

**MEHANIZMI**, naprave ili dijelovi strojeva, sastavljeni od dva ili više elemenata koji su međusobno tako vezani da gibanje jednog elementa pobuđuje sasvim određeno gibanje ostalih sastavnih elemenata. Mechanizmi služe za prenošenje gibanja ili za pretvaranje jedne vrste gibanja u drugu. Pri tome neki mehanizmi prenose i snagu mnogo veću od potrebne da se svelada trenje i dinamički otpori unutar mehanizma.

Jednostavni mehanizmi datiraju još iz starog vijeka kad su izumljene prve poluge, koloturi i zupčanici. Poznati matematičari i fizičari iz III st. konstruirali su i analizirali takve jednostavne naprave, pa je Arhimed (-287—+212) bio autor prvih rasprava o poluzi i koloturu, a još i danas su aktuelne njegove konstrukcije koloturnika i vijčane cijevi za crpljenje vode. Heron iz Aleksandrije (I st.) proširio je zakon poluge i kolutura, analizirao je kolo na vretenu, zupčanik i vijak, opisao je brojne mehanizme koji djeluju na hidrauličkom i pneumatičkom principu, a dao je i prvu ideju parnog stroja.

Teorija mehanizama razvijala se s razvojem industrije, a posebno strojarstva. Zbog toga se o osnovama znanosti o mehanizmima može govoriti tek u XVIII st. kad počinju sustavna istraživanja na području kinematike ravninskog i prostornog gibanja tijela, a posebno na području kinematike prirodnog gibanja. Najvažniji radovi tog doba jesu radovi švicarskih matematičara J. Bernoullija (1667—1748) i L. Eulera (1707—1783). Bernoulli je definirao teorem o trenutnom polu ravninskog gibanja sila i prostorno gibanje tijela. U to su vrijeme radovi T. Newcomena (1663—1729) i J. Watt-a (1736—1819) definitivno omogućili gradnju prvog parnog stroja. Watt je konstruirao i svoj poznati paralelogram (balansir), a ostvaren je i niz drugih mehanizama za tehničku primjenu.

Najviše principa na kojima se temelji znanost o mehanizmima utvrđeno je tokom XIX st. Teorija mehanizma, pod nazivom *Mehanika primijenjena na strojeve*, pojavila se i kao poseban nastavni predmet, pa ju je još 1838. godine poznati francuski matematičar J. Poncelet (1788—1867), predavao na Sorboni, a zatim i na Politehničkoj školi u Parizu. Poncelet je autor radova o konstrukciji spregnutih profila koji se dodiruju po evolventnim i cikloidnim krivuljama. Takvimi radovima, koji su postali osnova teorije ozubljenja, bavili su se u to vrijeme i ostali predstavnici francuske škole teorije mehanizama. Među njima su: A. Ampère (1775—1836), koji je neko vrijeme predavao mehaniku na Politehničkoj školi u Parizu, F. Savary (1797—1841), koji se bavio teorijom zakrivljenosti spregnutih profila i odgovarajućih poloida i putanja, i E. E. Babilier, koji je, pored ostalog, dao grafičko rješenje za određivanje središta zakrivljenosti spregnutih profila.

Najpoznatiji imena njemačke škole XIX stoljeća jesu: F. Reuleaux (1829—1905), L. Burmester i M. Grüber. Reuleaux je svojim radovima obradio tehničku primjenu kinematike prirodnog gibanja, a bavio se i strukturu mehanizama, posebno analizom kinematičkih parova. Burmester je tvorac *geometrijske metode sinteze mehanizama*, a razradio je i geometrijske metode za analizu mehanizama. Grüber se bavio strukturonom i analizom pokretljivosti mehanizama; njegov kriterij za pokretljivost nekih jednostavnijih tipova mehanizama primjenjuje se i danas.

U XIX st. najeminentniji predstavnik engleske škole bio je R. Willis (1800—1875). Poznato je njegovo djelo *Principles of Mechanisms* (1841), a važnu su mu radovi o odnosu među kutinim brzinama pojedinih elemenata mehanizma, posebno za planetarne i diferencijalne zupčaste mehanizme. Iz tog doba poznati su još imena T. Younga (1773—1829), Moseleya, W. J. M. Rankinea (1820—1872) i drugih.

Osnivač ruske škole i tvorac *analitičke metode sinteze mehanizama* je ruski akademik P. L. Čebišev (1821—1894). Poznati su njegovi radovi na području strukture mehanizama, posebno strukturalna formula za određivanje pokretljivosti ravnih mehanizama. Posebno su važni njegovi radovi na analitičkoj sintezi zglobova polužnih mehanizama i njegova numerička metoda najboljeg približenja zadanoj funkciji pomoći tzv. Čebiševljevih polinoma. Čebiševljeve radove na analitičkoj sintezi mehanizama znatno su proširili Z. Š. Bloh i N. I. Levitski, a radove na strukturnoj analizi i sintezi P. I. Somon i L. V. Assur (1878—1920). Od plejade novijih sovjetskih znanstvenika, s područja teorije mehanizama, najpoznatije mjesto zauzima akademik I. I. Artobolevski (1905—). Njegovi radovi obuhvaćaju sva područja teorije mehanizama.

Velik doprinos znanosti o mehanizmima dao je i naš znanstvenik B. Ilić, profesor Mašinskih fakulteta u Beogradu, posebno svojom općom teorijom reduciranih mehanizama.

Nagli razvoj tehnike u XX stoljeću, posebno razvoj mehanizacije i automatisacije, omogućio je i potaknuo intenzivan razvoj teorije mehanizama, tako da je ona postala zasebno znanstveno područje.

### STRUKTURA MEHANIZAMA

Svaki mehanički sustav sastoji se od grupe materijalnih tijela, vezanih međusobno vezama koje ograničavaju slobodu gibanja svakog pojedinog tijela u sustavu. U pokretnim mehaničkim sustavima, za razliku od krutih sustava (npr. rešetke), gibanje jednog od tijela pobuđuje gibanje svih ostalih tijela u sustavu sustava.

Pokretni mehanički sustavi u tehniči postoje u mnogo različitim konstrukcijskim oblicima, obavljaju raznolike funkcije i poznati su pod različitim nazivima. Pokretni mehanički sustave može se prema nekim bitnim karakteristikama razvrstati u tri grupe, već prema tome da li se pomoći njih prenosi i transformira gibanje, sila ili energija (rad). Najčešći nazivi ovih grupa jesu pribori, sprave i strojevi.

**Mehanizam** je sastavni dio svih triju navedenih grupa pokretnih mehaničkih sustava i obuhvaća elemente pomoći kojih

se ostvaruje jedna od mehaničkih funkcija sustava. Tako npr. motor s unutrašnjim izgaranjem sadrži čitav niz mehanizama: motorni mehanizam, kojim se pravocrtno gibanje stapa pretvara u kružno gibanje koljenčastog vratila, krvuljni mehanizam za otvaranje i zatvaranje ventila, mjenjač brzina i lančani prijenos, kojim se rotacija vratila prenosi na grebenastu osovINU itd.

Kvalitativne i kvantitativne karakteristike prenesenog ili transformiranog gibanja ovise o strukturi mehanizma, tj. o broju sastavnih elemenata, njihovim geometrijskim parametrima i načinu na koji su međusobno vezani. Gibanje pogonskog dijela mehanizma pobuđuje gibanje svih ostalih njegovih dijelova prema potpuno određenom zakonu, koji proizlazi iz geometrijskih i kinematičkih karakteristika mehanizma.

**Članovi mehanizma.** Kruta materijalna tijela, od kojih je sastavljen mehanizam i koja se gibaju relativno jedno prema drugome, nazivaju se članovima mehanizma. Pod krutim tijelom podrazumijeva se tijelo u čvrstom agregatnom stanju, kojemu deformacije, zbog djelovanja vanjskih sila, ne utječu na kinematičke karakteristike mehanizma kojega su sastavni dio.

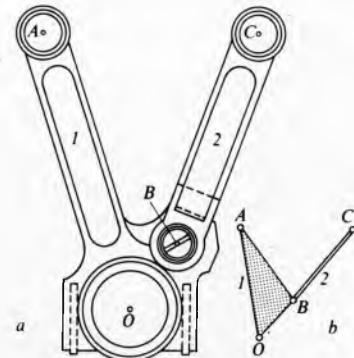
Ponekad se i tekućine i gipke veze ubrajaju u članove mehanizma, uz napomenu da je takva klasifikacija samo uvjetna. Naime, zanemarujući male deformacije članova, može ih se uvjetno smatrati krutim tijelima, pa takav pojam o krutom tijelu može obuhvatiti gipke veze ako se preko njih prenose vlačne sile, a također i tekućine jer su nestlačive pri prijenosu tlačnih sile.

U ovom će se članku članom mehanizma smatrati samo ona tijela kojih međusobno relativno gibanje utječe na kinematičke karakteristike cijelog mehanizma. Prema tome, među članove mehanizma neće se ubrajati tekućine i gipke veze u sastavu mehanizma, a ni one krute dijelove (kuglice, valjci) koji nemaju utjecaja na kinematička svojstva mehanizma.

Karakter relativnog gibanja dvaju spregnutih članova mehanizma ovisi o mjestu i načinu kako su međusobno vezani.

Mjesto i vrsta *geometrijskih elemenata veze* ovisne su karakteristike i svakog člana i cijelog mehanizma, te je zapravo razmatranje elemenata veza jedan od osnovnih sadržaja strukture i kinematike mehanizma.

Ostali faktori, kao što su materijal, konstrukcijski oblik i izvedba članova, ne utječu na kinematička svojstva mehanizma te se i ne razmatraju, osim u sklopu dinamičke analize. Time se prikazivanje članova mehanizma pojednostavljuje i svodi samo na kinematičku shemu, tj. na one elemente od kojih зависi kinematička svojstva i članova i cijelog mehanizma. Na sl. 1 prikazane su glavna 1 i sporedna 2 ojnice V-motora, i njihova kinematička shema. Kinematička shema obuhvaća samo vrstu veza među članovima i međusobni položaj ovih veza. Tako se



Sl. 1. Način spoja ojnica V-motora. a konstrukcijski izgled: 1 glavna ojnice, 2 sporedna ojnice, b kinematička shema

glavna ojnice V-motora u zglobu  $O$  vezuje za koljenasto vratilo, u točki  $A$  za stup i u točki  $B$  za sporednu ojnicu. Oblik glavne ojnice zamjenjuje se u kinematičkoj shemi trokutastom pločom.

Prema funkciji, položaju u sastavu mehanizma, načinu gibanja i konstrukcijskom obliku, članovi mehanizma imaju različite nazive. U stručnoj terminologiji najčešće se upotrebljavaju slijedeći nazivi:

Prema svojoj funkciji u mehanizmu, članovi su *vodeći*, odnosno *pogonski*, ako prenose gibanja na ostale članove mehanizma. Svi ostali članovi mehanizma, na koje se gibanje prenosi

preko pogonskih članova, nazivaju se *vodenim* ili *gonjenim* članovima. Oni članovi kojega gibanje obavlja mehaničku namjeru mehanizma jesu *radni* članovi.

S obzirom na način gibanja razlikuje se nekoliko tipova članova mehanizma. *Postolje* je član koji miruje i prema kome se svi ostali članovi relativno giblju. *Koljeno* ili ručica je član koji rotira za puni ciklus i vezan je uz postoljni član; ako se takav član može zakrenuti samo za određeni kut zakretanja, naziva se *nijihalicom*. *Klizač* je član mehanizma koji se klizno giba po postolju; tada je postoljni član *klizna staza*. Ako se klizač giba po pomičnom članu naziva se još i *kulisnim kamenom* ili jednostavno *kamenom*, a pomični član po kojem klizi *kulisom*. Pod kulisom se često podrazumijeva samo šuplji pomični član unutar kojega se giba kamen, međutim taj se naziv upotrebljava i kad klizač svojom šupljinom obuhvaća s vanjske strane pomični štap, jer su obje ove izvedbe prema kinematičkim karakteristikama identične.

Svi pokretni članovi, koji nisu u direktnom dodiru s postoljem nazivaju se još *veznima*, *sprežnima* ili *spojnim* članovima.

**Kinematički parovi.** Položaj tijela koje se giba u prostoru može se definirati pomoću šest nezavisnih koordinata kojima su vrijednosti funkcije vremena. Slobodno materijalno tijelo u prostoru ima šest stupnjeva slobode gibanja. Promatrano s obzirom na osi pravokutnog koordinatnog sustava, moguća gibanja jesu: tri translacije po pravcima koordinatnih osi i tri rotacije oko tih osi.

Slobodno materijalno tijelo ne može biti član mehanizma, jer se članovi mehanizma gibiju prema potpuno određenom zakonu i ne mogu imati šest stupnjeva slobode. Broj stupnjeva slobode gibanja svakog člana mehanizma ograničen je njegovim vezama s drugim tijelima u sastavu mehanizma.

Kombinacija od dva materijalna tijela u sastavu mehanizma, koja ograničava slobodu gibanja svakome od njih naziva se *kinematičkim parom*. O vrsti veze među članovima u kinematičkom paru ovisi s koliko je kinematičkih uvjeta ta veza ograničila njihovo međusobno gibanje, odnosno za koliko je stupnjeva slobode smanjila mogućnost gibanja svakoga od njih.

*Red kinematičkog para* određuje broj stupnjeva slobode relativnog gibanja dvaju članova mehanizma. Kinematički parovi mogu biti prvoga, drugoga, trećega, četvrtoga i petog reda. Kinematički par nultog reda ne postoji, jer se članovi takva para ne bi gibali relativno jedan prema drugome i sačinjavali bi jedinstveni član mehanizma. Isto tako je razumljivo da ne mogu postojati kinematički parovi šestog reda, jer bi tada članovi bili slobodna materijalna tijela bez međusobne veze. Moguće kombinacije nezavisnih rotacija i translacija članova u kinematičkom paru za moguće stupnjeve slobode relativnog gibanja prikazane su u tabl. 1.

Tablica 1  
NEZAVISNA RELATIVNA GIBANJA ČLANOVA  
KINEMATIČKOG PARA

Red para	Moguća gibanja		
	R	T	
$k = 1$	R	T	
$k = 2$	RR	TR	
$k = 3$	RRR	TRR	TTR
$k = 4$		TRRR	TTRR
$k = 5$			TTRRR

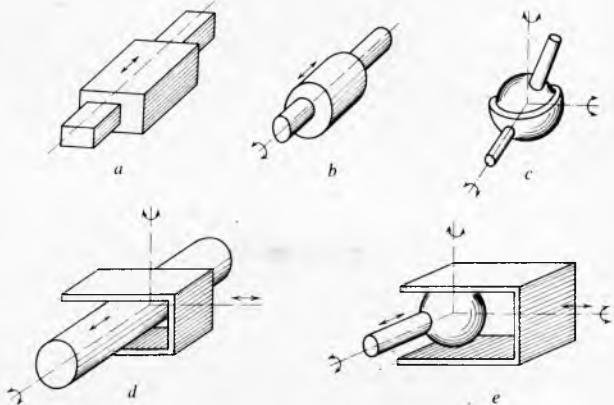
R rotacija, T translacija

Da se odredi red kojemu pripada kinematički par i da se analizira karakter relativnog gibanja koje par omogućuje, najpogodnije je pretpostaviti da je jedan od dva spregnuta člana nepomičan. Tada se relativno gibanje među članovima para svodi na apsolutno gibanje pomičnog člana (sl. 2).

Članovi kinematičkih parova trebaju biti za vrijeme međusobnog relativnog gibanja stalno u međusobnom dodiru, i to ili u direktnome, ili u indirektnome preko umetnutih elemenata veze. To tzv. zatvaranje parova može biti kinematičko ili dinamičko.

*Kinematičko zatvaranje* parova postiže se konstrukcijskim oblikom članova. Svi parovi na sl. 2 zatvoreni su kinematički. *Dinamičko zatvaranje* postiže se silama, i to težinom članova (sl. 5b), inercijskim silama i elastičnim silama opruga.

*Niži i viši kinematički parovi.* Članovi kinematičkih parova mogu se dodirivati površinom, linijom ili točkom. Prema vrsti dodira između članova, kinematički parovi dijele se na niže i više. Niži kinematički parovi (sl. 2a, b i c) jesu oni kojih se članovi dodiruju površinom, dok se članovi viših kinematičkih parova (sl. 2d i e) dodiruju linijom ili točkom.



Sl. 2. Red kinematičkog para. a par 1. reda (jedna translacija), b par 2. reda (jedna translacija i jedna rotacija), c par 3. reda (tri rotacije), d par 4. reda (dvije translacije i dvije rotacije), e par 5. reda (tri rotacije i dvije translacije)

Relativno gibanje među dodirnim površinama članova nižih parova jest klizanje jedne površine po drugoj, te su niži parovi klizni. Relativno gibanje viših parova može biti klizanje, krotrljanje ili istodobno i jedno i drugo.

Niži kinematički parovi imaju drugačija konstrukcijska i eksploatacijska svojstva nego viši kinematički parovi.

Članovi nižih parova dodiruju se površinom, što omogućuje prenošenje većih sila s jednog člana mehanizma na drugi. Veličina tih sila ovisi o dozvoljenom površinskom tlaku materijala od kojeg je izrađen član i o veličini dodirne površine. Članovi viših parova mogu prenositи manja opterećenja, jer se dodiruju točkom ili linijom, tj. na malim površinama. Kontakt na malim dodirnim površinama uzrokuje velika lokalna opterećenja i dovodi do brzeg habanja dodirnih površina. Da bi se smanjila kontaktna naprezanja, potrebno je povećati mehaničku čvrstoću dodirnih površina i povećati polumjer zakrivljenosti dodirnih elemenata. Zbog habanja članova viših parova pojavljuju se odstupanja od zakona gibanja članova, neravnomerni rad mehanizma i dopunska udarna opterećenja.

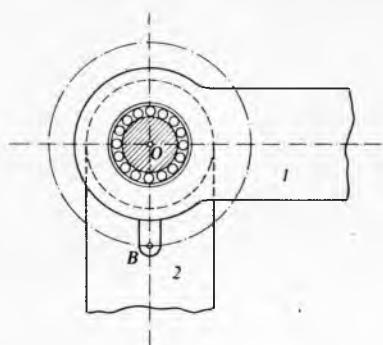
Mehanizmi s nižim kinematičkim parovima imaju prednost da se pomoću njih, uz pogodno uravnoteženje, postiže pravilno funkcioniranje mehanizma i pri velikim brzinama gibanja. Zato se nastoji da se, osobito za prenošenje većih sila, mehanizmi s višim parovima zamijene mehanizmima s nižim parovima.

Osnovni nedostatak kliznih parova (a to su svi niži kinematički parovi) jest pojava trenja na dodirnim elementima. Za svladavanje trenja troši se energija, odnosno snaga, što smanjuje stupanj iskoristivosti mehanizma. Taj se nedostatak može izbjegći ako se između dodirnih površina umetnu kotrljajući elementi, kao što su valjci i kuglice, čime se trenje klizanja pretvara u trenje kotrljanja. Dodavanjem umetnutih elemenata ne mijenjaju se kinematička svojstva para, a niži se parovi na taj način pretvaraju u više kinematičke parove.

*Reverzibilnost kinematičkih parova* jedno je od njihovih najvažnijih svojstava.

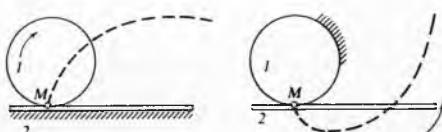
Ako se za rotoidni zglob (sl. 3) pretpostavi da je član 1 nepomičan, onda član 2 ima jedan stupanj slobode gibanja, i to rotaciju oko točke  $O$ . S obzirom na član 1, pri gibanju člana 2 opisat će njegova točka  $B$  kružnu putanju promjera  $OB$ . Ako se sad pretpostavi da je član 2 nepomičan, a član 1 pomičan, tada će pisaljka pričvršćena na član 1 u točki koja se poklapa

s točkom  $B$  opisati s obzirom na član 2 također kružnu putanju promjera  $OB$ . To znači da se putanja točke  $B$  s obzirom na član 1 poklapa s putanjom točke  $B$  s obzirom na član 2.



Sl. 3. Reverzibilni kinematički par

Dakle, u ovome kinematičkom paru postoji *obrnutost* ili *reverzibilnost* među gibanjima obaju članova para. Drugačije je u kinematičkom paru sastavljenom od zupčanika i zupčaste letve (sl. 4). Kad se zupčanik kotrlja po zupčastoj letvi, točka  $M$  zupčanika opisuje cikloidu. Ako je, međutim, zupčanik nepomičan, koincidentna točka  $M$  pri relativnom gibanju zupčaste letve opisat će evolventu. Taj kinematički par nema, dakle, svojstva obrnutosti kretanja, to je *ireverzibilan par*.



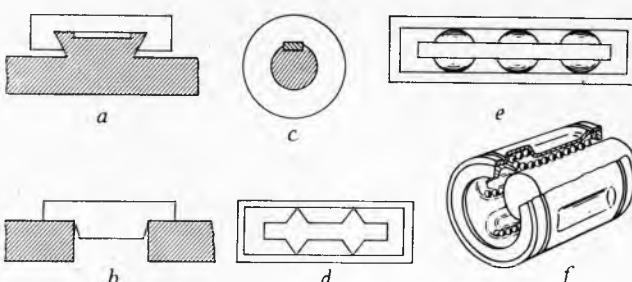
Sl. 4. Irreverzibilni kinematički par. 1 zupčanik, 2 zupčasta letva

Oba kinematička para su ravna (sl. 3 i 4) jer trajektorije svih točaka od oba člana svakog para leže u međusobno平行nim ravninama. U prostornim kinematičkim parovima trajektorija jedne točke reverzibilnog para gibrat će se uvijek po istoj površini, bez obzira koji je od članova pomičan. Lako je dokazati da su svi niži kinematički parovi reverzibilni, ali i među višim parovima ima reverzibilnih, kao npr. rotacijski viši par na sl. 3.

Razvrstavanje kinematičkih parova na reverzibilne i irreverzibilne ne poklapa se s razvrstavanjem na niže i više parove. Razvrstavanje parova prema reverzibilnosti relativnog gibanja članova zapravo je najvažnija klasifikacija kinematičkih parova.

**Reverzibilni kinematički parovi.** To su sljedeće grupe parova, odnosno zglobova: translatoидни, rotoidni, helikoidni, cilindrični i sferni zglob.

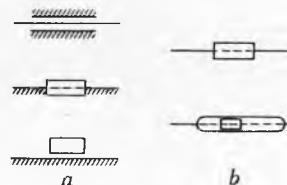
**Translatoидni zglob** (sl. 5 i 6) je kinematički par prvog reda koji omogućuje relativnu translaciju spregnutih članova. Taj je zglob najčešće izrađen kao niži kinematički par s dodirom po ravnim ili cilindričnim površinama (sl. 5a do c). Cilindrični dodirni elementi omogućuju i relativnu rotaciju, pa stoga oni sačinjavaju translatooidni zglob jedino ako je pomoću uzdužnog klina ili drugim konstrukcijskim rješenjem onemogućena rela-



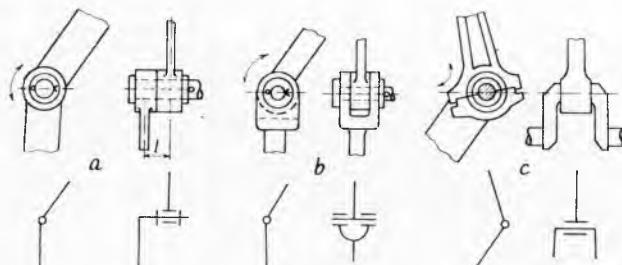
Sl. 5. Translatooidni zglobovi. a, b i c niži parovi, d, e i f viši parovi

tivna rotacija. Tako npr. cilindar i stup motora s unutrašnjim izgaranjem sačinjavaju translatooidni par, jer je relativna rotacija sprječena vezom štapa sa stupajicom. Ako se preko translatooidnog zgloba prenose mala opterećenja, primjenjuju se viši kinematički parovi s dodirom linijama (sl. 5d). Također, radi smanjenja trenja, umeću se u kinematički par dodatni elementi, kao što su kuglice i valjci u posebnim karikama (sl. 5e) ili žljebovima (sl. 5f). Takvi zglobovi s ugrađenim valjnim elementima spadaju u više kinematičke parove. Sheme translatooidnih zglobova prikazane su na sl. 6.

Sl. 6. Kinematičke sheme translatooidnih zglobova. a parovi s jednim nepomičnim članom, b parovi s oba pomična člana

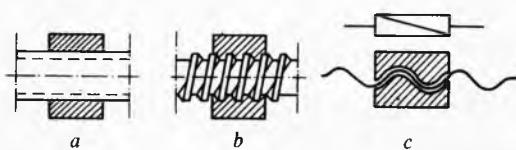


**Rotoidni zglob** (sl. 7) je kinematički par prvog reda koji omogućuje rotacijsko gibanje spregnutih članova. Osnovni elementi nižih rotacijskih parova jesu cilindrične dodirne površine koje omogućuju relativnu rotaciju, te bočne ravnine koje omogućuju relativnu translaciju. Rotoidni klizni zglobovi izrađuju se i kao viši parovi s dodirom linijama ili točkom. Rotacijski parovi nisu osjetljivi na promjenu temperature, i često se primjenjuju u radnim strojevima za preciznu mehaniku (v. *Fimehanička tehnika*, TE 5, str. 416). U više rotoidne zglobove spadaju i valjkasti ležaji koji se često primjenjuju zbog znatno manjih gubitaka zbog trenja.



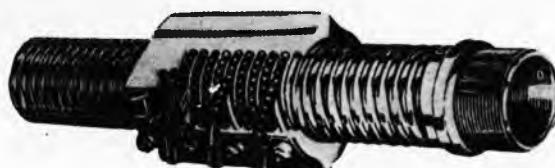
Sl. 7. Rotoidni zglobovi i njihove kinematičke sheme

**Helikoidni zglob** (sl. 8), odnosno vijčani kinematički par, ima vijčanu (helikoidnu) dodirnu površinu. Relativno gibanje među članovima para sastoji se iz istodobne rotacije i translacije.



Sl. 8. Helikoidni zglob. a načrt zgloba, b konstrukcijski izgled zgloba, c kinematičke sheme zgloba

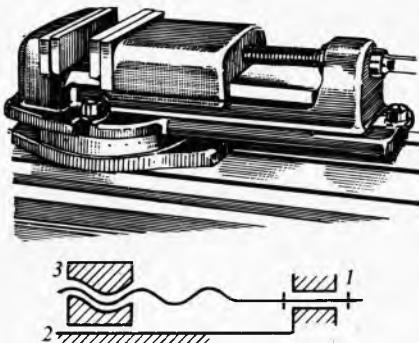
To je ipak kinematički par prvog reda, jer su rotacija i translacija međusobno zavisne. Naime, relativnom rotacijom za kut  $\varphi$  određena je i vrijednost relativne translacije  $\Delta x = \frac{h}{2\pi} \varphi$ , gdje je  $h$  uspon vijčane dodirne površine, tj. veličina pomaka u smjeru uzdužne osi vijka pri zakretu za  $\varphi = 2\pi$ . Helikoidni zglob je



Sl. 9. Helikoidni zglob s ugrađenim kuglicama u narezu vijka

prostorni kinematički par, jer je trajektorija bilo koje točke pomicnog člana prostorna krivulja na cilindričnoj površini. I helikoidni par se može izraditi, osim u obliku kliznog para, i u obliku valjnog para (višega kinematičkog para) tako da se ugrade cijevi kroz koje cirkuliraju kuglice (sl. 9).

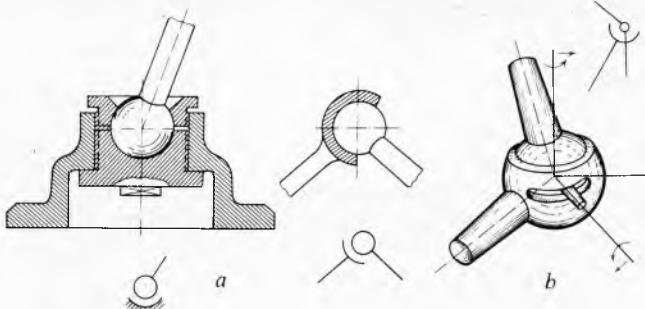
Tročlanini mehanizam stazeča na sl. 10 sadrži sva tri dosad navedena zglobova: translatoidni, rotoidni i helikoidni. Ta tri tipa ujedno su i jedini zglobovi s jednim stupnjem slobode.



Sl. 10. Mechanizam stazeča. 1 rotoidni zglob,  
2 translatoidni zglob, 3 helikoidni zglob

**Cilindrični zglob** je kinematički par drugog reda, koji omogućuje nezavisno rotacijsko i translacijsko gibanje članova para. Cilindrični zglob je prostorni kinematički par, jer se točka pomicnog člana giba po cilindričnoj površini kao i u helikoidnom zglobovu. Za praktičnu primjenu izrađuju se kao niži kinematički par, a vrlo rijetko kao viši kinematički par. Cilindrični zglob u obliku teleskopske cijevi sastavni je dio mehanizma automobilskog okvira (šasije). Automobilski prigušnici (amortizeri) također su izrađeni u obliku teleskopske cijevi. Osnovno gibanje je relativna translacija u smjeru uzdužne osi prigušnika, a moguća je i rotacija, dovoljna da prati primjerene relativne kutne pomake među osima rotoidnih zglobova na krajevima prigušnika.

**Sferni zglob** je prostorni niži kinematički par koji omogućuje tri relativne rotacije među spregnutim članovima. Zatvaranje sfernog zglobova uvijek je kinematičko. Najčešće se primjenjuje u sklopu prostornih mehanizama (sl. 11a). Sferni zglob s palcem je prostorni zglob s dva stupnja slobode gibanja. On dozvoljava rotaciju oko osi koja se poklapa s uzdužnom osi palca, te rotaciju oko osi okomite na ravnicu kroz prelez u kom se giba palac (sl. 11b).



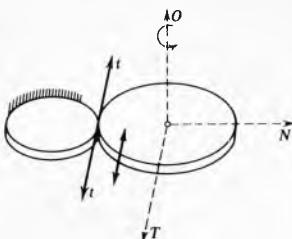
Sl. 11. Sferni zglob. a prostorni zglob sa tri stupnja pokretljivosti, b prostorni zglob s palcem

Svi reverzibilni kinematički parovi, za razliku od irreverzibilnih, imaju potpuno određen karakter gibanja spregnutih članova. Zbog toga članovi u sastavu reverzibilnog para mogu tvoriti dvočlani mehanizam. Takvi dvočlani mehanizmi, a posebno mehanizmi s kinematičkim parom prvog reda, mnogo se primjenjuju u tehnici: u turbinama, elektromotorima, generatorima itd. Rotirajući vijak (Arhimedov vijak) koji potiskuje sijeno u komoru za prešanje, također je dvočlani mehanizam s rotacijskim zglobovom. Broj stupnjeva slobode kinematičkog para reda većeg od prvog može se smanjiti zbog dodatnih uvjeta koje

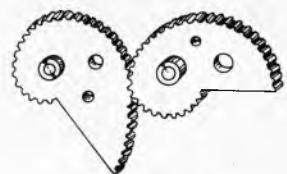
tom paru nameću ostali članovi mehanizma. Stap i cilindar motora po svojoj izvedbi, promatrani izolirano, jesu cilindrični par s dva stupnja slobode: translacija u smjeru uzdužne osi cilindra i rotacija oko te osi. Međutim, u sklopu mehanizma oni sačinjavaju translatoidni zglob s jednim stupnjem slobode, jer veze s ostalim članovima mehanizma onemogućuju rotaciju.

**Ireverzibilni parovi.** Zbog irreverzibilnosti karaktera gibanja članova irreverzibilnih parova može se odrediti samo u sklopu cijelog mehanizma. Ireverzibilni parovi, koji se primjenjuju u postojećim mehanizmima, mogu se razvrstati na frikcijske, zupčaste, krvuljne (grebenaste) i parove s gipkim vezama.

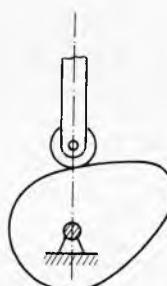
**Frikcijski kinematički par** ostvaruje relativno gibanje među članovima trenjem među dodirnim elementima. Zatvaranje frikcijskih parova je dinamičko. Ono se u sklopu mehanizma postiže pritiskom među frikcijskim kružnim pločama koje sačinjavaju kinematički par. Red irreverzibilnog para može se razmotriti na ravnom cilindričnom paru (sl. 12). Članovi tog para moraju biti u neprekidnom dodiru, pa je zato nemoguća translacija u smjeru okomitom na ravninu para. Moguća je, prema tome, samo translacija u smjeru tangente  $t$  i rotacija oko osi  $O$  okomite na ravninu translacije. Frikcijski par ima dva stupnja slobode gibanja, tj. to je par drugog reda. Rezultanta dvaju nezavisnih gibanja njegovih članova jest relativno valjanje s klizanjem ili bez njega. Prostorni frikcijski parovi u sastavu mehanizma frikcijske preše također su parovi drugog reda. Promatran odvojeno od mehanizma, frikcijski par bio bi par petog reda jer mu je tada nametnuta samo jedna veza, a to je obvezan dodir među članovima para.



Sl. 12. Frikcijski kinematički par



Sl. 13. Zupčasti par



Sl. 14. Krivuljni par



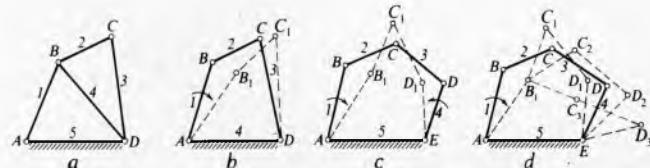
Sl. 15. Par s gipkim vezama

**Zupčasti parovi**, poput frikcijskih, bez obzira na to da li su ravnii ili prostorni, spadaju u kinematičke parove drugog reda. Postoje u obliku parova s vanjskim i unutrašnjim ozubljenjem te u obliku koničnih, vijčanih i pužnih parova. Relativno gibanje među dodirnim površinama svih osnovnih oblika zupčastih parova sastoji se od valjanja uz istodobno klizanje. Zupčasti parovi u sastavu mehanizma omogućuju transformaciju rotacijskog gibanja u translacijsko i obrnuto (sprega zupčanika i zupčaste letve), međutim, najčešće prenose rotacijsko gibanje među paralelnim osovinama (cilindrični zupčanici), među osovinama kojima se pravci sijeku (konični i kutni zupčanici) i među ukrštenim osovinama (vijčani, hipoidni i pužni parovi). Za posebne namjene izrađuju se i zupčasti parovi sa zupčanicima koji nisu okruglog oblika (sl. 13).

*Kriviljuni par* (sl. 14) sastoji se od kriviljune (grebenaste) ploče i pomicaljke (poluge). U prostornom paru ploča je zamijenjena cilindrom. Kriviljni par je irreverzibilni par drugog reda. U sklopu kriviljnih mehanizama taj par omogućuje transformaciju gibanja kriviljnog člana u oscilatorno pravocrtno ili kružno gibanje pomicaljke. Ima vrlo široku primjenu i nezamjenljiv je kao sastavni dio mehanizma automata i mehanizma za pomicanje ventila u motorima s unutrašnjim izgaranjem. Relativno gibanje dodirnih površina grebenastog člana i pomicaljke sastoji se od rotacije i od translacije u smjeru tangente. Da bi se klizanje pri translaciji svelo na najmanju mjeru, vrlo često je dodir medju članovima para izveden posredno preko valjčića.

*Parovi s gipkim vezama*. Članovi takvih parova nisu u direktnom dodiru, već posredno preko gipkih veza: remena, trake, užeta ili lana. Gipke veze nepromjenljive duljine sastavni su dio mehanizma za prijenos rotacije, odnosno snage, s jedne osovine na drugu. Veze promjenljive duljine (užad i lanci) sastavni su dio mehanizma za podizanje i transport tereta. Karakteristike para ne ovise o duljini gipke veze, već samo o geometrijskim parametrima spregnutih članova i o načinu kako su članovi spregnuti gipkom vezom. Tako su kinematičke karakteristike remenskog prijenosa (sl. 15) identične s karakteristikama fričijskog ili zupčanog prijenosa s promjerima članova jednaka- im promjerima remenica na slici; relativni smjer rotacije može se mijenjati ukrštenim krakovima gipke veze. Svi parovi s gipkim vezama jesu parovi drugog reda. Kao i svi ostali irreverzibilni parovi, i parovi s gipkim vezama u sastavu mehanizma moraju imati najmanje tri člana. Tako mehanizam remenskog prijenosa, osim dviju remenica, ima i postolje koje sa svakom remenicom tvori po jedan rotacijski par.

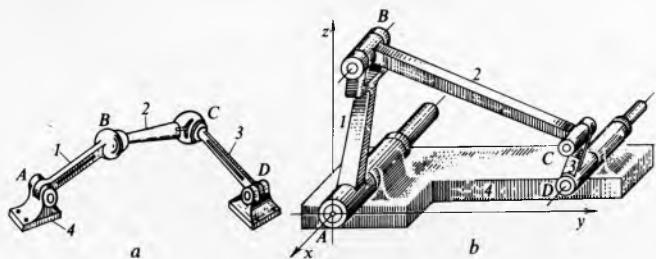
**Pokretljivost mehanizma.** Kinematički lanac (sl. 16) sustav je članova vezanih međusobno kinematičkim zglobovima. Po svojim kinematičkim karakteristikama, lanci mogu biti kruti, prisilni i slobodni. Lanac je krut ako se njegovi članovi ne mogu gibati relativno jedan prema drugome (sl. 16a). Takav lanac je npr.



Sl. 16. Kinematički lanac. a) kruti lanac, b) prisilni lanac s jednim stupnjem pokretljivosti, c) prisilni lanac sa dva stupnja pokretljivosti, d) slobodni lanac

rešetkasti nosač sa zglobove vezanim članovima: ponaša se kao kruta ploča i u sastavu složenog mehanizma može biti jedan od složenih članova. Ako se kinematičkom lancu (sl. 16b), kojemu je jedan član nepomičan, zakrene član 1 za određeni kut, svi će ostali pokretni članovi zauzeti potpuno određeni položaj. Isto tako i u preostalih članovima lanca (sl. 16c) zauzeti određeni položaj ako se zakrenu za određeni kut članovi 1 i 4. Oba su navedena lanca prisilna. Međutim, ako se u lancu (sl. 16c) pokreće samo član 1, gibat će se i ostali pokretni članovi, ali ne prema određenom zakonu, već će zauzeti neki od beskonačno mnogo mogućih položaja (sl. 16d). Takav lanac je slobodan. Samo prisilni kinematički lanac ispunjava sve uvjete mehanizma. Prema tome, od svih kinematičkih lanaca, mehanizam je jedino kinematički lanac s jednim nepomičnim članom (postoljem) i sa zadanim gibanjem za onoliko članova koliko je potrebno da bi se svi ostali članovi gibali potpuno određeno. Oni članovi mehanizma koje je potrebno direktno gibrati da bi se pobudilo određeno gibanje svih ostalih članova, nazivaju se *pogonskim članovima*. Broj pogonskih članova mehanizma određuju i stupanj njegove pokretljivosti. Stupanj pokretljivosti mehanizma određen je i brojem nezavisnih parametara koji definiraju položaj pokretnih članova mehanizma, tj. brojem nezavisnih koordinata koje određuju položaj pogonskih članova. Stupanj pokretljivosti mehanizma može se izraziti i brojem članova koje, osim postolja, treba imobilizirati da bi se mehanizam pretvorio u kruti sustav. Zakretanjem zglobova A i D, dok im osi ne postanu paralelne, prostorni mehanizam (sl. 17a) svodi se na

mehanizam s komplanarnim gibanjem članova; prostorni zglobovi B i C omogućuju tada samo relativnu rotaciju oko osi okomitih na ravnicu komplanarnog gibanja. Ako se zglobovi B i C zamijene rotoidnim zglobovima prvog reda, dobit će se mehanizam na sl. 17b. Dva mehanizma (sl. 17) razlikuju se u slijedećem: prostorni mehanizam (sl. 17a) pokretljiv je i kad osi zglobova A i D nisu međusobno paralelne, dok ravni zglobni četverokut (sl. 17b) ima samo jedan određeni položaj zglobnih osi i njegovi članovi ne mogu ni u kojim uvjetima da se prostorno gibaju. Ravnom zglobnom četverokutu nametnute su opće veze koje proizlaze iz njegove strukture.



Sl. 17. Zglobni četverokut. a) prostorni, b) ravni

Stupanj pokretljivosti mehanizma ovisi o broju njegovih članova, te o broju, vrsti i položaju kinematičkih parova od kojih je mehanizam sastavljen. Formula koja izražava ovisnost stupnja pokretljivosti mehanizma o njegovim strukturalnim elementima naziva se strukturalna formula. Strukturalna formula prostornog mehanizma sa  $n$  članova bez općih veza glasi:

$$S = 6(n - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (1)$$

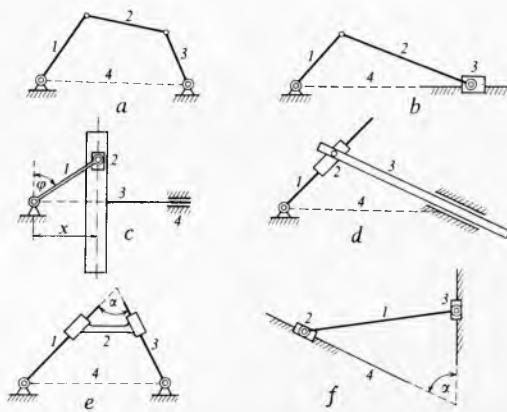
gdje je  $S$  stupanj pokretljivosti mehanizma,  $p_1 \dots p_5$  broj parova 1. do 5. reda. Za ravne mehanizme (tj. mehanizme kojima su nametnute tri opće veze, sl. 17b) strukturalna formula poprima oblik:

$$S = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2. \quad (2)$$

#### Transformiranje mehanizama

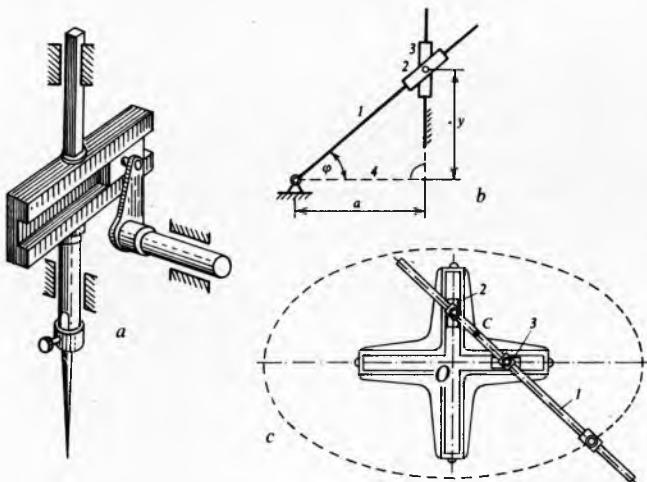
Osnovne moguće transformacije mehanizama mogu se najbolje razmotriti na ravnim četverozglobnim mehanizmima. Ravnim četverozglobnim mehanizmima primjenjuju se u tehničkoj praksi češće od drugih tipova zglobnih mehanizama; za njih dolazi u obzir više modifikacija i transformacija, te su to i najjednostavniji zglobnopolužni mehanizmi.

