) = \frac{\sigma_a}{\epsilon_a}, \quad (171)$$

što se može prikazati u obliku

$$E^*(i\omega) = E_1(\omega) + iE_2(\omega), \quad (172)$$

gdje je  $E_1 = \frac{\sigma_a}{\epsilon_a} \cos \varphi$  modul akumulacije,  $E_2 = \frac{\sigma_a}{\epsilon_a} \sin \varphi$  modul disipacije, a  $i = \sqrt{-1}$  imaginarna jedinica.



Sl. 24. Dijagram dinamičkog ispitivanja viskoelastičnog materijala.

Na sličan način, pri drugom pokusu, definira se kompleksna podatljivost

$$J(i\omega) = \frac{\epsilon_a}{\sigma_a} = J_1(\omega) + iJ_2(\omega), \quad (173)$$

gdje je  $J_1(\omega)$  podatljivost akumulacije, a  $J_2(\omega)$  podatljivost disipacije. Što su veći  $E_2$  i  $J_2$ , veća je disipacija energije pri deformaciji, dok veličina  $E_1$  i  $J_1$  utječu na akumulaciju energije deformacije.

Kad je poznato  $J(t)$  i konstantno napreznje  $\sigma_0$ , može se odrediti deformacija kao funkcija vremena

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0. \quad (174)$$

Na sličan način mogu se odrediti napreznja u modelu podvrgnutom konstantnoj deformaciji

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon_0. \quad (175)$$

Ako nametnuto napreznje odnosno deformacija nisu konstantni, ne mogu se direktno primijeniti jednađbe (174) i (175). Neka se napreznja mijenjaju skokovito (sl. 25). Tada vrijedi Boltzmannov princip superpozicije, tj.

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sigma_1 J(t - t_1) + \sigma_2 J(t - t_2) + \dots, \quad (176)$$

odnosno

$$\epsilon(t) = \sum_{i=0}^n \sigma_i J(t - t_i). \quad (177)$$

Analogno vrijedi

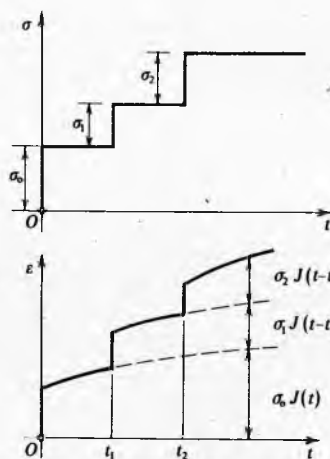
$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i E(t - t_i). \quad (178)$$

Ako se nametnuta napreznja mijenjaju kontinuirano, jednađbe (177) i (178) prelaze u

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\epsilon}{d\tau} d\tau, \quad (179)$$

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau, \quad (180)$$

gdje su  $\tau$  i  $t$  oznake za vrijeme. Oznake  $\sigma$  i  $\epsilon$  u jednađbama (179) do (180) odnose se na normalna i na posmična napreznja, te na dužinske i kutne deformacije. Međutim, sve te jednađbe vrijede za jednostavna napreznja: rastezanje, tlačenje i smicanje.



Sl. 25. Boltzmannov princip superpozicije

Razvijenije teorije obuhvaćaju i prostorna napreznja, koja ovdje nisu razmotrena.

### RUBNI PROBLEMI

Određene jednađbe koje vrijede za pojedine materijale, zajedno s općim zakonima mehanike kontinuuma, dovoljne su za određivanje svih nepoznatih veličina ako su zadani određeni rubni uvjeti. Metode rješavanja tih rubnih problema obrađuju se u posebnim područjima mehanike kontinuuma: mehanici fluida, teoriji elastičnosti, teoriji plastičnosti i teoriji viskoelastičnosti. Rješenja mnogih praktičnih problema deformabilnih tijela mogu se naći u članku *Nauka o čvrstoći*.

LIT.: T. P. Andelić, Osnovi mehanike neprekidnih sredina. Naučna knjiga, Beograd 1950. — M. Brđicka, Mehanika kontinuua. SNTL, Praha 1959. — W. Prager, Einführung in die Kontinuumsmechanik. Birkhäuser Verlag, Basel 1961. — H. Schäfer, Continui di Cosserat. Funzioni potenziali. Calcolo numerico delle piastre. Università di Trieste, Trieste 1965. — J. Mandel, Cours de mécanique des milieux continus, vol. I, II. Gauthier-Villars, Paris 1966. — M. Roy, Mécanique II. Milieux continus. Dunod, Paris 1966. — A. C. Eringen, Mechanics of continua. John Wiley, New York 1967. — T. P. Andelić, Tenzorski račun. Naučna knjiga, Beograd 1967. — L. E. Malvern, Introduction to the mechanics of continuous medium. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1969. — W. Nowacki, Teoria sprężystości. Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1970. — A. A. Пальюшин, Механика сплошной среды. Издательство Московского университета, Москва 1971. — C. Truesdell, A first course in rational continuum mechanics. The Johns Hopkins University, Baltimore 1972. — Г. Й. Бранков, Основни проблеми на теорията на вискозно-еластичността. Издательство на Българската академия на науките, София 1972. — Л. И. Седов, Механика сплошной среды, I, II. Наука, Москва 1973. — В. Л. Фомин, Механика континуума для инженеров. Издательство Ленинградского университета, Ленинград 1975.