Na sl. 18 prikazane su osnovne modifikacije ravnog četverozglobnog mehanizma. Te modifikacije mogu imati samo rotoidne zglobove, a mogu također imati jedan ili najviše dva translationalna zglobova. Osnovna modifikacija je zglobnopolužni četverokut (sl. 18a). Kutni pomak pogonskog člana (koljena) 1 prenosi se preko spojne poluge (ojnice) 2 na kutni pomak go-



Sl. 18. Modifikacija četverozglobnog mehanizma. a) zglobnopolužni četverokut, b) stapti (klipni) mehanizam, c) mehanizam sa dvostrukim klizačem, d) kulisnoklizni mehanizam, e) dvokulisi mehanizam, f) dvoklizni mehanizam

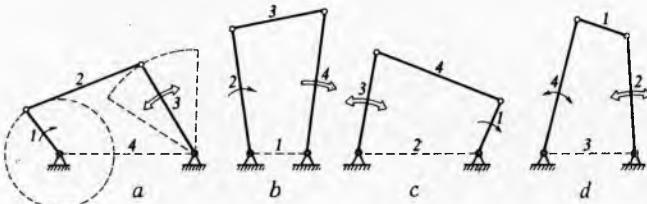
njenog člana (ručice, odnosno njihalice) 3. Potpuna ili djelomična rotacija pogonskog člana pretvara se u rotacijsko ili njihajno gibanje gonjenog člana, već prema odnosu među dužinama pojedinih članova. Stupni mehanizam ili koljenastoklizni mehanizam (sl. 18b) pretvara rotacijsko gibanje u pravocrtno oscilatorno gibanje i obrnuto. Primjenjuje se u svim stupnim motorima i stupnim radnim strojevima. Mehanizam s dvostrukim klizačem (sl. 18c) naziva se još i sinusnim mehanizmom, jer je apsisa  $x$  proporcionalna sinusu kuta  $\varphi$ , a poznat je i pod nazivom *Wolfsova kulisa*. Kulisni kamen 2 izvodi kružnu translaciju. Na sl. 19a vidi se primjena te modifikacije na mehanizam za vođenje igle šivačeg stroja. Kulisnoklizni mehanizam (sl. 18d) rjeđe se upotrebljava, jer se koljeno može okretati samo za kut manji od  $180^\circ$ . Jedna od varijanti tog mehanizma poznata je pod nazivom *tangensni mehanizam* (sl. 19b), jer je  $y = a \tan \varphi$ . U dvokulisnom (Oldheimovom) mehanizmu (sl. 18e) obje se kulise zakreću za jednaki kut. Konstrukcijski kut  $\alpha$  je najčešće  $90^\circ$ . Klizači dvokliznog mehanizma (sl. 18f) oscilatorno se gibaju po pravocrtnim kliznim stazama. I u ovom mehanizmu najčešće je  $\alpha = 90^\circ$ , pa sve točke spojne poluge opisuju elipse, osim točke C koja opisuje kružnicu (sl. 19c). Zato takav mehanizam služi za crtanje elipsa i naziva se *elipsografom*.



Sl. 19. Primjena modifikacija četverozglobnog mehanizma. a) mehanizam za vođenje igle šivačeg stroja, b) tangensni mehanizam, c) elipsograf

**Promjena postoljnog člana** najbitnija je transformacija jer mnogo utječe na kinematička svojstva mehanizma, tj. predstavlja tzv. *kinematičku inverziju*.

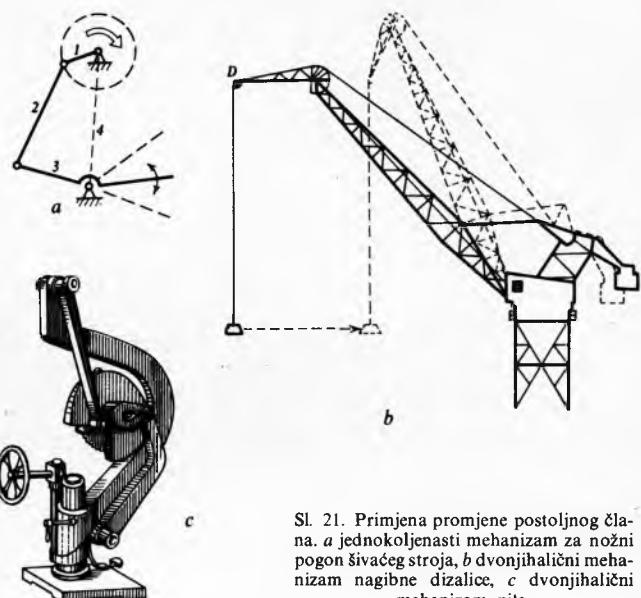
Zglobnopolužni četverokutni mehanizam s različitim dužinama članova ima kombinirano gibanje rotirajućeg koljena 1 i njihalice 3 (sl. 20a). Da bi se takvo gibanje ostvarilo, koljeno 1 mora biti najkraciči član mehanizma, a također zbroj duljina koljena 1 i postolja 4 treba da bude manji od zbroja duljina ostalih dvaju članova. Postolje 4 je u četverokutu na sl. 20a najduži član. Ako se učvrsti najkraciči član 1 (sl. 20b), rotirat će pogonski član 2 i vođeni član 4. Pri tom zbroj duljine postolja 1 i svakog od susjednih članova 2 ili 4 treba da je manji od zbroja ostalih dvaju članova. Ako se za postolje uzme član 2, opet se dobiva kombinacija rotacijskog i njihajnog gibanja



Sl. 20. Promjena postoljnog člana. a) kombinacija rotacije pogonskog člana i njihanja gonjenog člana, b) rotacija pogonskog i gonjenog člana, c) kombinacija rotacije pogonskog člana i njihanja gonjenog člana, d) njihanje pogonskog i gonjenog člana

(sl. 20c), a ako se za postoljni član uzme 3, tako da najkraciči član 1 postane spojni član, dobiva se mehanizam sa dvije njihalice (sl. 20d). Promjena postoljnog člana pobudila je, dakle, promjenu karaktera relativnog gibanja članova. Kako su primjeri prikazani na sl. 20a i 20c identični s obzirom na osnovne kinematičke karakteristike mehanizma, to postoje tri različite kinematičke inverzije zglobnog četverokuta.

Prva inverzija (sl. 20a i c) daje *jednokoljenasti mehanizam*. Ta se inverzija primjenjuje vrlo često. Takvi su mehanizmi s nožnim pedalom za pretvaranje gibanja njihalice u rotaciju koljenčaste osovine, kao što je mehanizam šivačeg stroja na sl. 21a.

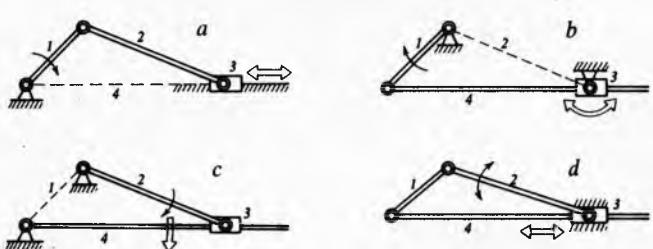


Sl. 21. Primjena promjene postoljnog člana. a) jednokoljenasti mehanizam za nožni pogon šivačeg stroja, b) dvonjihalični mehanizam nagibne dizalice, c) dvonjihalični mehanizam pile

Druga inverzija (sl. 20b) naziva se *dvokoljenastim mehanizmom*. Ti mehanizmi, pored ostalih primjena, sastavni su dio različitih tipova grebenastih kola na poljoprivrednim strojevima te kola s lopatama koje pogone riječne brodove.

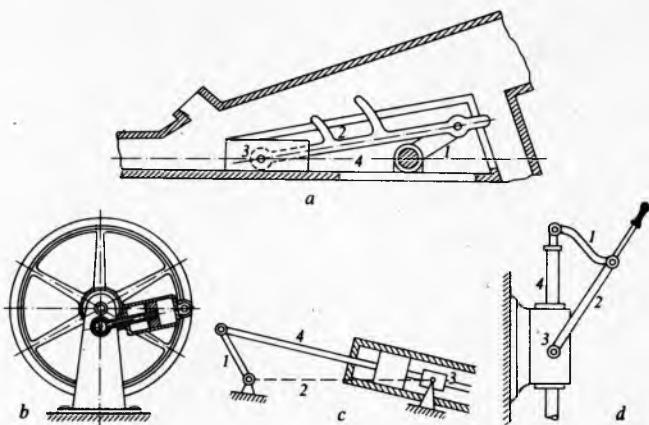
Treća varijanta daje *dvonjihalični mehanizam*. Takav mehanizam je i mehanizam nagibne dizalice (sl. 21b). Geometrijski su parametri odabrani tako da se točka D na spojnom članu približno horizontalno giba i tako primiče ili odmiče kuku za teret ne mijenjajući joj visinu. Mehanizam pile (sl. 21c) također je dvonjihalični mehanizam.

Promjenom postoljnog člana stupnog mehanizma dobivaju se kinematičke inverzije prikazane na sl. 22. Kad je koljeno 1 kraće od spojne poluge 2, moguće su tri kinematičke inverzije toga mehanizma.



Sl. 22. Kinematičke inverzije stupnog mehanizma. a) aksijalni stupni mehanizam, b) mehanizam s rotirajućom kulisom, c) mehanizam s njihajućim klizačem, d) njihalično-klizni mehanizam

Prva inverzija je *aksijalni stupni mehanizam* (sl. 22a), koji se primjenjuje u motorima i radnim strojevima (pumpe). Pogonski je član ili koljeno ili stap, već prema tome da li mehanizam služi motoru ili radnom stroju. Osnovni zadatak takva mehanizma jest da pretvara rotacijsko gibanje u pravocrtno oscilatorno, odnosno obrnuto. Taj mehanizam upotrebljava se u motorima s



Sl. 23. Primjena inverzije stapnog mehanizma. a) uređaj za prešanje sijena, b) sisaljka s rotirajućim cilindrom, c) mehanizam za zatvaranje vrata, d) ručna sisaljka

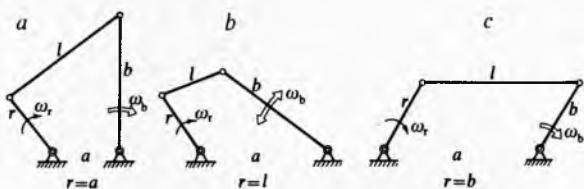
unutrašnjim izgaranjem, a na sl. 23a prikazana je njegova primjena u uređaju za prešanje sijena.

Druga inverzija daje kulisni mehanizam s *rotirajućom kulisom* (sl. 22b). Sl. 23b prikazuje tu inverziju primjenjenu u sisalkama s rotirajućim cilindrom.

Treća inverzija je mehanizam s *njihajućim klizačem* (sl. 22c), koji služi u motoru s oscilatorno pravocrtno gibanje člana 4, a upotrebljava se i kao mehanizam za zatvaranje vrata.

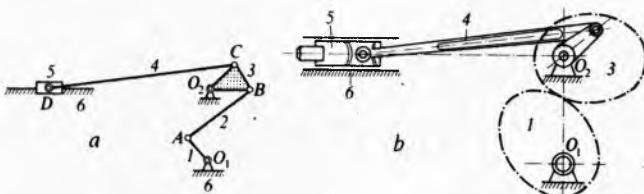
Postoljni član četvrete inverzije je *klizač* (sl. 22d). Njihanje člana 2 pretvara se u oscilatorno pravocrtno gibanje člana 4. Na sl. 23d prikazana je primjena tog *njihalično-kliznog mehanizma* na ručnu sisaljku.

**Promjena duljine članova.** Pri transformaciji zglobnog četverokuta promjenom postoljnog člana odnos među duljinama pojedinih članova ima bitan utjecaj na kinematička svojstva mehanizma. Ta *kinematička osjetljivost* ističe se kad su dva člana zglobnog četverokuta jednake duljine; tada i preostala dva člana moraju imati jednake duljine. Te su modifikacije prikazane na sl. 24.



Sl. 24. Promjena duljine članova zglobnog četverokuta. a) jednake duljine pogonskog  $r$  i postoljnog  $a$  člana, b) jednake duljine pogonskog  $r$  i sprežnog  $l$  člana, c) jednake duljine pogonskog  $r$  i vođenog  $b$  člana

Zanimljiv je još i *zglobovi antiparalelogram* koji nastaje ukrštanjem članova paralelograma. Dok su na sl. 24c kutne brzine obaju koljena paralelograma međusobno jednake ( $\omega_r = \omega_b$ ) i istog smjera, u antiparalelogramu se pri ravnomjernom zakretanju pogonskog koljena  $r$  vođeni član zakreće neravnomjerno, a odnos smjerova rotacije ovisi o tome da li je dulji ili kraći član nepomičan. Na sl. 25a antiparalelogram je primjenjen za pogon preše velikog tlaka. Mehanizam je serijska sprega antiparalelograma  $O_1, A, B, O_2$  i stapanog mehanizma  $O_2, C, D$ .

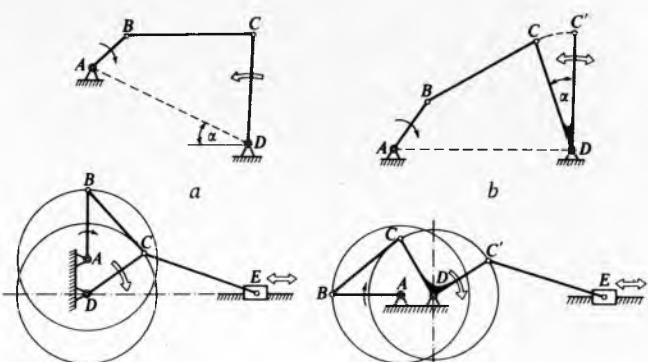


Sl. 25. Antiparalelogram. a) kinematička shema mehanizma preše velikog tlaka, b) antiparalelogram zamijenjen parom eliptičnih zupčanika 1 i 3

Relativno gibanje među pogonskim i gonjenim članom antiparalelograma može se točno izvesti i pomoću para eliptičnih zupčanika s rotacijskim zglobovima u fokusima (sl. 25b). Time se postiže velika brzina povratnog hoda uz jednoliko gibanje stapa u radnom hodu, što je osnovni kinematički zahtjev za rad preše. Ti se zahtjevi ne mogu ostvariti pomoću stapanog mehanizma (sl. 25a) s jednolikom rotacijom ručice  $O_2C$ .

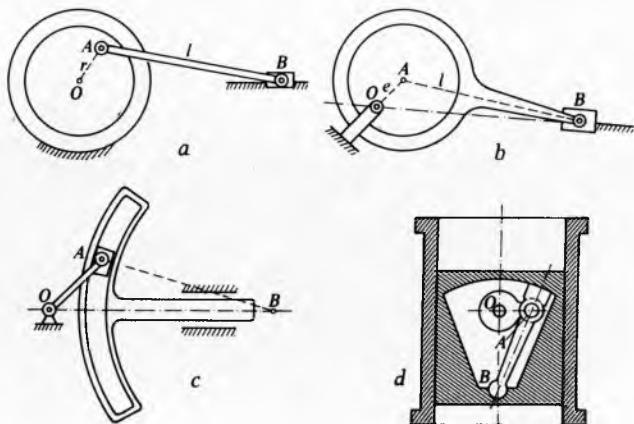
**Konstrukcijske transformacije.** Među konstrukcijske transformacije koje ne mijenjaju zakon gibanja članova transformiranog mehanizma spadaju: rotacija postolja, proširenje zglobova, dodavanje pasivnih članova te zamjena nižih kinematičkih parova višima.

Pri rotaciji postolja, koja može biti potrebna radi lakše ugradbe mehanizma, radni član mehanizma treba da zadrži iste kinematičke karakteristike. Transformacije kojima se od originalnog mehanizma dolazi do zamjenskoga vide se na sl. 26.



Sl. 26. Transformacija mehanizma rotacijom postolja. a) originalni mehanizam, b) zamjenski mehanizmi

**Ekspanzija zglobova** sastoji se u proširenju geometrijskog oblika zgloba do te mjeru da se unutar zgloba može smjestiti drugi kinematički par. Ako središta rotoidnih zglobova pri transformaciji ostanu na istom mjestu, kinematička shema mehanizma ostaje nepromijenjena. Tehnološki i eksploatacijski zahtjevi koje mora mehanizam da zadovolji uzrok su konstrukcijskih izmjena pomoću ekspanzije zglobova. Primjena takve transformacije na aksijalnom klipnom mehanizmu, i to proširenjem svakog od četiri njegova zgloba, prikazana je na sl.



Sl. 27. Transformacija aksijalnog klipnog mehanizma ekspanzijom zglobova. a) ekspanzija rotoidnog zgloba  $O$ , b) ekspanzija zgloba  $A$ , c) ekspanzija rotoidnog zgloba  $B$ , d) ekspanzija translatoidnog zgloba  $B$

27. Ekspanzija rotoidnog zgloba  $O$  nastaje tako da se čep zgloba proširi u kružnu ploču koja u sebi obuhvaća član  $OA$  (sl. 27a). Ekspanzijom zgloba  $A$  nastaje mehanizam s ekscentrom. Ploča ekscentra je zapravo koljeno s rukavcem zgloba, prošireni toliko da može obuhvatiti i pogonsku osovinu  $O$  (sl. 27b). Mehanizam s ekscentrom ima široku primjenu, premda su gubici zbog trenja veći nego u mehanizmima s koljenom.

Često je upotreba ekscentra, umjesto koljena, prijeko potrebno i jedino konstrukcijski moguće rješenje. To je tada kad je ekscentričnost  $e = \overline{OA}$  manja od polumjera pogonske osovine. Područje primjene ekscentra može se izraziti parametrom  $\lambda = \frac{e}{l} = \frac{1}{30} \dots \frac{1}{60}$ . Ekspanzijom rotoidnog zglobova  $B$  dobiva se mehanizam s klizačem u obliku kružne ploče ili mehanizma sa zakrivljenom kulisom, kojemu je konstrukcijska shema prikazana na sl. 27c.

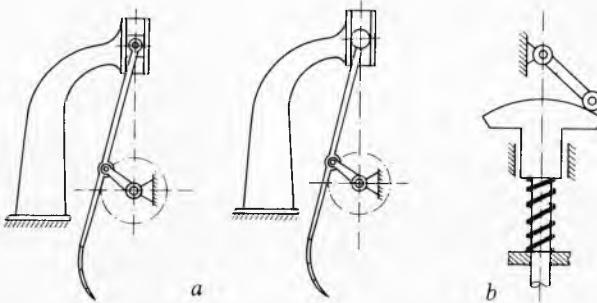
Na sl. 27d prikazana je jedna od modifikacija koljenastog mehanizma s ekspandiranim translatoidnim zglobom  $B$ . Dimenzije klizača omogućuju da se unutar njega smjeste sva tri ostala zglobova. Spojna poluga  $AB$  i klizač vezani su ne samo zglobovom  $B$  već se i za sve vrijeme gibanja dodiruju cilindričnom površinom, što omogućuje prenošenje sila bez obzira u kojem smjeru one djeluju na članove mehanizma. Takav mehanizam sastavni je dio naprave za probijanje rupa u metalnim pločama i limovima.

**Zamjena nižih kinematičkih parova višima** ujedno je i transformacija kojom se smanjuje broj članova i parova. Naravno da postoje i obrnuti slučajevi kad se viši kinematički par zamjenjuje nižim. Pri tom se povećava i broj članova i broj parova. Koja će se od modifikacija i kada upotrijebiti, ovisi najviše o eksploracijskim uvjetima, zahtijevanoj točnosti rada mehanizma i veličini sila koje se prenose. Transformacije zamjenom nižih kinematičkih parova višima prikazane su na sl. 28, i to na mehanizmu za pranje vune (sl. 28a) i na stапnom četveročlanom mehanizmu koji je sveden na tročlani mehanizam dinamičkim zatvaranjem višeg kinematičkog para pomoći ograde (sl. 28 b).

Konstrukcijske transformacije mijenjaju izgled mehanizma, ali ne i karakter gibanja članova, te se sve te modifikacije mehanizama mogu prikazati istom kinematičkom shemom.

### KINEMATIČKA ANALIZA

Kinematička analiza mehanizma obuhvaća: a) crtanje položaja cijelog mehanizma za zadani položaj pogonskog člana ili za zadane položaje svih pogonskih članova, ako mehanizam ima više stupnjeva pokretljivosti. To uključuje također određivanje krajnjih položaja svih članova koji se oscilatorno ili nijahuće gibaju; b) analizu putanja pojedinih točaka: pomoću grafičkih metoda crtaju se trajektorije, a analitičkim metodama određe se jednadžbe trajektorija. Zakrivljenost trajektorija i poloida je jedan od kinematičkih karakteristika gibanja, koja je važna za sintezu nekih tipova mehanizama; c) proračun brzine i ubrzanja svih karakterističnih točaka mehanizma, kutnih brzina i kutnih ubrzanja onih članova kojima gibanje sadrži i rotaciju, određivanje ovisnosti brzina i ubrzanja o vremenu ili o položaju mehanizma, te crtanje dijagrama brzina i ubrzanja kao funkcija vremena ili položaja mehanizma.



Sl. 28. Primjena transformacije mehanizma promjenom broja članova. a) dvije varijante mehanizma za pranje vune, b) tročlana varijanta stapanog mehanizma

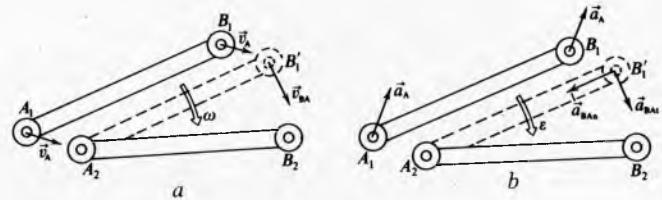
Metode kinematičke analize su mnogobrojne. Neke od njih su općeg karaktera i primjenjuju se za sve tipove mehanizama, a neke su specifične i služe za određeni tip mehanizama.

### Analitičke i grafičke metode

Za određivanje brzina  $v$  i ubrzanja  $a$  točaka te kutnih brzina  $\omega$  i kutnih ubrzanja  $\epsilon$  članova mehanizma služe slijedeće opće metode: metoda plana brzina i ubrzanja, metoda trenutnih polova te metode plana kutnih brzina.

**Plan brzina i ubrzanja** daje cjelovitu sliku gibanja mehanizma u promatranom trenutku. Iz plana brzina i ubrzanja proizlaze također i veličine kutnih brzina i kutnog ubrzanja članova mehanizma.

Osnovna metoda plana brzina i ubrzanja zasniva se na Chaslesovu teoremu. Prema tom teoremu svako tijelo koje se kompljarno giba može se dovesti iz jednog položaja u susjedni bliski položaj uzastopnom translacijom i rotacijom. Tako se na sl. 29 štap  $AB$  može dovesti iz položaja  $A_1B_1$  u položaj  $A_2B_2$  najprije translacijom u položaj  $A_2B'_1$ , a zatim rotacijom oko  $A_2$  u položaj  $A_2B_2$ . Pri translaciji sve točke štapa gibaju se istom brzinom, te je  $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ . Pri rotaciji točke  $B$  oko  $A$ , točka  $B$  ima brzinu  $\vec{v}_{BA}$ , kojoj je pravac okomit na polumjer rotacije  $BA$ , a smjer odgovara smjeru kutne brzine rotacije štapa.



Sl. 29. Prevodenje štapa u susjedni položaj. a) raspored brzina pri pomacima štapa, b) raspored ubrzanja pri pomacima štapa

Budući da su oba ova gibanja istodobna, to je

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (3)$$

Isto tako je i ubrzanje svih točaka štapa pri translaciji jednak, te je  $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ . Zbog rotacije točke  $B$  oko  $A$ , točka  $B$  ima još i ubrzanje  $\vec{a}_{BA}$ , koje u općem slučaju ima normalnu  $\vec{a}_{BA_n}$  i tangencijalnu komponentu  $\vec{a}_{BA_t}$ . Normalna komponenta usmjerena je prema središtu rotacije, od  $B$  prema  $A$ . Tangencijalna komponenta okomita je na  $AB$ , a smjer joj ovisi o smjeru kutnog ubrzanja štapa. Kako su i translacija i rotacija istodobna kretanja, može se napisati:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA_n} + \vec{a}_{BA_t}. \quad (4)$$

Pri tome je  $v_{BA} = \omega \overline{AB}$ ,  $a_{BA_n} = \omega^2 \overline{AB} = \frac{v_{BA}^2}{\overline{AB}}$ ,  $a_{BA_t} = \epsilon \overline{AB}$ ,

gdje je  $\omega$  kutna brzina,  $\epsilon$  kutno ubrzanje.

Ta je metoda upotrijebljena za crtanje plana brzina i ubrzanja zglobnog četverokuta na sl. 30a. Zadani su svi geometrijski parametri, potrebni za crtanje plana mehanizma, te također kutna brzina  $\omega$  i kutno ubrzanje  $\epsilon$  pogonske ručice  $r = O_1A$ . Brzina točke okomita je na  $O_1A$ , smjer joj proizlazi iz smjera  $\omega$ , a vrijednost iz  $v_A = r\omega$ . Vektor brzine točke  $B$ , koja pripada članu  $AB$ , proizlazi iz  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ . Kako je pravac brzine točke  $B$  okomit na pravac njihalice  $O_2B$ , a pravac brzine  $v_{BA}$  okomit na pravac  $AB$ , to se trokut brzina zatvori crtajući s krajeva vektora  $v_A$  pravac okomit na  $\overline{O_2B}$  i pravac okomit na  $AB$ . Vektor brzine točke  $C$ , koja također pripada sprežnom članu zglobnog četverokuta, može se izraziti pomoću već poznatih vektora brzine točaka  $A$  i  $B$ :  $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$ . Pravac brzine  $v_{CA}$  nanosi se s vrha vektora  $v_A$  okomito na  $\overline{AC}$ , a pravac brzine  $v_{CB}$  s vrha vektora  $v_B$  okomito na  $\overline{CB}$ . Presekite tih pravaca određuje vrhove vektora  $v_C$ ,  $v_{CA}$  i  $v_{CB}$ . Iz plana brzina proizlazi da su kutne brzine članova  $l$  i  $b$ :

$$\omega_b = \frac{v_B}{b} \text{ i } \omega_l = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_{CA}}{AC} = \frac{v_{CB}}{BC},$$

čime je određen smjer vektora  $v_B$  i  $v_{BA}$ .

Iz načina na koji je nacrtan plan brzina za točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  vidi se da vrhovi vektora apsolutnih brzina tih točaka u

planu brzina čine geometrijski lik sličan liku što ga čine točke  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Trokut  $abc$  (sl. 30a) sličan je trokutu  $ABC$  i zakenut prema njemu za kut od  $90^\circ$  u smjeru djelovanja kutne brzine  $\omega_b$ . Iz te karakteristike plana brzina proizlazi *teorem sličnosti* primjerenih točaka.

Plan ubrzanja počinje crtanjem vektora ubrzanja točke  $A$ :  $\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At}$ . Normalna komponenta  $a_{An} = \frac{v_A^2}{r} = \omega^2 r$  paralelna je sa  $\overline{AO_1}$  i usmjerena prema  $O_1$ . Tangencijalna komponenta  $a_{At} = r\epsilon$  okomita je na  $\overline{AO_1}$ , a smjer joj proizlazi iz smjera kutnog ubrzanja. Vektor ubrzanja točke  $B$  jest

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{Ba}, \quad (5)$$

odnosno

$$\vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BAn} + \vec{a}_{BAt}. \quad (6)$$

Vektor  $a_{Bn} = \frac{v_B^2}{b} = \omega_b^2 b$  usmjeren je od  $B$  prema  $O_2$ , a vektor  $a_{Bt}$  okomit je na taj pravac. Vektor  $a_{BAn} = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \omega^2 \overline{AB}$  usmjeren je prema središtu relativne rotacije, od  $B$  prema  $A$ , dok je vektor  $a_{BAt}$ , kojemu je vrijednost nepoznata, okomit na pravac paralelan sa  $\overline{AB}$ .

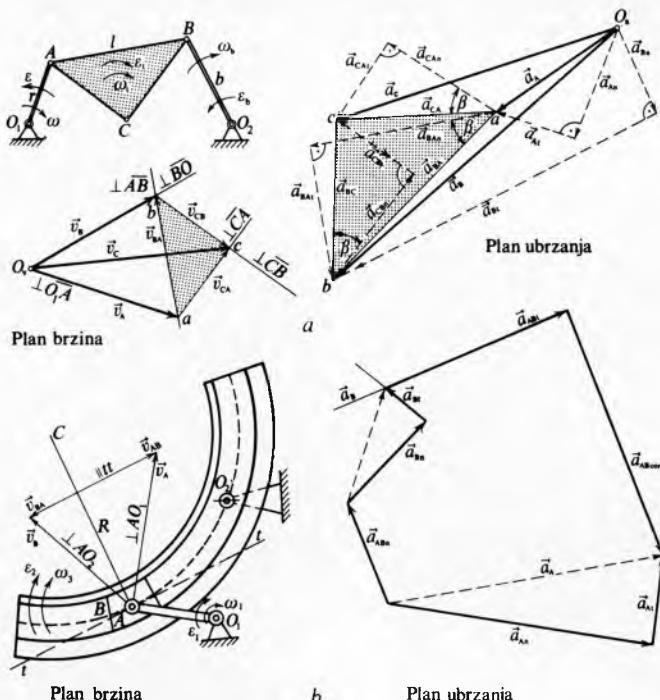
Iz poznatih ubrzanja točaka  $A$  i  $B$  proizlazi i vektor ubrzanja točke  $C$ :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}, \quad (7)$$

odnosno

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CAn} + \vec{a}_{CAt} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CBn} + \vec{a}_{CBt}. \quad (8)$$

Vektoru  $a_A$  najprije se pribroji  $a_{CAn} = \frac{v_{CA}^2}{AC} = \omega_1^2 \overline{AC}$  paralelno sa  $\overline{AC}$  u smjeru od  $C$  prema  $A$ , zatim se s vrha vektora  $a_{CAn}$  povuče okomito pravac  $a_{CAt}$ . Vektoru  $a_B$  pribroji se vektor  $a_{CBn}$ , kojemu je intenzitet  $a_{CBn} = \frac{v_{CB}^2}{CB}$ , a smjer od  $C$  prema  $B$ , te s vrha  $a_{CBn}$  povuče okomito pravac  $a_{CBt}$ . Presjecište pravaca  $a_{CAt}$  i  $a_{CBt}$  određuje vrhove ovih vektora, a ujedno i vrh



Sl. 30. Plan brzina i plan ubrzanja. a) zglobni četverokut, b) mehanizam s kulisom

vektora  $a_C$ . Vrijednosti kutnih ubrzanja članova  $b$  i  $l$  dobivaju se iz:

$$\epsilon_b = \frac{a_{Bt}}{BO_2}, \quad \epsilon_l = \frac{a_{BAt}}{AB} = \frac{a_{CAt}}{AC} = \frac{a_{CBt}}{CB}. \quad (9)$$

Smjerovi kutnih ubrzanja proizlaze iz smjerova primjerenih tangencijalnih komponenata ubrzanja. Trokut  $abc$ , što ga čine vrhovi vektora  $a_A$ ,  $a_B$  i  $a_C$ , sličan je trokutu  $ABC$  i okrenut prema njemu za kut  $(180^\circ - \beta)$  u smjeru kutnog ubrzanja  $\epsilon_b$ . Dakle, i za plan ubrzanja vrijedi *teorem sličnosti*. Iznos kuta  $\beta$  proizlazi iz:

$$\tan \beta = \frac{a_{CAt}}{a_{CAn}} = \frac{a_{CBt}}{a_{CBn}} = \frac{a_{BAt}}{a_{BAn}} = \frac{AB \epsilon_b}{AB \omega_b^2} = \frac{\epsilon_b}{\omega_b^2}. \quad (10)$$

Analiza gibanja koincidentnih točaka  $A$  na klizaču  $i$   $B$  na kulisi (sl. 30b) pokazuje slijedeće: kulisa rotira brzinom  $\omega_1$  i kutnim ubrzanjem  $\epsilon_1$ . Po kulisi se giba klizač relativnom brzinom  $v_{AB}$ . Apsolutna brzina točke  $B$  s obzirom na nepomičnu ravnicu jest

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A - \vec{v}_{AB}, \quad (11)$$

gdje je  $v_A = \overline{O_1 A} \omega_1$ . Pravac  $v_B$  okomit je na spojnici  $\overline{O_2 B}$ , a  $v_{BA}$  paralelna je s tangentom  $\overline{tt}$  na putanju relativnog gibanja točaka  $A$  i  $B$ , pa proizlazi da je kutna brzina kulise

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_2}. \quad (12)$$

Relativno ubrzanje među točkama  $A$  i  $B$ , pored komponente u smjeru tangente, ima zbog zakrivljenosti kulise i normalnu komponentu, a zbog rotacije nosača još i Coriolisovu komponentu ubrzanja. Ako se pretpostavi da je kulisa nosač po kojem se klizač relativno giba, odnos među ubrzanjima koincidentnih točaka  $A$  i  $B$  jest:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} + \vec{a}_{ABn} + \vec{a}_{ABt} + \vec{a}_{ABcor}, \quad (13)$$

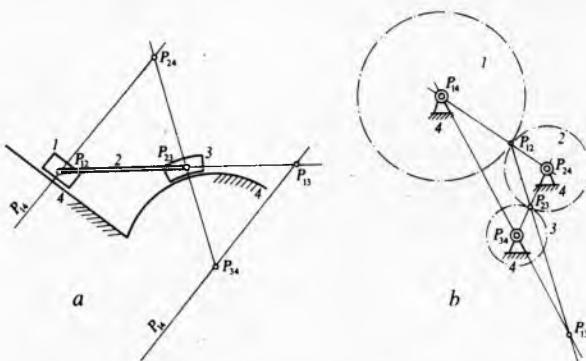
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} - \vec{a}_{ABn} - \vec{a}_{ABt} - \vec{a}_{ABcor}. \quad (13a)$$

U jednadžbi (13) poznate su veličine vektora:  $a_{Bn} = \frac{v_B^2}{BO_2} = \omega_3^2 \overline{BO_2}$ , sa smjerom od  $B$  prema  $O_2$ ;  $a_{An} = \frac{v_A^2}{AO_1} = \omega_1^2 \overline{AO_1}$ , sa smjerom od  $A$  prema  $O_1$ ;  $a_{At} = \overline{AO_1} \epsilon_1$ ,  $a_{ABn} = \frac{v_{AB}^2}{AC} = \frac{v_{AB}^2}{R}$ , sa smjerom od  $A$  prema  $C$ ,  $a_{ABcor} = 2v_{AB}\omega_3$ , okomito na  $v_{AB}$  sa smjerom od  $C$  prema  $A$ . Za vektore  $a_{Bt}$  i  $a_{At}$  poznat je samo smjer, te su zbog toga pri nanošenju vektora ubrzanja u plan ubrzanja pravci ovih vektora ucrtani na kraju i pomoću njih je zatvoren plan. Iz plana ubrzanja (sl. 30b) proizlazi da je  $\epsilon_3 = \frac{a_{Bt}}{BO_2}$ , sa smjerom koji odgovara rotaciji vektora  $a_{Bt}$  oko točke  $O_2$ .

**Metoda trenutnih polova rotacije.** Pri komplanarnom gibanju može se beskonačno mali pomak tijela prikazati rotacijom tijela oko jedne točke u ravni, tzv. pola rotacije. Putanje svih točaka tijela jesu kružni lukovi kojima je središte u polu rotacije. Ako se tijelo pomiče u beskonačno bliski susjedni položaj u vremenskom intervalu  $dt$ , trenutni pol rotacije  $P$  nalazit će se na okomici brzine kretanja točaka tog tijela. Iz poznatih trenutnih polova rotacija članova mehanizma mogu se izračunati brzine, kutne brzine i druge kinematičke karakteristike točaka i članova mehanizma. Osnovna metoda za određivanje položaja trenutnih polova mehanizma temelji se na *Kennedyjevom teoremu*, koji glasi: tri trenutna pola relativnog gibanja triju tijela koja se komplanarno gibaju leže na istom pravcu.

Pri određivanju položaja trenutnih polova rotacije polazi se i od slijedećeg: rotoidni zglob koji vezuje dva člana mehanizma permanentni je pol njihove relativne rotacije; trenutni pol rotacije za dva člana koji klize jedan po drugome nalazi se na normali relativnog klizanja u točki dodira, a za dva člana koji se kotrljavaju jedan po drugome bez klizanja u točki je dodira. Navedeno je lako dokazati, jer trenutni pol leži u presjecištu

normalna na relativne brzine gibanja svih točaka spregnutih članova. Na osnovi toga za četverozglobni mehanizam (sl. 31 a) poznati su trenutni polovi  $P_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{34}$ , a i  $P_{14}$  koji se nalazi beskonačno daleko na pravcu okomitom na pravac klizne staze. Ostali



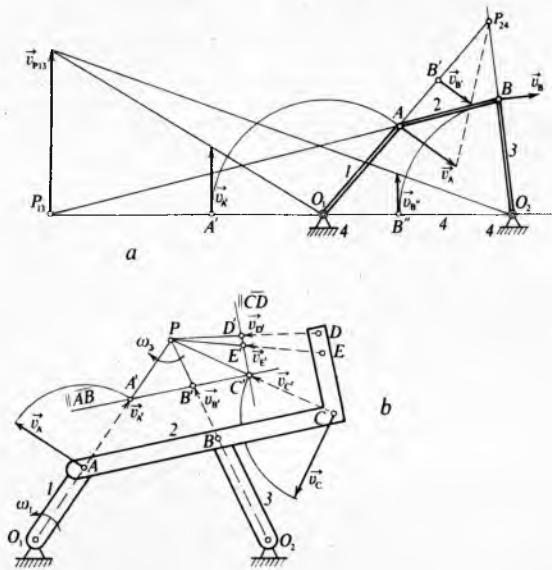
Sl. 31. Trenutni polovi rotacije. a polarna konfiguracija četverozglobnog mehanizma, b polarna konfiguracija zupčanog prijenosnika

trenutni polovi nalaze se u presjecištima polarnih pravaca utravnih na osnovi Kennedyjevog teorema. Također su za zupčani prijenosnik na sl. 31b poznati trenutni polovi  $P_{14}$ ,  $P_{24}$ ,  $P_{34}$ ,  $P_{12}$  i  $P_{23}$ , dok se  $P_{13}$  nalazi u presjecištu polarnih pravaca  $P_{12}P_{23}$  i  $P_{14}P_{34}$ . Budući da svaki par članova ima po jedan trenutni pol relativne rotacije, to mehanizam sa  $n$  članova ima ukupno  $p$  polova:  $p = \frac{n(n-1)}{2}$ . Kroz svaki trenutni pol prolaze  $(n-2)$  polarna pravca, a kako na jednom polarnom pravcu leže tri trenutna pola, to je broj polarnih pravaca

$$s = \frac{p(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (14)$$

Polarna konfiguracija mehanizma omogućuje pronalaženje nepoznatih brzina točaka na mehanizmu. Na zglobnom četverokutu (sl. 32a) zadana je brzina točke A, a treba naći brzinu točke B. Budući da točke A i B pripadaju istom članu 2, to su njihove brzine proporcionalne njihovim udaljenostima od trenutnog pola rotacije ovog člana prema nepomičnoj ravnini (postolje 4), to jest od trenutnog pola  $P_{24}$ . Na slici se vidi geometrijska konstrukcija pomoću točke  $B'$ . Ta konstrukcija proizlazi iz odnosa:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\overline{BP}_{24}}{\overline{AP}_{24}} = \frac{\overline{B'P}_{24}}{\overline{AP}_{24}}. \quad (15)$$



Sl. 32. Određivanje nepoznatih brzina. a pomoću trenutnog pola rotacije  $P_{13}$ , b pomoću zakrenutih brzina

Brzina točke B može se odrediti i posredno preko trenutnog pola  $P_{13}$ . Naime, točka A pripada i članu 1, a točka B i članu 3. Trenutni pol  $P_{13}$  koincidentna je točka za članove 1 i 3. Kako točka  $P_{13}$  pripada članu 1, to se njezina brzina odredi iz brzine točke A:

$$\frac{v_{P_{13}}}{v_A} = \frac{\overline{P_{13}O_1}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{P_{13}O_1}}{\overline{A'O_1}}. \quad (16)$$

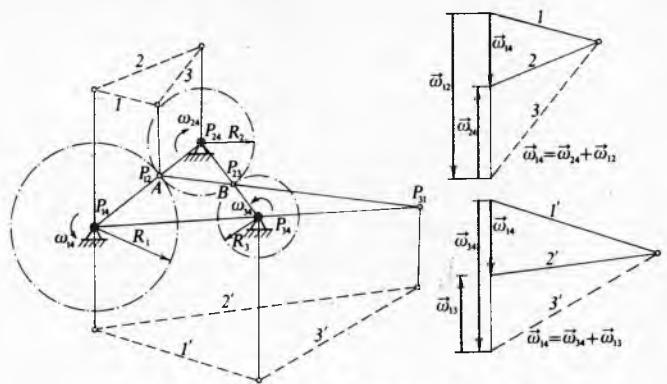
Točka  $P_{13}$  pripada i članu 3, pa se iz njezine brzine odredi brzina točke B. Te brzine su proporcionalne udaljenosti od permanentnog pola rotacije člana 3, tj. od točke  $O_2$ :

$$\frac{v_B}{v_{P_{13}}} = \frac{\overline{BO_2}}{\overline{P_{13}O_2}} = \frac{\overline{B'O_2}}{\overline{P_{13}O_2}}. \quad (17)$$

**Metoda zakrenutih brzina** temelji se na poznavanju položaja trenutnog pola rotacije. Ako se vektori brzina svih točaka jednog člana mehanizma zakrenu za  $90^\circ$ , njihovi će se pravci sjeći u trenutnom polu apsolutne rotacije tog člana s obzirom na postolje. Budući da sve točke člana 2 (sl. 32b) rotiraju zajedničkom kutnom brzinom  $\omega_2$  oko trenutnog pola P, to se može napisati:  $v_A = \overline{AP} \omega_2$ ,  $v_B = \overline{BP} \omega_2$ ,  $v_C = \overline{CP} \omega_2$ . Također je  $\overline{A'P} = \overline{AP} - v_A = \overline{AP}(1 - \omega_2)$ . Isto tako je  $\overline{B'P} = \overline{BP} - v_B = \overline{BP} \cdot (1 - \omega_2)$ .

Iz odnosa  $\frac{\overline{A'P}}{\overline{B'P}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$  i  $\frac{\overline{A'P}}{\overline{C'P}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}$  izlazi da je pravac kroz  $A'B'C'$  na kojem leže vrhovi brzina  $v'_A$ ,  $v'_B$ ,  $v'_C$ 平行 s pravcem štapa ABC. Isto tako vrhovi zakrenutih brzina točaka C, D i E leže na pravcu paralelnom sa CD. Na taj se način iz poznate brzine  $v_A$  odrede vektori brzina svih ostalih točaka (B, C, D, E) na članu 2. Pri toj grafičkoj metodi brzine su zakrenute za  $90^\circ$ , pa se zato ta metoda naziva i *metodom ortogonalnih brzina*. Vrhovi vektora zakrenutih brzina točaka jednog člana mehanizma tvore geometrijski lik sličan liku što ga tvore i te točke na članu. Središte sličnosti ovih likova jest trenutni pol rotacije. Na osnovi grafičke slike zakrenutih brzina (sl. 32b) proizlazi da su projekcije zakrenutih brzina točaka A, B, C na pravac okomit na ABC međusobno jednake. Prema tome su i projekcije vektora brzina istih točaka na pravac ABC također međusobno jednake. To isto vrijedi i za projekcije brzina  $v_C$ ,  $v_D$  i  $v_E$  na pravac kroz CDE. Na toj činjenici temelji se *metoda projiciranih brzina*.

**Plan kutnih brzina.** Polarna konfiguracija mehanizma omogućuje da se odrede kutne brzine članova mehanizma, i to apsolutne kutne brzine rotacije prema postolju (nepomična ravnina) i relativne kutne brzine međusobne rotacije pomičnih članova.



Sl. 33. Plan kutnih brzina zupčančkog mehanizma

Iz sl. 33 proizlazi

$$\omega_{24} = \frac{v_A}{P_{12}P_{24}} = \frac{v_B}{P_{12}P_{24}}; \quad \omega_{14} = \frac{v_A}{P_{12}P_{14}}; \quad \omega_{34} = \frac{v_B}{P_{23}P_{34}}, \quad (18)$$

odnosno

$$\frac{\omega_{14}}{\omega_{24}} = \frac{P_{12}P_{24}}{P_{12}P_{24}}; \quad \frac{\omega_{34}}{\omega_{24}} = \frac{P_{23}P_{24}}{P_{23}P_{24}}. \quad (19)$$

Omjeri kutnih brzina rotacije članova mehanizma mogu se, dakle, odrediti direktno iz odnosa udaljenosti trenutnih polova. Kutna brzina člana mehanizma može se prikazati pomoću vektora koji je okomit na ravninu rotacije, a prolazi kroz trenutni pol rotacije. Tako kroz trenutne polove  $P_{12}$ ,  $P_{14}$  i  $P_{24}$  prolaze međusobno paralelni vektori kutnih brzina  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{14}$  i  $\omega_{24}$ . Intenziteti vektora kutnih brzina obrnuti su proporcionalni njihovoj udaljenosti od trećeg trenutnog pola koji leži na njihovu polarnom pravcu, te su apsolutne vrijednosti statičkih momenata dvaju vektora kutnih brzina s obzirom na treći trenutni pol na istom polarnom pravcu međusobno jednake. To znači da za grafičku analizu vektora kutnih brzina može poslužiti metoda lančanog poligona, na isti način kao i u sustavu paralelnih sila, te da pripadne vektorske jednadžbe glase:

$$\bar{\omega}_{34} = \bar{\omega}_{14} + \bar{\omega}_{31}; \quad \bar{\omega}_{24} = \bar{\omega}_{14} + \bar{\omega}_{21}. \quad (20)$$

Potrebno je paziti na redoslijed oznaka kutne brzine. Naime,  $\omega_{14}$  je kutna brzina rotacije člana 1 s obzirom na član 4, dok je  $\omega_{41}$  kutna brzina relativne rotacije člana 4 s obzirom na član 1, te je njihov odnos  $\bar{\omega}_{14} = -\bar{\omega}_{41}$ . Odnos kutnih brzina za upravljanje prijenos na sl. 33 bit će

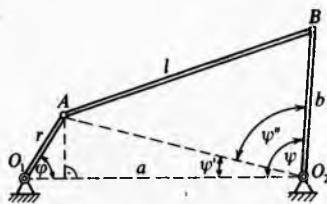
$$\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = \frac{P_{14}P_{31}}{P_{34}P_{31}} = \frac{R_1}{R_3}, \quad (21)$$

odnosno

$$\frac{\omega_{24}}{\omega_{14}} = -\frac{P_{14}P_{12}}{P_{24}P_{12}} = -\frac{R_1}{R_2}. \quad (22)$$

#### Ravni zglobnopolužni mehanizmi

**Zglobni četverokut.** U tehničkoj praksi često se primjenjuju različite inverzije zglobnog četverokuta. Zglobni četverokut vrlo je često sastavni dio složenih mehanizama koji su nastali paralelnom ili serijskom spregom četverokuta i drugih osnovnih tipova mehanizama. Kinematičko ispitivanje zglobnog četverokuta temelji se na razmatranju odnosa među položajima i kutnim brzinama pogonskog  $r$  i gonjenog člana  $b$ .



Za mehanizam kojemu je duljina postoljnog člana  $O_1O_2 = a$ , te duljine pomičnih članova  $r$ ,  $l$  i  $b$ , bit će (sl. 34):

$$\tan \psi' = \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi}, \quad \cos \psi'' = \frac{b^2 - l^2 + r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi}{2b\sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi}}, \quad (23)$$

a odatle je:

$$\psi = \arctan \frac{r \sin \varphi}{a - r \cos \varphi} + \arccos \frac{b^2 - l^2 + r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi}{2b\sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi}}. \quad (24)$$

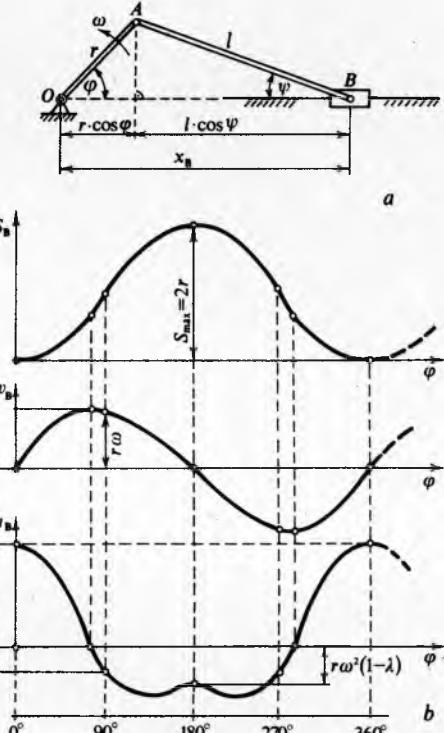
Ako se u taj izraz uvrste vrijednosti za  $a$ ,  $r$ ,  $l$ ,  $b$ , dobiva se položaj pogonske ručice  $r$  (kut  $\varphi$ ) i pripadni položaj gonjenog člana  $b$  (kut  $\psi$ ).

Deriviranjem izraza  $\psi = \psi(t)$  po vremenu dobiva se kutna brzina njihalice:

$$\omega_b = \omega_r \frac{r}{r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi} \left[ a \cos \varphi - r - \frac{a \sin \varphi (l^2 - b^2 + r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi)}{\sqrt{4b^2 l^2 - (r^2 + a^2 - 2r \cos \varphi - b^2 - l^2)^2}} \right] \quad (25)$$

Ponovnim deriviranjem  $\omega_b$  po vremenu dobio bi se izraz za kutno ubrzanje gonjenog člana.

**Koljenastoklizni mehanizam.** Koljenastoklizni mehanizam naziva se i stupnim mehanizmom, jer je sastavni dio stupačnih strojeva, kao što su motori s unutrašnjim izgaranjem, parni strojevi, stape s sisaljke i stape kompresori (sl. 35a). Već prema tome da li pravac klizne staze klizača prolazi kroz nepomični rotoidni zglob koljena  $r$ , razlikuje se *centrični* (aksijalni) i *ekscentrični stupni mehanizam*.



Sl. 35. Centrični stupni mehanizam i njegovi kinematički dijagrami

Osnovne kinematičke karakteristike stupačnog mehanizma jesu brzina i ubrzanje klizača pri konstantnoj kutnoj brzini rotacije koljena. Brzina i ubrzanje klizača određe se deriviranjem po vremenu funkcije  $x_B = x_B(\varphi)$ . Za centrični motorni mehanizam (sl. 35) ta funkcija jest  $x_B = r \cos \varphi + l \cos \psi$ . Eliminiranjem parametra  $\psi$  i zamjenom  $\frac{r}{l} = \lambda$  dobiva se:

$$x_B = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - (\lambda \sin \varphi)^2}, \quad (26)$$

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -r \omega \left( \sin \varphi + \frac{\lambda \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - (\lambda \sin \varphi)^2}} \right), \quad (27)$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -r \omega^2 \left( \cos \varphi + \frac{\lambda \cos 2\varphi + \lambda^3 \sin^4 \varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right). \quad (28)$$

Izrazi (26), (27) i (28) prikazani su grafički na sl. 35b. Izrazi za  $v_B$  i  $a_B$  mogu se pojednostaviti zanemarujući male veličine drugoga i višeg reda,  $\lambda^2$  i  $\lambda^3$ , pa je

$$v_B = -r \omega \left( \sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right), \quad (29)$$

$$a_B = -r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (30)$$

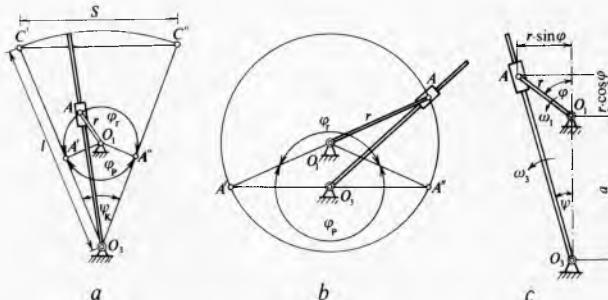
Izrazi (29) i (30) daju dovoljno točne rezultate za  $\lambda < \frac{1}{3}$ . Za  $\lambda = \frac{1}{3}$ , brzina proračunata pomoću izraza (29) pogrešna je 1,4%, i to kada je kut  $\varphi = 45^\circ$ . U suvremenoj tehnici stupačnih mehanizama  $\lambda$  ima vrijednost  $\frac{1}{3} \dots \frac{1}{20}$ .

**Koljenastokulisni mehanizam** jedna je od inverzija aksijalnog staponog mehanizma. O omjeru duljine  $r$  koljena i duljine  $a$  postoljnog plana ovisi da li će ta inverzija dati mehanizam s njihajućom kulisom ili mehanizam s rotirajućom kulisom.

Omjer  $\frac{r}{a} = \lambda$ , dakle, osnovni je faktor o kojem ovise kinematičke karakteristike koljenastokulisnog mehanizma. U tehničkoj se praksi taj mehanizam često primjenjuje, posebno na alatnim strojevima i nekim tipovima sisaljki. Jedna od karakteristika koljenastokulisnih mehanizama jest omjer srednjih kutnih brzina rotacije kulise u radnom i povratnom hodu. Ako se pretpostavi da je kutna brzina koljena  $O_1A = r$  konstantna (sl. 36), taj se omjer može izraziti koeficijentom promjene kutne brzine

$$k = \frac{t_r}{t_p} = \frac{\varphi_r}{\varphi_p}, \quad (31)$$

gdje se indeksi r i p odnose na radni, odnosno povratni hod.



Sl. 36. Hod kulise i kut zakretanja kulise koljenastokulisnog mehanizma. a) mehanizam s oscilirajućom kulisom, b) mehanizam s rotirajućom kulisom, c) kinematička shema kulisnog mehanizma

Na sl. 36 a je kulisni mehanizam s oscilirajućom kulisom. Hod točke C kulise je  $S = 2l \sin(\psi_k/2) = 2l(r/a) = 2l\lambda$ ; kut zakretanja kulise  $\psi_k = 2 \arcsin \lambda$ ; kut  $\varphi_p = 2 \arccos(r/a) = 2 \arccos \lambda$  i kut  $\varphi_r = 2\pi - \varphi_p = 2\pi - 2 \arccos \lambda$ . Prema tome je koeficijent promjene kutne brzine

$$k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p} = \frac{2\pi - 2 \arccos \lambda}{2 \arccos \lambda} = \frac{\pi - \arccos \lambda}{\arccos \lambda}. \quad (32)$$

Za mehanizam s rotirajućom kulisom (sl. 36b) bit će

$$k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p} = \frac{\pi - \arccos \frac{1}{\lambda}}{\arccos \frac{1}{\lambda}}. \quad (33)$$

Koljenastokulisni mehanizmi imaju znatno veći koeficijent  $k$  nego bilo koja druga modifikacija četveročlanog zglobnopolužnog mehanizma. Zato se takvi mehanizmi nazivaju još i *brzopovratnim mehanizmima*. Zbog visoke vrijednosti koeficijenta  $k$  koljenastoklisni mehanizmi pogodni su za strojeve koji imaju veliku silu otpora pri radnom hodu. Smanjenjem brzine kretanja u radnom hodu smanjuje se nominalna snaga pogonskog motora.

Prema sl. 36c jest

$$\tan \psi = \frac{r \sin \varphi}{a + r \cos \varphi} = \frac{\lambda \sin \varphi}{1 + \lambda \cos \varphi}, \quad (34)$$

a uzastopnim se deriviranjem kuta  $\psi$  po vremenu dobivaju izrazi za kutnu brzinu  $\omega_3$  i kutno ubrzanje kulisne  $\varepsilon_3$ :

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{\lambda(\lambda + \cos \varphi)}{1 + 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2}, \quad (35)$$

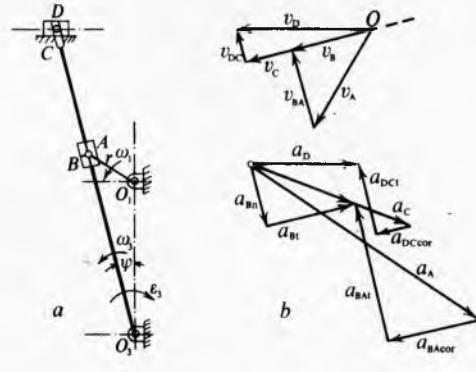
$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \varphi}{(1 + 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2)^2}. \quad (36)$$

Kulisa postiže ekstremne vrijednosti kutne brzine za  $\varepsilon_3 = 0$ . Budući da je  $\varepsilon_3 = 0$  za  $\sin \varphi = 0$ , dakle za  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \pi$ , to je

$$\omega_{3\min} = \omega_1 \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad \text{i} \quad \omega_{3\max} = \omega_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \quad (37)$$

Plan brzina (sl. 37) crta se na osnovi poznate brzine točke A:  $v_A = r\omega_1$ . Brzina koincidentne točke B kulise jest

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (38)$$



Sl. 37. Kulisni mehanizam blanjalice

Pravac relativne brzine  $v_{BA}$  poklapa se s pravcem uzdužne osi  $O_3B$  kulise. Brzine točaka C i B kulise proporcionalne su udaljenostima od zgloba  $O_3$ , te je

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B \frac{\overline{CO_3}}{\overline{BO_3}}. \quad (39)$$

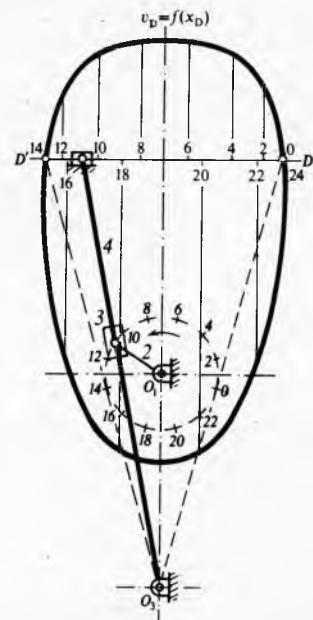
Brzina točke D nosača alata koja je koincidentna s točkom C kulise odredi se iz

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC}, \quad (40)$$

a pravac relativne brzine klizanja točke D prema C poklapa se s pravcem kulise. Kutna je brzina kulise

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BO_3} = \frac{v_C}{CO_3}. \quad (41)$$

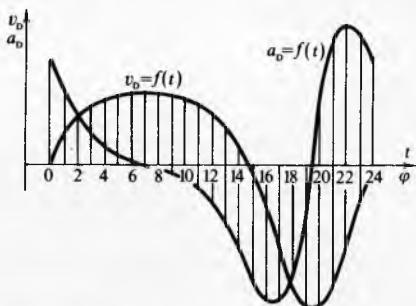
Dijagram  $v_D = f(x_D)$  nacrtan je tako da se brzine točke D iz plana brzina nanose kao ordinate iz trenutnog položaja točke



Sl. 38. Polarni dijagram brzina kulisnog mehanizma

(sl. 38). Brzine kojima su ordinate nanesene iznad pravca gibanja točke odnose se na radni hod od desne mrtve točke  $D''$  do lijeve mrtve točke  $D'$ . Kao što se vidi iz sl. 38, brzina povratnog hoda je veća i neravnomjernija.

Veoma su pogodni i dijagrami brzine i ubrzanja kao funkcije vremena (sl. 39), odnosno kao funkcije kuta  $\varphi$  zakretanja ručice. Krivulja ubrzanja  $a_D = f(t)$  dobiva se grafičkim deriviranjem krivulje brzine  $v_D$  iz dijagrama  $v_D = f(t)$ , sl. 39.



Sl. 39. Plan brzina i ubrzanja kulisnog mehanizma

Za bilo koji plan mehanizma može se nacrtati plan ubrzanja na uobičajeni način. Za konstantnu kutnu brzinu  $\omega_1$  ručice  $r$ , ubrzanje točke  $A$  klizača jest  $a_A = r\omega_1^2$  i usmjeren je prema središtu rotacije  $O_1$  (sl. 37). Apsolutno gibanje točke  $B$  može se rastaviti na prijenosno gibanje klizača i relativno gibanje te točke kulise s obzirom na klizač. Kako klizač i rotira kutnom brzinom  $\omega_3$ , koja je jednaka kutnoj brzini kulise, to će ubrzanje točke  $B$ , osim prijenosnog i relativnog ubrzanja, imati još i Coriolisovu komponentu ubrzanja:

$$\ddot{a}_B = \ddot{a}_A + \ddot{a}_{BAt} + \ddot{a}_{BAcor} = \ddot{a}_{Bn} + \ddot{a}_{Bt}, \quad (42)$$

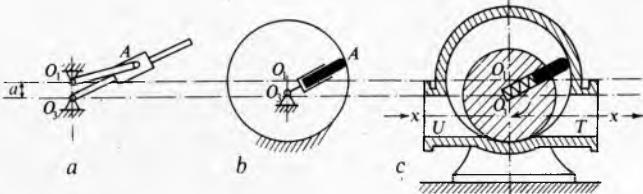
gdje je  $a_{BAcor} = 2v_{BA}\omega_3$ ; pravac i smjer te komponente određe se zakrećući vektor  $v_{BA}$  za  $\pi/2$  u smjeru rotacije kutne brzine  $\omega_3$ .

Vrijednost  $a_{Bn}$  je jednaka  $\frac{v_B^2}{BO_3}$  ili  $\overline{BO_3}\omega_3^2$ , a vektor je usmjeren prema središtu rotacije  $O_3$ . Pravci vektora  $a_{BAt}$  i  $a_{Bt}$  su poznati, i njihovo presjecište u planu ubrzanja označit će vrh vektora  $a_B$ . Ubiranje točke  $C$  kulise dobiva se iz

$$\frac{a_C}{a_B} = \frac{\overline{CO_3}}{\overline{BO_3}}. \quad (43)$$

Ubrzanje točke  $D$  nosača alata (sl. 37) izračuna se pomoću ubrzanja koincidentne točke  $C$  kulise. Budući da i tu postoji kutna brzina prijenosnog gibanja, javit će se i Coriolisova komponenta ubrzanja:  $\ddot{a}_D = \ddot{a}_C + \ddot{a}_{DCt} + \ddot{a}_{DCcor}$ . Ubrzanje  $\ddot{a}_{DCcor} = 2v_{DC}\omega_3$  okomito je na pravac vektora  $v_{DC}$ , a pravac  $a_{DCt}$  je paralelan sa  $v_{DC}$ . Pravac  $a_D$  je horizontalan, pa je lako zatvoriti poligon ubrzanja.

Kuljni mehanizam postoji i u konstrukcijskim oblicima koji se po izgledu znatno razlikuju od kinematičke sheme tog mehanizma (sl. 40a). Takav je i mehanizam tipa rotacijske sisaljke



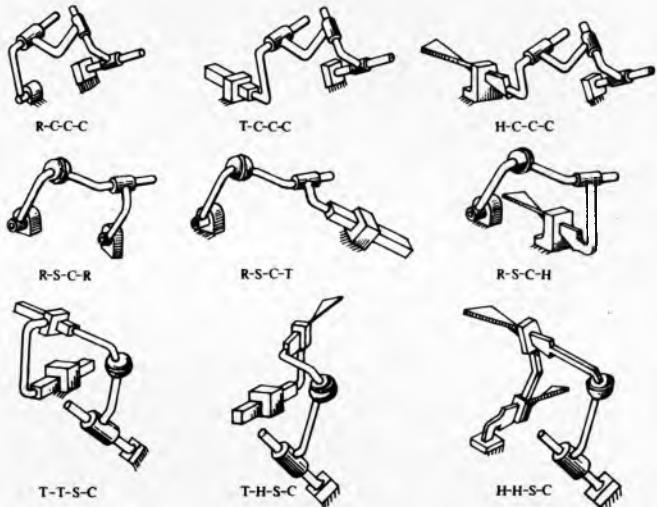
Sl. 40. Kuljni mehanizam. a) Kinematička shema mehanizma s rotirajućom kulisom, b) Kinematička shema mehanizma rotacijske sisaljke, c) Konstrukcijska shema rotacijske sisaljke

(sl. 40b). Pojednostavnjeni mehanizam sisaljke nastao je od koljenastokulinskog mehanizma s rotirajućom kulisom odbacivanjem ručice  $r = O_1A$  i rotoidnih zglobova  $O_1$  i  $A$ . Pri okretanju

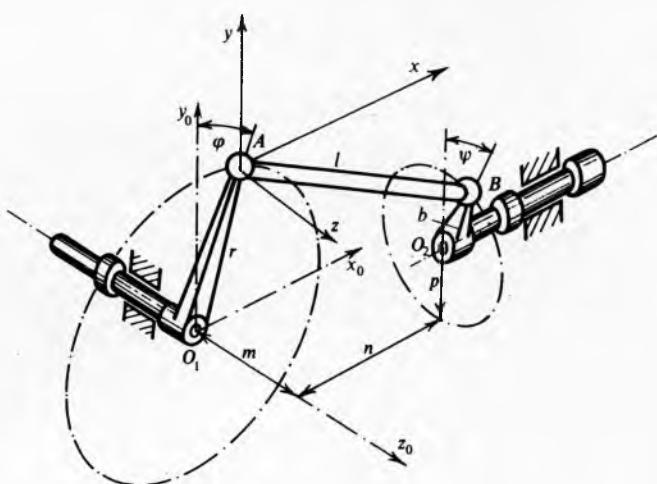
rotora oko permanentnog zgloba  $O_3$  točka  $A$  lamele, zbog djelovanja opruge i centrifugalne sile, nalaziće se u vijek u položaju u kojem bi se nalazila i u sastavu kulisnog mehanizma. Kad lamela (sl. 40c) prijeđe  $x-x$  na lijevoj strani, tekućina ulazi u usisnu komoru  $U$ , a kad lamela prijeđe istu liniju na desnom dijelu, tekućina odlazi u tlačni kanal  $T$ . Na istom principu radi i rotacijski kompresor kojemu je pojednostavljeni mehanizam nastao također od modificiranog kulisnog mehanizma s rotirajućom kulisom.

### Prostorni zglobnopolužni mehanizmi

Trodimenijski zglobnopolužni mehanizmi nisu ni dovoljno istraženi niti se dovoljno upotrebljavaju. Pri klasifikaciji tih mehanizama utvrđeno je više od stotinu različitih mogućih tipova, i to samo za četveročlane mehanizme s jednim stupnjem pokretljivosti. Kinematička analiza koja se može provesti grafičkom ili analitičkom metodom ograničena je u ovom članku samo na četverozglobne mehanizme za prenošenje rotacije među neparalelnim osovinama (sl. 41), jer se baš takvi mehanizmi najviše primjenjuju.



Sl. 41. Tipovi četveročlanih prostornih mehanizama. Oznake parova znače: R rotacijski par, T translatoidni par, C cilindrični par, H helikoidni par, S sferni par



Sl. 42. Shema prostornog zglobnopolužnog mehanizma

**Grafička metoda.** Za crtanje plana mehanizama, plana brzina i plana ubrzanja prostornog zglobnopolužnog mehanizma služe metode nacrte geometrije. U prostornom mehanizmu  $O_1ABO_2$  (sl. 42) obje ručice  $O_1A$  i  $O_2B$  mogu rotirati oko zglobova  $O_1$ , odnosno  $O_2$ , kojima su osi okomite jedna na drugu. Sprežni

član  $l$  čini s ručicama dva sferna zglobova. Dok ručica  $O_2B$  može rotirati za puni krug, ručica  $O_1A$  može oscilirati između dva mrtva položaja. Takav prostorni mehanizam ima više modifikacija koje ovise o kutu među osima nepomičnih zglobova te o odnosima duljina članova.

Pomoću metoda nacrte geometrije nacrtaju se projekcije plana mehanizma na tri ortogonalne ravnine što ih zatvaraju tri osi koordinatnog sustava. Vektorska jednadžba za brzine jest

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (44)$$

Ako je zadan vektor  $\vec{v}_A$  i poznat pravac brzine  $v_B$ , mogu se nacrtati njihove projekcije na iste tri ortogonalne ravnine, pa se pomoću tih projekcija odrede vektori  $\vec{v}_B$  i  $\vec{v}_{BA}$ . Za konstantnu kutnu brzinu  $\omega_1$  ručice  $O_1A$  jednadžba ubrzanja glasi

$$\ddot{a}_{B_1} + \ddot{a}_{B_0} = \ddot{a}_{A_1} + \ddot{a}_{BA_1} + \ddot{a}_{BA_0}. \quad (45)$$

Budući da su brzine  $v_A$ ,  $v_B$  i  $v_{BA}$  već određene, mogu se izračunati komponente ubrzanja  $a_{A_1}$ ,  $a_{B_1}$  i  $a_{BA_1}$  kojih su smjerovi poznati jer se poklapaju s pravcima članova  $O_1A$ ,  $O_2B$  i  $l$ . Iz projekcija tih komponenti ubrzanja na tri ortogonalne ravnine nađu se komponente  $a_{A_1}$ ,  $a_{B_1}$  i  $a_{BA_1}$ , pa se zatim pomoću poznatih vrijednosti  $v_B$  i  $a_{B_1}$  odrede kutna brzina  $\omega_3$  i kutno ubrzanje  $\varepsilon_3$  ručice  $O_2B$ .

**Analička metoda.** Duljine štapova prostornog zgloba četverokuta označene su sa  $O_1A = r$ ,  $AB = l$ ,  $O_2B = b$  (sl. 42). Projekcije sprežnog člana  $l$  na pravce koordinatnih osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  bit će  $l_x = n - r \sin \varphi$ ,  $l_z = m + b \sin \psi$ ,  $l_y = p + b \cos \psi - r \cos \varphi$ . Budući da je  $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ , kvadriranjem i zbrajanjem triju projekcija sprežnog člana  $l$  dobiva se

$$\begin{aligned} l^2 &= m^2 + n^2 + p^2 + r^2 + b^2 - 2r p \cos \varphi - 2r n \sin \varphi + \\ &+ 2p b \cos \psi + 2m b \sin \psi - 2r b \cos \varphi \cos \psi. \end{aligned} \quad (46)$$

Derivacija jednadžbe (46) po vremenu nakon sređivanja daje kutnu brzinu

$$\omega_3 = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} = \frac{r p \sin \varphi - r n \cos \varphi + r b \sin \varphi \cos \psi}{p b \sin \psi - m b \cos \psi - r b \cos \varphi \sin \psi} \omega_1. \quad (47)$$

**Univerzalni zglob.** Pri kinematičkoj analizi prostornih zglobova polužnih mehanizama posebnu pažnju zaslužuju mehanizmi za prenošenje rotacije među osima kojih se pravci sijeku. Tu spadaju Cardano-Hookeov i drugi univerzalni prostorni zglobovi, sferni oscilatori i mehanizmi s rotoidnim zglobovima.

*Cardano-Hookeov zglob* najpoznatiji je tip prostornog univerzalnog zgloba.

Taj je zglob prvi opisao G. Cardano (1501—1576), a R. Hooke (1635—1703) prvi ga je primijenio na mehanizme za prijenos gibanja, te je tako zglob i dobio svoj naziv. Cardano-Hookeov zglob (sl. 43) sastoji se od dviju viljušaka koje su rotoidnim zglobovima vezane za sprežni član kružnog oblika. Pri tom je  $AB$  okomito na  $\overline{O_1S}$ ,  $CD$  okomito na  $\overline{O_3S}$  i  $AB$  okomito na  $CD$ . Pomoću Cardano-Hookeova zgloba prenosi se rotacija osovine  $1$  na osovinu  $3$ . Pri konstantnoj kutnoj brzini  $\omega_1$  kutna brzina  $\omega_3$  bit će promjenljiva. Odnos među kutnim brzinama  $\omega_3$  i  $\omega_1$  ovisi o kutu  $\alpha$  što ga zatvaraju osovine  $1$  i  $3$  u zakretanju  $\varphi_1$  osovine  $1$ . Kad se pogonska osovina  $1$  zakrene za kut  $\varphi_1$ , točka  $A$  na viljušći pogonskog člana i točka  $D$  na viljušći gonjenog člana opisivat će kružnice istog polujmjera, jer je  $AS = DS$  (sl. 44). Ravnine tih dviju putanja zatvaraju kut koji je jednak kutu  $\alpha$  među osovinama  $1$  i  $3$ . Ako se za ravninu crteža uzme ravnina u kojoj se giba točka  $A$ , putanja će se te točke projicirati kao kružnica, a putanja točke  $D$  kao elipsa. Pri zakretanju viljuške  $1$  za kut  $\varphi_1$  projekcija točke  $A$  opisuje luk  $A''A'$  sa središnjim kutom  $\varphi_1$ . Točke  $A$  i  $D$  leže na međusobno okomitim krakovima kružnog člana, te je i projekcija kraka  $S''D''$  okomita na  $S''A''$ , jer je krak  $SA$  toga kuta uvijek paralelan s ravninom projekcije. U ravnini će se projekcije točka  $D$  pomaknuti iz položaja  $D''_0$  u  $D''$ . Ako se ravnina projekcije zakreće za kut  $\alpha$ , elipsa će se poklopiti s kružnicom, a projekcija  $D''$  doći će u položaj  $D'_1$ . Kut  $D'_1S''D''_0$  prava je vrijednost kuta zakretanja  $\varphi_3$  gonjenog člana.

Iz toga proizlazi

$$\tan \varphi_3 = \frac{\overline{D'_1G}}{\overline{GS''}} ; \quad \tan \varphi_1 = \frac{\overline{D''G}}{\overline{GS}} ;$$

$$\frac{\tan \varphi_3}{\tan \varphi_1} = \frac{\overline{D'_1G}}{\overline{D''G}} = \frac{\overline{D'S'}}{\overline{ES'}} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (48)$$

i konačno

$$\tan \varphi_3 = \frac{\tan \varphi_1}{\cos \alpha}. \quad (49)$$

Deriviranjem ove jednadžbe po vremenu dobiva se

$$\omega_3 = \frac{\cos^2 \varphi_3 \omega_1}{\cos \alpha \cos^2 \varphi_1}, \quad (50)$$

a eliminiranjem  $\varphi_3$  definitivni izraz za kutnu brzinu  $\omega_3$  glasi

$$\omega_3 = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}. \quad (51)$$

Prijenosni omjer jest

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_3} \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}{\cos \alpha}, \quad (52)$$

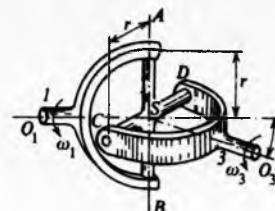
pa je gibanje gonjene osovine neravnomjerno, jer ni kutovi zakretanja ni kutne brzine nisu međusobno proporcionalni. Njihov odnos ovisi i o veličini kuta zakretanja  $\varphi_1$ , a ne samo o konstrukcijskom kutu  $\alpha$  (sl. 44b). Derivacija kutne brzine  $\omega_3$ , pri konstantnoj kutnoj brzini osovine  $1$ , daje kutno ubrzanje gonjene osovine:

$$\varepsilon_3 = - \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha \sin 2\varphi_1}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1)^2} \omega_1^2. \quad (53)$$

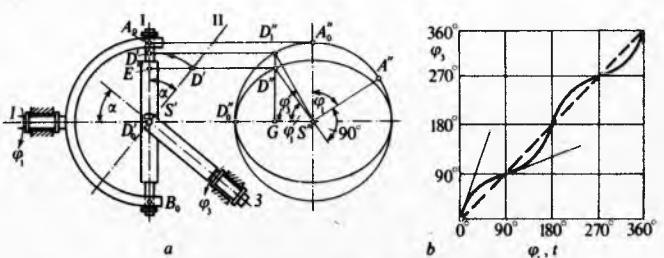
Kutna brzina  $\omega_3$  ima ekstremne vrijednosti pri kutovima  $\varphi_1$  za koje je  $\varepsilon_3 = 0$ , tj. kad je  $\sin 2\varphi_1 = 0$ , odnosno kad je  $\varphi_1 = 0, \frac{\pi}{2}$  i  $\frac{3\pi}{2}$  (sl. 44b). Ekstremne vrijednosti kutne brzine su  $\omega_{3\max} = \frac{\omega_1}{\cos \alpha}$  i  $\omega_{3\min} = \omega_1 \cos \alpha$ . To znači da će za  $\alpha = 0$  biti  $\omega_3 = \omega_1$ ; ako su obje osovine koaksialne, one će se gibati jednakim kutnim brzinama. Za  $\alpha = 90^\circ$  bit će  $\omega_3 = 0$ , što znači da je za taj kut nemoguće postići gibanje gonjenog člana. Koeficijent neravnomjernosti gibanja gonjenog člana jest

$$k = \frac{\omega_{3\max} - \omega_{3\min}}{\omega_1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}. \quad (54)$$

Ta analiza pretpostavlja da se za  $\varphi_1 = 0$  viljuška  $AB$  nalazi u ravnini u kojoj leže obje osovine. Naime, gonjeni su i pogon-



Sl. 43. Univerzalni Cardano-Hookeov zglob

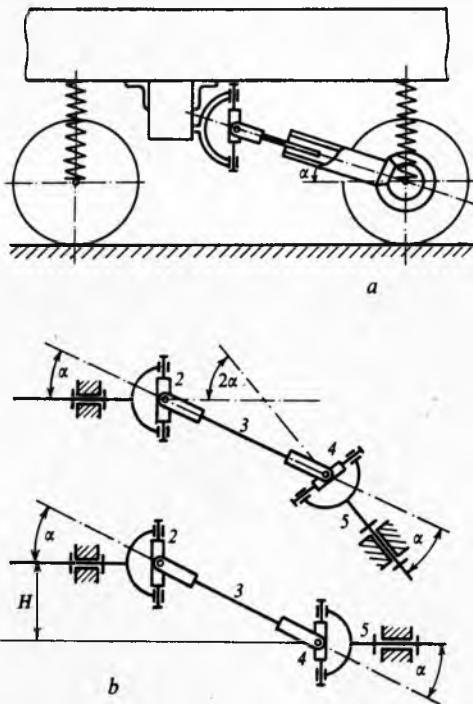


Sl. 44. Univerzalni Cardano-Hookeov zglob. a) grafičko određivanje kutova rotacije pogonskog i gonjenog člana, b) zavisnost kutova rotacije pogonskog i gonjenog člana univerzalnog Cardano-Hookeova zgloba

ski član prema konstrukcijskoj shemi identični, pa ako u početku gibanja za  $\varphi_1 = 0$  viljuška  $CD$  gonjenog člana leži u ravnini u kojoj su i obje osovine, kutovi  $\varphi_1$  i  $\varphi_3$  razlikuju se za  $\pi/2$  od kutova uzetih u analizi, te će u izrazima za  $\omega_3$  i  $\varepsilon_3$  umjesto  $\cos^2 \varphi_1$  doći  $\sin^2 \varphi_1$  i obrnuto.

Neravnomjernost gibanja osnovna je merna toga mehanizma. Za male kutove  $\alpha$  ona je neznatna, npr. za  $\alpha = 8^\circ$  vrijednost izraza  $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$  varira za manje od  $\pm 1\%$  od srednje vrijednosti.

Rotacija se može prenositi pri promjenljivom kutu  $\alpha$ ; tako je u kardanskoj osovinici motornog vozila (sl. 45a). Sprezanjem dvaju Cardano-Hookeovih zglobova u zajednički mehanizam može se postići ravnomjerno prenošenje rotacije s pogonske osovine 1 na gonjenu osovinu 5 (sl. 45b). Pri tom moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti: osovine 1 i 5 zatvaraju s međuosevinom 3 jednaki kut  $\alpha$ , a viljuške pogonske i gonjene osovine leže u istoj ravnini. Tada je  $\tan \varphi_5 = \tan \varphi_1$ , pa je prema tome i  $\omega_5 = \omega_1$ . Dvostruki Cardano-Hookeov zglob pogodan je posebno za prenošenje ravnomjernog gibanja među paralelnim osovinama. Gonjeni član okretat će se konstantnom brzinom i onda ako se tokom rada udaljenost  $H$  među paralelnim osovinama mijenja.



Sl. 45. Univerzalni Cardano-Hookeov zglob. a kardanska osovinica automobila, b dvostruki kardanski zglob

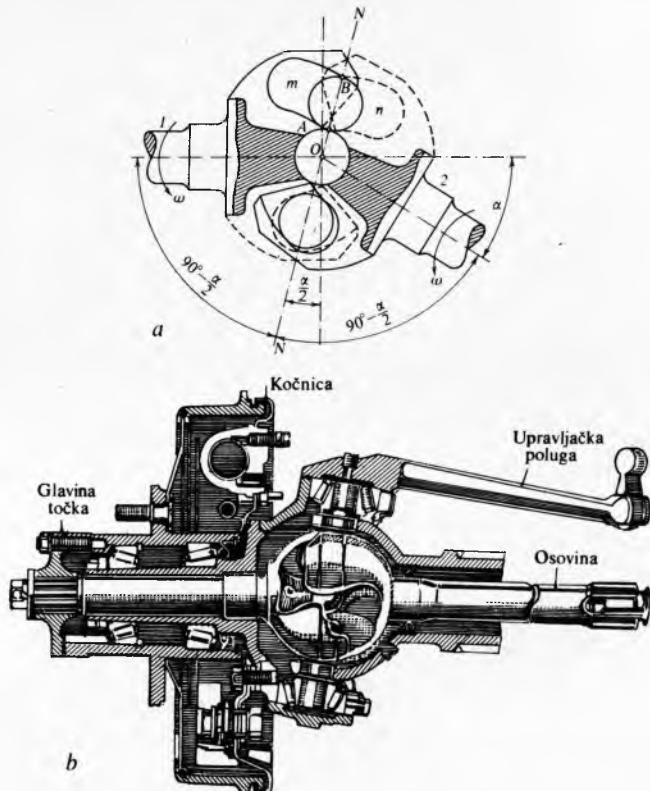
Zbog neravnomjernog gibanja gonjenog člana jednostrukog Cardano-Hookeova zgloba, kutna brzina  $\omega_3$  dostiže za vrijeme jednog okretaja dva puta maksimalnu vrijednost  $\frac{\omega_1}{\cos \alpha}$  i dva puta

minimalnu vrijednost  $\omega_1 \cos \alpha$ . Pri većim brzinama vrtanje koje njima pripadaju, ubrzanja pobuduju oscilacije veće od dopustivih. Dvostrukim zglobom izbjegava se ta neravnomjernost, ali zbog brojnih zazora povećava se mogućnost vibracija i zamora materijala. Stoga dvostruki zglob, kada je kut  $\alpha$  manji od  $\sim 10^\circ$ , gubi prednost pred jednostrukim zglobom. U svakom slučaju, srednja osovina 3 dvostrukog zgloba giba se neravnomjerno i zato njezina masa treba da bude što manja. Vrlo je često raspoloživi prostor toliko malen da se ne može ugraditi dvostruki zglob, bez obzira koliko se skrati duljina srednje spojne osovine.

Nedostaci Cardano-Hookeova zgloba otklonjeni su u novijim konstrukcijama jednostrukih zglobova s konstantnom kutnom brzinom. Najpoznatiji su Bendix-Weissov i Rzeppin univerzalni zglob. Ravnomjeran rad takvih univerzalnih zglobova postiže

se tako da se elementi pogonskog i gonjenog člana dodiruju uvijek u istoj ravnini. Ta ravnina treba da bude okomita na ravninu u kojoj leže obje osovine i da raspolažva kut među osovinama.

*Bendix-Weissov univerzalni zglob* ima nekoncentrične lučne žlebove  $m$  i  $n$  (sl. 46). Bez obzira na iznos kuta među osovinama, žlebovi se sijeku u točkama  $A$  i  $B$  u ravnini simetrije  $NN$ .



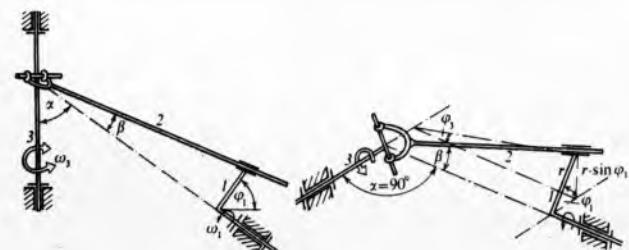
Sl. 46. Bendix-Weissov univerzalni zglob. a shema zgloba, b konstrukcijski izgled zgloba ugrađenog u prednju pogonsku osovinu automobila

Zbog toga će i kuglice (ukupno 4) obuhvaćene tim žlebovima imati svoje središte uvijek na istoj ravnini, i to jednakom udaljeno od osi pogonskog i gonjenog člana. Koincidentne točke, od kojih jedna pripada pogonskom, a druga gonjenom članu, imat će zato jednake brzine. Središte krivine žlijeba  $m$  nalazi se na uzdužnoj osi pogonske osovine 1, a žlieb  $n$  na uzdužnoj osi gonjene osovine 2.

Na istom principu temelje se i *Rzeppin univerzalni zglob*. Šest kuglica, obuhvaćenih s vanjske i unutrašnje strane plohami koje formiraju toruse, uvijek su u ravnini kroz raspolovnicu kuta među osovinama.

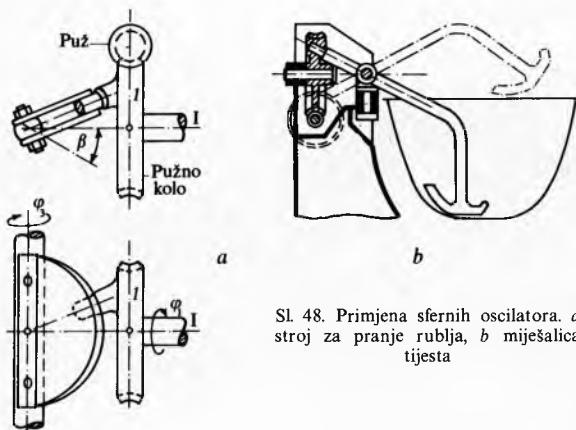
Oba spomenuta tipa univerzalnih zglobova najčešće se primjenjuju na automobilima s pogonom na prednjoj osovinici, na strojevima za gradnju putova, na tramvajima i u rudničkim uređajima. Uspješno služe za prijenos rotacije među osovinama koje se sijeku pod kutom manjim od  $40^\circ$ .

*Sferni oscilatori*. Sferni oscilator transformira rotaciju pogonske ručice 1 u oscilatorno rotiranje ili potpuno rotiranje člana 3 (sl. 47). Pogonska i gonjena osovina zatvaraju međusobno



Sl. 47. Sferni oscilatori

kut  $\alpha$ . Sprežni član 2 zatvara s pogonskom osovinom kut  $\beta$ . Osovina 3 oscilira kad je  $\beta < \alpha$ , a rotira kad je  $\beta > \alpha$ . Modifikacija toga mehanizma sa  $\alpha = 90^\circ$  primjenjuje se kad se zahtijeva skoro linearna zavisnost među kutovima zakretanja pogonskog i gorenjeg člana, i to na širem području ciklusa gibanja. Takva

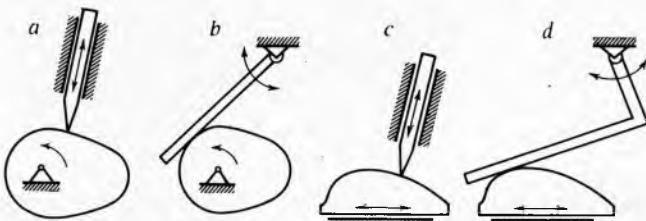


Sl. 48. Primjena sfernih osculatora. a) stroj za pranje rublja, b) miješalica tjestova

modifikacija sfernog osculatora primjenjena je na stroju za pranje rublja, na miješalici tjestova i drugim sličnim strojevima (sl. 48).

#### Kriviljni (grebenasti) mehanizmi

Kriviljni su mehanizmi tročlani, s jednim višim i dva niža kinematička para. Jedan od članova ima krivocrtni oblik, pa se zato takvi mehanizmi i nazivaju krivilnjim ili grebenastima. Kriviljni mehanizmi transformiraju gibanja kriviljnog člana (grebena) u pravocrtno osculatorno ili rotacijsko osculatorno gibanje radnog člana (pomicaljke), sl. 49. Radni član kriviljnog mehanizma može se kretati po bilo kojem unaprijed zadanim zakonom. Zahtijevano kretanje radnog člana određeno je oblikom konture kriviljnog člana. Zbog svojih kinematičkih mogućnosti takvi se mehanizmi ne mogu u mnogim tehničkim primjenama zamijeniti bilo kojim drugim tipom mehanizma, pa su prijevo potrebni kao sastavni dio različitih automatskih strojeva, motora s unutrašnjim izgaranjem, nekih alatnih strojeva, obućarskih strojeva, uređaja za mijenjanje ploča na gramofonu, servomehanizama itd.



Sl. 49. Funkcije kriviljnih mehanizama. a) transformiranje rotacijskog gibanja u osculatorno pravocrtno gibanje, b) transformiranje rotacije u njihanje, c) transformiranje jednog osculatornog pravocrtnog gibanja u drugo, d) transformiranje pravocrtnog gibanja u njihanje

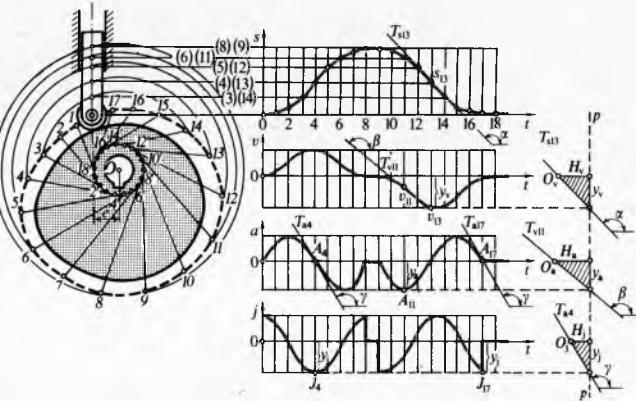
Prednosti su kriviljnih mehanizama: imaju malo članova i zauzimaju malo prostora, jednostavno se konstruiraju, a izrađuju se bez većih teškoća. Nedostatak im je da je kriviljni par viši kinematički par i da može preuzimati manja opterećenja nego niži par. Zbog toga se kriviljni mehanizmi rjeđe upotrebljavaju za prijenos većih sila. Naime, tada je potrebno povećati dimenzije članova, a time i gabarit mehanizma. Dodirna naprezanja između grebena i pomicaljke i relativno brzo habanje traže kvalitetnije materijale, a i posebnu termičku obradu. Zbog habanja mijenja se kontura grebena, a time i zakon gibanja radnog člana. Zato se ne preporučuje primjena kriviljnih mehanizama ondje gdje se mogu uspješno zamijeniti drugim tipovima mehanizama koji su im kinematički ekvivalentni. Da bi se smanjilo trenje, na dodiru elemenata kriviljnog para vrlo često se umeću kotačići (valjčići), koji s pomicaljkom čine

rotodni par. Klizanje se na taj način pretvara u kotrljanje, te su gubici zbog trenja manji.

Za crtanje kinematičkih dijagrama kriviljnog mehanizma služi transformacija mehanizma inverzijom postoljnog člana. Naime, pretpostavlja se da kriviljni član miruje, a da postolje zajedno s pomicaljkom rotira u smjeru suprotnom od stvarne rotacije grebena. Pri zakretanju pomicaljke za bilo koji kut  $\varphi$ , relativni položaj pomicaljke s obzirom na greben bit će isti kao da je i greben rotirao za jednak kut  $\varphi$  u suprotnom smjeru. Na taj je način konstrukcija dijagrama (sl. 50) mnogo jednostavnija, jer je za više različitih položaja pomicaljke potrebno nacrtati samo jedanput kriviljni član, koji je složenog oblika. Kad se crta dijagram  $s = f(\varphi)$  za pomicaljku s kotačićem polumjera  $R_k$ , treba uzeti u obzir da će se središte kotačića gibati po liniji koja je ekvidistantna konturi grebena. Ekvidistantna linija ucrtava se kao ovojnica (anvelopa) kružnicu polumjera  $R_k$  sa središtem na konturi grebena. Ako kriviljni član rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega$ , kut zakretanja  $\varphi_i$  proporcionalan je vremenu  $t_i$ , te se kinematički dijagrami  $(s, \varphi)$  i  $(\psi, \varphi)$  pretvaraju u dijagrame  $(s, t)$ , odnosno  $(\psi, t)$ .

Grafičkim deriviranjem dijagrama  $(s, t)$  mogu se konstruirati dijagrami  $(\psi, t)$  i  $(a, t)$ , sl. 50. Isto tako, iz dijagrama  $(\varphi, t)$  proizlaze dijagrami  $(\omega, t)$  i  $(\varepsilon, t)$ .

Ako je gibanje neravnomjerno, grafičko deriviranje daje dijagrame  $\left(\frac{ds}{d\varphi}, \varphi\right)$  i  $\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2}, \varphi\right)$ , odnosno  $\left(\frac{d\psi}{d\varphi}, \varphi\right)$  i  $\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}, \varphi\right)$ , a to su brzine i ubrzanja, odnosno kutne brzine i kutna ubrzanja.



Sl. 50. Kinematički dijagrami kriviljnog mehanizma

Metodom grafičkog deriviranja nacrtani su dijagrami  $(v, t)$  i  $(a, t)$  kriviljnog mehanizma s ekscentrično postavljenom pomicaljkom (sl. 50). Radi preciznijeg crtanja tih dijagrama kružnica polumjera  $e$  podijeljena je na 18 jednakih dijelova. Presecišta tangenata u točkama  $i'$  s ekvidistantnom kriviljom određuju položaje osi kotačića u mehanizmu za koji je greben stacionaran (inverzija). Stvarni položaji pomicaljke određene se tako da se kroz ove točke nacrtaju kružnice sa središtem u  $O$  do presecišta sa smjerom kretanja pomicaljke. Na taj se način za pripadne kutove  $\varphi_i$  zakretanje grebena ili za pripadno vrijeme  $t_i$  dobiju ordinante u dijagramu  $(s, t)$ .

Grafička metoda crtanja dijagrama  $(v, t)$  i  $(a, t)$  temelji se na poznatim relacijama:  $v = \frac{ds}{dt} = \tan \alpha$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sin \alpha}{dt} = \tan \beta$ . U bilo kojoj točki dijagrama  $(s, t)$  nacrtava se tangentna  $T_{si}$  (sl. 50). Paralela povučena s tangentom iz polarne točke  $O_v$  do presecišta s vertikalnim pravcem  $pp$  zatvorit će pravokutni trokut. Iz tog trokuta proizlazi  $\frac{y_v}{H_v} = \tan \alpha = \frac{ds}{dt} = v_i$ . Odsječak  $y_v$  na vertikalnom pravcu  $pp$  proporcionalan je, dakle, brzini gibanja pomicaljke u položaju  $i$ . Taj odsječak  $y_v$  uzima se kao ordinata za položaj  $i$  u dijagramu  $(v, t)$ . Na isti se način, pomoću kuta nagiba tangenata u dijagramu  $(v, t)$ , određe ordinata  $y_a$  dijagrama  $(a, t)$ .

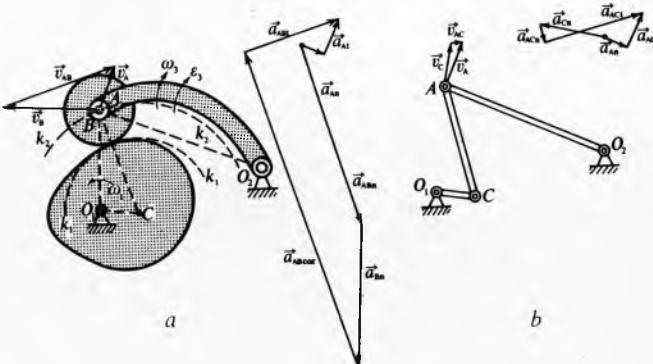
Pri radu kriviljnog mehanizma, promjena ubrzanja, tj. ubrzanje drugog reda, istodobno je i promjena inercijskih sila koje djeluju na članove mehanizma. Te se promjene periodički

ponavlaju pa pobuđuju vibracije, i to utoliko više ukoliko su promjene ubrzanja veće. Čovječji organizam osjeća ubrzanje drugog reda kao *trzaj*, pa je taj izraz prihvaćen i kao naziv za promjenu ubrzanja. Vrlo je raširen i engleski naziv *jerk*, te se početno slovo *j* ovog naziva upotrebljava kao oznaka za trzaj:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3}. \quad (55)$$

Dijagram (*j,t*) dobiva se grafičkim deriviranjem dijagrama (*a,t*).

**Plan brzina i ubrzanja.** Način ertanja plana brzina i plana ubrzanja krivuljnih mehanizama ne razlikuje se od postupka primjenjenog za druge tipove mehanizama. Za zadani kutnu brzinu  $\omega_1$  pogonskog grebena (sl. 51a) potrebno je naći kutnu brzinu  $\omega_3$  i kutno ubrzanje  $\varepsilon_3$  gonjene njihalice. Točke *A* i *B* koincidentne su točke pogonskog grebena (*B*) i njihalice (*A*). Trenutno je relativno gibanje tih točaka po luku zakrivljenosti  $k_2 k_2$ , koji je ekvidistantan luku zakrivljenosti konture grebena  $k_1 k_1$ . Oba luka imaju zajedničko središte u *C*. Plan brzina proizlazi iz vektorske jednadžbe:  $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$ , gdje je  $v_B$  brzina točke *B* grebena. Pravac vektora  $\vec{v}_B$  okomit je na spojnici  $O_1 B$ , smjer mu je određen smjerom kutne brzine  $\omega_1$ , a iznos je  $v_B = \overline{O_1 B} \omega_1$ . Pravac relativne brzine  $\vec{v}_{AB}$  poklapa se s pravcem tangente na luku zakrivljenosti  $k_2 k_2$  u točki *A*. Pravac brzine  $\vec{v}_A$  okomit je na spojnici  $O_2 A$ .



Sl. 51. Plan brzina i ubrzanja krivuljnog mehanizma i njemu ekvivalentnog mehanizma. *a* krivuljni mehanizam, *b* ekvivalentni mehanizam

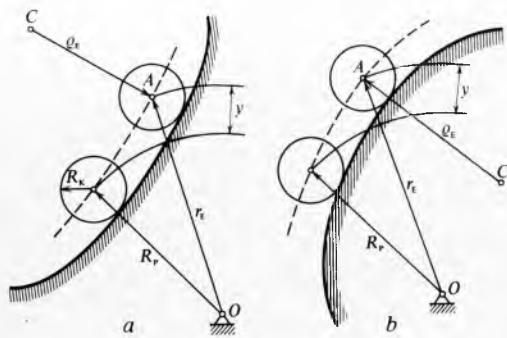
Plan ubrzanja zasniva se na vektorskoj jednadžbi:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} = \vec{a}_B + \vec{a}_{ABn} + \vec{a}_{ABt} + \vec{a}_{ABcor}. \quad (56)$$

Crtanje je plana ubrzanja relativno složeno, pa se za kinetičku analizu krivuljnih mehanizama često upotrebljava metoda zasnovana na analizi kinetički ekvivalentnog mehanizma. Zadatak se svodi na zamjenu višeg kinetičkog para nizim parovima uz dodavanje novih članova, ali uz uvjet da se kinetičke karakteristike potpuno očuvaju. Zglobni četverokut  $O_1 C A O_2$  (sl. 51b) kinetički je ekvivalent za krivuljni mehanizam (sl. 51a). Za kinetički ekvivalentni mehanizam nacrtani su i planovi brzine i ubrzanja. Usporedba tih planova s odgovarajućim planovima originalnog mehanizma pokazuje da je takva zamjena opravdana.

**Polumjer zakrivljenosti konture.** Bez obzira koja se od navedenih metoda kinetičke analize primjeni, potrebno je poznati položaj središta zakrivljenosti i polumjer zakrivljenosti konture grebena ili ekvidistantne linije.

Analitičkim metodama može se naći središte i polumjer zakrivljenosti samo u nekim slučajevima. Posebno je pogodno analitičkim postupkom odrediti polumjer zakrivljenosti za centrične mehanizme s pravocrtnim gibanjem pomicaljke. Na sl. 52a prikazan je greben s konkavnim, a na sl. 52b greben s konveksnim profilom. Iz sl. 52 proizlazi da je:  $r_E = R_p + y$ , gdje je  $R_p$  polumjer početnog kruga, a  $r_E$  polarna koordinata središta kotačića. Polumjer zakrivljenosti jest



Sl. 52. Polumjer zakrivljenjenosti konture. *a* konkavni profil, *b* konveksni profil

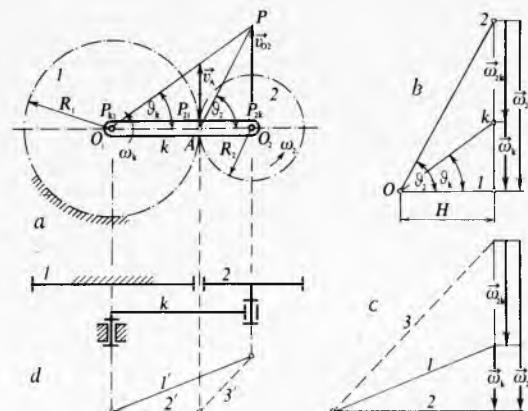
$$r_E = \pm \sqrt{\frac{\left(R_p + y\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(R_p + y\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 - \left(R_p + y\right)\frac{d^2y}{d\varphi^2}}}. \quad (57)$$

Sve veličine navedene u jednadžbi (57) predstavljaju geometrijske podatke krivuljnog mehanizma ili su dobivene kinetičkom analizom mehanizma. Predznak minus odnosi se na konkavni, a plus na konveksni profil. U ostalim slučajevima, kao što su krivuljni mehanizam s ekscentričnim položajem pomicaljke i mehanizam s njihajućom pomicaljkom, središta zakrivljenosti odrede se približnom grafičkom metodom.

#### Planetarni zupčani mehanizmi

Kinetička analiza jednostavnih i složenih zupčanih mehanizama s nepomičnim osima rotacije zupčanika prikazana je u članku *Elementi strojeva*, TE 5, str. 267. U ovom članku je obrađena kinetička analiza zupčanih mehanizama s pomičnim osima rotacije zupčanika, odnosno planetarnih zupčanih mehanizama. Planetarni mehanizmi razvrstavaju se na epicikličke i diferencijalne. Epiciklički planetarni mehanizmi imaju u svom sastavu i zupčanike fiksno vezane s postoljem (nepomične), dok su u diferencijalnim planetarnim mehanizmima svi zupčanici pomični.

**Epiciklički planetarni mehanizmi.** Jednostavni epiciklički mehanizam sastoji se od nepomičnog (stacionarnog) središnjeg zupčanika 1, satelita 2 i ručice k (sl. 53a). Ručica rotira kutnom



Sl. 53. Jednostavni epiciklički planetarni mehanizam. *a* mehanizam sastavljen od središnjeg nepomičnog zupčanika 1, satelita 2 i ručice k, *b* konstrukcija plana kutnih brzina članova pomoću metode trokuta brzina, *c* i *d* konstrukcija plana kutnih brzina članova pomoću metoda kutnih brzina

brzinom  $\omega_k$ , pa se zbog toga zupčanik 2 kotrlja po središnjem zupčaniku i rotira oko svoje pomične osi rezultirajućom kutnom brzinom  $\omega_2$ . Za kinetičku analizu tog mehanizma, posebno za izračunavanje kutnih brzina gonjenog člana  $\omega_2$ , odnosno

prijenosnog odnosa  $i_{k2} = \frac{\omega_k}{\omega_2}$ , služe slijedeće metode: metoda trenutnih polova, metoda trokuta brzina, metoda kutnih brzina i Willisova metoda zaustavljanja.

*Metoda trenutnih polova.* Iz poznatih položaja trenutnih polova rotacije  $P_{k1}$ ,  $P_{2k}$  i  $P_{21}$  (sl. 53a) proizlazi

$$v_{O1} = \overline{O_1 O_2} \omega_k = (R_1 + R_2) \omega_k; v_{O1} = \overline{AO_2} \omega_2 = R_2 \omega_2, \quad (58)$$

a odatle

$$\omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \omega_k = \omega_k \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right), \quad (59)$$

te je

$$i_{k2} = \frac{\omega_k}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{1 - i_{21}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}, \quad (60)$$

gdje je  $R$  promjer zupčanika,  $Z$  broj zubaca, a  $i_{21}$  prijenosni odnos koji bi se postigao pomoću jednostavnog zupčanog prijenosa s pomičnim zupčanicima 1 i 2.

*Metoda trokuta brzina.* Na sl. 53a prikazani su trokuti brzina  $O_1 O_2 P$  i  $AO_2 P$ . Ordinate su u tim trokutima brzine odgovarajućih točaka ručice  $O_1 O_2 P$ , odnosno satelitskog zupčanika  $AO_2 P$ , i to u mjerilu  $\mu_v = \frac{v_{O2}}{O_2 P}$ . Nad po volji odabranom polarnom udaljenosti  $H$  (sl. 53b) povuku se spojnice  $\overline{O1}$ ,  $\overline{Ok}$  i  $\overline{O2}$  paralelne sa stranicama trokuta brzina. Iz sl. 53b proizlazi da je odsječak  $\overline{1k}$  razmjeran kutnoj brzini  $\omega_k$ , odsječak  $\overline{21}$  kutnoj brzini  $\omega_2$  i odsječak  $\overline{2k}$  kutnoj brzini  $\omega_{2k}$ . Prijenosni je omjer prema tome

$$i_{k2} = \frac{\omega_k}{\omega_2} = \frac{\tan \vartheta_k}{\tan \vartheta_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (61)$$

*Metoda kutnih brzina.* Za kutne brzine rotacije kojima vektori prolaze kroz tri trenutna pola na istom polarnom pravcu može se napisati vektorska jednadžba:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_k + \vec{\omega}_{2k}. \quad (62)$$

Poznat je omjer

$$\frac{\omega_2}{R_1 + R_2} = \frac{\omega_{2k}}{R_1} = \frac{\omega_k}{R_2}, \quad (63)$$

pa se vrijednosti kutnih brzina  $\omega_2$  i  $\omega_{2k}$  mogu računski dobiti iz navedenih jednadžbi. Na sl. 53c i 53d prikazana je grafička metoda rješenja vektorske jednadžbe za  $\vec{\omega}_2$ . Metodom lančanog poligona iz zadanog vektora  $\vec{\omega}_k$  određeni su vektori  $\vec{\omega}_2$  i  $\vec{\omega}_{2k}$ .

*Willisova metoda zaustavljanja.* Prema Willisovoj metodi pretpostavlja se da ravnina komplanarnog gibanja zupčanika rotira kutnom brzinom  $\omega_k$ , i to u smjeru suprotnom od smjera rotacije ručice. S tom pretpostavkom ručica će mirovati i prijenosnik će se ponašati kao jednostavni zupčani prijenosnik. Sve kutne brzine promijenile bi se za veličinu  $\omega_k$ , te bi kutna brzina središnjeg zupčanika bila  $\omega_1 - \omega_k = -\omega_k$ , kutna brzina ručice  $\omega_k - \omega_k = 0$  i kutna brzina satelita  $\omega_2 - \omega_k$ . Proračun

prema Willisovoj metodi najčešće se provodi tabelarno, pa se zato ta metoda naziva i tabličnom metodom. U tabl. 2 redom su nanesena stanja prema Willisovoj metodi zaustavljanja. U prvom redu su navedene kutne brzine svakog člana mehanizma kad ručica miruje, tj. kad ravnina rotira kutnom brzinom  $-\omega_k$ . U drugom redu dodana je svakom članu kutna brzina  $\omega_k$  zbog toga što ručica stvarno ne miruje. U zadnjem redu zbrajanjem su dobivene rezultirajuće veličine kutnih brzina svih članova. Tabl. 3. napravljena je uz pretpostavku da je ravnina okrenuta za  $2\pi$  u smjeru suprotnom gibanju ručice. Zadnji redak u tabl. 3 pokazuje koliko se puta okrenuo koji član da vrijeme jednog okretaja ručice, odnosno pogonskog člana. Podaci za ovu tablicu dobivaju se iz tabl. 2 dijeljenjem odgovarajućih veličina sa  $\omega_k$ . Prijenosni omjer proizlazi direktno iz tabl. 3.

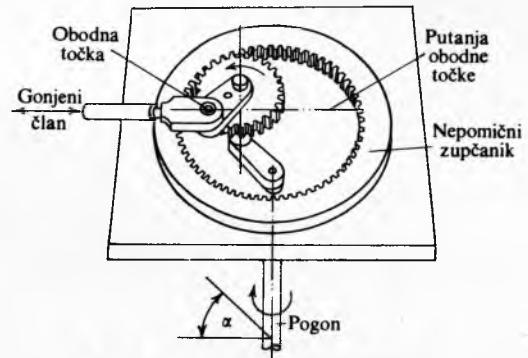
Kad su satelit i središnji zupčanik ozubljeni s unutrašnje strane, prijenosni omjer iznosi

$$i_{k2} = \frac{\omega_k}{\omega_2} = \frac{1}{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (64)$$

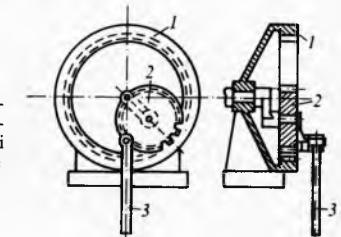
Ako vanjski zupčanik ima dvaput više zubaca od unutrašnjeg zupčanika ( $Z_1 = 2Z_2$ ), bit će

$$i_{k2} = \frac{\omega_k}{\omega_2} = \frac{1}{1 - 2} = -1. \quad (65)$$

Satelit će tada izvoditi Cardanovo gibanje, a mehanizam će biti Cardanov zupčani mehanizam (sl. 54). Svaka točka na obodu kruga se kotrlja po unutrašnjosti drugog kruga, u općem slučaju opisuje hipocikloidu. Ta se krivulja pretvara u pravac



Sl. 54. Cardanov planetarni mehanizam



Sl. 55. Primjena Cardanova mehanizma na mehanizam preše. 1 nepomični veliki zupčanik, 2 unutrašnji satelitski zupčanik, 3 radni član preše

Tablica 3  
ODREĐIVANJE PRIJENOSNOG OMJERA JEDNOSTAVNOG EPICIKLIČKOG MEHANIZMA

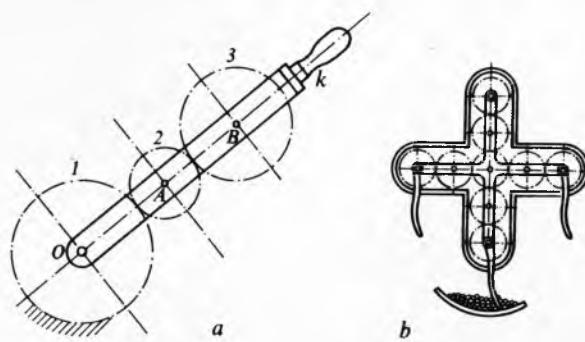
Stanje	Ručica $k$	Središnji zupčanik 1	Satelit 2
Ručica miruje	0	$-\omega_k$	$+\omega_k \frac{Z_1}{Z_2}$
Zbog gibanja ručice	$\omega_k$	$\omega_k$	$\omega_k$
Ukupno	$\omega_k$	0	$\omega_k \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right)$

Izračunano iz tablice 2 dijeljenjem sa  $\omega_k$ .

Tablica 2  
ODREĐIVANJE PRIJENOSNOG OMJERA JEDNOSTAVNOG EPICIKLIČKOG MEHANIZMA

Stanje	Ručica $k$	Središnji zupčanik 1	Satelit 2
Ručica miruje	0	$-\omega_k$	$+\omega_k \frac{Z_1}{Z_2}$
Zbog gibanja ručice	$\omega_k$	$\omega_k$	$\omega_k$
Ukupno	$\omega_k$	0	$\omega_k \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right)$

ako je omjer polumjera krugova 1:2. Pomak obodne točke po pravcu proporcionalan je  $\sin\alpha$  ili  $\cos\alpha$ , pri čemu je  $\alpha$  kut zakretanja pogonske ručice. Na sl. 55 prikazan je Cardanov planetarni mehanizam primijenjen na mehanizam preše. U tom će se slučaju dodatni radni član 3 preše givati pravocrtno u okomitom smjeru.



Sl. 56. Planetarni mehanizam s više satelita. a središnji nepomični zupčanik 2 sa dva zupčanika satelita 1 i 3, b mehanizam za kopanje krumpira

Može biti i više satelita epicikličnog planetarnog mehanizma, npr. mehanizmi na sl. 56a koji osim središnjeg zupčanika imaju još dva satelita. Tada je prijenosni omjer

$$i_{k3} = \frac{1}{1 - \frac{Z_1}{Z_3}}. \quad (66)$$

Ako je  $Z_1 = Z_3$ , bit će  $i_{k3} = \infty$ ,  $i_{3k} = 0$ . Naime, satelit 3 tada neće rotirati oko svoje osi, već će zbog rotacije ručice izvoditi translatoryno kružno gibanje. Taj takozvani Fergussonov paradoks primijenjen je na mehanizmu za kopanje krumpira (sl. 56b).

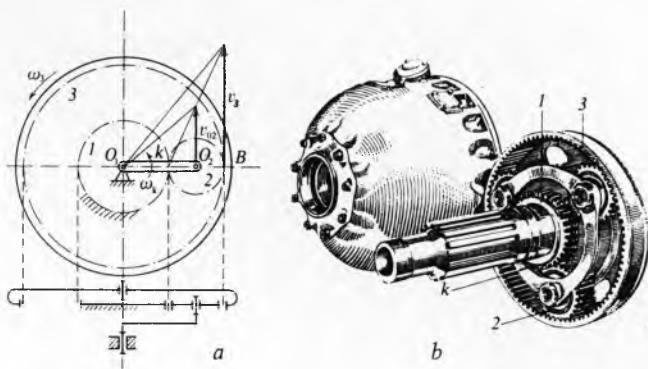
**Povratni epiciklički mehanizmi s unutrašnjim ozubljenjem jednog para.** Epiciklički zupčani prijenos nema šire primjene u tehničkoj praksi, jer gonjeni zupčanik ima složeno ravno gibanje. Da bi takav prijenos poslužio kao reduktor, treba ga projektirati u obliku *povratnog epicikličkog mehanizma*; naime, satelitu 2 treba dodati dopunske članove koji će rotirati oko fiksne osi rotacije. Na sl. 57a prikazan je povratni epiciklički mehanizam s unutrašnjim ozubljenjem jednog para zupčanika. Os rotacije zupčanika 3 poklapa se s osi rotacije ručice k. Središnji zupčanik 1 je nepomičan. Iz trokuta brzina i tablične metode (tabl. 4) proizlazi prijenosni omjer

$$i_{k3}^{(1)} = \frac{\omega_k}{\omega_3} = \frac{2 + \frac{Z_1}{Z_2}}{2 \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right)}. \quad (67)$$

Tablica 4

ODREĐIVANJE PRIJENOSNOG OMJERA POVRATNOG EPICKLIČKOG MEHANIZMA S UNUTRAŠNJIM OZUBLJENJEM JEDNOG PARA

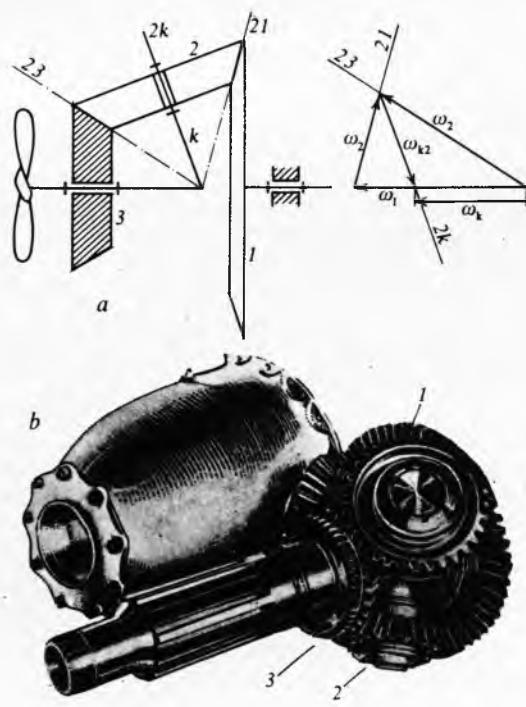
Stanje	Ručica k	Središnji zupčanik 1	Satelit 2	Vanjski zupčanik 3
Ručica miruje	0	-1	$\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_1}{Z_1 + 2Z_2}$
Zbog gibanja ručice	1	1	1	1
Ukupno	1	0	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$1 + \frac{Z_1}{Z_1 + 2Z_2} = \frac{2(1 + \frac{Z_1}{Z_2})}{2 + \frac{Z_1}{Z_2}}$



Sl. 57. Povratni epiciklički mehanizam. a mehanizam s unutrašnjim ozubljenjem jednog para, b reduktor okretaja avionskog propelera tipa Gnome-Rhone

Indeks iznad  $i$  označuje zupčanik koji je nepomičan. Za  $R_2 = R_1$ , odnosno  $Z_2 = Z_1$  dobiva se  $i_{k3}^{(1)} = \frac{3}{4}$ , odnosno  $i_{3k}^{(1)} = \frac{1}{3}$ . Uzimajući veći omjer među polumjerima zupčanika 1 i 2, na primjer  $R_1 = 5R_2$ , bit će prijenosni omjer  $i_{k3}^{(1)} = \frac{7}{12}$ , odnosno  $i_{3k}^{(1)} = \frac{12}{7}$ . Također za  $R_2 = 5R_1$  bit će  $i_{k3}^{(1)} = \frac{11}{12}$ , odnosno  $i_{3k}^{(1)} = \frac{12}{11}$ . Iz tog proizlazi da se prijenosni omjer postignut takvim planetarnim prijenosnikom nalazi u relativno uskim granicama, i to  $i_{k3}^{(1)} = 1 \dots \frac{1}{2}$ ,  $i_{3k}^{(1)} = 1 \dots 2$ .

Povratni epiciklički mehanizam često se primjenjuje kao reduktor za prijenos vrtnje vratila avionskog motora na propeler. Na sl. 58b prikazan je reduktor Gnome-Rhone sa tri satelita na zajedničkom okviru k. Pogonski zupčanik, fiksno vezan za vratilo motora, ima  $Z_3 = 90$ , a nepomični zupčanik 1 ima  $Z_1 = 36$ , te je  $i_{3k}^{(1)} = \frac{7}{5}$ . Okvir k ima ulogu ručice i vezan je s osovinom propelera. Radi uravnoveženja centrifugalnih sila reduktor ima najmanje dva satelita, a može ih biti znatno



Sl. 58. Planetarni mehanizam s koničnim zupčanicima. a shema i plan kutnih brzina mehanizma, b reduktor okretaja avionskog propelera

više. Upravo zbog uravnovešenja sateliti moraju biti međusobno jednak udaljeni. Više satelita poželjno je i radi rasterećenja osi satelita i mogućnosti da se prenesu veće sile. Broj satelita je ograničen jedino uvjetom da se zubi susjednih satelita međusobno ne dodiruju.

Identične kinematičke karakteristike mogu se postići planetarnim mehanizmom s koničnim zupčanicima. Na sl. 58 prikazan je izgled i shema toga mehanizma primijenjenog na reduktor avionskog propelerera. Za kinematičku analizu planetarnog mehanizma s koničnim zupčanicima pogodna je grafička metoda plana kutnih brzina. Plan kutnih brzina na sl. 58a nacrtan je na osnovi vektorskih jednadžbi:  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}$ , te  $\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{k2}$ .

Premda se fiksiranjem zupčanika s unutrašnjim ozubljenjem prijenosni omjeri znatno povećavaju, oni ne izlaze iz područja primjene običnih cilindričnih zupčanih prijenosa. Kao usporavajući mehanizmi primjenjuju se na poljoprivrednim, tipografskim i drugim strojevima. Karakteristika je tog tipa reduktora relativno veći stupanj djelovanja  $\eta$ , koji malo ovisi o prijenosnom odnosu, pa mehanizam s istim učinkom radi i kad se multipliciraju i kad se reduciraju brzine vrtnje.

**Reduktori s vanjskim ozubljenjem parova.** Epiciklički zupčani prijenos sa  $n$  zupčanika, kad se gibanje prenosi s ručice  $k$  na  $n$ -ti zupčanik, ima sljedeći prijenosni omjer

$$i_{nk} = \frac{\omega_n}{\omega_k} = 1 - i_{n_1}, \quad (68)$$

odnosno

$$i_{kn} = \frac{\omega_k}{\omega_n} = \frac{1}{1 - i_{n_1}}. \quad (69)$$

Iz ove relacije proizlazi da prijenosni omjer  $i_{kn}$  može doći velike vrijednosti samo kad je  $i_{n_1}$  pozitivno (isti smjer rotacije prvog i  $n$ -og zupčanika) i ima vrijednost blisku jedinici. Vrijednost  $i_{n_1}$  bit će pozitivna jedino ako zupčanički parovi imaju, ili svi unutrašnje, ili svi vanjsko ozubljenje.

Na sl. 59a prikazan je reduktor s vanjskim ozubljenjem zupčaničkih parova. Iz plana brzina i pomoću Willisove metode (tabl. 5) dobiva se prijenosni omjer

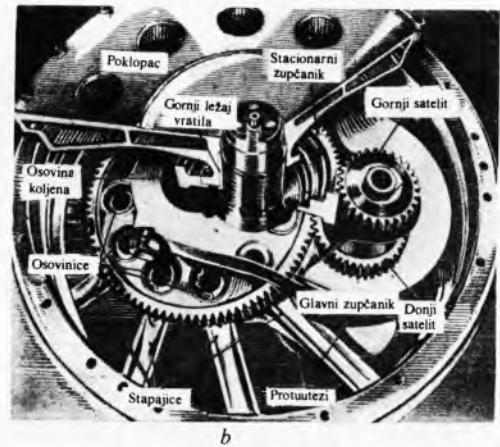
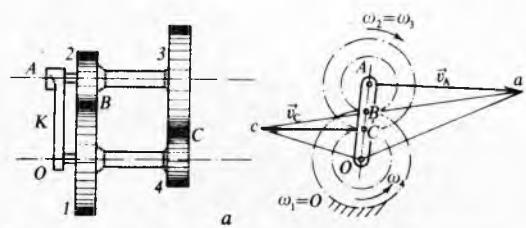
$$i_{4k}^{(1)} = 1 - \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4}. \quad (70)$$

Pomoću takva tipa reduktora mogu se postići veliki prijenosni omjeri s istim ili suprotnim smjerom rotacije pogonskoga i gonjenog člana, pa reduktor s vanjskim ozubljenjem parova zamjenjuje nekoliko spregnutih, jednostavnih zupčanih prijenosnika. Osnovni nedostatak tega reduktora jesu veliki gubici zbog trenja, pa je stupanj djelovanja vrlo malen, i za reduktor sa  $i_{k4} \approx 10000$  iznosi svega  $\eta = 0,0015$ . Zbog toga se pri većim prijenosnim omjerima ( $i_{k4} > 15$ ) taj mehanizam ne može upotrijebiti kao multiplikator za povećanje brzine vrtnje, jer bi se, kao i pri svim ubrzavajućim sustavima s malim stupnjem djelovanja, pojavilo samokočenje.

Ako su veličine zupčanika u sustavu takvog mehanizma odabrane tako da je  $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} = 1$ , bit će  $i_{k4} = \infty$ , odnosno  $i_{4k} = 0$ . Naime, zupčanik 4 će mirovati ako je koaksijalan s nepo-

Tablica 5  
ODREĐIVANJE PRIJENOSNOG OMJERA REDUKTORA S VANJSKIM OZUBLJENJEM PAROVA

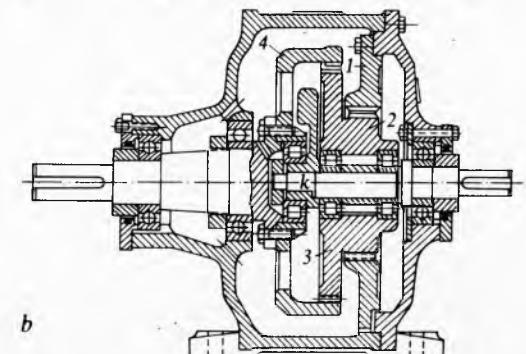
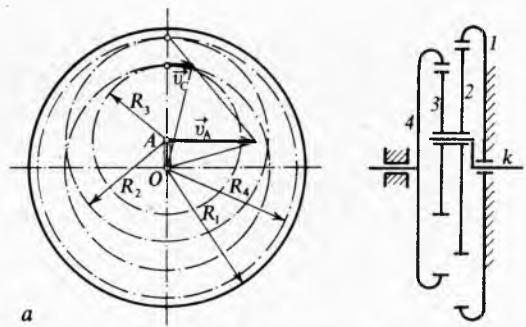
Stanje	Ručica $k$	Zupčanik 1	Zupčanik 2	Zupčanik 3	Zupčanik 4
Ručica miruje	0	-1	$+\frac{Z_1}{Z_2}$	$+\frac{Z_1}{Z_2}$	$-\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4}$
Zbog gibanja ručice	+1	+1	+1	+1	+1
Ukupno	+1	0	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$1 - \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_3}{Z_4}$



Sl. 59. Reduktor s vanjskim ozubljenjem parova. a shema reduktora i plan brzina, b mehanizam radikalnog motora

mičnim zupčanicom 1 (sl. 59a). Ako ta dva zupčanika nisu koaksijalna, zupčanik 4 imat će kružnu translaciju. Takav planetarni mehanizam s translatoidnim gibanjem glavnog zupčanika primjenjen je za prijenos gibanja sa stapačicom na vratilo nekih tipova radikalnih motora (sl. 59b).

**Reduktori s unutrašnjim ozubljenjem parova.** Zubici zbog treća zupčanika mehanizama s unutrašnjim sprezanjem manji su od gubitaka mehanizama s vanjskim sprezanjem zupčanika, tako da za  $i = 10000$  stupanj djelovanja reduktora s unutrašnjim sprezanjem iznosi  $\eta \approx 0,04$ . Ručica  $k$  u obliku ekscentra pogonski je član reduktora, a gonjeni član je središnji zupčanik 4 (sl. 60). Ekscentričnost  $OA = e$  vrlo je mala za male raz-



Sl. 60. Reduktor s unutrašnjim ozubljenjem parova. a shema reduktora i plan brzina, b konstrukcijski izgled reduktora

like ( $R_1 - R_2$ ), odnosno ( $R_4 - R_3$ ). Što su navedene razlike manje to se pomoću toga tipa reduktora postižu veći prijenosni omjeri. Prijenosni omjer reduktora s unutrašnjim ozubljenjem parova jest

$$i_{k4}^{(1)} = \frac{1}{1 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}}. \quad (71)$$

Taj je reduktor konstrukcijski mnogo kompaktniji i manji od reduktora s vanjskim ozubljenjem parova. Mana mu je što zbog male razlike u brojevima zubača spregnutih zupčanika zupčanici trebaju imati specijalno evolventno ili cikloidnocevasto ozubljenje (sl. 61).



Sl. 61. Planetarni mehanizam s cjevastim ozubljenjem u sastavu stroja za površinsku obradu

**Sprezanje epicikličkih mehanizama.** Međusobnim sprezanjem epicikličkih planetarnih mehanizama ili sprezanjem tih mehanizama sa drugim tipovima zupčanih prijenosnika postižu se prijenosni omjeri veći od onih što ih ima svaki spregnuti mehanizam uzet zasebno.

Dvostepeni reduktor (sl. 62a), kojemu se I stupanj sastoji od para zupčanika 1 i 2, a II stupanj od povratnog epicikličkog mehanizma, u kojem je nepomičan zupčanik 5 s unutrašnjim ozubljenjem, ima prijenosni omjer

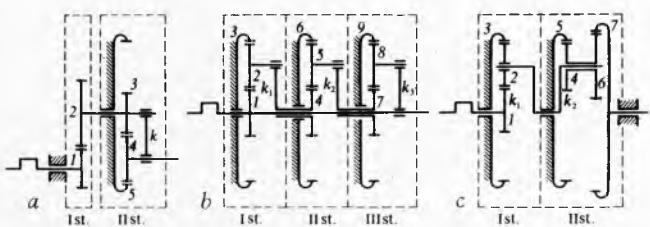
$$i_{1k} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = i; \quad i_{II} = -\frac{Z_2}{Z_1} \left( 1 + \frac{Z_5}{Z_3} \right). \quad (72)$$

Svaki stupanj trostopenog reduktora (sl. 62b) predstavlja po jedan epiciklički planetarni mehanizam u kojem je nepomičan zupčanik s unutrašnjim ozubljenjem. Za ovaj reduktor vrijedi:

$$i_{1k_3} = i_{1k_1} i_{4k_2} i_{7k_3} = \left( 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right) \left( 1 + \frac{Z_6}{Z_4} \right) \left( 1 + \frac{Z_9}{Z_7} \right)$$

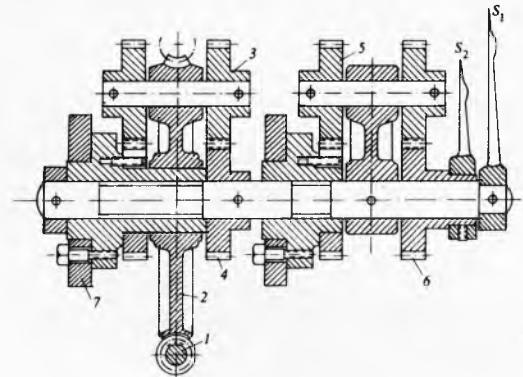
Reduktor na sl. 62c sastoji se od dva epiciklička stupnja. Prvi stupanj je epiciklički mehanizam s nepomičnim zupčanicom s unutrašnjim ozubljenjem obaju parova zupčanika. Prijenosni je omjer:

$$i_{17} = i_{1k_1} i_{k_2 7} = \left( 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right) \frac{1}{1 - \frac{Z_5 Z_6}{Z_4 Z_7}}. \quad (74)$$



Sl. 62. Višestepeni reduktori. a) dvostepeni reduktor s parom zupčanika (I stepen) i povratnim epicikličkim mehanizmom (II stepen); b) trostopeni reduktor sastavljen od tri epiciklička planetarna mehanizma; c) dvostepeni reduktor sastavljen od dva epiciklička planetarna mehanizma

Na sl. 63 prikazan je mehanizam velikog električnog sata. Mehanizam koji prenosi gibanje s elektromotora na minutnu i satnu kazaljku sastoji se od tri spregnuta mehanizma: pužnog prijenosnika (članovi 1, 2, 7) i dva povratna epiciklička mehanizma s vanjskim ozubljenjem parova. Članovi jednoga su

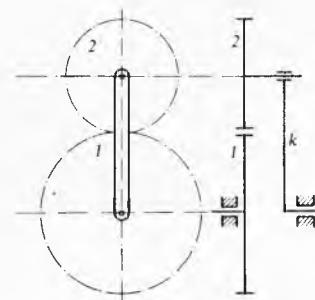


Sl. 63. Mehanizam velikog električnog sata. 1, 2, i 3 pužni prijenosnik, 2, 3, 4 i 7 prvi povratni epiciklički mehanizam s vanjskim ozubljenjem, 4, 5, 6 i 7 drugi povratni epiciklički mehanizam s vanjskim ozubljenjem,  $S_1$  minutna kazaljka,  $S_2$  satna kazaljka

2, 3, 4, 7, a drugoga 4, 5, 6, i 7. Rotacija vratila elektromotora prenosi se na puž 1; pužno kolo 2 ujedno je i ručica jednoga od epicikličkih mehanizama. Središnji zupčanik 4 prvoga epicikličkog mehanizma pogoni minutnu kazaljku  $S_1$ , a središnji zupčanik 6 drugoga epicikličkog mehanizma pogoni satnu kazaljku  $S_2$ .

#### Diferencijalni planetarni mehanizmi

**Jednostavni diferencijalni mehanizmi.** Pod diferencijalnim planetarnim mehanizmom podrazumijeva se planetarni mehanizam sa dva stupnja slobode. Takav jednostavni diferencijalni mehanizam (sl. 64) razlikuje se od epicikličkog mehanizma po tome što središnji zupčanik 1 nije nepomičan, već se okreće kutnom brzinom  $\omega_1$ . Diferencijalni mehanizam prenosi gibanje dvaju pogonskih članova (zupčanik 1 i ručica  $k$ ) na jedan vođeni član (zupčanik 2), ili sa jednoga pogonskog člana (zupčanik 2) na dva vođena člana. Pomoću diferencijalnih prijenosnika mogu



Sl. 64. Shema jednostavnog diferencijalnog planetarnog mehanizma (73)

se, dakle, sastavljati i rastavljati gibanja. Kut zakretanja  $\varphi_2$  vođenog satelita 2 ovisi o kutovima zakretanja  $\varphi_1$  i  $\varphi_k$  pogonskih članova:  $\varphi_2 = f(\varphi_1, \varphi_k)$ , te je kutna brzina

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{d\varphi_k}{dt} = c_1 \omega_1 + c_k \omega_k. \quad (75)$$

Pretpostavivši da je zupčanik 1 nepomičan, dobiva se

$$\omega_2 = c_k \omega_k \quad (76)$$

i odatle

$$c_k = \frac{\omega_2}{\omega_k} = i_{2k}^{(1)}. \quad (77)$$

Isto tako, ako je zupčanik 1 pomičan i giba se kutnom brzinom  $\omega_1$ , a ručica k je nepomična, tj.  $\omega_k = 0$ , iz kutnih brzina zupčanika 1 i 2 dobiva se prijenosni omjer

$$c_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21}^{(k)}, \quad (78)$$

i prema tome

$$\omega_2 = i_{21}^{(k)} \omega_1 + i_{21}^{(k)} \omega_k. \quad (79)$$

Ako se prepostavi da je zupčanik 1 nepomičan, diferencijalni mehanizam postaje epiciklički, te je tada

$$i_{2k}^{(1)} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (80)$$

Ako je ručica k nepomična, mehanizam postaje jednostavni zupčani prijenos sa

$$i_{21}^{(k)} = -\frac{Z_1}{Z_2}. \quad (81)$$

Prema tome

$$\omega_2 = -\frac{Z_1}{Z_2} \omega_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \omega_k. \quad (82)$$

Ako su zupčanici 1 i 2 pogonski članovi, na isti se način dobije izraz za kutnu brzinu ručice k:

$$\omega_k = i_{k1}^{(2)} \omega_1 + i_{k2}^{(1)} \omega_2. \quad (83)$$

Kad je zupčanik 2 nepomičan, prijenosni je omjer

$$i_{k1}^{(2)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}. \quad (84)$$

Isto tako, kad je zupčanik 1 nepomičan, bit će

$$i_{k2}^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (85)$$

Prema tome je

$$\omega_k = \frac{1}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \omega_1 + \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \omega_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \omega_1 + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \omega_2. \quad (86)$$

Tablica 6

ODREĐIVANJE PRIJENOSNOG OMJERA JEDNOSTAVNOG DIFERENCIJALNOG MEHANIZMA

Stanje		Ručica k	Zupčanik 1	Zupčanik 2
Nepomičan zupčanik 1. Mehanizam je epiciklički	Ručica miruje	0	$-\omega_k$	$+\frac{Z_1}{Z_2} \omega_k$
	Zbog gibanja ručice	$+\omega_k$	$+\omega_k$	$+\omega_k$
	Zbroj	$+\omega_k$	0	$\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \omega_k$
Nepomična ručica k. Mehanizam je jednostavni zupčani prijenosnik	Ručica miruje	0	$\omega_1$	$-\frac{Z_1}{Z_2} \omega_1$
Ukupni zbroj		$+\omega_k$	$+\omega_1$	$-\frac{Z_1}{Z_2} \omega_1 + \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \omega_k$

Takvim razmatranjem dolazi se do općeg zaključka o odnisu kutne brzine vođenog člana i kutnih brzina pogonskih članova. Naime, kutna brzina vođenog člana jednaka je zbroju umnožaka kutnih brzina dvaju pogonskih članova s prijenosnim omjerima vođenog člana i pripadnog pogonskog člana, uz pretpostavku da je drugi pogonski član nepomičan.

Tok analize diferencijalnog prijenosnika pomoći Willisove metode prikazan je u tabl. 6.

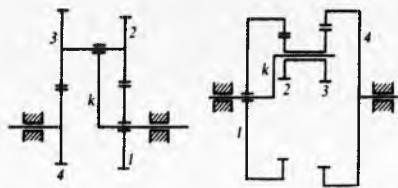
Kutna brzina  $\omega_2$  vođenog člana može se tokom rada mijenjati reguliranjem kutne brzine jednoga od dva pogonska člana ( $\omega_1$  ili  $\omega_k$ ). Na isti način može se kutna brzina vođenog člana svesti na nulu, ili joj promijeniti smjer, i sve to za relativno mala područja izmjene regulirajuće kutne brzine. Jednostavni diferencijalni mehanizam nema tehničke primjene, jer vođeni član 2 obavlja složeno ravno gibanje. Zbog toga kao praktični reduktori služe povratni diferencijalni mehanizmi ili, kraće, diferencijali.

**Cilindrični diferencijali.** Ako se za pogonske članove cilindričnog diferencijala s vanjskim sprezanjem parova (sl. 65) uzme ručica k i središnji zupčanik 1, onda je

$$\omega_4 = i_{41}^{(k)} \omega_1 + i_{4k}^{(1)} \omega_k, \quad (87)$$

ili

$$\omega_4 = i_{41}^{(k)} + (1 - i_{41}^{(k)}) \omega_k. \quad (88)$$



Sl. 65. Cilindrični diferencijali

Prijenosni omjer  $i_{41}^{(k)}$  odnosi se na rotaciju pri kojoj je pogonski član k nepomičan, a  $i_{4k}^{(1)}$  kad je nepomičan pogonski zupčanik 1. U prvom slučaju mehanizam postaje običan zupčani prijenos, a u drugom slučaju povratni epiciklički mehanizam. Prema tome je

$$i_{41}^{(k)} = +\frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4}; \quad i_{4k}^{(1)} = 1 - i_{41}^{(k)} = 1 - \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4} \quad (89)$$

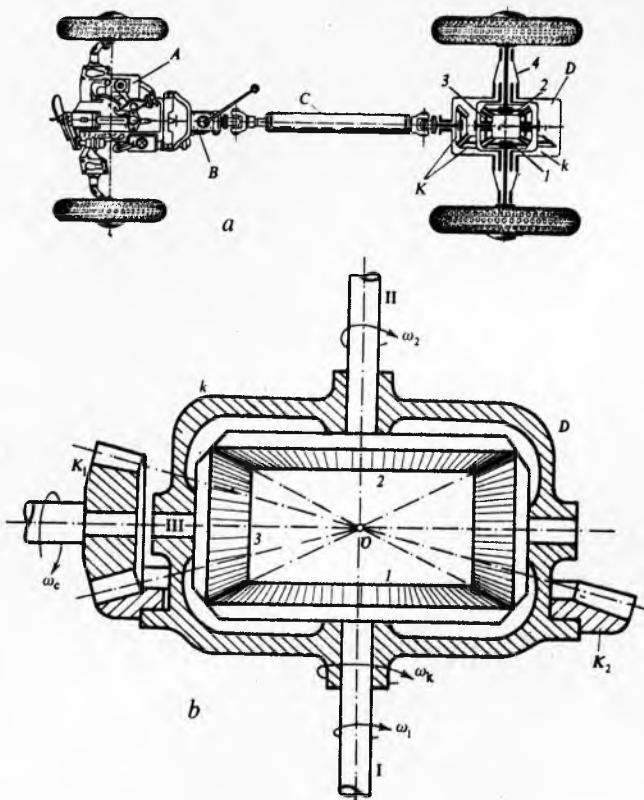
$$\omega_4 = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4} \omega_1 + \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4}\right) \omega_k. \quad (90)$$

**Konusni diferencijali.** Konusni diferencijali imaju široku primjenu. Jedan od njih je i automobilski diferencijal za prenošenje snage motora na osovine pogonskih kotača (v. *Automobilna vozila*, TE 1, str. 515). Motor A pogoni zupčani mehanizam mjenjača brzina B (sl. 66a). To se gibanje preko Cardano-Hookeova mehanizma C prenosi na jednostavni zupčanički mehanizam K sa dva konusna zupčanika. Vođeni zupčanik tog mehanizma ujedno je pogonska ručica k konusnog diferencijala D. Središnji zupčanici 1 i 2 diferencijala čvrsto su vezani za poluosovine I i II pogonskih kotača automobila (sl. 66b). Pri pravocrtnom gibanju automobila obadvije poluosovine, pa prema tome i zupčanici 1 i 2, imaju jednakе kutne brzine  $\omega_1 = \omega_2$ . Kutne brzine poluosovina jednake su tada kutnoj brzini  $\omega_k$  kojom rotira pogonska ručica k, odnosno konusni zupčanik K. Satelit 3 rotira zajedno s ručicom k, tako da čitav diferencijal D rotira kao kruto tijelo brzinom  $\omega_k = \omega_1 = \omega_2$ .

Kad automobil uđe u krivinu, vanjski kotač treba da se okreće brže od unutrašnjeg, te je  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Zbog toga će se satelit 3 okretati i oko svoje uzdužne osi III nekom kutnom brzinom  $\omega_3$ . Tada sustav k, 1, 2, 3 djeluje kao konusni diferencijal. Odnos među kutnim brzinama ručice k te zupčanika 1 i 2 dobije se iz izraza

$$\omega_k = i_{k1}^{(2)} \omega_1 + i_{k2}^{(1)} \omega_2 = i_{k1}^{(2)} \omega_1 + (1 - i_{k1}^{(2)}) \omega_2 \quad (91)$$

gdje je  $i_{k1}^{(2)}$  prijenosni omjer epicikličkog mehanizma ako je nepomičan zupčanik 2, a  $i_{k2}^{(1)}$  je prijenosni omjer ako je nepomičan zupčanik 1.



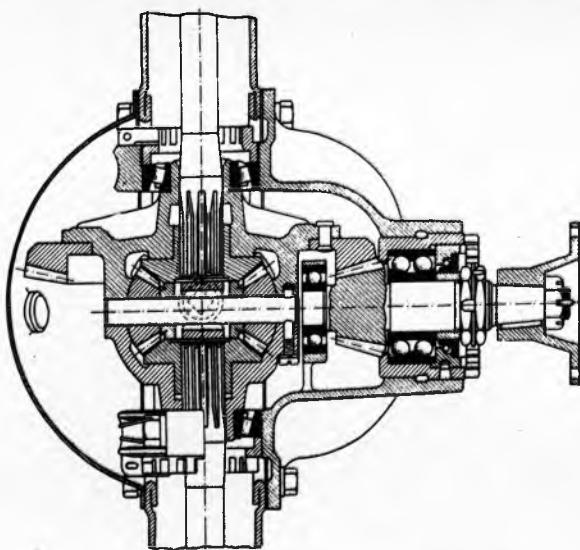
Sl. 66. Konusni diferencijali. a primjena na automobilu, b shema automobilskog diferencijala

Prema tome je

$$\omega_k = \frac{1}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \omega_1 + \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \omega_2. \quad (92)$$

Kako je  $Z_1 = Z_2$ , slijedi  $\omega_k = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ . To znači da drugi kotač ima kutnu brzinu  $\omega_2 = 2\omega_k$ , kad je blokiran jedan kotač ( $\omega_1 = 0$ ).

Danas se sve više primjenjuju diferencijali s hipoidnim i spiralnim zupčanicima ili diferencijali s pužnim prijenosnikom. Diferencijali sa spiralnim koničnim zupčanicima (sl. 67) zamjenili su zupčanice s ravnim zubima, u prvom redu radi mirnijeg hoda. Zupčanici sa spiralnim zupcima manjih su dimenzija te



Sl. 67. Diferencijal sa spiralnim koničnim zupčanicima

je i cijeli diferencijal manji, opterećenje zuba je veće ali su zubi čvršći, a veća je i dodirna površina. Opterećenje zuba u diferencijalu može se smanjiti ako je brzina vrtnje zagonjenog kotača, što se postiže planetarnim reduktorom ugrađenim u glavnu kotača. Takvo se vještanje primjenjuje na teškim teretnim i specijalnim vozilima.

**Zatvoreni diferencijalni prijenosnici.** Ako se dodatnim prijenosnikom u diferencijalnom mehanizmu spoje oba središnja zupčanika međusobno ili jedan od središnjih zupčanika i ručica, dobiva se tzv. zatvoreni diferencijalni prijenosnik. Diferencijalni mehanizam sam po sebi ima dva stupnja pokretljivosti, ali ako dopunski mehanizam, promatrano odvojeno, ima jedan stupanj pokretljivosti, onda će i zatvoreni diferencijalni prijenosnik imati samo jedan stupanj pokretljivosti, odnosno imati će potpuno određeni prijenosni omjer  $i$ . Takav zatvoreni diferencijal, prikazan na sl. 68, sastoji se od osnovnog diferencijala  $k, 1, 2, 3, 4$  i dopunskog prijenosnika  $5, 5'$ .

Prijenosni omjer  $i_{51}$ , odnosno  $i_{55'}$ , zatvorenog mehanizma dobiva se polazeći od izraza za kutnu brzinu  $\omega_1$  osnovnog cilindričnog diferencijala  $1, 2, 3, 4, k$ :

$$\omega_1 = i_{1k}^{45} \omega_k + i_{14}^{k5} \omega_4. \quad (93)$$

Dijeleteći jednadžbu (93) s kutnom brzinom pogonskog člana  $\omega_5$ , dobiva se

$$\frac{\omega_1}{\omega_5} = i_{15} = i_{1k}^{45} i_{k5} + i_{14}^{k5} i_{45}, \quad (94)$$

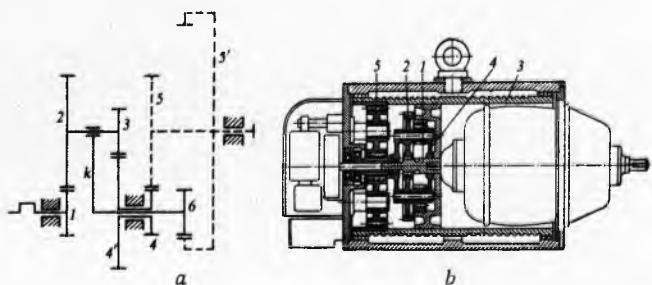
gdje je

$$i_{1k}^{45} = 1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}; \quad i_{14}^{k5} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} = 1 - i_{1k}^{45}; \\ i_{k5} = i_{65'} = \frac{Z_5'}{Z_6}; \quad i_{45} = i_{4'5} = -\frac{Z_5}{Z_4}, \quad (95)$$

pa je prema tome

$$i_{15} = \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}\right) \frac{Z_5'}{Z_6} - \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} \frac{Z_5}{Z_4}. \quad (96)$$

Uzimajući maksimalne omjere brojeva zuba spregnutih zupčanika (tj. 7), dobit će se  $i_{15} = -679$ , a  $i_{51} = -\frac{1}{679}$ .



Sl. 68. Zatvoreni diferencijalni prijenosnik. a kombinacija osnovnog diferencijala (k, 1, 2, 3, 4) i dopunskog prijenosnika (5, 5'), b električno vitišo s ugrađenim zatvorenim diferencijalom

Taj mehanizam je reduktor kad je zupčanik 1 pogonski član, te će zbog toga imati visoki stupanj djelovanja. Isto tako će imati visok stupanj djelovanja i kao multiplikator kad se gibanje s pogonskog zupčanika 5' preko ručice k prenosi na središnji zupčanik 1. Uz navedene prijenosne omjere, takav mehanizam ima stupanj djelovanja  $\eta \approx 0.94$ .

Zatvoreni diferencijalni prijenosnici primjenjuju se u suvremenim dizalicama, transportnim i drugim strojevima. Na električnom vitišu (sl. 68b) moment vrtnje prenosi se od elektromotora do bubnja pomoću zatvorenog diferencijala, koji je nastao sprezanjem cilindričnog diferencijala  $1, 2, 3, 4$  i zupčanog prijenosnika  $4, 5, 3$ . Pogonski član mehanizma je vratilo elektromotora s ugrađenim zupčnikom.

### KINEMATIČKA SINTEZA

Sinteza mehanizama je postupak kojim se, na osnovi zadanih uvjeta koje mehanizam u eksploraciji treba da ispunjava, dolazi do strukture mehanizama i do svih njegovih geometrijskih parametara.

Sinteza je osnova za konstruiranje mehanizama, ali ne obuhvaća cijelokupni proces konstruiranja. Nakon izvršene sinteze, tj. nakon što se odredi tip mehanizma, struktura mehanizma i sve dimenzije potrebne za definiranje kinematičke sheme, treba još izabrati prikladni materijal i oblik svakog člana mehanizma, te dimenzionirati članove da zadovolje zahtijevanu čvrstoću, odnosno krutost. Naime, mehanizam treba da svojom strukturu osigura gibanje radnog člana prema unaprijed zadanim zakonima, ali isto tako konstrukcijskim oblikom treba da omogući ugradivanje, izradbu, održavanje te ekonomičnost izrade i eksploracije.

Konstruiranje mehanizma ne može se, prema tome, obuhvatiti samo teorijom mehanizama, već je potrebno poznavanje kako znanosti o čvrstoći tako i elemenata strojeva, cijelovitog stroja u kojem mehanizam ima određenu funkciju, i cijelokupne tehnologije strojogradnje.

Strukturalna, kinematička i dinamička analiza ne služe samo radi utvrđivanja kinematičkih svojstava već konstruiranih mehanizama nego su ujedno i osnova za sintezu. To se u prvom redu odnosi kad se pri sintezi treba opredijeliti za mehanizam određenog tipa i određene strukture.

Sve složeniji uvjeti, kojima mehanizam u suvremenoj strojogradnji mora udovoljavati, zahtijevaju nove i složenije tipove mehanizama, te i sinteza mora raspolažati metodama za utvrđivanje strukture i kinematičke sheme takvih mehanizama.

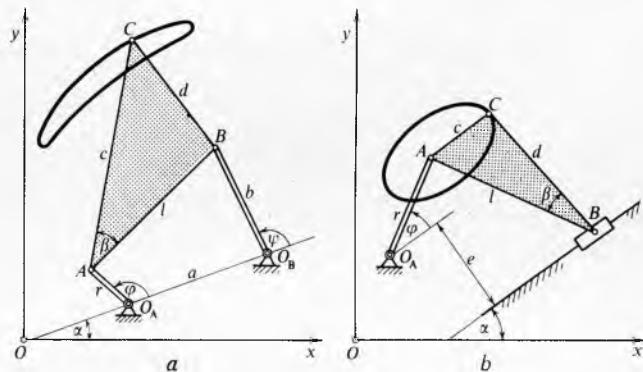
### Sinteza zglobnopolužnih mehanizama

Sinteza mehanizama često ima vrlo ograničene mogućnosti da točno ostvari zadane kinematičke uvjete. Dovoljan je uvid u strukturu mehanizama za pravocrtno vođenje i mehanizama za ocrtanje geometrijskih linija drugoga i višeg reda, pa da se utvrdi da je u općem slučaju nemoguće konstruirati mehanizam koji će ostvariti da se točka radnog člana giba točno po zadanoj putanji. Naime, broj je geometrijskih parametara svakog mehanizma ograničen, što onemogućuje da se točno nacrtat će proizvoljno zadana funkcija. Već za točno crtanje pravca bez primjene klizača, potreban je zglobnopolužni mehanizam s najmanje šest članova. Čak i kad se može izvršiti točna sinteza mehanizma prema unaprijed zadanoj putanji, nije sigurno da će mehanizam svojom strukturu zadovoljavati druge uvjete eksploracije; može se desiti da struktura mehanizma ograničava mogućnost gibanja, da su kutovi pritska među članovima veći od dopuštenih i da se zbog toga mehanizam zaklinjuje. Isto će tako svaki mehanizam samo teorijski ostvarivati putanju za koju je konstruiran. U praksi će se putanja točke radnog člana razlikovati od teorijske zbog ograničenog stupnja preciznosti izrade i montaže, zbog deformacije članova i zbog zavora u elementima zglobova.

To sve navodi na zaključak da se najčešće pri sintezi mehanizama prema zadanoj putanji treba orientirati na mehanizme kojima se postavljeni zahtjev može samo približno ostvariti. P. L. Čebišev prvi je dokazao da se pomoću četveročlanih zglobnopolužnih mehanizama može ostvariti pravocrtno vođenje s visokim stupnjem točnosti. Za pravocrtno vođenje su četveročlani Čebiševljevi mehanizmi praktički točniji nego šesteročlani mehanizmi, koji bi to teorijski trebali da budu. Naime, nepreciznosti koje proizlaze iz uvjeta izrade, montaže i eksploracije, umnožavaju se s povećanjem broja članova mehanizma. Zato je potpuno razumljiva orientacija na zglobnopolužne mehanizme sa što jednostavnijom struktrom. Takvi mehanizmi su zglobni četverokut, koljenastoklizni mehanizmi, kulisni i drugi četverozglobni mehanizmi. Najčešće se zadanoj putanji približava putanja jedne točke sprežnog člana četverozglobnog mehanizma, tzv. sprežna krivulja. Zadatak sinteze svodi se na izračunavanje geometrijskih parametara četverozglobnog mehanizma kojemu točka C sprežnog člana opisuje sprežnu krivulju  $J = F(x)$ , koja

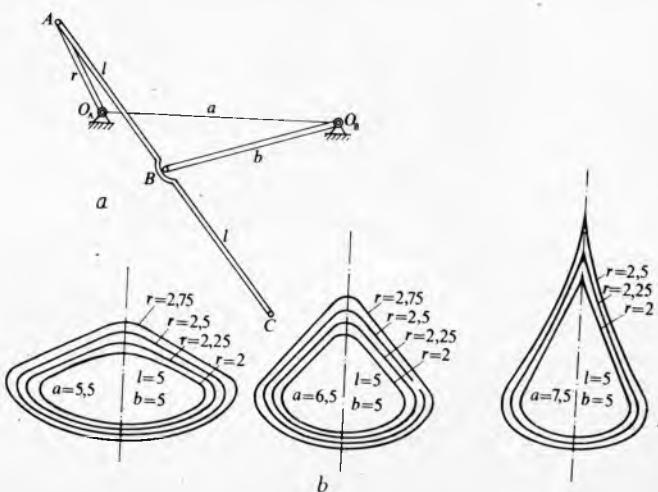
se što manje razlikuje od zadane krivulje  $J = F(x)$ , i to ili u cijelini, ili samo na ograničenom području. Zahtijevana putanja  $J = F(x)$  zadana je jednadžbom ili nizom pojedinačnih točaka. Međutim, tako pojednostavljen zadatak sinteze još je uviđen vrlo složen. Dovoljno je napomenuti da je sprežna putanja zglobnog četverokuta krivulja šestog reda, a sprežna krivulja šesterozglobnog mehanizma čak osamnaestog reda.

Pri sintezi zglobnog četverokuta prema zadanoj sprežnoj krivulji potrebno je u općem slučaju izračunati devet nepoznatih parametara (sl. 69a). Šest nepoznatih parametara odnosi se na strukturu mehanizma; to su  $a$ ,  $r$ ,  $b$ ,  $l$ ,  $c$ , i  $d$  ili  $\beta$ . Preostala tri parametra definiraju položaj mehanizma u ravnini. Ti parametri mogu biti koordinate točke  $A$  i kut  $\alpha$ , ili koordinate točke  $A$  i apsisa točke  $B$ . Ako nisu unaprijed zadane vrijednosti nekih od parametara i ako se ne postavljaju nikakvi dopunske uvjeti, moguće je izvršiti sintezu zglobnog četverokuta kojem će se sprežna krivulja u najviše devet točaka poklapati sa zadanim. Isto tako, moguće je izvršiti sintezu koljenastokliznog mehanizma kojem će se sprežna krivulja u najviše osam točaka poklapati sa zahtijevanom putanjom, jer ima ukupno osam nepoznatih parametara, i to  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $\alpha$ ,  $r$ ,  $e$ ,  $l$ ,  $d$  i  $c$  ili  $\beta$  (sl. 69b).



Sl. 69. Sprežne krivulje. a) zglobni četverokut, b) koljenastoklizni mehanizam

Zbog toga za rješavanje takvih zadataka najčešće služe približne metode, posebno *algebarske metode približavanja funkcija*: metoda interpoliranja, metoda kvadratnog približavanja, metoda najboljeg približavanja zadanoj funkciji, te prikladne grafičke i grafičkoanalitičke metode. Pri sintezi četverozglobnih mehanizama prema zadanoj sprežnoj krivulji vrlo uspješno služe *atlasi* koji sadrže skupine sprežnih krivulja za određeni tip mehanizma i relativni položaj sprežne točke, dobivenih postupnim promjenama pojedinih geometrijskih parametara. Birajući u atlasu onu skupinu sprežnih krivulja koja je najbliža zahtijevanoj, odredi se tip mehanizma i približne vrijednosti njegovih parametara (sl. 70). Ponekad se može pomoći podataka iz atlasa napraviti definitivna sinteza mehanizma. Atlas se može upotrijebiti



Sl. 70. Atlas sprežnih krivulja skupine mehanizama

i u kombinaciji s jednom od algebarskih ili grafičkih metoda sinteze.

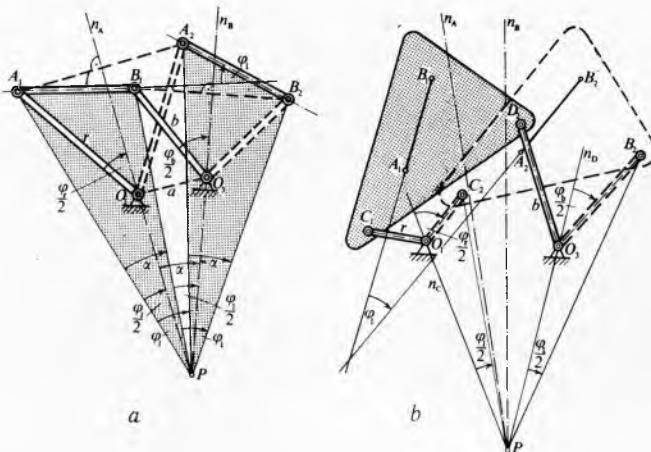
Mogući broj položaja pogonske ručice  $r$  (sl. 69a), koji se mogu unaprijed zadati za zahtijevane položaje gonjene ručice  $b$ , proizlazi iz slijedećeg razmatranja. Nepoznati geometrijski parametri jesu  $r$ ,  $l$ ,  $b$ , i  $a$ . Međutim, odnos među kutovima  $\varphi$  i  $\psi$  ne ovisi o veličinama  $r$ ,  $l$ ,  $b$  i  $a$ , već o njihovim relacijama, npr.

$\left(\frac{r}{a}, \frac{l}{a}, \frac{b}{a}\right)$ , te prema tome ovisi samo o tri parametra. Može se, dakle, unaprijed zadati samo po tri vrijednosti kutova  $\varphi$  i  $\psi$ .

Mogućnost točne sinteze ograničena je i pri postavljanju drugih kinematičkih uvjeta: odnosa kutnih brzina pogonske i gonjene ručice, uzastopnih položaja sprenog člana itd, te je razumljivo da su vrlo važne metode sinteze kojima se samo približno ostvaruju postavljeni uvjeti.

**Sinteza zglobnog četverokuta prema zadanim položajima sprenog člana.** Sinteza zglobnog četverokuta ima posebne karakteristike i posebne metode za dva zadana položaja sprenog člana, i za tri ili više položaja.

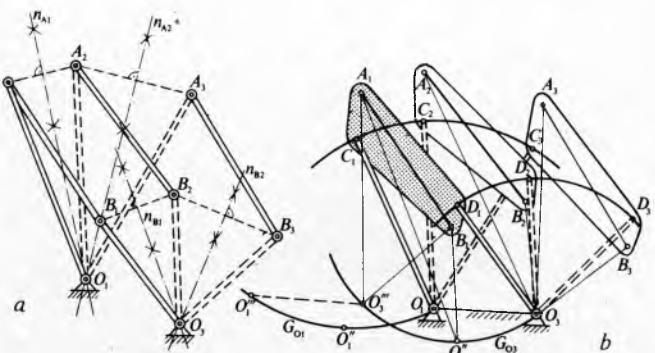
**Vodenje sprenog člana kroz dva određena položaja.** Ako su unaprijed zadana dva položaja  $A_1B_1$  i  $A_2B_2$  sprenog člana (sl. 71a), zglobovi  $O_1$  i  $O_3$  ležat će na simetralama  $n_A$  i  $n_B$  tetiva  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$ . Te zglobove može se proizvoljno uzeti u bilo kojoj točki simetrale, pa postoji beskonačno mnogo rješenja. Stoga pri definitivnom izboru mehanizma mogu se zadovoljiti i dopunski uvjeti kao što su zadane duljine  $r$  i  $b$  ili zadani kutovi  $\varphi_r$  i  $\varphi_b$ . Duljina  $\overline{AB}$  može se premjestiti iz položaja  $A_1B_1$  u položaj  $A_2B_2$  i rotacijom oko pola  $P$  koji leži u presjecištu simetrala  $n_A$  i  $n_B$ . Iz sličnosti trokuta  $A_1B_1P$  i  $A_2B_2P$  proizlazi da će kut rotacije oko pola  $P$  biti jednak kutu  $\varphi_l$  zakretanja člana  $AB = l$ , kad  $l$  prelazi iz položaja  $A_1B_1$  u položaj  $A_2B_2$ .



Sl. 71. Vođenje sprenog člana kroz dva položaja. a) bez dodatnih uvjeta, b) s dodatnim uvjetima.

Iz konstrukcije na sl. 71a dolazi se do slijedećih zaključaka: a) rotirajući članovi  $r$  i  $b$  svih beskonačno mnogih mehanizama, sposobnih da spreni član vode kroz dva zadana položaja, vide se iz pola  $P$  pod jednakim kutovima  $A_1PO_1$  i  $B_1PO_3$ . Ti su kutovi jednak polovici kuta zakretanja  $\varphi_l$  sprenog člana:  $A_1PO_1 = B_1PO_3 = \frac{\varphi_l}{2}$ , b) postoljni član  $a$  i spreni član također se iz pola  $P$  vide pod jednakim kutovima  $O_1PO_3 = A_1PB_1 = A_2PB_2 = \alpha$ .

Na osnovi tih zaključaka može se pri sintezi zadovoljiti i složenije dopunske uvjete, kao što su: zadani položaji zglobova  $O_1$  i  $O_3$  (položaj postoljnog člana) te kutovi zakretanja  $\varphi_r$  i  $\varphi_b$ ; zadani položaj zglobova  $O_1$  i  $O_3$  i duljine članova  $r$  i  $b$ ; zadani položaji zglobova sprenog člana, duljina postoljnog člana  $a$  i duljina jednog od članova  $r$  ili  $b$ . Npr. zadana su dva uzastopna položaja dužine  $\overline{AB}$  na sprenom članu  $\overline{CD} = l$ , odre-

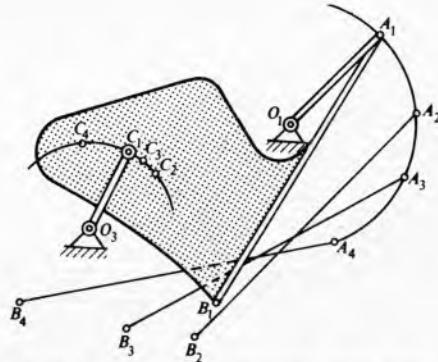


Sl. 72. Vođenje sprenog člana kroz tri položaja. a) bez dodatnih uvjeta, b) s dodatnim uvjetom.

den je položaj zglobova  $O_1$  i  $O_3$  te kutovi  $\varphi_r$  i  $\varphi_b$  zakretanja članova  $r$  i  $b$ . Iz ucrtanih položaja  $A_1B_1$  i  $A_2B_2$  (sl. 71b) proizlaze simetrale  $n_A$  i  $n_B$ , a time i položaj pola  $P$ . Simetrale tetiva  $n_C$  i  $n_D$  (položaji  $C$  i  $D$  nisu poznati) prolaze kroz pol  $P$  i zglobove  $O_1$  i  $O_3$ . Ako se od simetrale  $n_C$  nacrti kut  $\frac{\varphi_r}{2}$  i od simetrale  $n_D$  kut  $\frac{\varphi_b}{2}$ , dobiju se pravci članova  $r$  i  $b$ . Duljine tih članova vide se iz pola  $P$  pod kutovima  $\frac{\varphi_l}{2}$ . Kut  $\varphi_l$  je zadan ili je određen presjecištima pravaca  $A_1B_1$  i  $A_2B_2$ .

**Vodenje sprenog člana kroz tri zadana položaja.** Za tri zadana položaja dužine  $\overline{AB}$  sprenog člana može se konstruirati samo jedan zglobni četverokut. Naime, ako su točke  $A$  i  $B$  ujedno i zglobovi koji vežu spreni član s ručicama, simetrale  $n_{A_1}$  i  $n_{A_2}$  tetiva  $A_1A_2$  i  $A_2A_3$  sjeći će se u zglobu  $O_1$ , a simetrale  $n_{B_1}$  i  $n_{B_2}$  tetiva  $B_1B_2$  i  $B_2B_3$  u zglobu  $O_3$  (sl. 72a). Ako zglobovi sprenog člana ne moraju ležati na pravcu kroz  $\overline{AB}$ , broj mehanizama koji vode dužinu  $\overline{AB}$  kroz tri zadana položaja beskonačno je velik. Tada se mogu pri sintezi zglobnog četverokuta zadovoljiti i dopunski uvjeti. Na sl. 72b prikazana je sinteza zglobnog četverokuta za tri zadana položaja dužine  $\overline{AB}$  te za zadane položaje zglobova  $O_1$  i  $O_3$ . Položaji zglobova  $C$  i  $D$  određeni su pomoću kinematičke inverzije, pretpostavivši da spreni član miruje u položaju  $A_1B_1$ , a da se postoljni član giba. Relativni položaji zglobova  $O_1'$ ,  $O_1''$  i  $O_3'$ ,  $O_3''$  određeni su na osnovi sukladnosti trokuta:  $A_1B_1O_1'$  i  $A_3B_3O_3$ ,  $A_1B_1O_1''$  i  $A_2B_2O_3$ ,  $A_1B_1O_1'$  i  $O_3B_3O_1$ ,  $A_1B_2O_1''$  i  $A_2B_2O_1$ . Geometrijsko mjesto  $G_O$  jest kružnica sa središtem u  $D_1$ , a geometrijsko mjesto  $G_{O_3}$  kružnica sa središtem u  $D_1$ . Na taj su način određeni položaji zglobova  $C$  i  $D$ , a time i duljine članova  $\overline{O_1C} = r$  i  $\overline{O_3D} = b$ .

**Vodenje sprenog člana kroz četiri položaja.** Sinteza zglobnog četverokuta za zadana četiri položaja dužine  $\overline{AB}$  sprenog člana relativno je složena. U općem slučaju, kroz četiri zadana položaja točke ne može se konstruirati kružnica. Zadatak se svodi na određivanje one točke pomoćne ravnine sprenog člana koja će se za sve zadane položaje sprenog člana nalaziti na istoj



Sl. 73. Vođenje sprenog člana kroz četiri položaja.

kružnici. Ta točka određuje mogući položaj zgloba sprežnog člana, a središte kružnice po kojoj se giba definira položaj nepomičnog zgloba ručice. Tako pri pomicanju dužine  $\overline{AB}$  u četiri zadana položaja, točke  $C$  pomične ravnine nalazit će se na kružnici sa središtem u  $O_3$  (sl. 73). Broj točaka u koje se može smjestiti pomični zglob sprežnog člana beskonačno je velik, a sve se one nalaze na tzv. *Burmesterovo kružnici*.

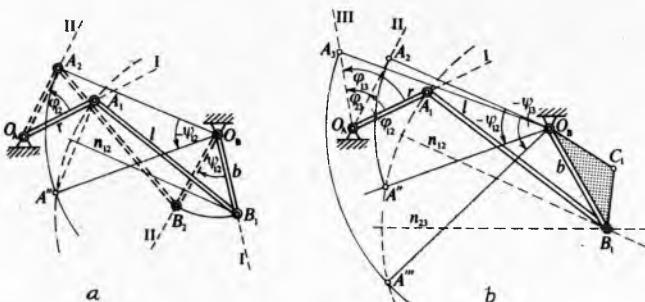
**Sinteza zgobnog četverokuta prema zadanim položajima ručica.** Često se sinteza mehanizama obavlja prema zadanim pojedinačnim međusobno vezanim položajima vodećega i vođenog člana, ili prema zadanoj funkciji  $\psi = f(\varphi)$  koju mehanizam treba da zadovolji. To se može postići pomoću algebarskih i pogodnih grafičkih metoda, kao što su metoda relativnih polova konačne rotacije, metoda kinematičke inverzije mehanizma, metoda šablonu, metoda trenutnih polova brzina i druge.

**Metoda kinematičke inverzije** mehanizma temelji se na promjeni postolja, i to imobiliziranjem člana  $b$  u početnom položaju  $\overline{O_B B_1}$  (sl. 74). Prema imobiliziranom članu  $b$ , zglob  $A$  člana  $r$  giba se po kružnom luku sa središtem u  $B_1$ .

Na sl. 74a prikazana je sinteza zgobnog četverokuta za dva unaprijed zadana položaja članova  $r$  i  $l$ . Zadana je i duljina postavljenog člana  $r$  ili odnos  $\frac{r}{a} = \lambda_1$ , gdje je  $a$  postoljni član. Za-

kretanjem točke  $A_2$  oko  $O_B$  za kut  $(-\psi_{12})$  nađe se relativni položaj  $A''$  toga zgloba u drugoj fazi. Zglob  $B_1$  nalazi se na simetrali teticive  $A_1 A''$ . Ako položaji I i II člana  $b$  nisu unaprijed zadani, već je zadan samo kutni pomak  $\psi_{12}$ , točka  $B_1$  može se izabrati proizvoljno na simetrali  $n_{12}$ , i tako od beskonačno mnogo rješenja izabrati ono koje odgovara i nekom dopunskom uvjetu.

Na sl. 74b relativni položaji  $A''$  i  $A'''$  za drugu i treću fazu gibanja određeni su zakretanjem  $A_2$  za kut  $(-\psi_{12})$ , odnosno točke  $A_3$  za kut  $(-\psi_{13})$ , oko zgloba  $O_B$ . Točka  $B_1$  leži u presjecištu simetrala  $n_{12}$  i  $n_{23}$ , te sinteza daje samo jedno rješenje. Moguće je, dakle, pored tri određena položaja člana  $r$  i omjera  $\frac{r}{a} = \lambda_1$  zadati samo kutne pomake  $\psi_{12}$  i  $\psi_{23}$ , ali ne i položaje člana  $b$ . Ako tako dobiveni položaji  $\overline{O_B B_1}$ ,  $\overline{O_B B_2}$  i  $\overline{O_B B_3}$  iz bilo kojeg razloga nisu pogodni, član  $b$  može se proširiti u ploču  $O_B BC$ . Pri gibanju mehanizma dužina  $\overline{O_B C}$  također će se zakrenuti za zadane kutne pomake  $\psi_{12}$ , odnosno  $\psi_{23}$ .



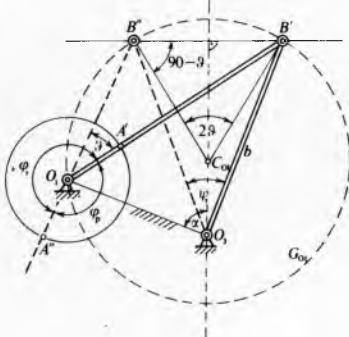
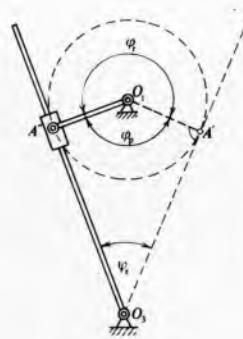
Sl. 74. Sinteza zgobnog četverokuta za zadane položaje ručica. a za dva zadana položaja, b za tri zadana položaja

**Sinteza prema proizvodnom koeficijentu i mrtvim položajima mehanizma.** Ako je gibanje radnog člana mehanizma oscilatorno pravocrtno ili njihajuće, tada mehanizam obavlja svoju radnu funkciju samo pri gibanju u jednom smjeru. Za takve mehanizme najčešće se postavlja zahtjev da brzina translacije, odnosno kutna brzina, radnog člana bude veća u povratnom nego u radnom hodu. Tako je u mehanizmima alatnih strojeva. Brzina obrade je ograničena i ovisi o materijalu, kvaliteti obrade i raspoloživoj snazi pogonskog motora. Njihajuće gibanje radnog člana može se ostvariti pomoću zgobnog četverokuta i pomoću kulisnog mehanizma, a oscilatorno pravocrtno gibanje pomoću ekscentričnog stupnog mehanizma. U sastavu tih mehanizama nalazi se i ručica koja rotira konstatnom ku-

trom brzinom oko svog permanentnog zgloba, pa se zato omjer srednjih brzina radnog člana u radnom i povratnom hodu izražava s omjerom pripadnih kutova zakretanja ručice. Taj se omjer naziva *proizvodnim koeficijentom* mehanizama:  $k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p}$ ,

gdje indeks  $r$  označuje radni hod, a indeks  $p$  povratni hod.

**Kulisni mehanizam** (sl. 75) nalazi se u mrtvim položajima kad su ručica i kulisa međusobno okomite, tj. kad je kutna brzina kulise jednaka nuli. Kulisa ima radni hod pri gibanju iz desnog položaja  $A'$  u lijevi položaj  $A''$ . Proizvodni koeficijent jest  $k = \frac{\omega_{sr,p}}{\omega_{sr,r}} = \frac{\varphi_r}{\varphi_p}$ . Iznos koeficijenta  $k$  određuju ne samo kutovi  $\varphi_r$  i  $\varphi_p$  zakretanja ručice već i kut  $\psi_r$  njihanja njihalice. Iz trokuta  $O_1 O_3 A'$  dobiva se  $\frac{\varphi_p}{2} + \frac{\psi_r}{2} = 90^\circ$ ,  $\varphi_p = 180^\circ - \psi_r$ . Prema tome je  $\varphi_r = 360^\circ - \varphi_p = 180^\circ + \psi_r$ , te je  $k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p} = \frac{180^\circ + \psi_r}{180^\circ - \psi_r}$ . Odатle proizlazi  $\psi_r = \frac{180^\circ(k-1)}{k+1}$ . Dakle, pri projektiranju kulisnog mehanizma ne mogu se nezavisno dati veličine  $k$  i  $\psi_r$ .



Sl. 75. Sinteza kulisnog mehanizma za zadani proizvodni koeficijent  $k = \varphi_r/\varphi_p$

Sl. 76. Sinteza zgobnog četverokuta za zadani proizvodni koeficijent i dodatne uvjete

**Zglobni četverokut.** Za zadani proizvodni koeficijent  $k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p}$  i zadani kut  $\psi_r$  njihalice može se konstruirati beskonačno mnogo zgobnih četverokuta. Za sva ta rješenja zglobovi  $O_1$  i  $A$  nalazit će se na određenim geometrijskim mjestima. Na mehanizmu (sl. 76) zglob ručice  $r$  nalazi se na geometrijskom mjestu  $G_{O_1}$ . Za zadanu vrijednost koeficijenta  $k$  i radni kut  $\psi_r$  njihalice potpuno su određeni kutovi  $\varphi_r$ ,  $\varphi_p$ , pa prema tome i kut  $\vartheta = \varphi_r - 180^\circ$ . U beskonačno mnogo mogućih mehanizama luk  $B'B''$  vidjet će se iz točke  $O_1$  pod istim kutom  $\vartheta$ , tj.  $O_1$  nalazi se na kružnici koja prolazi točkama  $B'$  i  $B''$ . Geometrijsko mjesto  $G_{O_1}$  ima središte u  $C_{O_1}$ . Središnji kut sa vrhom u  $C_{O_1}$  za luk  $B'B''$  treba da bude  $2\vartheta = 2(\varphi_r - 180^\circ)$ , pa će se pravci povučeni kroz  $B'$  i  $B''$  pod kutom  $(90^\circ - \vartheta)$  prema teticivi  $B'B''$  sjeći u točki  $C_{O_1}$  na simetrali teticive. Kut  $(90^\circ - \vartheta)$  može se izračunati iz zadalog proizvodnog koeficijenta:

$$k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p} = \frac{180^\circ + \vartheta}{180^\circ - \vartheta}, \quad \vartheta = \frac{k-1}{k+1} 180^\circ.$$

Proizlazi da je

$$90^\circ - \vartheta = 90^\circ - \frac{k-1}{k+1} 180^\circ = 90^\circ \frac{3-k}{k+1}. \quad (97)$$

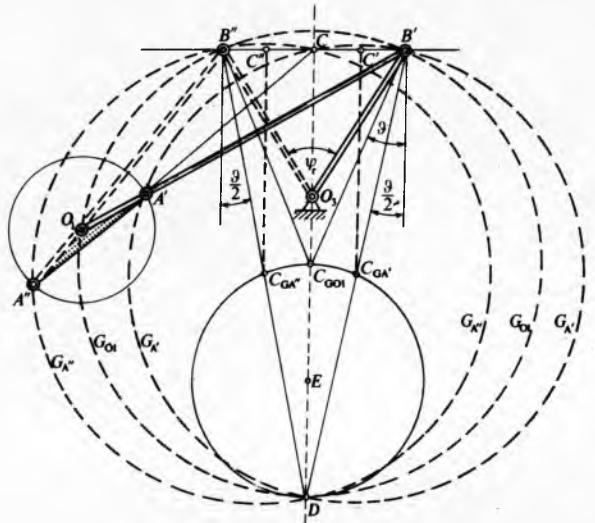
Ako se iz dopunskih podataka može odrediti položaj  $O_1$  na  $G_{O_1}$ , nepoznate duljine članova  $r$  i  $l$  nađu se iz  $l+r = \overline{OB'}$ ,

$$l-r = \overline{OB''}, \quad \text{a odatle } l = \frac{\overline{OB'} + \overline{OB''}}{2}, \quad r = \frac{\overline{OB'} - \overline{OB''}}{2}.$$

U analiziranom primjeru unaprijed je zadan kut  $\alpha$  što ga njihalica u srednjem položaju zatvara s postolnjim članom

$O_1O_3$ . U općem slučaju, za izbor pogodnog mehanizma treba ucrtati još i geometrijska mjesta  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  kao što je prikazano na sl. 77. Središte  $G_{O_1}$  ucrtano je na osnovi ranijeg razmatranja, samo što je, radi bolje preglednosti crteža, umjesto kuta  $(90^\circ - \vartheta)$  prema tetivi ucrtan kut  $\vartheta$  prema okomici na tetivu  $\overline{B'B''}$  u točki  $B'$ . Polumjer  $R_{G_{O_1}}$  kružnice jest

$$R_{G_{O_1}} = \frac{\overline{B'B''}}{2\sin\vartheta} = \frac{2b\sin\frac{\psi_r}{2}}{2\sin\vartheta} = \frac{b\sin\frac{\psi_r}{2}}{\sin\vartheta}. \quad (98)$$



Sl. 77. Sintesa zglobnog četverokuta za zadani proizvodni koeficijent u općem slučaju

Geometrijska mjesta  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  određe se na osnovi činjenice da su u trokutu  $A'O_1A''$  (osjenčani trokut na sl. 77) kutovi s vrhom u  $A'$  i  $A''$  međusobno jednaki i iznose  $\frac{\vartheta}{2}$ . Prema tome se polutetiva  $\overline{B'C}$  uvijek vidi iz točke  $A'$  pod kutom  $\frac{\vartheta}{2}$ , a pod

istim kutom se iz točke  $A''$  vidi polutetiva  $\overline{B''C}$ . Oba geometrijska mjesta  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  jesu kružnice kroz točke  $A'$ ,  $C$  i  $B'$ , odnosno kroz točke  $A''$ ,  $C$  i  $B''$ . Središta tih kružnica nalaze se na simetralama polutetiva kroz točke  $C'$  i  $C''$ . Tako se točka  $C_{G_{A'}}$  nalazi u presjecištu simetrale kroz  $C'$  i pravca iz  $B'$  ili  $C$ , koji je normalan na tetivu zatvara kut  $\frac{\vartheta}{2}$ . Točka  $C_{G_{A''}}$  leži u presjecištu simetrale kroz  $C''$  i pravca iz  $B''$  ili  $C$ , koji takođe je normalan na tetivu zatvara kut  $\frac{\vartheta}{2}$ . Polumjeri  $R_{G_{A'}}$  i  $R_{G_{A''}}$  međusobno su jednaki. Iz sl. 77 proizlazi da je

$$R_{G_{A'}} = R_{G_{A''}} = \frac{\overline{B'B''}}{4\sin\frac{\vartheta}{2}} = \frac{b\sin\frac{\psi_r}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}. \quad (99)$$

Činjenica da se sve tri kružnice  $G_{O_1}$ ,  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  sijeku u točki  $D$ , a da se sva tri središta nalaze na kružnici sa središtem u  $E$ , tako da je  $\overline{EC}_{G_{O_1}} = \overline{ED}$ , dokazuje da je točan grafički postupak kojim su određena geometrijska mjesta  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$ .

Dopunski uvjeti za definitivni izbor položaja zglobova  $O_1$  na geometrijskom mjestu  $G_{O_1}$  mogu imati konstrukcijski, dinamički, a i eksploracijski karakter. Tako se često postavljaju slijedeći zahtjevi: određeni odnos duljine članova, određeni položaj postolja, kutovi pritiska moraju biti u dozvoljeno-

nim granicama, inercijske sile moraju biti uravnotežene, kretanje radnog člana treba da bude što ravnomjernije itd.

*Stapni mehanizam.* Postoji potpuna analogija u sintezi stapnog mehanizma sa zadanim hodom s stepom i proizvodnim koeficijentom  $k = \frac{\varphi_r}{\varphi_p}$ , te sinteze zglobnog četverokuta s unaprijed zadanim kutom  $\varphi_r$  njihalice i koeficijentom  $k$ . Uostalom, stapni mehanizam i jest zglobni četverokut s njihalicom beskonačne duljine, pa se geometrijska mjesta  $G_{O_1}$ ,  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  crtaju istim postupkom kao u sintezi zglobnog četverokuta (sl. 78). Uz zadani  $k$  uvijek će se hod  $s$  iz točke  $O_1$  vidjeti pod istim kutom  $\vartheta = \varphi_r - 180^\circ = \frac{k-1}{k+1} 180^\circ$ . Geometrijsko je mjesto  $G_{O_1}$ , dakle, kružnica sa središtem  $C_{O_1}$  na simetrali dužine  $\overline{B'B''}$ . Točka  $C_{O_1}$  leži u presjecištu simetrale  $\overline{B'B''}$  i pravca kroz  $B'$ , koji je okomit na pravac klizne staze zatvara kut  $\vartheta$ . U trokutu  $A'O_1A''$  kutovi su uz vrhove  $A'$  i  $A''$  međusobno jednaki (osjenčani trokut na sl. 78) i iznose svaki po  $\frac{\vartheta}{2}$ . Budući da pravac kroz  $A'A''$  raspolaži u točki  $C$  dužinu  $\overline{B'B''}$ , to će se svaka od dužina  $CB'$  i  $CB''$  vidjeti iz točaka  $A'$  i  $A''$  uvijek pod kutom  $\frac{\vartheta}{2}$ . Geometrijska mjesta  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  također su kružnice sa središtem na simetralama kroz  $C'$ , odnosno  $C''$ , i to u presjecištu simetrale i pravca kroz  $B'$ , odnosno  $B''$ , koji je normalan na pravac klizne staze zatvara kut  $\frac{\vartheta}{2}$ .

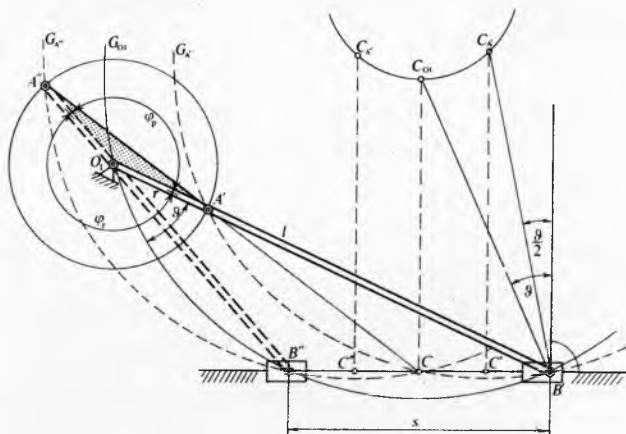
Polumjer kružnice  $G_{O_1}$  jest

$$R_{O_1} = \frac{\overline{B'B''}}{2\sin\vartheta} = \frac{s}{2\sin\vartheta}, \quad (100)$$

a polumjeri  $G_{A'}$  i  $G_{A''}$  jesu

$$R_{A'} = R_{A''} = \frac{\overline{B'B''}}{4\sin\frac{\vartheta}{2}} = \frac{s}{4\sin\frac{\vartheta}{2}}. \quad (101)$$

Položaj zgloba  $O_1$ , a time i dužina  $r$ ,  $l$  i  $e$ , definitivno se odredi na osnovi dodatnih uvjeta koji mogu biti konstrukcijski, kinematički, dinamički ili eksploracijski.

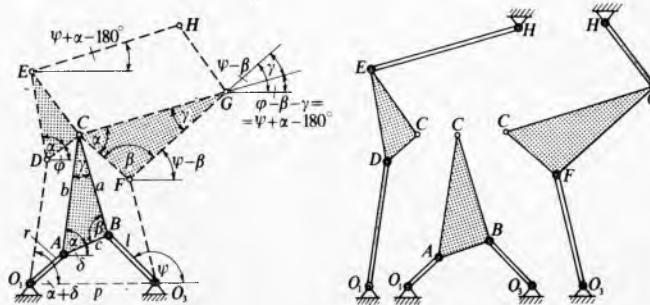


Sl. 78. Sintesa stapnog mehanizma za zadani hod stepa i zadani proizvodni koeficijent

*Zglobni četverokuti s istom sprežnom krivuljom.* (Robertsovi i Čebiševljevi teoremi). Često se dešava da mehanizam, iako zadovoljava postavljene uvjete, ipak se ne može u praksi upotrijebiti zbog jednoga od slijedećih razloga: odnos među duljinama članova je nepogodan, u sastavu mehanizma nema koljena koje može izvršiti pun ciklus rotacije, kut pritiska među članovima je prevelik, i zbog nekih drugih eksploracijskih razloga.

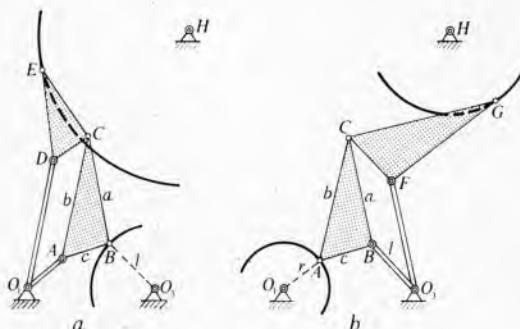
Prema *Robertsovom teoremu*, određenu trajektoriju bilo koje točke sprežnog člana zglobnog četverokuta moguće je ostvariti pomoću sustava od tri zglobna četverokuta (sl. 79). Zglobni četverokut  $O_1ACBO_3$  je osnovni mehanizam. Nad dužinama  $\overline{O_1A}$  i  $\overline{AC}$  dočrtan je paralelogram  $O_1ACD$ , a nad dužinama  $\overline{O_3B}$  i  $\overline{BC}$  paralelogram  $O_3BCF$ . Nad dužinama  $\overline{DC}$  i  $\overline{CF}$  nacrtani su trokuti  $DCE$  i  $CFG$  koji su slični trokutu  $ABC$ . Na kraju, nad dužinama  $\overline{EC}$  i  $\overline{CG}$  dočrtan je paralelogram  $ECGH$ . Tako dobiveni mehanizam od 10 članova i 13 nižih parova prvog reda ima jedan stupanj pokretljivosti, što se može provjeriti pomoću strukturne formule za mehanizam treće skupine (ravni mehanizam):

$$S = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 13 = 1.$$



Sl. 79. Sintesa triju zglobnih četverokuta s istom putanjom točke C (Robertsov teorem)

Može se dokazati da je za vrijeme gibanja toga složenog mehanizma točka  $H$  nepomična i da nepomični rotoidni zglob u točki  $H$  neće, prema tome, utjecati na gibanje mehanizma. Taj mehanizam u sebi obuhvaća Silvestrove pantografe (sl. 80).



Sl. 80. Silvestrovi pantografi. a) točke  $B$  i  $E$  imaju sličnu putanju, b) točke  $A$  i  $G$  imaju sličnu putanju

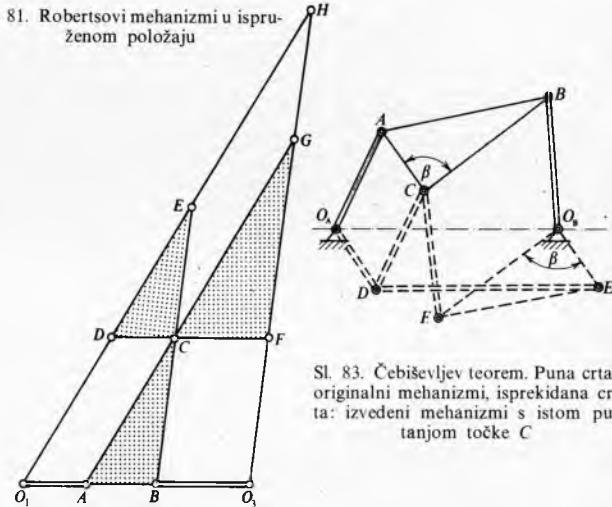
Pantograf na sl. 80a osigurava sličnost putanja točaka  $E$  i  $B$ , a pantograf na sl. 80b sličnost putanja točaka  $A$  i  $G$ . U složenom se mehanizmu točke  $B$  i  $A$  kreću po kružnicama sa središtem  $O_3$ , odnosno  $O_1$ , pa će se stoga i točke  $E$  i  $G$  kretati po kružnicama polujmera  $\overline{EH} = \frac{b}{c}l$  i  $\overline{GH} = \frac{a}{c}r$ . To znači da je trokut  $O_1O_3H$  sličan konstrukcijskom trokutu  $ABC$  te da je točka  $H$  nepomična. Taj se složeni mehanizam može rastaviti u tri zglobna četverokuta s identičnim putanjama točke  $C$ .

Odnosi među dužinama članova složenog mehanizma omogućuju geometrijsku konstrukciju (sl. 81), kojom sinteza tih mehanizama postaje jednostavnija. Ako se odbace zglobovi  $O_1$  i  $O_3$ , a osnovni zglobni četverokut ispruži tako da mu članovi  $O_1A$ ,  $AB$  i  $BO_3$  leže na istom pravcu, onda će na preostalim dvjema stranicama trokuta  $O_1O_3H$ , koji je sličan trokutu  $ABC$ , ležati ispružena ostala dva moguća zglobna četverokuta. Prema Robertsovoj konstrukciji proizlazi da je trokut  $O_1O_3H$ , što ga sačinjavaju nepomični zglobovi, uvijek sličan trokutu  $ABC$ , što ga točka  $C$  sprežnog člana formira s pomičnim zglobovima

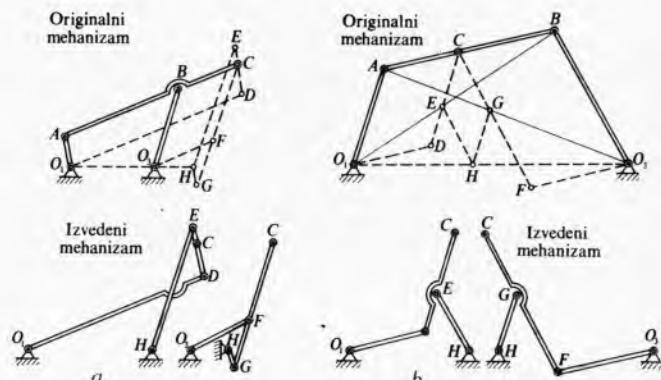
$A$  i  $B$ . To znači da će onda, kad sprežna točka  $C$  leži na pravcu kroz  $AB$ , treći nepomični zglob  $H$  ležati na pravcu kroz  $O_1O_3$ . Dvije takve sinteze prikazane su na sl. 82.

Prema Čebiševljevu teoremu, trajektoriju bilo koje točke pomične ravnine sprežnog člana zglobnog četverokuta moguće je ostvariti i pomoću tri šesteroclana mehanizma, dobivena dodavanjem dvočlanih grupa koje zatvaraju paralelograme s pomičnim članovima osnovnog mehanizma. Na sl. 83 prikazana je izvedba takve konstrukcije nad osnovnim mehanizmom  $O_1ACBO_3$ . Nacrtani su paralelogrami  $O_1ACD$  i  $O_3FCB$ . Članovi  $O_1D$  i  $O_3F$  novog mehanizma za sve vrijeme gibanja zatvarat će kut  $\beta$  konstantnog iznosa, ako se konstruiра paralelogram  $O_1DEO_3$ , a zglobovi  $F$  i  $E$  kruto vežu. Očigledno je da će trajektorija točke  $C$  u srednjem zglobu  $C$  dvočlane grupe  $DFC$  biti podudarna s trajektorijom točke  $C$  osnovnog mehanizma. Na taj se način, za svaki od tri mehanizma, dobivena prema Robertsovom teoremu, može konstruirati po još jedan mehanizam s identičnom sprežnom krivuljom, dakle ukupno šest mehanizama. Robertsov teorem i Čebiševljeva konstrukcija potpuno su identični kad točka  $C$  leži na liniji sprežnog člana (npr. mehanizam na sl. 82). Sprežne krivulje točaka koje leže na liniji sprežnog člana nazivaju se *Wattonim krivuljama*. Te krivulje su posebno pogodne da se postigne približno pravocrtno i kružno vođenje.

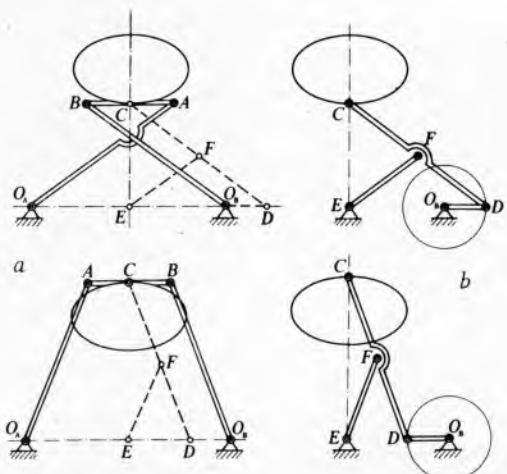
Sl. 81. Robertsovi mehanizmi u ispruženom položaju



Sl. 83. Čebiševljev teorem. Puna crta: originalni mehanizmi, isprekidana crta: izvedeni mehanizmi s istom putanjom točke C

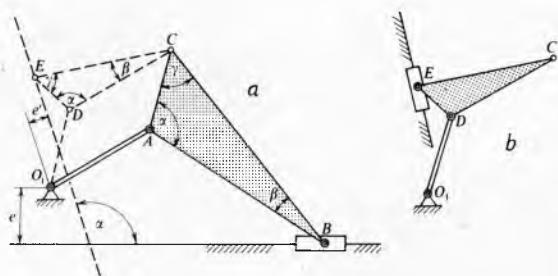


Čebišev je, polazeći od simetričnih ukrštenih i trapezoidnih mehanizama, došao do *lambdolikih* mehanizama (sl. 84). Čebiševljevi mehanizmi dobili su taj naziv zbog sličnosti s grčkim slovom  $\lambda$  (lambda). Simetrični mehanizmi imaju simetrične sprežne krivulje točaka koje leže na simetrali sprežnog člana, pa će zato i njihove asimetrične lambdolike modifikacije ocrtavati također simetrične krivulje. I ti mehanizmi posebno su važni za približno pravocrtno vođenje te za približno ocrtavanje kružnog luka.



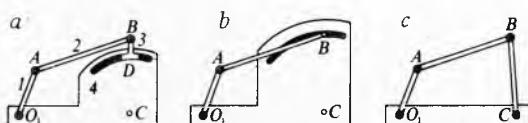
Sl. 84. Lambdoliki Čebiševljevi mehanizmi. a originalni mehanizam, b izvedeni lambdoliki mehanizam

Robertsova konstrukcija može se primijeniti i na sintezu koljenastokliznih (stapnih) mehanizama sa zajedničkom sprežnom krivuljom. Tada je sinteza moguća samo za jedan dodatni mehanizam, jer se zglob O<sub>B</sub> nalazi beskonačno daleko, pa jedan od dodatnih mehanizama iščezava. Na sl. 85 izvršena je sinteza dodatnog stavnog mehanizma O<sub>1</sub>DE kojemu sprežna točka C ima putanju identičnu putanji točke C osnovnog mehanizma O<sub>1</sub>AB. Budući da je zbog paralelnosti O<sub>1</sub>D i AC kutna brzina člana O<sub>1</sub>D dopunskog mehanizma jednaka kutnoj brzini poluge AB osnovnog mehanizma, to dopunski mehanizam neće biti koljenastoklizni već njihaličnoklizni.



Sl. 85. Koljenastoklizni mehanizmi s istom sprežnom krivuljom. a originalni mehanizam i primjena Robertsova teorema, b izvedeni mehanizam

**Kinematički ekvivalentni mehanizmi.** Na sl. 86 prikazana su tri mehanizma potpuno ekvivalentna u kinematičkom pogledu. Sve točke kliznog bloka 3 gibaju se po kružnim lukovima sa središtem u C (sl. 86a), pa se zato čitav blok može odbaciti ako se kružna staza polumjera DC zamijeni stazom polumjera BC. Broj se članova mehanizma pri tome smanjio, a dva kinematička para prvog reda zamijenjena su jednim parom drugog reda (sl. 86b). Iste kinematičke karakteristike imat će i zglobovi četverokut kojemu dodatni član BC rotira oko stalnog središta



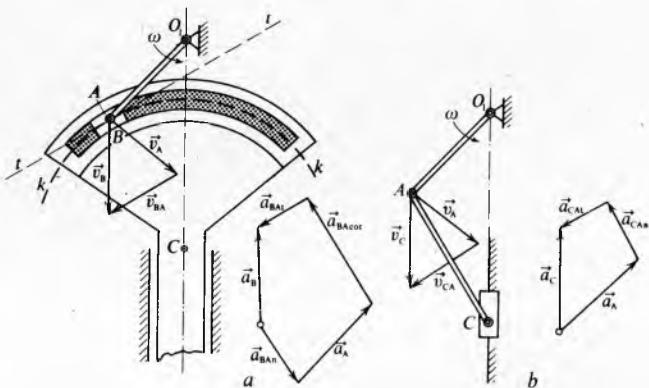
Sl. 86. Kinematički ekvivalentni mehanizmi

C (sl. 86c). Taj primjer pokazuje kako se mehanizam može konstrukcijski pojednostaviti, te kako se pojednostavljuje plan mehanizma pri strukturnoj i kinematičkoj analizi. Za kinematičku analizu posebno je važna mogućnost da se mehanizam, kad se u analizi javlja i Coriolisova komponenta ubrzanja,

zamijeni kinematički ekvivalentnim mehanizmom kojemu je plan ubrzanja jednostavniji.

Na sl. 87a prikazan je originalni mehanizam sa dvostrukim klizačem, a na sl. 87b kinematički ekvivalentan mehanizam. Za sve vrijeme gibanja klizaček ekvivalentnog mehanizma nalaziće se na onom mjestu na kojem i točka C (središte kružnog luka kk) klizne kulise originalnog mehanizma. Zbog toga su kinematičke karakteristike klizača C ekvivalentnog mehanizma identične s karakteristikama gibanja točke C ili bilo koje druge točke klizne kulise. Planovi ubrzanja za oba mehanizma nacrtani su na osnovi slijedećih jednadžbi:  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\text{An}} + \vec{a}_{BA\text{At}} + \vec{a}_{BA\text{Cor}}$  (originalni mehanizam),  $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA\text{An}} + \vec{a}_{CA\text{At}}$  (ekvivalentni mehanizam). U tim planovima je  $\vec{a}_C = \vec{a}_B$  i  $\vec{a}_{CA\text{At}} = \vec{a}_{BA\text{At}}$ . Kao što se vidi, u planu ubrzanja ekvivalentnog mehanizma ne pojavljuje se Coriolisova komponenta ubrzanja, koja je u originalnom mehanizmu:

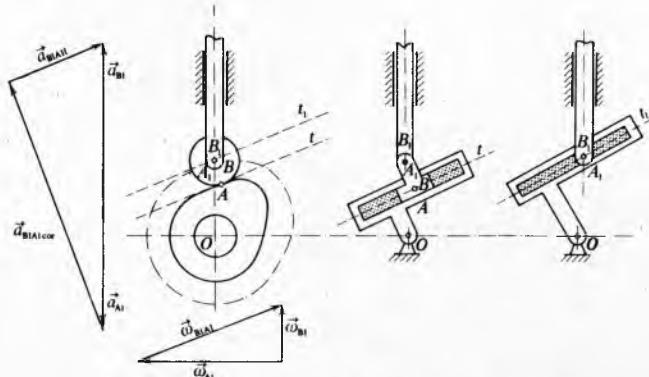
$$a_{BA\text{Cor}} = 2v_{BA} \frac{v_{BA}}{AC}.$$



Sl. 87. Usposredba originalnoga i zamjenjujućeg mehanizma te njihovi planovi ubrzanja. a originalni mehanizam, b zamjenjujući mehanizam

Kinematički ekvivalentan mehanizam može se nacrtati ne samo kad je putanja relativnog gibanja koincidentnih točaka kružni luk već i kad je ta putanja bilo koja kriva linija. Dodatni štap ekvivalentnog mehanizma imat će zglob u središtu zakrivljenosti dodirne krivulje za točku kontaktu među spregnutim članovima na kojima leže koincidentne točke. Ekvivalentni mehanizmi postoje, dakle, za sve zupčane mehanizme i za sve mehanizme s krivuljnom pločom (grebenasti mehanizam). Tom se metodom ne može konstruirati ekvivalentni mehanizam jedino kad je putanja relativnog gibanja koincidentnih točaka pravac, jer bi nepomični zglob dodatnog štapa trebao biti beskonačno daleko.

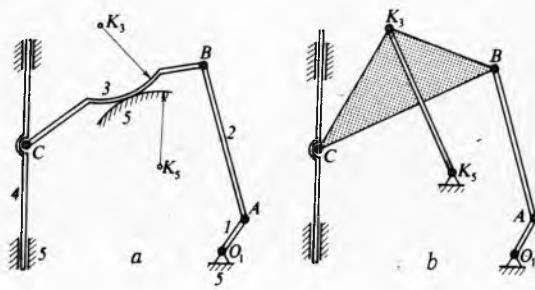
Plan brzina i plan ubrzanja na sl. 88 odnosi se i na originalni grebenasti mehanizam i na kinematički ekvivalentan mehanizam. Kad je relativna putanja koincidentnih točaka pravac, kinematički ekvivalentan mehanizam ne pojednostavljuje kinematičku analizu. Međutim, ekvivalentni mehanizmi su vrlo zanimljivi za sintezu mehanizama i konstruktor ih treba upotrijebiti za nove konstrukcije.



Sl. 88. Krivuljni mehanizam i zamjenjujući mehanizam

Kad konstruktor treba da konstruira mehanizam za podizanje i spuštanje gonjenog dijela prema unaprijed zadanim zakonima, najjednostavnije je opredjeliti se za grebenasti mehanizam, jer crtanje konture grebenaste ploče za zadani zakon kretanja nije teško. Ali će zato poteškoće nastati pri preciznoj izradbi grebenaste ploče na radnom stroju. Može se utvrditi da je izrada takva mehanizma, s obzirom na njegovu upotrebu, također i neekonomična. Sile inercije koje nastaju pri radu mehanizama, kao i sile opruge, prijevo potrebne za pravilno funkcioniranje mehanizma, često onemogućuju precizan rad mehanizma. Ako konstruktor može primijeniti kinematički ekivalentan zglobnopolužni mehanizam, sve su navedene poteškoće time otklonjene. Sinteza polužnih mehanizama otežava rad konstruktoru, pa je on izbjegava. Stoga se na automatskim strojevima najčešće susreću baš grebenasti mehanizmi.

Na sl. 89 prikazana je zamjena originalnog ventilskog mehanizma za razvođenje pare kinematički ekivalentnim mehanizmom. Ta zamjena je zanimljiva za analizu, jer je crtanje plana brzina i plana ubrzanja originalnog mehanizma vrlo složeno. Osim toga, ta zamjena je ujedno i metoda za sintezu još jednog mehanizma s identičnim kinematičkim karakteristikama radnog člana.

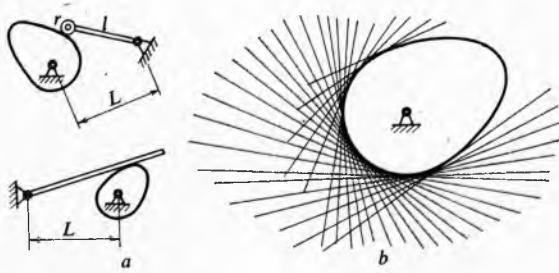


Sl. 89. Mehanizam ventila za razvod pare. a) originalni mehanizam, b) zamjenjujući mehanizam

### Sinteza grebenastih mehanizama

Grafička sinteza profila krivuljne ploče grebenastog mehanizma za zadani zakon gibanja obavlja se istim postupkom, samo obrnutim redom, kao kad se određuje zakon gibanja iz konture krivuljne ploče.

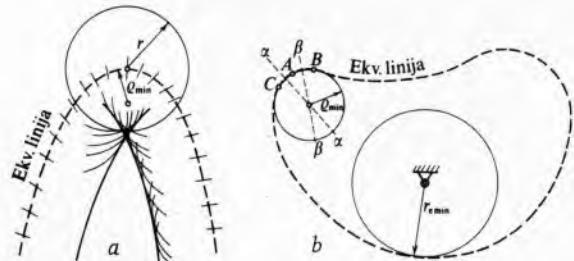
Da bi se moglo grafičkom metodom konstruirati profil grebena, potrebbni su, osim zadanoj zakona gibanja, još neki podaci o općoj shemi mehanizma i osnovnim dimenzijama. Tako, npr., za pravocrtno gibanje pomicaljke s kotačićem treba znati koliki je polumjer kotačića  $r$ ; za pravocrtno gibanje ekscentrične pomicaljke s kotačićem promjera  $r$  treba znati i ekscentričnost  $e$ ; za rotacijsko gibanje pomicaljke (njihalice) moraju biti poznate dužine  $L$ ,  $l$ ,  $r$  (sl. 90). Za mehanizme s tanjurastom



Sl. 90. Sinteza krivuljnog mehanizma. a) dopunski podaci  $r$ ,  $l$  i  $L$  potrebbni za sintezu, b) određivanje konture tanjuraste pomicaljke pomoću mreže tangenti

pomicaljkom, bez obzira da li je ekscentrična ili ne, nisu potrebni posebni podaci, nego treba samo paziti na crtanje profila s obzirom na tangencijalni dodir grebena i pomicaljke. Što je broj položaja tanjuraste pomicaljke veći to je veći i broj tangenata na koturu, te je i definiranje konture točnije.

U mehanizmima s kotačićem posebno treba paziti na izbor promjera kotačića. Na osnovi već konstruirane ekvidistantne linije po kojoj se giba osovina kotačića, lako je dokazati da njegov polumjer  $r$  treba da bude manji od najmanjeg polumjera zakrivljenosti  $\varrho_{\min}$  na konkavnoj strani ekvidistantne linije. Sl. 91 a pokazuje da se za  $r > \varrho_{\min}$  dobiva kontura koja je tehnički neizvediva. Obično se uzima  $r = 0,7\varrho_{\min}$ . Osim toga, poželjno

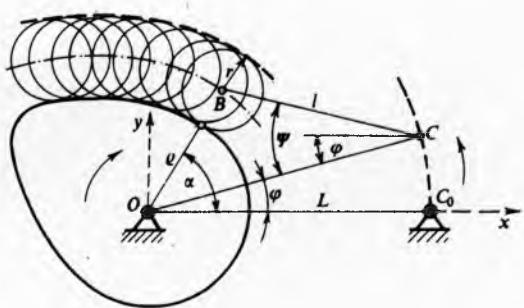


Sl. 91. Izbor promjera kotačića pomicaljke. a) pomoću polumjera zakrivljenosti  $\varrho_{\min}$ , b) pomoću najmanjeg radijusvektora  $r_{e\min}$  ekvidistantne linije

je da polumjer kotačića  $r$  bude manji od najmanjeg radijusvektora konture grebena (sl. 91 b). Prema tome,  $r$  treba da je manji od polovice najmanjeg radijusvektora ekvidistantne linije  $r_{e\min}$ . Obično se uzima  $r = 0,4r_{e\min}$ . Veličina  $r_{e\min}$  odredi se lako, a veličina  $\varrho_{\min}$  može se naći na slijedeći način: odaberite točku  $A$  za koju ekvidistantna linija ima najveću zakrivljenost; u blizini se odaberite još dvije točke  $B$  i  $C$ . Raspolovnice lukova sijeku se u središtu zakrivljenosti i time definiraju polumjer  $\varrho_{\min}$ . Na osnovi takvih grafikona, u općem slučaju, dobiju se dvije vrijednosti za  $r$ , pa se prihvata manja vrijednost.

**Analitička sinteza profila.** Analitička sinteza je moguća ako je zavisnost položaja pomicaljke i kuta zakretanja grebena zadana u analitičkom obliku.

Za krivuljni mehanizam s njihajućom pomicaljkom s kotačićem zadan je kut zakretanja  $\psi$  pomicaljke kao funkcija kuta  $\varphi$  koji definira položaj grebena  $\psi = f(\varphi)$ . Osim toga, zadane su još dimenzije  $L$  i  $l$  (sl. 92).



Sl. 92. Sinteza profila grebenaste ploče za njihajuću pomicaljku s kotačićem

Prvo se napravi inverzija mehanizma i zakrene dužina  $OC_0$  za kut  $\varphi$  u suprotnom smjeru od smjera zakretanja grebena. Nanoseći kut  $\psi$ , koji proizlazi iz  $\psi = f(\varphi)$ , za kut  $\varphi$  odredi se položaj osi kotačića  $B$ . Koordinate točke  $B$  jesu

$$y_B = L \sin \varphi + l \sin(\psi - \varphi), \quad (102)$$

$$x_B = L \cos \varphi - l \cos(\psi - \varphi). \quad (103)$$

Jednadžba profila kotačića, kojemu je polumjer  $r$ , sa središtem  $(x_B, y_B)$ , bit će:

$$(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2 - r^2 = 0. \quad (104)$$

Promjenom kuta  $\varphi$  mijenjaju se i koordinate  $x_B$  i  $y_B$ , te je izraz (104) jednadžba familije kružnica. Profil grebena je jedna od ovojnica krivulja te familije. Da se nađe jednadžba ovojnica, treba jednadžbu familije derivirati po jednom od parametara koje ona sadrži i derivaciju izjednačiti s nulom, te

riješiti sustav, sastavljen iz ove jednadžbe i jednadžbe familije. Jednadžba familije (104) derivira se po  $\varphi$ , pazeći da i veličine  $y_B$  i  $x_B$  ovise o  $\varphi$ :

$$-2(y - y_B) \frac{dy_B}{d\varphi} - 2(x - x_B) \frac{dx_B}{d\varphi} = 0 \quad (105)$$

$\frac{dy_B}{d\varphi}$  i  $\frac{dx_B}{d\varphi}$  odrede se deriviranjem izraza (102) i (103):

$$\frac{dy_B}{d\varphi} = L \cos \varphi + l \cos(\psi - \varphi) \left( \frac{d\psi}{d\varphi} - 1 \right), \quad (106)$$

$$\frac{dx_B}{d\varphi} = -L \sin \varphi + l \sin(\psi - \varphi) \left( \frac{d\psi}{d\varphi} - 1 \right). \quad (107)$$

Taj sustav jednadžbi bi se riješio eliminiranjem parametra  $\varphi$ , ali to je moguće postići samo u posebnim slučajevima. Jednadžbu profila grebena relativno je lako napisati u parametarskom obliku:

$$(x - x_B) = - (y - y_B) \frac{\frac{dy_B}{d\varphi}}{\frac{dx_B}{d\varphi}}. \quad (108)$$

Ako se uvrsti u jednadžbu skupine kružnica, dobiva se

$$y = y_B \pm r \frac{dx_B}{d\varphi} \left[ \left( \frac{dy_B}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dx_B}{d\varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (109)$$

što uvršteno u parametarski oblik jednadžbe profila daje

$$x = x_B \pm r \frac{dy_B}{d\varphi} \left[ \left( \frac{dy_B}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dx_B}{d\varphi} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (110)$$

Izrazi za  $x$  i  $y$ , određeni na taj način, omogućuju da se za odabran kut  $\varphi$  nađu koordinate pripadne točke na profilu grebena. Prije toga treba odrediti  $\psi$  i  $\frac{d\psi}{d\varphi}$  iz  $\psi = f(\varphi)$ , zatim

$y_B$  i  $x_B$ ,  $\frac{dy_B}{d\varphi}$  i  $\frac{dx_B}{d\varphi}$ . Različiti predznaci ispred korijena u jednadžbama (109) i (110) odgovaraju dvjema mogućim ovojnicanama, od kojih jedna predstavlja profil grebena. Polarne se koordinate profila odrede iz

$$Q = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}. \quad (111)$$

**Izbor zakona gibanja.** Pri konstrukciji mnogih automatskih strojeva zakon gibanja pomicaljke potpuno je određen operacijom koju pomicaljka treba da omogući. Međutim, često je definiran samo pomak za određeno vrijeme gibanja, odnosno za određeni kut zakretanja grebena, tj. zakon nije potpuno određen, nego ga treba djelomično odabrati. Tako je s profilima grebenastih osovina za otvaranje i zatvaranje ventila motora s unutrašnjim izgaranjem, gdje može biti zadano, osim maksimalnog pomaka  $x$ , još samo vrijeme od početka otvaranja do kraja zatvaranja ventila. Tada se obično uzima  $\varphi_2 = 0$  i  $\varphi_1 = \varphi_3$ , premda to za protok smjese u cilindar nije najpovoljnije. Međutim, najčešće su definirane veličine  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  i  $\varphi_4$ , pa preostaje da se odaberu samo zakoni gibanja pri podizanju ( $\varphi_1$ ) i spuštanju ( $\varphi_3 - \varphi_2$ ) ventila. Ako se pretpostavi zakon jednolikog gibanja (sl. 93), koordinata  $x$  mijenja se linearno, brzina je konstantna, a ubrzanje je jednako nuli, osim u točkama  $A$  i  $B$  gdje je ubrzanje beskonačno. Iz zakona mehanike ( $F = ma$ ) proizlazi da će pri beskonačno velikom ubrzanju djelovati beskonačno velike sile inercije. S obzirom na elastičnost konstrukcijskih materijala, tlačne sile neće biti beskonačne, ali će biti vrlo velike i uzrokovat će udare. To se može dopustiti jedino u sporohodnim mehanizmima i to ako pomicaljka i uz nju vezani dijelovi imaju relativno male mase. Isprekidane linije na dijagramu sl. 93 pokazuju način da se otkloni udari pomoću jednoliko ubrzanog gibanja ( $OA_1$ ) i jednoliko usporenog gibanja ( $A_2B$ ). U praksi se vrlo često (osobito za pokretanje ventila) primjenjuje na čitavom hodu  $h$  zakon jednoliko promjenljivog

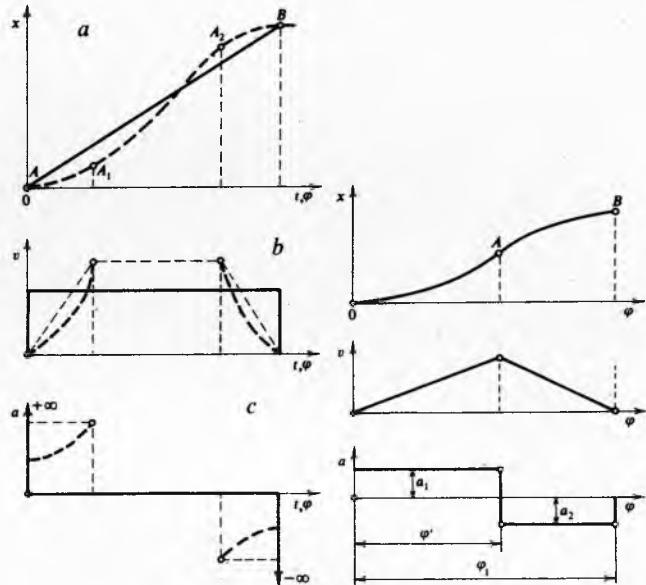
gibanja (sl. 94), iako se i tada pojavljuju nagle promjene ubrzanja i udarnih sila, ali s obzirom na intenzitet promjene ubrzanja pojavljuju se meki udari koji nisu osobito opasni. Udari se još više ublažuju ako je pomicaljka i s njom vezani članovi od elastičnog materijala. Udari se mogu dopustiti za mehanizme koji rade s maksimalnom brzinom vrtnje od  $30 \text{ s}^{-1}$ . U praksi

se omjer pozitivnoga i negativnog ubrzanja (sl. 94)  $\frac{a_1}{a_2} = k$  uzima veći od 1. Izbor toga koeficijenta ravna se prema slijedećem: što je veće  $k$ , to je veće pozitivno ubrzanje pri podizanju ventila pa i veće opterećenje silama inercije, ali je zato manje usporene pri kraju otvaranja i time i manje potrebne sile u oprugama. Vrijednost  $k$  jest 1...4. Za mehanizme s više dijelova (zvjezdasti motor) odabiru se vrijednosti bliže 1, a za one s manje dijelova (greben direktno pokreće ventil) vrijednosti bliže 4. Za zadani hod pomicaljke  $h$  i pripadni  $\varphi_1$ , a na osnovi odabranog koeficijenta  $k$ , može se izračunati vrijednost ubrzanja  $a_1$  i  $a_2$ . Brzina pomicaljke jednaka je nuli na početku i na kraju hoda, pa su i prirast brzine i površina dijagrama ( $a$ ,  $\varphi$ ) također jednak nuli:

$$a_1 \varphi' = a_2 (\varphi_1 - \varphi'), \quad (112)$$

a odatle:

$$\varphi' = \varphi_1 \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \varphi_1 \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + 1} = \varphi_1 \frac{1}{k + 1}. \quad (113)$$



Sl. 93. Kinematika grebenastog mehanizma za otvaranje ventila na cilindru motora s unutrašnjim izgaranjem. a) dijagram put-vrijeme ( $x, t$ ), b) dijagram brzina-vrijeme ( $v, t$ ), c) dijagram ubrzanje-vrijeme ( $a, t$ ). Pune linije u dijagramima označuju jednoliko gibanje

Sl. 94. Dijagrami puta, brzine i ubrzanja grebenastog mehanizma za otvaranje ventila, pri jednoliko promjenljivom gibanju

Analogan je odnos i među pripadnim vremenima:  $t' = t_1 \frac{1}{k+1}$ . Maksimalna brzina, za  $t = t'$ , odgovara površini dijagrama ( $a, \varphi'$ ), dakle, dijelu dijagrama iznad apscise:  $v_{\max} = a_1 t' = a_1 t_1 \frac{1}{k+1}$ . Maksimalni hod  $h$  može se izraziti površinom trokuta u dijagramu ( $v, t$ ):  $h = \frac{v_{\max} t_1}{2}$  te je  $v_{\max} = \frac{2h}{t_1}$ .

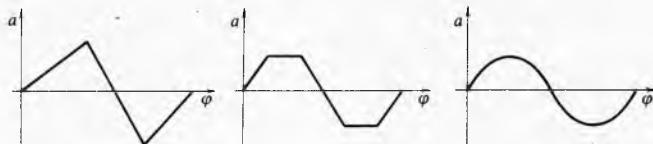
Iz ova izraza za  $v_{\max}$  proizlazi

$$a_1 t_1 \frac{1}{k+1} = \frac{2h}{t_1}; \quad a_1 = \frac{2h(k+1)}{t_1^2}. \quad (114)$$

Budući da je pri ravnomjernom okretanju grebena  $t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega}$ , to je

$$a_1 = \frac{2h(k+1)}{\varphi_1^2} \omega^2, \quad (115)$$

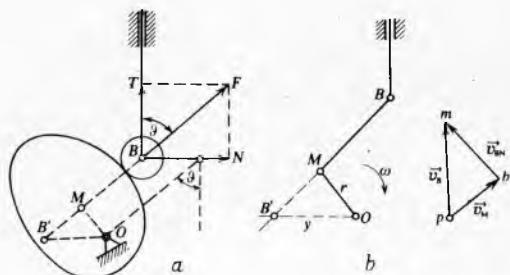
$$a_2 = \frac{a_1}{k} = \frac{2h(k+1)}{k\varphi_1^2} \omega^2. \quad (116)$$



Sl. 95. Dijagrami ubrzanja  $a$  kao funkcije kuta krivulje grebenastog mehanizma za otvaranje ventila, pri gibanju bez udara

Udari se najbolje uočavaju u dijagramu  $(a, \varphi)$ , kad je, naime, dio krivulje ubrzanja vertikalан, to znači da dolazi do udara. Prema tome, dijagrami  $(a, \varphi)$  na sl. 95 odražavaju gibanja bez udara. Teorijski postoje i udari drugoga i višeg reda koji se javljaju kao skokovi u grafovima  $\frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}$  itd, ali se oni u praksi najčešće zanemaruju. Za pravilno funkcioniranje grebenastog mehanizma važno je jedino ubrzanje drugog reda, trzaj  $a_{II} = j = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}$ . Veličina trzaja utječe na habanje dodirnih površina, pa se stoga trzaj mora svesti na što manju mjeru.

**Kut pritiska.** Sila kojom greben tlači na kotačić pomicaljke okomita je na tangentu dodirnih površina i, prema tome, prolazi kroz središte zakrivenosti obaju profila  $B$  i  $M$  (sl. 96a). Komponente u smjeru gibanja pomicaljke i okomito na taj pravac jesu  $T = F \cos \vartheta$ ,  $N = F \sin \vartheta$ . Kut  $\vartheta$  što ga zatvaraju pravac sile  $F$  i pravac kretanja pomicaljke naziva se *kut pritiska*. Idealna bi situacija bila da je  $N = 0$ , jer komponenta  $N$  pobuduje trenje u vođicama pomicaljke te pri radu može doći do zaklinjenja. To znači da treba nastojati da kut  $\vartheta$  bude što manji. Kut  $\vartheta$  također se mijenja ovisno o  $\varphi$ , pa se stoga nastoji ograničiti maksimalna vrijednost kuta  $\vartheta$ . U praksi se kao granične vrijednosti uzimaju: za translatorično gibanje pomicaljke  $\vartheta_{max} = 30^\circ$ ; za rotacijsko gibanje pomicaljke  $\vartheta_{max} = 45^\circ$ .



Sl. 96. Određivanje kuta pritiska. a) grebenasti mehanizam, b) zamjenjujući mehanizam

Razlike proizlaze iz činjenice da je trenje u rotoidnom paru manje nego u translatooidnom. Poželjna vrijednost kuta  $\vartheta_{max}$  može se postići izborom središta rotacije grebena. Za poznati položaj središta  $O$  i zadani zakon gibanja pomicaljke može se za bilo koji plan mehanizma izračunati kut  $\vartheta$  na sljedeći način: pomoću ekvivalentnog mehanizma nacrti se plan brzina, zadajući proizvoljnu vrijednost za  $v_M$  (sl. 96b). Bit će

$$\vec{v}_B = \vec{v}_M + \vec{v}_{BM}. \quad (117)$$

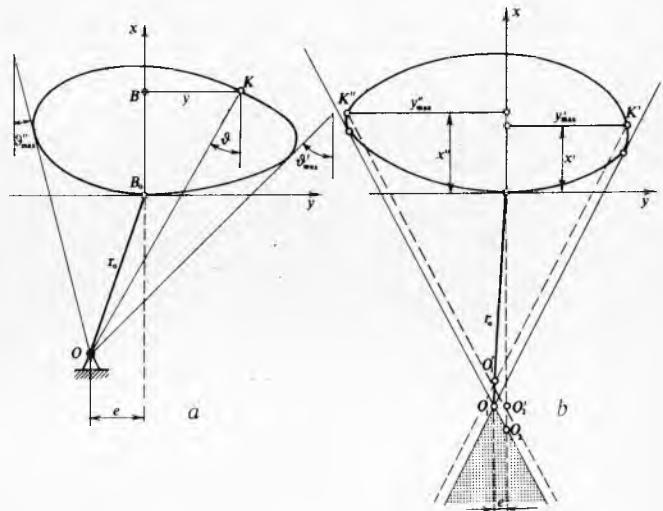
Ako se kroz  $O$  povuku pravci okomiti na putanju pomicaljke, to će trokuti  $pBM$  i  $OMB'$  biti slični

$$\frac{y}{r} = \frac{v_B}{v_M} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{dx}{r\omega dt} = \frac{dx}{r d\varphi}. \quad (118)$$

Odatle proizlazi da je  $y = \frac{dx}{d\varphi}$ , gdje  $x$  definira središte ko-

tačića pomicaljke prema početnom položaju  $x_0$ . Ako je zadana zavisnost  $(x, \varphi)$ , može se y izračunati za bilo koji  $\varphi$ . Na sl. 97a vidi se konstrukcija točke  $K$  i kuta  $\vartheta$ . Ako se računa vrijednost  $y$  za različite položaje  $x$  pomicaljke, dobiva se graf  $(x, y)$  i maksimalne vrijednosti kuta pritiska.

Obrnuti zadatak nije teško riješiti. Na već zadani graf  $(x, y)$  povuku se tangente pod kutom  $\vartheta_{max}$  prema pravcu paralelnom s pravcem gibanja pomicaljke; njihovo presjecište određuje središte  $O_1$  grebena, polujmer  $r_0$  i ekscentričnost  $e$  (sl. 97b). Ujedno se vidi da bi središte centričnog mehanizma bilo u točki  $O_2$ . Kao moguće rješenje bile bi i sve točke u osjenčanom poljtu slike 97b. Ako se kao zadatak postavi manja vrijednost  $\vartheta_{max}$ , točka  $O_1$  će se odmaknuti te će i gabarit mehanizma biti veći, pa se obično uzima neko kompromisno rješenje. Idealno rješenje bi bilo za  $\vartheta_{max} = 0$ , ali bi tada mehanizam bio beskočno velikih dimenzija.



Sl. 97. Maksimalni kut pritiska. a) konstrukcija maksimalnog kuta pritiska  $\vartheta_{max}$ , b) izbor središta krivuljne ploče za zadani  $\vartheta_{max}$  pri pravocrtnom gibanju pomicaljke

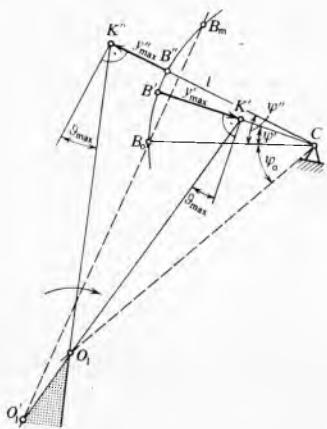
Na sl. 97b prikazano je približno rješenje za koje se ne treba crtati cijelokupni dijagram  $(x, y)$ . Dovoljno je naći vrijednost  $x'$  i  $x''$ , za koje izraz  $y = \frac{dx}{d\varphi}$  ima ekstremne vrijednosti, kao i ekstremne vrijednosti  $y'_{max}$  i  $y''_{max}$ . Iz sl. 97b vidi se da točke  $O'_1$  i  $O'_2$  ne odstupaju mnogo od ranije točno određenih položaja  $O_1$  i  $O_2$ .

Zapravo, na isti način određuje se i približni položaj središta rotacije grebena s njihajućom pomicaljkom (sl. 98). Iz zadane zavisnosti  $(\psi, \varphi)$  odredi se deriviranjem  $\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)' \varphi$ , a zatim veličine  $\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)'_{max}$  i  $\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)''_{max}$ , te vrijednosti  $\psi'$  i  $\psi''$ . Pri zakretanju pomicaljke  $\overline{CB}$  za kut  $d\varphi$  točka  $B$  pređe luk  $dx = l d\varphi$ , pa je prema tome

$$y = \frac{dx}{d\varphi} = l \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad y'_{max} = l \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)'_{max}, \quad y''_{max} = l \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)''_{max}. \quad (119)$$

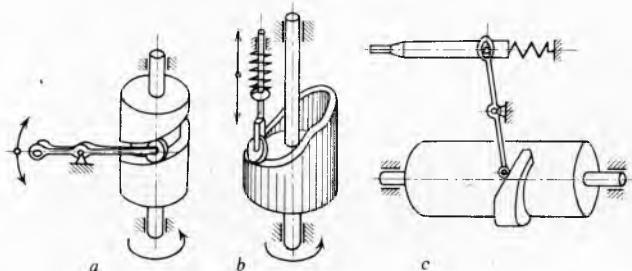
Iz proizvoljno uzetog položaja  $\overline{CB_0}$  (kao najnižeg) nanesu se kutovi  $\psi'$  i  $\psi''$  i na njima odresci  $y'_{max}$  i  $y''_{max}$  u razmjeru duljine pomicaljke, pa se nacrtaju kutovi  $\vartheta_{max}$ , kao što je prikazano na sl. 98. Tako dobiveni pravci sijeku se u  $O'_1$  i definiraju položaj središta krivuljne ploče. To središte može biti i bilo gdje na osjenčanom dijelu sl. 98. Često je poželjno da se središte nalazi na pravcu kroz početni i krajnji položaj vrha pomicaljke (kroz  $B_0$  i  $B_m$ ), dakle, u točki  $O'_1$ . Odrezak  $y_{max}$  nosi se od  $B$  prema  $C$  ako pri tome i greben i pomicaljka

imaju isti smjer okretanja, a od  $B$  na suprotnu stranu od  $C$  ako se greben i pomicaljka okreću u suprotnim smjerovima. Odsječci  $y'_{\max}$  i  $y''_{\max}$  uvijek su na suprotnim stranama jedan od drugoga.



Sl. 98. Izbor središta krivuljne ploče za mehanizam s njihajućom pomicaljkom

**Prostorni krivuljni mehanizmi.** Najčešći oblik pogonskog člana prostornih mehanizama jest valjak. Valjak može biti puni valjak s urezanim žlijebom, šuplji valjak s krivulnjim rubom i valjak s ispuštenom krivulnjom vodilicom (sl. 99).



Sl. 99. Prostorni krivuljni mehanizmi. a puni valjak s urezanim žlijebom, b šuplji valjak s krivulnjim rubom, c valjak s ispuštenom vodilicom

Točno profiliranje bočne površine valjka veoma je teško i ne može se postići samo ako se proračunaju koordinate pojedinih točaka. Taj rad se temelji na istom principu na kojem i analitička sinteza konture ravnog grebena, jedino što se umjesto familije ekscentričnih kružnica pojavljuje familija cilindričnih površina kojih ovojnice definiraju oblik konture. U praksi se žlijeb na valjku može narezati potpuno točno i bez prethodnog proračuna. Dovoljno je upotrijebiti glodalno jednako promjeru kotačića pomicaljke (sl. 100a), pa okrećući valjak bez žlijeba i istodobno pokrećući nosač alata prema zadatom za-

konu gibanja, glodalica će urezati potreban žlijeb. Za točno vođenje vodilice, pri obradi je pogodno upotrijebiti ravn krivuljni mehanizam koji ima isti zakon gibanja kao pomicaljka. Konstrukcija i izvedba ravnog krivuljnog mehanizma ne čini teškoće. Ako mehanizam ima valjak velikog promjera, može se za konstrukciju konture žlijeba poslužiti sljedećom približnom metodom (sl. 100b): razvije se plašt valjka u ravninu za koju se smatra da se giba brzinom jednakom obodnoj brzini okrećanja valjka  $v = R\omega$ . Na taj se način dobije mehanizam s translatornim gibanjem ravnog grebena duljine  $2\pi R$ , i translatorym gibanjem pomicaljke. Za inverzni mehanizam s ravnim grebenom kao postoljem, pokrene se pomicaljka za duljinu  $x$  i odgovarajuću duljinu  $y = R\varphi$ , gdje je  $\varphi$  u radijanima. Spajanjem tih točaka dobije se linija kretanja osi kotačića pomicaljke, a pomoću ekvidistantnih linija odredi se kontura žlijeba. Kad se razvijena površina plašta ponovno savije na valjak, ona na njemu zacrtava potrebnu konturu.

### DINAMIČKA ANALIZA

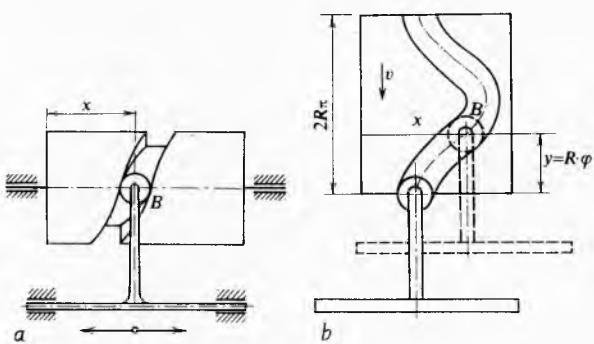
Dinamika mehanizama razmatra gibanja mehanizama s obzirom na vanjske sile koje djeluju na pojedine dijelove i s obzirom na sile inercije koje se pojavljuju pri gibanju tih dijelova. Osnovna je namjena mehanizma da ostvari zadano gibanje, pa zbog toga na mehanizam mora djelovati neka *pogonska sila*. Nadalje, na članove mehanizma djeluju i *korišni otpori* kao osnovne sile o kojima najviše ovisi karakter gibanja mehanizma. D'Alembertov princip omogućuje primjenu metoda statike na analizu sila uz dodavanje ostalim silama još i *inercijskih sile*, koje proizlaze iz neravnomjernog gibanja članova mehanizma. U vanjske sile koje djeluju na članove mehanizma spadaju i *vanjski štetni otpori sredine* kroz koju se članovi gibaju. To su otpor zraka, otpor ulja kroz koje se gibaju dijelovi suvremenih reduktora i slično. Sve navedene sile, koje djeluju na mehanizam pobuđuju i *unutrašnje tlakove u zglobovima*. Ti tlakovi sami po sebi ne utječu na karakter gibanja, ali zbog njih, na mjestima gdje se dodiruju dijelovi mehanizma, nastaju sile trenja koje spadaju u štetne otpore jer uzrokuju gubitke energije, pa prema tome i povećanje potrebnih pogonskih sile.

Dinamika mehanizama treba: 1) na osnovi poznatih vanjskih sile koje djeluju na članove mehanizma odrediti pogonsku silu koja osigurava zakon gibanja mehanizma; 2) na osnovi zadanih vanjskih sile naći unutrašnje tlakove u zglobovima mehanizma; 3) odrediti sile trenja i njihovo djelovanje na gibanje mehanizma; 4) odrediti zakon gibanja mehanizma zbog djelovanja zadanih vanjskih sile; 5) regulirati rad i uravnotežiti mehanizam.

### Kinetostatička analiza

Osnovni zadatak analize sila na mehanizmu jest da se odredе sve vanjske i unutrašnje sile u zglobovima za određeni položaj i određeno stanje gibanja članova mehanizma. Prema D'Alembertovu principu u vanjske sile ubrajaju se i inercijske sile koje proizlaze iz neravnomjernog kretanja članova mehanizma. Zato se takva analiza i naziva kinetostatičkom. Analiza sile ima osobito značenje, jer se na osnovi svih poznatih sile proračuna čvrstoča članova mehanizma i elemenata kinematičkih parova. Obično se pri analizi sila ne uzimaju sile trenja u kinematičkim parovima. Naime, potpuna analiza sila, ako se uključe i sile trenja, relativno je složena. Analitičko rješenje svih sile koje djeluju na dvočlanu grupu dovodi do jednadžbe 16.-og reda, a grafičko rješenje do dviju krivulja četvrtog reda. Sile trenja direktno ovisi o tlaku u zglobu, a tlak u zglobu ovisi o vanjskim i inercijskim silama na koje utječu i unutrašnje sile trenja, pa stoga dolazi do tako složene međuzavisnosti. Sile trenja su obično relativno malene prema drugim silama pa ih se u analizi može zanemariti. One su samo ponekad bitne, te ih tada treba uzeti u obzir.

**Ravnoteža vanjskih sile.** Ako je zbroj elementarnih radova koje obavljaju članovi mehanizma, pa prema tome i zbroj vanjskih sile koje djeluju na mehanizam, jednak nuli, onda se mehanizam nalazi u stanju ravnoteže. Ta je ravnoteža kinetostatička ako se u vanjske sile ubrajaju i sile inercije, inače je statička. Ako se pretpostavi da je član mehanizma opterećen



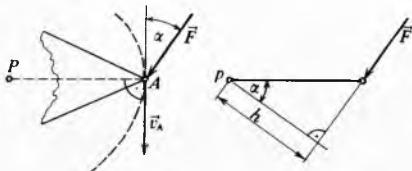
Sl. 100. Izradba žlijeba u valjku krivuljnog mehanizma. a glodanje žlijeba glodalicom, b određivanje konture žlijeba pomoću ekvidistantnih linija na razvijenom plaštu valjka

silom  $F$  u točki  $A$ , i da je trenutni pol rotacije člana u  $P$ , onda pri gibanju mehanizma sila  $F$  obavlja rad, jer se i točka  $A$  giba po putanji brzinom kojoj se pravac poklapa s tangentom na putanju (sl. 101). Elementarni rad sile  $F$  jest

$$dA = F ds \cos \alpha = \vec{F}(\vec{\omega}_p \times \overrightarrow{PA}) dt, \quad (120)$$

te je snaga koju ova sila razvija

$$P = \frac{dA}{dt} = F v_A \cos \alpha = \vec{F}(\vec{\omega}_p \times \overrightarrow{PA}). \quad (121)$$



Sl. 101. Teorem Žukovskoga

Ako se odabere mjerilo za brzine  $\mu_v$  i nacrti spojnica  $\overline{pa}$ , okomita na vektor brzine  $v_A$ , tako da je  $v_A = \overline{pa} \mu_v = PA \omega_p$  pa se prenese sila  $F$  u homonimnu točku  $a$ , moment sile s obzirom na  $p$  bit će (sl. 101)

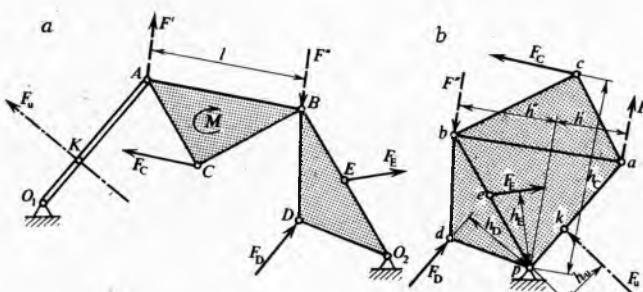
$$M_F^p = F h = F \overline{pa} \cos \alpha = F \frac{v_A}{\mu_v} \cos \alpha. \quad (122)$$

$M_F^p$  razmjeran je, dakle, snazi koju razvija sila  $F$  u točki  $A$  mehanizma. Zbroj momenata s obzirom na  $p$  svih sila, prenesenih u homonimne točke zakrenutog plana brzine mehanizma, bit će proporcionalan zbroju svih sila koje djeluju na originalni mehanizam. Za mehanizam u ravnoteži bit će

$$\sum_1^n \vec{F}_i (\vec{\omega}_p \times \overline{pd}_i) = \sum_1^n F_i \omega_p h_i = 0. \quad (123)$$

Ako se mehanizam s jednim stupnjem pokretljivosti pod djelovanjem sila  $F_i$  nalazi u ravnoteži, onda će se, prema teoru Žukovskoga, u stanju ravnoteže nalaziti i zakrenuti plan brzina uzet kao kruta ploča koja rotira oko pola, opterećen istim silama  $F_i$  prenesenim u homonimne točke. To je u skladu i s Ilichevim teoremom o kinetostatičkoj ekvivalentnosti reducirano mehanizma.

Najčešće se analiza vanjskih sile svodi na izračunavanje *uravnotežujuće sile* ili *uravnotežujućeg momenta*. Uravnotežujuća sila (odnosno moment), koja djeluje na pogonski član mehanizma, obično je nepoznata te se zadatak svodi na određivanje potrebne pogonske sile koja će ostvariti uvjete gibanja za koje su poznate vanjske radne, otporne i inercijske sile. Na sl. 102a



Sl. 102. Analiza vanjskih sile na zglobnom četverokutu. a) zadane vanjske sile, osim uravnotežujuće sile  $F_u$ , b) određivanje uravnotežujuće sile  $F_u$  pomoću zakrenutog plana brzina

zadane su sve vanjske sile koje djeluju na članove zglobnog četverokuta, osim uravnotežujuće sile  $F_u$ , za koju je zadan samo pravac djelovanja kroz točku  $K$  ručice  $O_1 A$ . Na sl. 102b nacrtan je reducirani mehanizam, koji je ujedno kruta ploča oblika plana zakrenutih brzina. Sl. 102b je, prema tome, osnova za primjenu teorema o kinetostatičkoj ekvivalentnosti, ali ujedno i osnova za primjenu teorema Žukovskoga; postupak

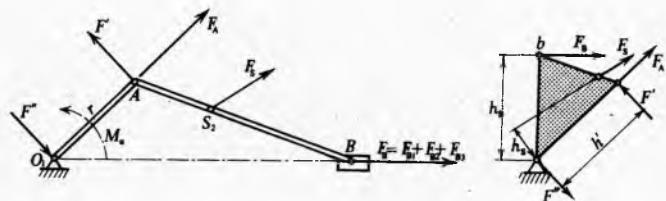
primjene obaju teorema je istovetan. Sve sile koje djeluju na mehanizam u točkama  $C, D, E$  i  $K$  (sl. 102a) prenesene su u homonimne točke  $c, d, e$  i  $k$  (sl. 102b). Moment  $M$ , koji djeluje na sprežni član, treba zamijeniti spregom sile  $\vec{F}' = -\vec{F}$  tako da je  $F' = F'' = \frac{M}{l}$ . Kao točke, u kojima djeluju sile  $F'$  i  $F''$ , odabrani su zglobovi  $A$  i  $B$ , jer je položaj njihovih homonimnih točaka  $a$  i  $b$  već određen. Smjer uravnotežujuće sile  $F_u$  samo je prepostavljen. Na osnovi uvjeta ravnoteže proizlazi

$$F'h' + F''h'' + F_ch_c - F_D h_D - F_E h_E + F_u h_u = 0, \quad (124)$$

$$F_u = \frac{1}{h_u} (-F'h' - F''h'' - F_ch_c + F_D h_D + F_E h_E).$$

Krakovi  $h_i$  očitaju se s crteža. Ako je vrijednost za silu  $F_u$  pozitivna, onda je njen smjer djelovanja točno prepostavljen, a ako je negativna, treba smjer sile  $F_u$  izmijeniti.

U stapnom mehanizmu (sl. 103) poznate su vrijednosti vanjskih sile  $F_A, F_B$  i  $F_S$ . Sile  $F_A, F_S$  i  $F_{B1}$  inercijske su sile člana  $\overline{AB}$ ,  $F_{B2}$  inercijska je sila klizača  $B$ , a  $F_{B3}$  sila otpora kretanja klizača. Težište ručice  $O_1 A$  prepostavljen je u zglobu  $O_1$ , pa je rezultirajuća inercijska sila toga člana jednaka nuli.



Sl. 103. Analiza vanjskih sile starnog mehanizma i određivanje uravnotežujućeg momenta

Nepoznata je vrijednost i smjer uravnotežujućeg momenta  $M_u$ . Taj se moment zamijeni spregom sile  $F'$  i  $F''$  u točkama  $A$  i  $O_1$ , pa je za prepostavljeni smjer pogonskog (uravnotežujućeg) momenta uvjet ravnoteže vanjskih sile:

$$-F_S h_S - F_B h_B + F'h' = 0, \quad (125)$$

i odatle:

$$F' = \frac{1}{h'} (F_S h_S + F_B h_B). \quad (126)$$

Dakle, nepoznata sila  $F'$  je pozitivna, što znači da je njezin smjer, a time i smjer uravnotežujućeg momenta  $M_u$ , točno prepostavljen. Vrijednost je uravnotežujući moment

$$M_u = F' \overline{O_1 A} = F' r. \quad (127)$$

**Tlakovi u zglobovima.** Vanjske sile, težine i sile inercije, koje za vrijeme rada mehanizma djeluju na njegove članove, budući tlakovi u kinematičkim parovima. Promatrajući niže kinematičke parove, može se zaključiti da će, ako se zanemari trenje, u rotoidnom paru biti poznata samo točka kroz koju prolazi reakcija, a u translatooidnom paru samo činjenica da je pravac reakcije okomit na kliznu stazu. Prema tome, za svaku reakciju u zglobu treba odrediti još dvije nepoznate vrijednosti. Za svaki pomicni član mehanizma mogu se napisati tri uvjeta ravnoteže, pa će stoga biti staticki određen samo onaj mehanizam ili grupa od  $n$  pomicnih članova i  $p$  zglobova koji ispunjavaju uvjet:  $3n = 2p$ . Mehanizam se pri analizi rastavlja u grupe koje ispunjavaju taj uvjet. Analizu treba započeti od one grupe koja je najudaljenija od člana na koji djeluje nepoznata uravnotežujuća sila  $F_u$ , odnosno moment  $M_u$ .

**Mehanizam s rotoidnim zglobovima.** Da se grafičko-analitičkom metodom odredite tlakovi u zglobovima zglobnog četverokuta (sl. 104), mehanizam se podijeli na dvočlane grupe: ručica 1 s postoljnim članom 4 sačinjava jednu, a sprežni član 2 s njihalicom 3 drugu grupu. Analiza počinje s drugom grupom. Vanjske sile, težine i inercijske sile, koje za vrijeme rada mehanizma djeluju na članove 2 i 3, reducirane su na rezultirajuće

sile  $F_2$  i  $F_3$  te rezultirajuće momente  $M_2$  i  $M_3$ . Na pogonski član 1 djeluje još i nepoznata uravnovežujuća sila  $F_u$  ili uravnotežujući moment  $M_u$ , već prema tome na koji je način pogonjen taj član. Za cijeli mehanizam tlakovi u zglobovima su unutrašnje sile koje djeluju u parovima od po dvije kolinearne sile iste vrijednosti ali suprotnog smjera. Tako su za izdvojenu grupu članova 2 i 3 tlakovi u zglobovu  $B$ :  $\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} = 0$ . Tlakovi u zglobovima  $A$  i  $O_2$  javljaju se kao vanjske sile  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{43}$ , pa je jednadžba ravnoteže sile za tu grupu

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0. \quad (128)$$

Rastavljanjem nepoznatih reakcija na radikalne (uzduž štapa) i transverzalne (okomito na štap) komponente, jednadžba (128) postaje:

$$\vec{F}_{12t} + \vec{F}_{12r} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43t} + \vec{F}_{43r} = 0. \quad (129)$$

Svaki se član te grupe nalazi u kinetostatičkoj ravnoteži, pa se mogu napisati i uvjeti ravnoteže za svaki član posebno:

$$\begin{aligned} \sum M_{(2)}^B &= F_2 h_2 - F_{12t} l_2 - M_2 = 0, \\ \sum M_{(3)}^B &= -F_3 h_3 + F_{43t} l_3 + M_3 = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

gdje su  $l_2$  i  $l_3$  duljine članova 2 i 3.

Iz ovih jednadžbi proizlazi

$$F_{12t} = \frac{1}{l_2} (F_2 h_2 - M_2); \quad F_{43t} = \frac{1}{l_3} (F_3 h_3 - M_3). \quad (131)$$

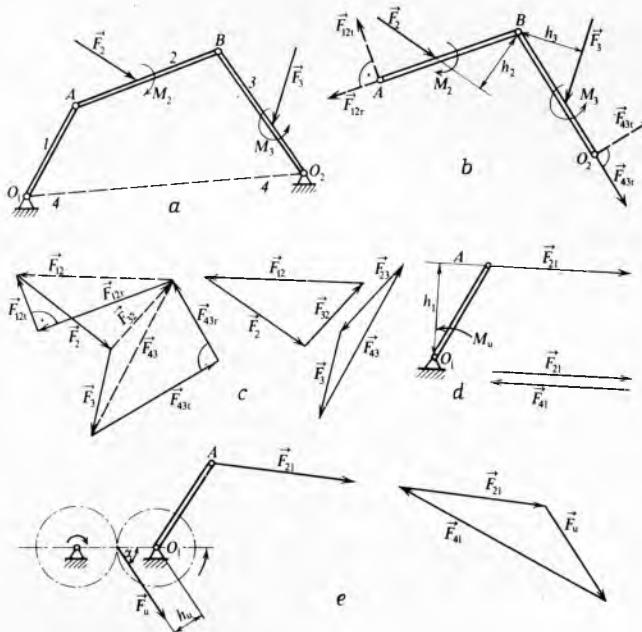
Na osnovi vektorske jednadžbe može se nacrtati poligon sile, iz kojeg se dobiju iznosi i smjerovi  $\vec{F}_{12r}$  i  $\vec{F}_{43r}$ , te je

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12t} + \vec{F}_{12r}; \quad \vec{F}_{43} = \vec{F}_{43t} + \vec{F}_{43r}. \quad (132)$$

Reakcija  $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$  proizlazi iz uvjeta ravnoteže svakog od tih dvaju štapova posebno:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{32} = 0; \quad \vec{F}_3 + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} = 0. \quad (133)$$

Sila  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  djeluje u točki  $A$  koljena. Iz uvjeta da je s obzirom na bilo koju točku zbroj momenata sile koje djeluju na koljeno jednak nuli, proizlazi da na koljeno treba djelovati još i uravnotežujuća sila kojoj je moment s obzirom na točku  $O_1$  jednak  $F_{21} h_1$ , tj. uravnotežujući moment  $M_u = F_{21} h_1$ . Ako se pogon ostvaruje momentom  $M_u$ , onda je reakcija  $\vec{F}_{41} = -\vec{F}_{21}$ .



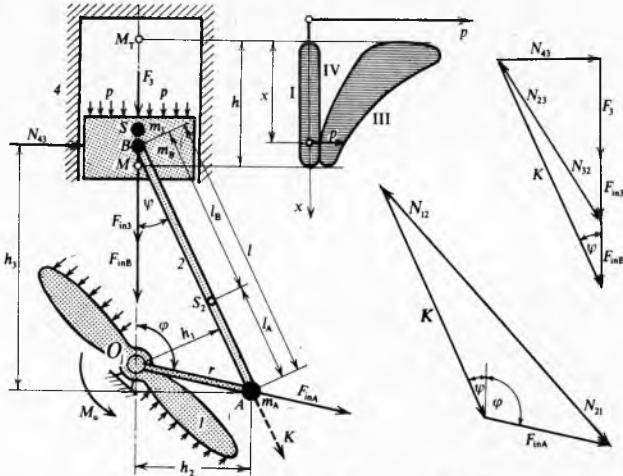
Sl. 104. Grafičkoanalitička metoda određivanja tlakova u zglobovima zglobovnog četverokuta. a) zglobni četverokut sa zadanim vanjskim silama, b) opterećenje dvočlane grupe ABO<sub>2</sub>, c) planovi sila dvočlane grupe ABO<sub>2</sub>, d) opterećenje pogonskog člana O<sub>1</sub>A momentom M<sub>u</sub> i planovi sile na pogonskom članu, e) opterećenje pogonskog člana O<sub>1</sub>A silom na zupčaniku F<sub>u</sub> i plan sile

Ako se pogon ostvaruje silom F<sub>u</sub> na zupčaniku kruto vezanim za koljeno, vrijednost sile proizlazi iz  $F_u = \frac{F_{21} h_1}{h_u}$ . Tada se reakcija F<sub>41</sub> dobiva iz uvjeta  $\vec{F}_{21} + \vec{F}_u + \vec{F}_{41} = 0$ .

Citav zadatak može se rješavati i računski, zamjenjujući sve vektorske jednadžbe s po dvije algebarske jednadžbe projekcija na koordinatne osi.

**Motorni mehanizam.** Analitička metoda određivanja sile u zglobovima primjenjuje se obično kad je i kinematička analiza obavljena računski.

Vanjske sile koje djeluju na članove stupnog mehanizma avionskog motora (sl. 105) jesu tlačna sila plinova na stup (pogonska sila F<sub>3</sub>) i otporna sila zraka na propeler izražena



Sl. 105. Kinetostatička analiza motornog mehanizma

momentom M<sub>u</sub>. Težine članova u suvremenim motorima mogu se zanemariti. Iznos sile F<sub>3</sub> odredi se iz indikatorskog dijagrama motora. Vratilo motora okreće se u smjeru satne kazaljke, pa u položaju mehanizma u četverotaktnom motoru na sl. 105 u toku je I ili III takт. Ako se pretpostavi da je u toku III takт, kojemu u indikatorskom dijagramu odgovara tlak p, bit će

$$F_3 = p A = p \frac{D^2 \pi}{4}, \quad (134)$$

gdje je A površina stapa, D promjer stapa. Stap se giba translatorno, te inercijska sila F<sub>in3</sub> prolazi kroz težiste S<sub>3</sub> stapa. Vrijednost je inercijske sile F<sub>in3</sub> = -m<sub>3</sub> d̄<sub>S3</sub> = -m<sub>3</sub> d̄<sub>B</sub>, odnosno

$$F_{in3} = m_3 r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi), \quad (135)$$

gdje je  $\lambda = \frac{r}{l}$ .

Masa stupajice zamjeni se sustavom koncentriranih masa m<sub>A</sub> i m<sub>B</sub>. Pomoću približne zamjene masa nađu se inercijske sile stupajice

$$\vec{F}_{inA} = -m_A \vec{d}_A = -m_2 \frac{l_B}{l} \vec{d}_A \quad (136)$$

$$\vec{F}_{inB} = -m_B \vec{d}_B = -m_2 \frac{l_A}{l} \vec{d}_B. \quad (137)$$

Intenziteti sila inercije jesu

$$F_{inA} = m_2 \frac{l_B}{l} r \omega^2 = m_2 l_B \lambda \omega^2 \quad (138)$$

$$F_{inB} = m_2 l_A \lambda \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (139)$$

Vratilo rotira konstatnom kutnom brzinom, pa je kutno ubrzanje ε<sub>1</sub> = 0, te je stoga i moment inercijskih sile jednak nuli. Težiste je vratila u O<sub>1</sub>, pa je i inercijska sila ovog člana

jednaka nuli. Sile  $F_3$ ,  $F_{in3}$  i  $F_{32}$  djeluju pravcima kroz  $B$ , te stoga i preostala sila  $N_{43}$  koja djeluje na stap, treba prolaziti kroz  $B$ . Veličina tog tlaka dobiva se iz jednadžbe momenata s obzirom na točku  $A$  za grupu (2, 3):

$$N_{43} = \frac{h_2}{h_3} (F_3 + F_{in3} + F_{inB}), \quad (140)$$

a jer je  $\frac{h_2}{h_3} = \tan\psi$ , to se može napisati:

$$N_{43} = (F_3 + F_{in3} + F_{inB}) \tan\psi. \quad (141)$$

Jednadžba ravnoteže sila koje djeluju na stap omogućuje da se odredi tlačna sila  $N_{23}$  u zglobu  $B$ :  $\vec{N}_{43} + \vec{F}_{in3} + \vec{F}_3 + \vec{N}_{23} = 0$ . Iz plana sila proizlazi

$$N_{23} = \sqrt{N_{43}^2 + (F_3 + F_{in3})^2}. \quad (142)$$

Sila  $K$  je rezultanta sile  $F_{32}$  i  $F_{inB}$  i djeluje u smjeru uzdužne osi stupajice, jer je zbroj momenata sile  $F_{inB}$  i  $F_{32}$  s obzirom na točku  $A$  jednak nuli. Vrijednost sile  $K$  može se naći iz pravokutnog trokuta (sl. 105)

$$K = \frac{F_3 + F_{in3} + F_{inB}}{\cos\psi}. \quad (143)$$

Tlačna sila  $N_{12}$  dobiva se iz vektorske jednadžbe sila koje djeluju na stupajicu:

$$\vec{N}_{32} + \vec{F}_{inB} + \vec{F}_{inA} + \vec{N}_{12} = 0, \quad (144)$$

ili:

$$\vec{K} + \vec{F}_{inA} + \vec{N}_{12} = 0. \quad (145)$$

Iz kosokutnog trokuta na sl. 105 slijedi:

$$N_{12} = \sqrt{K^2 + F_{inA}^2 - 2KF_{inA}\cos(\varphi + \psi)}. \quad (146)$$

Tlačna sila  $N_{41}$  proizlazi iz ravnoteže sila koje djeluju na vratilo:  $\vec{N}_{41} = -\vec{N}_{21}$ . Vrijednost uravnovežujućeg momenta odredi se iz momentne jednadžbe člana 1 s obzirom na točku  $O_1$ . Sila  $N_{21}$  je rezultanta sile  $K$  i  $F_{inA}$ , pa je zato moment sile  $N_{21}$  jednak zbroju momenata tih dviju sila. Osim toga, moment sile  $F_{inA}$  s obzirom na  $O_1$  jednak je nuli, pa je  $M_{N_{21}}^{O_1} = M_K^{O_1}$ . Prema tome je

$$M_u = K h_1 = K r \sin(\varphi + \psi). \quad (147)$$

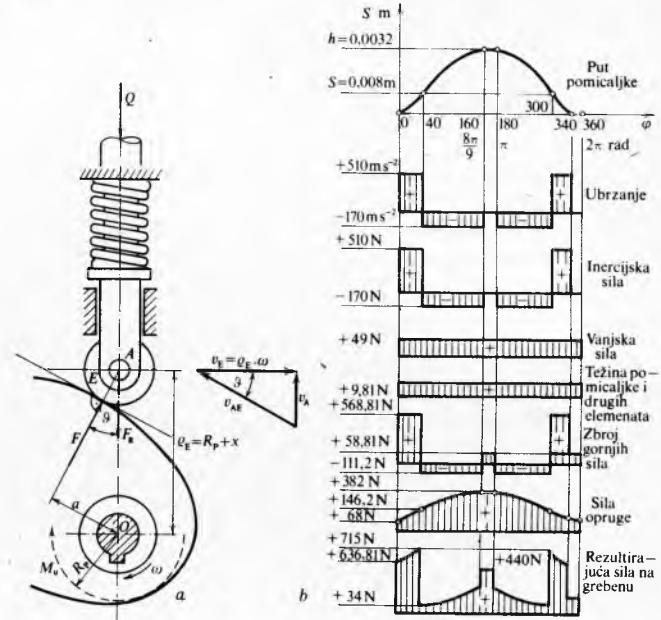
Kad su poznati tlakovi u zglobovima, uz već poznate vanjske sile koje djeluju na pojedini član mehanizma, može se proračunati čvrstoča i izabrati definitivni oblik i dimenzije svakog člana.

Pri proračunu je potrebno uzeti ekstremne vrijednosti djelujućih sile i uravnovežujućeg momenta  $M_u$ . Sve te veličine mijenjaju se prema položaju, odnosno veličini kuta  $\varphi$ . Stoga je potrebno izvršiti analizu za više vrijednosti  $\varphi$  i odabrati maksimalnu vrijednost za svaki od elemenata.

**Grebasti mehanizam.** Slika 106 grafički je prikaz kinetostatičke analize pomoću koje je izabrana tlačna opruga za dinamičko zatvaranje grebenastog mehanizma.

Prepostavljena je kutna brzina rotacije grebena  $\omega = 40 \text{ rad/s}$  i maksimalni hod pomicaljke  $h = 32 \text{ mm}$  za vrijeme od  $\frac{1}{45} \text{ s}$ , čemu odgovara kut zakretanja od  $160^\circ$ , odnosno  $\frac{8}{9}\pi \text{ rad}$ . Ubrzanje u početku podizanja  $a_1 = 510 \text{ m/s}^2$  tri puta je veće od uspoređenja  $a_2 = 170 \text{ m/s}^2$  u završnoj fazi podizanja. Masa pomicaljke i dodatnih dijelova iznosi  $m = 1 \text{ kg}$ , te su ekstremne vrijednosti inercijskih sile  $F_{in1} = 510 \text{ N}$  i  $F_{in2} = -170 \text{ N}$ . Vanjska sila otpora koja djeluje na pomicaljku iznosi  $Q = 49 \text{ N}$ . Zbroj svih navedenih sila (sl. 106 b) pokazuje da tokom jednog dijela gibanja ne bi uopće bilo dodira između grebena i pomicaljke, jer rezultanta sile koje djeluju u tom času na pomicaljku iznosi  $-111,2 \text{ N}$ , tj. usmjerena je prema gore. Ako opruga treba da osigura minimalni tlak od  $+35 \text{ N}$ , u kritičnom trenutku prijevojne točke dijagrama  $s = f(\varphi)$  tlačna sila opruge treba da iz-

nosi ukupno  $146,2 \text{ N}$ . Pretpostavivši da je za početni položaj pomicaljke ( $\varphi = 0$ ) sila prednapona opruge  $68 \text{ N}$ , iz sl. 106b proizlazi da će sila u opruzi porasti od  $68 \text{ N}$  na  $146,2 \text{ N}$  za  $\Delta\varphi = s = 0,008 \text{ m}$ . Elastična je konstanta opruge prema tome:  $k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{146,2 - 68}{0,008} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Maksimalna sila u opruzi za  $\Delta\varphi = h = 32 \text{ mm} = 0,032 \text{ m}$  iznosit će  $68 \text{ N} + 9810 \cdot 0,032 \text{ N} = 382 \text{ N}$ .



Sl. 106. Kinetostatička analiza grebenastog mehanizma. a) shema mehanizma i plan sila, b) dijagrami sile kao funkcija položaja krivuljne ploče

Vertikalna komponenta sile  $F$  kojom greben pogoni pomicaljku treba da bude jednak vertikalnoj sili  $F_R$  kojom je pomicaljka opterećena. Uravnovežujući je moment  $M_u$  prema tome

$$M_u = Fa = \frac{F_R}{\cos\theta} \varrho_E \sin\theta = F_R \varrho_E \tan\theta, \quad (148)$$

gdje je  $\varrho_E$  udaljenost ekvidistantne linije, jednaka zbroju polumjera početnog kruga  $R_p$  i puta  $x$  pomicaljke. Iz plana brzina dobiva se kut tlaka

$$\tan\theta = \frac{v_A}{\varrho_E \omega}. \quad (149)$$

Izraz za  $M_u$  postaje

$$M_u = F_R \frac{v_A}{\omega}. \quad (150)$$

#### Dinamičke jednadžbe kretanja mehanizma

Na osnovi poznatih ili prepostavljenih masa i momenata inercije članova, te na osnovi poznavanja sustava sila koje djeluju na mehanizam, pri projektiranju mehanizma potrebno je unaprijed predviđjeti gibanje jednog ili više pogonskih članova, a time i cijelog mehanizma. Posebno je potrebno analizirati dinamičko ponašanje mehanizma na početku i na kraju gibanja, odnosno za vrijeme ubrzanja i uspoređenja pogonskog člana. U općem slučaju, vanjske sile i momenti koji djeluju na članove mehanizma ovise o položaju članova, o brzini točke u kojoj djeluju vanjske sile, odnosno kutnoj brzini člana te o vremenu. Ako su ove zavisnosti poznate, uvijek je moguće odrediti ili zakon kretanja, ili kinematičke karakteristike članova za više planova mehanizma. Postoji nekoliko analitičkih i grafičko-analitičkih metoda dinamičke analize, od kojih među najvažnije spadaju metoda raspodjele energije i metoda reducirane masa i sila.

**Metoda raspodjele energije** temelji se na Quinnovu teoremu o raspodjeli energije, prema kojem dio ukupne energije mehanizma, koji otpada na pojedini član pri određenom položaju mehanizma, nije ovisan o stvarnoj brzini, odnosno kutnoj brzini člana. Pri primjeni toga teorema proizvoljno se pretpostavi brzina jednog člana da bi se moglo nacrtati plan brzina mehanizma. Član kojemu se brzina uzme kao polazna za određivanje kinematičkih parametara mehanizma naziva se polaznim članom. Polazni član ne mora biti uvijek i pogonski član mehanizma. Općenito, za polazni član obično se uzima rotirajući član, a tek ako u mehanizmu nijedan član ne rotira oko fiksne zglove  $O$ , za polazni član se uzima član s translatornim pravocrtnim kretanjem.

Na osnovi podataka iz plana brzina može se izračunati ukupna kinetička energija mehanizma i energija polaznog člana. Kinetička energija tijela koje se komplanarno giba jest

$$E_{ki} = \frac{m_i v_{si}^2}{2} + \frac{J_{si} \omega_i^2}{2}, \quad (151)$$

te je cjelokupna kinetička energija mehanizma

$$E_k = \sum_1^n \left( \frac{m_i v_{si}^2}{2} + \frac{J_{si} \omega_i^2}{2} \right), \quad (152)$$

gdje je  $m$  masa,  $J$  moment inercije,  $v$  brzina,  $\omega$  kutna brzina.

Omjer kinetičke energije polaznog člana i cjelokupne kinetičke energije mehanizma naziva se koeficijentom raspodjele energije

$$e_p = \frac{E_{kp}}{\sum_1^n E_{ki}}. \quad (153)$$

Iz teorema o raspodjeli energije proizlazi da je za određeni plan mehanizma taj koeficijent neovisan o brzini polaznog člana. Za  $k$  puta veću brzinu polaznog člana, u istom planu mehanizma, brzine i kutne brzine svih ostalih članova povećat će se također  $k$  puta, a njihove kinetičke energije  $k^2$  puta. Ako  $e'_p$  znači koeficijent raspodjele energije za tu povećanu brzinu, bit će

$$e'_p = \frac{k^2 E_{kp}}{\sum_1^n (k^2 E_{ki})} = \frac{E_{kp}}{\sum_1^n E_{ki}} = e_p. \quad (154)$$

Za proračun stvarnih brzina i ubrzanja treba još znati brzinu (ili kutnu brzinu) polaznog člana za jedan plan mehanizma, sustav vanjskih sile koje djeluju na mehanizam i njihovu zavisnost o položaju mehanizma. Na osnovi tih podataka izračuna se mehanički rad sustava sile, obavljen pri prelasku mehanizma iz referentnog položaja, za koji je poznata brzina polaznog člana, bilo u koji drugi zadani položaj. Prema zakonu o očuvanju energije obavljeni rad je jednak promjeni kinetičke energije. Kinetička je energija mehanizma za referentni položaj poznata, pa se može izračunati energija za zadani položaj, a odatle stvarna brzina polaznog člana:

$$\text{klizeći član: } E_{kp} = e_p \sum_1^n E_{ki} = \frac{1}{2} m_p v_p^2, \quad (155)$$

$$\text{rotirajući član: } E_{kp} = \frac{1}{2} \left( m_p v_{sp}^2 + J_{sp} \omega_p^2 \right) = \frac{1}{2} J_{op} \omega_p^2, \quad (156)$$

gdje  $J_{sp}$  označuje moment inercije mase polaznog člana s obzirom na težište  $S$  člana, a  $J_{op}$  moment inercije rotacijskog člana s obzirom na fiksni zglov  $O$ .

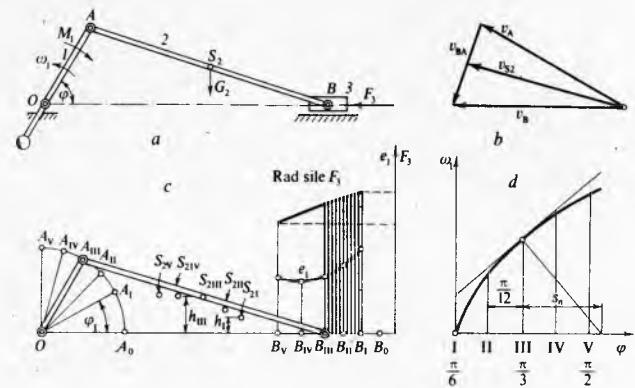
Računajući na taj način brzine, odnosno kutne brzine polaznog člana za više planova mehanizma, može se nacrtati dijagram brzine prema parametru ( $x$  ili  $\varphi$ ), koji definira položaj polaznog člana. Iz dijagrama brzine grafički se dobiju ubrzanja, odnosno kutna ubrzanja polaznog člana.

U motornom mehanizmu (sl. 107) tlačna sila na stup  $F_3$  mijenja se linearno od  $F_1$  u planu I do  $F_v$  u planu V. Mehanizam se počinje gibati u položaju  $\varphi_1$ . Potrebno je naći kutnu brzinu  $\omega_1$  i kutno ubrzanje  $\epsilon_1$  polaznog člana 1 (pogonski član

je klizač 3) za položaj  $\varphi_{III}$ . Promjene kutne brzine  $\omega_1$  kao funkcije kuta  $\varphi_1$  prikazane su dijagramom  $\omega_1 = f(\varphi)$  na sl. 107d. Kutno ubrzanje jest

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}, \quad (157)$$

što znači da je  $\epsilon$  proporcionalno subnormali  $s_n$  u dijagramu  $\omega = f(\varphi)$ . Na osnovi dijagrama  $\omega_1 = f(\varphi)$  zaključuje se da će točnost očitavanja  $\epsilon_1$  biti manja za položaje koji su bliži polaznom položaju I.



Sl. 107. Dinamička analiza motornog mehanizma metodom raspodjele energije. a) stepni mehanizam i vanjske sile, b) plan brzina, c) dijagram sile na stupu  $F_3$ , d) dijagram raspodjele energije  $\omega_1$ , d) dijagram kutne brzine vratila kao funkcije kuta zakretanja

**Metoda reduciranja masa i sile** svodi dinamičku analizu mehanizma na analizu polaznog člana. Uz uvjet dinamičke ekvivalentnosti, treba reducirati mase i momente inercije svih članova mehanizma na polazni član, odnosno član redukcije. Ako se na isti član reduciraju i sve vanjske sile i momente koji djeluju na mehanizam, zadatak se svodi na dinamičku analizu člana redukcije.

Reducirana masa  $m_r$  dinamički je ekvivalentna stvarnim masama svih članova mehanizma ako je njezina kinetička energija jednaka cjelokupnoj kinetičkoj energiji mehanizma. Ako se za polazni član, odnosno član redukcije, odabere član koji se pravocrtno translatorno giba, onda je

$$m_r = \sum_1^n \left[ m_i \left( \frac{v_i}{v_r} \right)^2 + J_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_r} \right)^2 \right]. \quad (158)$$

Izraz (158) vrijedi i kad je redukcija na ekvivalentnu masu u točki  $K$  rotacijskog člana. Tada je  $v_r$  brzina točke  $K$  člana redukcije. Kad član redukcije rotira oko permanentnog zglova, najprikladnije je mase i momente inercije svih članova zamijeniti ekvivalentnim momentom inercije člana redukcije

$$J_r = \sum_1^n \left[ m_i \left( \frac{v_i}{\omega_r} \right)^2 + J_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_r} \right)^2 \right], \quad (159)$$

gdje je  $v_i$  brzina središta mase  $m_i$  člana  $i$ , a  $J_i$  aksijalni moment inercije mase člana  $i$  s obzirom na središte mase. Ako su mase članova prije toga zamijenjene ekvivalentnim koncentričnim masama, u jednadžbama (158) i (159) član sa  $J_i$  jednak je nuli. Omjeri brzina u tim jednadžbama ne ovisi o stvarnim brzinama  $v_r$  i  $\omega_r$  člana redukcije, pa se te brzine mogu proizvoljno pretpostaviti.

Pri reduciranju vanjskih sile na član redukcije, reducirana će sila biti ekvivalentna svim vanjskim silama ako je njezin elementarni rad jednak elementarnom radu svih vanjskih sile. Prema tome će i snaga reducirane sile biti jednaka zbroju snaga svih vanjskih sile

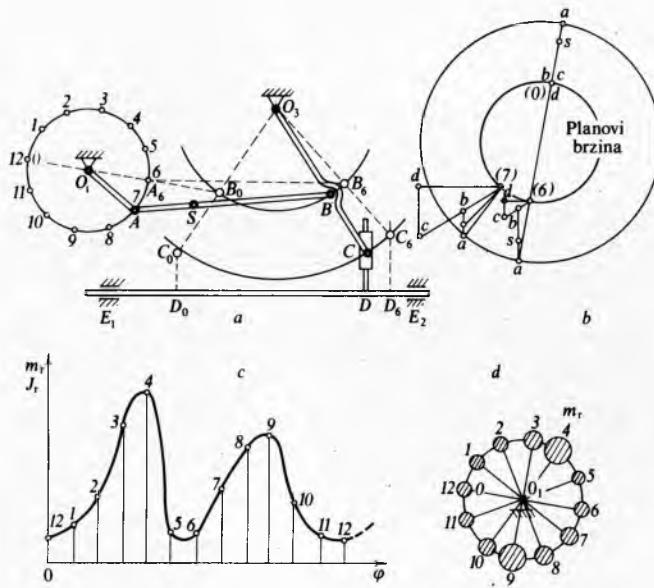
$$F_r = \frac{1}{\cos \alpha_r} \sum_1^n \left( F_i \frac{v_i}{v_r} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{v_r} \right) \quad (160)$$

gdje su  $\alpha_i$  i  $\alpha_r$  kutovi što ih vektor sile zatvara s vektorom brzine točke u kojoj djeluje sila. Ako se vanjske sile redu-

ciraju na ekvivalentni moment sila  $M_r$ , bit će

$$M_r = \sum_1^n \left( F_i \frac{v_i}{\omega_r} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_r} \right). \quad (161)$$

U općem slučaju reducirana sila ovisna je o položaju, brzini i vremenu:  $F_r = F_r(x, v, t)$ , a isto tako i reducirani moment sila je u općem slučaju ovisan o položaju mehanizma, kutnoj brzini i vremenu:  $M_r = M_r(\varphi, \omega, t)$ . Reducirana masa  $m_r$  i reducirani moment inercije  $J_r$  u općem slučaju ovisni su o položaju člana redukcije. Tako je pri složenom zglobnopolužnom mehanizmu (sl. 108a). Mehanizam je nacrtan u položaju 0 (krajnji lijevi položaj klizača D), te u položajima 6 i 7. Za pretpostavljenu kutnu brzinu ručice  $O_1 A$  i za nacrtane položaje mehanizma konstruirani su na sl. 108b planovi brzina.



Sl. 108. Dinamička analiza zglobnopolužnog mehanizma metodom reduciranja masa i sile. a) plan mehanizma, b) planovi brzina za položaje mehanizma 0, 6 i 7, c) dijagram promjene reduciranih masa ovisnih o kutu zakretanja, d) grafički prikaz reduciranih masa za 12 položaja ručice

Ako se pretpostavi da je težište ručice  $O_1 A$  u  $O_1$ , težište poluge  $AB$  u  $S$ , težište njihalice  $O_3 C$  u  $O_3$ , težište klizača  $C$  u  $C$  te težište klizača  $D$  na horizontalnom pravcu kroz oslone  $E_1$  i  $E_2$ , reducirani moment inercije za član redukcije  $O_1 A$  bit će

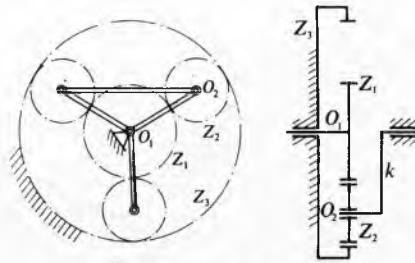
$$J_r = J_{O_1} + J_s \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_s}{\omega_1} \right)^2 + J_{O_3} \left( \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left( \frac{v_C}{\omega_1} \right)^2 + m_5 \left( \frac{v_D}{\omega_1} \right)^2. \quad (162)$$

Dijagram  $J_r = f(\varphi)$  na sl. 108c je u izmijenjenom mjerilu ujedno i dijagram  $m_r = f(\varphi)$  reducirane mase u točki  $A$  ručice  $O_1 A$ , jer je

$$m_r = \frac{J_r}{(O_1 A)^2}. \quad (163)$$

Na sl. 108d grafički su prikazane reducirane mase za svih 12 položaja ručice  $O_1 A$ .

Iako reducirana masa  $m_r$  i reducirani moment inercije  $J_r$  rijetko imaju konstantnu vrijednost, oni su ipak konstantni u upčanim mehanizmima te zglobnopolužnim mehanizmima s konstantnim prijenosnim omjerom pogonskog i gonjenog člana (npr. zglobni paralelogram). U planetarnom mehanizmu (sl. 109)  $J_k$  je moment inercije držača  $k$  s obzirom na os kroz  $O_1$ ,  $J_1$  je moment inercije središnjeg upčanika 1,  $J_2$  je ukupni moment inercije za sva tri satelita, a  $G_2$  ukupna težina satelita; modul zubaca je  $m$ . Član redukcije je središnji upčanik 1. Tada će biti



Sl. 109. Planetarni mehanizam

$$J_r = \frac{G_2}{g} \left( \frac{v_{02}}{\omega_1} \right)^2 + J_1 + J_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_k \left( \frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2. \quad (164)$$

Za taj se tip planetarnog mehanizma dobiva

$$\frac{v_{02}}{\omega_1} = \frac{\omega_k O_1 O_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{2(Z_1 + Z_2)} \cdot \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{mZ_1}{4}, \quad (165)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{Z_1}{2Z_2}, \quad (166)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega_1} = \frac{Z_1}{2(Z_1 + Z_2)}, \quad (167)$$

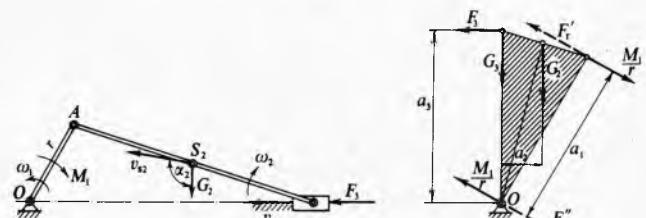
a

$$J_r = \frac{G_2}{g} \cdot \frac{m^2 Z_1^2}{16} + J_1 + J_2 \frac{Z_1^2}{4Z_2^2} + J_k \frac{Z_1^2}{4(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (168)$$

Reducirani moment sila može se naći i pomoću metode reduciranog mehanizma, odnosno teorema Žukovskog (sl. 110). Budući da je snaga reduciranog momenta jednaka zbroju snaga svih vanjskih sila i momenata, to će i sile koje djeluju u homonimnim točkama reduciranog mehanizma (zakrenutog plana brzina), s obzirom na permanentni pol  $O$ , imati momente kojima je zbroj jednak momentu reduciranih sila  $F'_r$  i  $F''_r$ , s obzirom na isti pol. Moment redukcije dobije se iz  $M_r = F'_r \overline{OA} = F''_r r$ . Prema oznakama na sl. 110 bit će

$$F'_r = F_3 \frac{a_3}{a_1} - \frac{M_1}{r} - G_2 \frac{a_2}{a_1}, \quad (169)$$

$$M_r = F'_r r = F_3 \frac{a_3}{a_1} r - M_1 - G_2 \frac{a_2}{a_1} r. \quad (170)$$



Sl. 110. Određivanje reduciranog momenta metodom Žukovskoga

**Dinamičke jednadžbe gibanja člana redukcije.** Reduciranjem svih vanjskih sila i momenata te reduciranjem masa svih članova analiza gibanja mehanizama svedi se na analizu gibanja člana redukcije. Na član redukcije mase  $m_r$  djeluje sila  $F_r$  (ako se član redukcije translatorno giba), odnosno, na član redukcije kojemu je moment inercije  $J_r$ , djeluje moment  $M_r$  (ako član redukcije rotira).

Reducirana masa  $m_r$  mijenja se prema položaju  $x$ , a reducirana sila  $F_r$  ovisi u općem slučaju o položaju  $x$ , brzini  $v$  i vremenu  $t$ . Reducirani moment inercije  $J_r$  ovisi samo o položaju člana redukcije (tj. kutu zakretanja  $\varphi$ ) dok reducirani moment  $M_r$  ovisi u općem slučaju o položaju  $\varphi$ , o kutnoj brzini  $\omega$  člana redukcije i o vremenu  $t$ , sl. 111:  $m_r = m(x)$ ,  $F_r = F(x, v, t)$ ,  $J_r = J(\varphi)$ ,  $M_r = M(\varphi, \omega, t)$ .

Ubrzanje člana redukcije mase  $m_r$  zbog djelovanja sile  $F_r$ , a isto tako i kutno ubrzanje uslijed djelovanja momenta  $M_r$  na

član redukcije kojemu je moment inercije  $J_r$ , dobiva se iz jednakosti priroda kinetičke energije masa i elementarnog rada sile. Prema tome je za član redukcije koji se translatorno giba

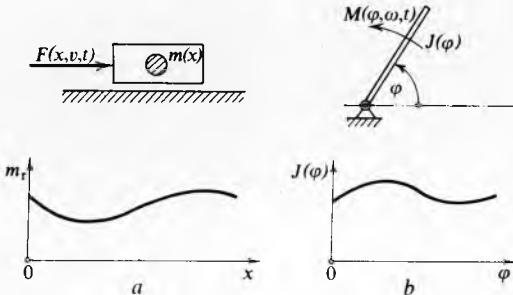
$$d\left(\frac{1}{2}v^2 m(x)\right) = F(x, v, t)dx \quad (171)$$

ili

$$\frac{d}{dx} \frac{v^2 m(x)}{2} = F(x, v, t). \quad (172)$$

Ako se ima na umu ovisnost mase o koordinati  $x$ , deriviranjem se dobiva

$$m(x) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dm(x)}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = F(x, v, t). \quad (173)$$



Sl. 111. Članovi redukcije. a) klizač opterećen reduciranim silom  $F(x, v, t)$  i dijagram promjene reducirane mase  $m_r$  ovisne o položaju  $x$ . b) ručica opterećena reduciranim momentom inercije  $M(\varphi, \omega, t)$  i dijagram promjene reduciranog momenta inercije  $J(\varphi)$  ovisnom o kutu zakretanja  $\varphi$

U toj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda koeficijenti  $m(x)$  i  $\frac{dm(x)}{dx}$  ovisni su o koordinati  $x$ , a član  $F(x, v, t)$  je u općem slučaju funkcija  $x$ ,  $v$  i  $t$ . Za  $m(x) = \text{const.}$  diferencijalna jednadžba (173) svodi se na II Newtonov zakon. Ako član redukcije rotira, bit će

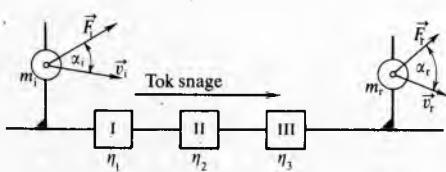
$$\frac{d}{d\varphi} \frac{J(\varphi)\omega^2}{2} = M(\varphi, \omega, t). \quad (174)$$

Derivacija te jednadžbe daje

$$J(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M(\varphi, \omega, t). \quad (175)$$

Za  $J(\varphi) = \text{const.}$  drugi član jednadžbe (175) jednak je nuli i ona se svodi na dinamičku jednadžbu rotacije krutog tijela  $M_F = J\varepsilon$ .

U dinamičkoj analizi mehanizma pomoći metode reduciranja sile i masa gubici zbog trenja uzimaju se u obzir na sljedeći način: složeni mehanizam je sastavljen od višerедno spregnutih mehanizama poznatih stupnjeva djelovanja  $\eta$ . Također je poznat i smjer prijenosa snage s pogonskog dijela na radni dio (sl. 112).



Sl. 112. Reduciranje mase i sile člana te složenog mehanizma, uzimajući u obzir gubitke zbog trenja

Ako se za član redukcije uzme gonjeni član i na njega reducira sila  $F_i$  člana  $i$ , moraju se uzeti u obzir i svi gubici zbog trenja nastalih između člana  $i$  i člana redukcije. Prema sl. 112 snaga  $F_i v_i \cos \alpha_i$  smanjiće se zbog trenja u dijelovima I, II i III na

$$F_i v_i \eta_1 \eta_2 \eta_3 \cos \alpha_i = F_i v_i \eta_i \cos \alpha_i. \quad (176)$$

Prema tome će reducirana snaga biti

$$F_r v_i \cos \alpha_r = F_i v_i \eta_i \cos \alpha_i. \quad (177)$$

S obzirom da su mase reducirane na principu ekvivalentnosti kinetičke energije, bit će

$$F_r = \eta_i F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_r \cos \alpha_r} \quad (178)$$

$$m_r = \eta_i m_i \left( \frac{v_i}{v_r} \right)^2. \quad (179)$$

Ako je član  $i$  vezni član dijela I i dijela II, onda se rad sile, odnosno kinetička energija mase smanjuje zbog trenja samo u dijelovima II i III, te je tada  $\eta_i = \eta_2 \eta_3$ . Ako je tok snage suprotnog smjera, naime, ako je član redukcije pogonski član, onda je

$$F_r = \frac{1}{\eta_i} F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_r \cos \alpha_r} \quad (180)$$

$$m_r = \frac{1}{\eta_i} m_i \left( \frac{v_i}{v_r} \right)^2. \quad (181)$$

Analogan postupak primjenjuje se i pri reducirajućem momenatu inercije masa i momenata sile. Prema tome, metoda reduciranja masa i sile omogućuje da se relativno jednostavno računa i trenje. Dovoljno je svaku reduciranu veličinu množiti s određenim stupnjevima djelovanja  $\eta$ , koji u sebi uključuju sve gubitke zbog trenja, nastale između stvarnog položaja člana, kojemu se masa i sila reducira, i člana redukcije.

### Reguliranje rada mehanizma

U početnoj fazi gibanja mehanizma, brzina (odnosno kutna brzina) člana redukcije raste od nule do brzine koju dostiže u radnoj fazi mehanizma. Zbog toga je gibanje u početnoj fazi nestacionarno. U toj fazi gibanja rad pogonskih sile troši se djelomično na svlađavanje štetnih i korisnih otpora, a djelomično na povećanje kinetičke energije mehanizma. Ako su masa mehanizma i njegova brzina gibanja u radnoj fazi velike, to će i dio energije koji se troši na povećanje brzine biti također velik. Zato, kad god je to moguće, korisni otpori se uključuju tek kad mehanizam dostigne brzinu radne faze, jer se na taj način smanjuje potrebna nominalna snaga pogonskog motora.

U radnoj fazi gibanja brzina se periodično mijenja od maksimalne do minimalne vrijednosti, te je gibanje stacionarno i može ga se izraziti srednjom vrijednošću brzine  $v_{sr} = \frac{1}{2}(v_{max} + v_{min})$ , odnosno kutne brzine  $\omega_{sr} = \frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min})$ .

U toj fazi gibanja sav rad pogonskih sile troši se na savladavanje otpora. Međutim, u dijelu vremena u kojem se mijenja brzina, rad pogonskih sile  $A_p$  razlikuje se od rada sile otpora  $A_{ot}$

$$\Delta E_k = A_p - A_{ot} = J_r \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2} \quad (182)$$

odnosno

$$\Delta E_k = m_r \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2}. \quad (183)$$

To znači da se povećanjem mase  $m_r$  (odnosno momenta inercije  $J_r$ ) može ograničiti promjena brzine na željenu vrijednost. Tako bi se za unaprijed zadane vrijednosti  $\omega_{max}$  i  $\omega_{min}$  i za izračunati iznos promjene kinetičke energije  $\Delta E_k$  mogla izračunati potrebna vrijednost reduciranog momenta inercije

$$J_r = \frac{2 \Delta E_k}{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}. \quad (184)$$

U praksi se promjena brzine ograničava tako da se na vratilu doda teška masa koja se zove zamašnjak.

Periodične promjene brzine (odnosno kutne brzine) pri stacionarnom gibanju nastaju zbog toga što se sile otpora mijenjaju u funkciji vremena ili funkciji položaja radnog člana. U stапnim kompresorima, stapanim sisalcima, strojevima za

kovanje i prešanje, transportnim i sličnim strojevima, sile otpora ovise o položaju radnog člana. Za drobilice, strojeve za mijenjanje tijesta i slično, sila otpora je funkcija vremena, jer predmet obrade vremenom mijenja svoja svojstva. Periodične promjene kutne brzine mogu proizlaziti i iz periodične promjene pogonske sile. Tako je u parnim strojevima i motorima s unutrašnjim izgaranjem, jer čak i pri konstantnoj sili otpora, zbog načina pogona, moraju nastati promjene kutne brzine vratila, pa je potrebno ugraditi zamašnjak.

Ponekad pri stacionarnom gibanju veličine  $A_p$  i  $A_{ot}$  stalno su međusobno jednake pa je promjena kinetičke energije jednaka nuli, tj. brzina (odnosno kutna brzina) ostaje konstantna. Uz takve uvjete, npr., radi agregat sastavljen od elektromotora i ventilatora. Sile otpora u elektromotoru i ventilatoru funkcije su kutnih brzina njihovih osovina, pa će se pri bilo kakvoj promjeni kutne brzine pojavit u sila koja nastoji da uspostavi prvočitno stanje.

Kutna brzina vratila nekog aggregata može se u radnoj fazi mijenjati i zbog vanjskog uzroka. Tako, npr., opterećenje turbogeneratora ovisi o uključivanju i isključivanju potrošača električne energije. Radi održavanja konstantne brzine rotacije primjenjuju se regulatori koji pri promjeni kutne brzine, uslijed promjene opterećenja, smanjuju ili povećavaju pogonsku силu i na taj način održavaju brzinu vrtnje konstantnom.

Karakteristika neravnopravnosti stacionarnog kretanja definirana je koeficijentom neravnopravnosti  $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{sr}}$ . U

većini strojeva koeficijent  $\delta$  relativno je malen i iznosi od 0,003...0,1.

U završnoj fazi gibanja mehanizma brzina se smanjuje od brzine stacionarnog kretanja do nule. U toj fazi mehanizam obično ne obavlja tehnološku funkciju, pa zato ni ne postoje sile korisnog otpora. Nakon što se isključi pogonska sila mehanizam će se gibati sve dok se kinetička energija ne utroši na svaldavanje štetnih otpora (trenje, otpor sredine). Suvremeni mehanizmi imaju velike brzine, te je i kinetička energija na početku zaustavljanja velika. S obzirom da su štetni otpori relativno mali, vrijeme zaustavljanja bi trajalo dugo, ako se ne uključe uređaji za kočenje. Tako bi se moderni valjaonički stan poslije isključenja pogonskog motora, okretao još nekoliko sati kad ga se ne bi kočilo kočnicom.

Stacionarno gibanje je karakteristično za sve mehanizme u sastavu strojeva, osim kad po svojoj funkciji stroj radi kratko-trajno i s prekidima. Tada se mehanizmi kreću nestacionarno.

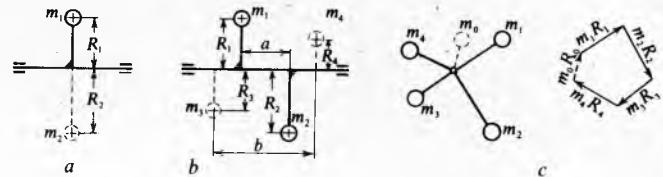
### Uravnoteženje mehanizma

Pri stacionarnom gibanju mehanizma brzine i ubrzanja pojedinih točaka periodički se mijenjaju. Zbog toga su članovi mehanizma podvrgnuti djelovanju inercijskih sile, a kinematički parovi djelovanju dinamičkih tlakova koji se prenose na postolje i na podlogu, pobuđujući i vibracije u postolju i podlozi. Da bi se vibracije izbjegle ili barem svele na manju mjeru, potrebno je uravnotežiti članove mehanizma, odnosno cijeli mehanizam.

Član mehanizma je potpuno uravnotežen ako su i glavni vektor i glavni moment sila inercije jednaki nuli. Za postolje je bitno da je cijeli mehanizam uravnotežen, te da su glavni vektor i glavni moment sila inercije čitavog mehanizma jednaki nuli ili da su barem vrlo mali.

**Uravnoteženje rotirajućih masa.** Posebnu praktičnu važnost ima uravnoteženje rotirajućih masa, naročito uravnoteženje brzo-rotirajućih rotora motora i radnih strojeva. Za njih je dovoljno da je glavni vektor sila inercije rotora jednak nuli, odnosno da se središte masa nalazi na osi rotacije. To se postiže ili olakšavanjem one strane na kojoj leži središte masa ili dodavanjem protutoga na suprotnoj strani. To se odnosi i na koncentrične mase koje leže izvan osi rotacije, udaljene od osi za rotirajući vektor  $\vec{R}$ . Ako je to masa  $m_1$  na udaljenosti  $R_1$  od osi koja rotira kutnom brzinom  $\omega$ , potrebno je u istoj ravnini okomitoj na os rotacije sa suprotno strane od osi dodati masu  $m_2$  na udaljenost  $R_2$ , tako da centrifugalne sile ovih masa budu jednakne  $m_1 R_1 \omega^2 = m_2 R_2 \omega^2$ , odnosno  $m_1 R_1 = m_2 R_2$  (sl. 113a). Na taj se način postiže i statičko i dinamičko balansiranje, jer će središte masa biti na osi rotacije i kad osovina rotira i kad miruje.

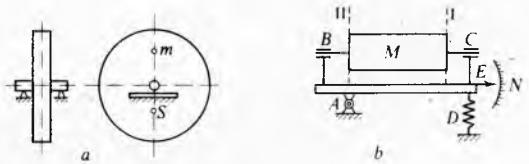
Dvije statički uravnotežene koncentrične mase  $m_1$  i  $m_2$ , ako ne leže u istoj ravnini rotacije, nisu uravnotežene dinamički, jer međusobno jednake centrifugalne sile  $m_1 R_1 \omega^2$  i  $m_2 R_2 \omega^2$  stvaraju par sila te opterećuju osovnu i ležajeve. Dinamičko balansiranje postiže se dodatnim masama  $m_3$  i  $m_4$  u istoj aksijalnoj ravnini, postavljenim tako da pobuduju centrifugalni par sila koji je jednak ali suprotnog smjera od centrifugarnog par sila što ga stvaraju mase  $m_1$  i  $m_2$ . Naime, treba da bude  $m_1 R_1 \omega^2 a = m_3 R_3 \omega^2 b$ , i također  $m_3 R_3 \omega^2 = m_4 R_4 \omega^2$  (sl. 113b).



Sl. 113. Uravnoteženje rotirajućih masa. a jedna koncentrična masa, b dvije koncentrične mase, c četiri koncentrične mase i njihov vektorski poligon

Ako više koncentričnih masa leže u istoj ravnini rotacije (sl. 113c), na osovnu djeluje više centrifugalnih sila. Osovina će biti uravnotežena ako je rezultanta svih centrifugalnih sila jednak nuli  $\sum(m R \omega^2) = 0$ . Dovoljno je da je jednak nuli vektorski zbroj  $\sum(m R)$ , a to će biti onda kad središte svih rotirajućih masa leži u ravnini rotacije. Pomoću poligona vektora dobiva se rezultirajući vektor  $m_0 R_0$ , a time i uravnotežujuća masa  $m_0$  i njezin položaj određen vektorom  $-\vec{R}_0$ . Uravnoteženje se može izvršiti i pomoću više mase kojima vektori  $m \vec{R}$  zatvaraju vektorski poligon.

Rotirajuće mase mogu se i statički i dinamički izbalansirati na uređajima za balansiranje. Pri statičkom balansiranju (sl. 114a) osovina rotora je oslonjena na prizme; nakon nekoliko okretaja rotor će se zaustaviti u položaju statičke ravnoteže pri čemu će se središte masa  $S$  nalaziti ispod osi rotacije. Uredaj za dinamičko balansiranje (sl. 114b) oslanja se na rotacijski zglob.



Sl. 114. Uredaji za balansiranje. a statičko balansiranje, b dinamičko balansiranje

A i oprugu  $D$ , a rotor  $M$  (koji se uravnotežuje), oslonjen je na ležajeve  $B$  i  $C$ . Kazaljka  $E$  pokazuje na skali  $N$  amplitudu oscilacija. Uravnotežujuće mase dodaju se u ravnine I i II. Kad se ravnina II nalazi iznad rotacijskog zgloba  $A$ , protutoga se dodaje u ravninu I i sve dok osciliranje kazaljke ne prestane. Rotor  $M$  se zatim okreće tako da ravnina II dode s desne strane, te se na isti način odredi masa i mjesto drugog protutoga u ravnini II.

**Uravnoteženje ravnih mehanizama.** Svaki ravni mehanizam, kojemu se članovi gibaju u međusobno paralelnim ravninama, može se smatrati sustavom materijalnih točaka kojima središte za vrijeme gibanja mijenja svoj položaj s obzirom na nepomični koordinatni sustav. Ako se sve inercijske sile reduciraju na središte masa  $S$ , glavni vektor sila inercije bit će  $\vec{F}_{in} = -m \vec{a}_s$ , gdje je  $m$  zbroj masa svih pokretnih članova a  $\vec{a}_s$  vektor ubrzanja središta masa. Glavni vektor  $\vec{F}_{in}$  bit će jednak nuli samo ako je ubrzanje  $\vec{a}_s$  jednako nuli, odnosno ako se središte masa kreće pravocrtno konstatnom brzinom. To se ne može ostvariti, jer je gibanje mehanizma periodično, te bi središte masa trebalo mirovati. Glavni moment sila inercije također mora biti jednak nuli, a to znači da moraju biti konstantni centrifugalni momenti inercije  $J_{xz}$  i  $J_{yz}$  pokretnih članova kad je os  $z$  okomita na ravninu gibanja u kojoj leže osi  $x$  i  $y$ .

Ako se pretpostavi da se središte masa svih pokretnih članova zglobnog četverokuta (sl. 115a) nalazi u  $S$ , a moment mase sustava jednak je zbroju statičkih momenata pojedinačnih masa, može se pisati:

$$m_1 \vec{s}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = m \vec{r}. \quad (185)$$

Budući da je

$$\vec{r}_2 = \vec{l}_1 + \vec{s}_2, \text{ i } \vec{r}_3 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{s}_3 \quad (186)$$

dobiva se

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{m_1 \vec{s}_1 + (m_2 + m_3) \vec{l}_1}{m} + \frac{m_2 \vec{s}_2 + m_3 \vec{l}_2}{m} + \\ &+ \frac{m_3 \vec{s}_3}{m} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3. \end{aligned} \quad (187)$$

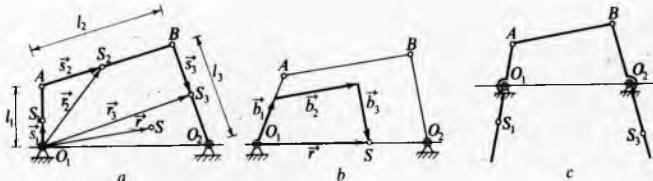
Iz te jednadžbe se vidi da su sva tri vektora na sl. 115b paralelni s pomičnim članovima tokom čitavog vremena gibanja. Ako kraj trećeg vektora  $\vec{b}_3$  leži na postolju  $O_1 O_2$ , središte masa  $S$  neće mijenjati svoj položaj i mehanizam će biti uravnotežen. Tada je

$$\frac{b_1}{l_1} = \frac{b_2}{l_2} = \frac{b_3}{l_3} \quad (188)$$

pa slijedi:

$$m_2 s_2 = -m_3 l_2 \left(1 - \frac{s_3}{l_3}\right), \quad (189)$$

$$m_1 s_1 = \frac{l_1}{l_3} m_3 s_3 - (m_2 + m_3) l_1. \quad (190)$$



Sl. 115. Uravnoteženje zglobnog četverokuta. a) zglobni četverokut s vektorima položaja težišta, b) vektorski uvjet ravnoteže, c) položaji težišta  $S_1$  i  $S_3$  uravnoteženog mehanizma

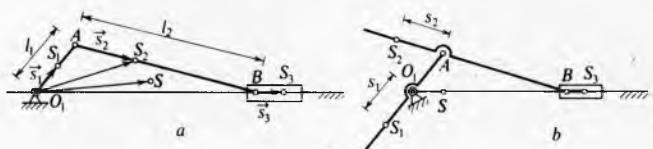
Iz jednadžbe (189) proizlazi da težiste  $S_2$  leži na produžetku člana  $AB$ . Uravnoteženje se može postići promjenom položaja središta masa  $S_3$  člana  $BO_2$ . Prema (189) slijedi:

$$m_3 = m_2 \frac{s_2 l_3}{l_2(s_3 - l_3)} \quad (191)$$

Mase  $m_2$  i  $m_3$  imaju pozitivne vrijednosti, pa  $s_3$  mora biti veće od  $l_3$  i položaj  $S_3$  će biti kao na sl. 115c. Vidi se da će desni dio jednadžbe (190) biti pozitivan samo za relativno veće vrijednosti  $s_3$  i da bi se tada središte masa  $S_1$  nalazilo između zglobova  $O_1$  i  $A$ ; najčešće se središte  $S_1$  nalazi ipak na produžetku člana  $O_1A$ .

Vektorske jednadžbe (185) i (187) vrijede i za koljenastoklizni (motorni) mehanizam (sl. 116a). Težiste  $S$  ležat će na postolju  $O_1B$  i bit će nepomično samo ako su intenziteti vektora  $b_1$  i  $b_2$  jednaki nuli. Odатle proizlaze uvjeti:

$$m_1 s_1 + (m_2 + m_3) l_1 = 0; \quad m_2 s_2 + m_3 l_2 = 0. \quad (192)$$



Sl. 116. Uravnoteženje koljenastokliznog mehanizma. a) koljenastoklizni mehanizam i vektori položaja težišta, b) položaji težišta  $S_1$  i  $S_2$  uravnoteženog mehanizma

Iz ovih jednadžbi slijedi da za uravnoteženje treba položaj središta masa  $S_1$  i  $S_2$  da bude:

$$s_1 = -\frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1, \quad s_2 = -\frac{m_3}{m_2} l_2. \quad (193)$$

Središte masa  $S_1$  i  $S_2$  trebaju se, prema tome, nalaziti na produžecima članova  $O_1A$  i  $AB$ , jer su koordinate  $s_1$  i  $s_2$  negativne (sl. 116b). Koljeno  $O_1A$  može se bez teškoće konstruirati tako da udovoljava tom uvjetu, tim više što je za koljeno  $O_1A$  vezan i zamašnjak, pa se dodatnom ekscentrično postavljenom masom središte masa  $S_1$  može premjestiti u potreban položaj. Mnogo je teže konstrukcijski oblikovati član  $AB$  s produžetkom, te se zato rijetko postiže potpuno uravnoteženje koljenastokliznog mehanizma. Ako se protutateg postavi samo na koljeno  $O_1A$ , ostaju potpuno neuravnotežene tangencijalne sile inercije na pravcu postolja  $O_1B$ .

Pri djelomičnom uravnoteženju toga mehanizma masa  $m_2$  člana  $AB$  zamjenjuje se koncentričnim mase  $m_A$  i  $m_B$ . Masa  $m_A$  dodaje se masi  $m_1$  koljena, nakon čega se odredi veličina potrebnog protutatega. Koncentrične mase  $m_A$  i  $m_B$  trebaju ispuniti slijedeće uvjete:

$$m_A + m_B = m_2, \quad m_A s_2 = m_B (l_2 - s_2). \quad (194)$$

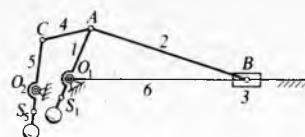
Iz tih jednadžbi proizlaze vrijednosti koncentričnih masa:

$$m_A = m_2 \frac{l_2 - s_2}{2}, \quad m_B = m_2 \frac{s_2}{l_2}. \quad (195)$$

Protutateg  $m_p$  treba postaviti na udaljenosti  $s_p$  od rotacijske osi tako da se ispuni uvjet:

$$m_p s_p = m_1 s_1 + m_A l_1 = m_1 s_1 + m_2 \left(l_1 - \frac{s_2 l_1}{l_2}\right). \quad (196)$$

Višečlani mehanizmi uravnotežuju se po pojedinim zatvorenim konturama koje predstavljaju sastavne dijelove mehanizma. Tako se šesteročlani mehanizam (sl. 117) rastavi na



Sl. 117. Uravnoteženje višečlanog mehanizma

konture  $O_1ABO_1$  i  $O_2CAO_1O_2$  i za svaku se napravi posebna analiza i proračun mase i položaja protutatega na članovima 1 i 5. Protuttag na članu 1 sudjeluje u uravnotežavanju obiju kontura, pa je njegova masa jednaka zbroju protutatega koji proizlaze iz analize uravnoteženja obiju kontura.

LIT.: И. И. Артоболевский, З. Ш. Блох, В. В. Доброловский, И. И. Левитский, Научное наследие П. Л. Чебышева. Академия наук СССР, Москва 1945. — R. Beyer, Kinematics of Getriebesynthese. Springer Verlag, Berlin 1953. — D. Bazjanac, Osnovi teorije mehanizama I. Tehnička knjiga, Zagreb 1954. — K. Rauh, Praktische Getriebelehre. Springer Verlag, Berlin 1954. — J. S. Beggs, Mechanisms. McGraw-Hill, New York 1955. — H. A. Rothbart, Cams. Chapman and Hall Ltd., New York 1956. — R. Kraus, Getriebelehre. VEB-Verlag Technik, Berlin 1956. — C. W. Ham, E. J. Crane, W. L. Rogers, Mechanics of machinery. McGraw-Hill, New York 1958. — Г. Г. Баранов, Курс теории механизмов и машин. Машгиз, Москва 1959. — М. В. Семенов, Структура механизмов. Физматгиз, Москва 1959. — И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. Т. Черкудинов, Синтез плоских механизмов. Физматгиз, Москва 1959. — К. Н. Hunt, Mechanism and motion. John Wiley, New York 1959. — Ю. А. Геронимус, Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. Физматгиз, Москва 1962. — D. Greenwood, Mechanical power transmission. McGraw-Hill, New York 1962. — J. Hirschhorn, Kinematics and dynamics of plane mechanisms. McGraw-Hill, New York 1962. — B. Ilić, Structure of the reduced mechanisms. Univerzitet u Beogradu, Beograd 1962. — С. И. Артоболевский, Теория механизмов и машин. Высшая школа, Москва 1963. — D. Rašković, Основи теорије механизма. Univerzitet u Beogradu, Beograd 1964. — N. P. Chironis, Mechanisms, linkages and mechanical controls. McGraw-Hill, New York 1965. — В. Пиц, Mechanizmi. Навчена knjiga, Beograd 1966. — Академија наука СССР, Передаточни механизми. Сборник статија, Наука, Москва 1971. — Академија наука СССР, Механика машин, Вип. 27—36.

Наука, Москва 1971 и 1972. — H. I. Колчин, Механика машин. Машиностроение, Москва 1971. — B. A. Зиновьев, Курс теории механизмов и машин. Наука, Москва 1972. — Z. Sapunar, Mehanizmi I i II. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1972. — H. H. Mabie, F. W. Ocvirk, Mehanizam i dinamika maština. Vuk Karadžić, Beograd 1973. — Академија наука СССР, Анализ и синтез механизама. Наука, Москва 1974. — B. A. Светличкић, Случајни колебания механических систем. Машиностроение, Москва 1976.

Z. Sapunar

**MELIORACIJA**, mijenjanje fizikalnih svojstava tla da se poboljša plodnost, odnosno da se osigura normalan rast i razvoj biljaka. Melioracija tla obuhvaća odvodnjavanje i navodnjavanje tla. Potreba odvodnjavanja i navodnjavanja ovisi o svojstvima tla i o vodi u tlu.

### SVOJSTVA TLA I VODA U TLU

Svojstva tla ovise o mehaničkom sastavu tla, njegovoj strukturi, te pojavi vode u njemu.

**Mehanička svojstva tla.** Tlo se sastoji od čvrste, tekuće i plinovite faze. Čvrstu fazu čine mineralne, mineralno-organske i organske čestice različite usitnjenosti. Čestice se prema veličini svrstavaju u kamen, šljunak, krupni i sitni pjesak, prah i glinu (tabl. 1).

Tablica 1  
FRAKCIJE MEHANIČKIH ČESTICA U TLU

Kamen	> 20 mm
Šljunak	2...20 mm
Krupni pjesak	0,2...2 mm
Sitni pjesak	0,02...0,2 mm
Prah	0,002...0,02 mm
Gлина	< 0,002 mm

Krupni pjesak ima veliku propusnost i ne može zadržavati vodu, nije vezan, neplastičan je, pa tlo sastavljeno pretežno od krupnog pjeska nije pogodno za poljoprivredu. Sitni pjesak pun je sitnih pora, vrlo lako propušta vodu, nije plastičan, ne lijepi se i rasipa se u suhom stanju. Prah može primiti veće količine vode, dobro propušta vodu, ne bubri, malo je plastičan, omogućuje kapilarni uspon vode, vezan je u suhom stanju. Gлина praktički ne propušta vodu, vrlo je plastična, ljepljiva je i bubri u vlažnom, a kompaktna je i tvrda u suhom stanju.

Mehanički sastav tla može se klasificirati i prema udjelu čestica manjih od 0,02 i manjih od 0,002 mm (tabl. 2). Često se mehanički sastav prikazuje trima komponentama, tj. udjelima pjesaka, praha i gline.

Tablica 2  
KLASIFIKACIJA MEHANIČKOG SASTAVA TLA  
PREMA UDJELU SITNIH ČESTICA

Vrsta tla	Udj. čestica (%)	
	< 0,02 mm	< 0,002 mm
Pjesak	< 10	< 4
Ilovasta pjeskulja	10...20	4...9
Pjeskovita ilovača	20...30	9...15
Ilovača	30...40	15...20
Teža ilovača	40...50	20...25
Ilovasta gлина	50...75	25...36
Gлина	> 75	> 36

Pomoću mehaničkog sastava tla mogu se procijeniti mnoga svojstva tla, pa se ispitivanju mehaničkih svojstava tla za potrebe odvodnjavanja posvećuje posebna pažnja. Taj sastav daje osnovne podatke o genezi tla, njegovu bonitetu i zračno-vodenom režimu u tlu.

Utjecaj mehaničkog sastava tla na njegova svojstva prikazuje tabl. 3. Na temelju mehaničkog sastava tla posredno se

utvrđuje količina fiziološki neaktivne vode, te razmaka i dubine drenažnih rovova.

Tablica 3  
UTJECAJ USITNJENOSTI TLA NA NJEGOVA SVOJSTVA

Vrlo usitnjeno tlo (gлина)	Srednje usitnjeno tlo prah i sitni pjesak	Slabo usitnjeno tlo (pjesak)
Slaba propusnost vode		Dobra propusnost vode
Velika kohezija		Slaba kohezija
Visoki sadržaj hranična		Neznatna količina hranična
Slaba biološka aktivnost		Jaka biološka aktivnost
Tesko obradiva tla		Lako obradiva tla
Slabo ispiranje		Jako ispiranje
Znata mogućnost zadržavanja vode		Neznatna mogućnost zadržavanja vode
Dobra kemijska svojstva		Slaba kemijska svojstva
Loša fizička svojstva		Dobra fizička svojstva
Tla pogodna za livade i pašnjake	Tla pogodna za oranine s mogućnošću utjecaja na kemijska i fizička svojstva	Tla pogodna za uzgoj šuma

**Struktura tla.** Da bi se dobila što potpunija slika o tlu, potrebno je poznavati i strukturu tla. Pod struktrom tla razumijeva se način aglomeriranja čestica, čime nastaju tzv. strukturni agregati. Oni mogu imati različite oblike i veličine, pa se govori o strukturnim karakteristikama tla. Tlo se djelovanjem različitih faktora drobi i raspada. Ako se tlo ne raspada u strukturne agregate, govori se o bestrukturnom tlu. Takva su ona tla koja su sastavljena od različitih vrsta pjesaka jer se oni ne vežu u strukturne aggregate. Takva su i tla s velikim sadržajem vlažne gline koja imaju homogeni sastav bez strukturnih agregata.

Struktura tla može biti prirodna i umjetna. Prirodna je struktura nastala djelovanjem prirodnih faktora, a umjetna djelovanjem čovjeka (npr. obradom zemljišta).

Strukturni agregati nastaju uglavnom *obaranjem* (flokulacijom), *lijepjenjem* (adhezijom) i *cementacijom*. Na razvitan strukturnih agregata najviše utječe neki sastojci humusa, vapno i spojevi željeza, koji djeluju kao cement, te sitnozrne strukture vežu u veće nakupine. Na razvitan strukturnih agregata mnogo djeluje i vegetacija koja korijenjem rahli i zbiji tlo, tvori kanaliće, te svojim izlučinama i ostacima djeluje na fizičke i kemijske promjene sastava tla. Tako se stvaraju sitni agregati, mrvice i grudice u tlu. Smatra se da struktura korijenja trava mnogo utječe na poboljšanje strukture tla.

Strukturni agregati mogu se prema veličini svrstati u četiri skupine: *mikrostrukturni* (promjeri manji od 0,25 mm), *mezostrukturni* (promjer 0,25...2 mm), *makrostrukturni* (promjer 2...50 mm) i *megastrukturni* (promjer veći od 50 mm) agregati.

Prema obliku strukturni se agregati svrstavaju u sljedeće skupine: a) kockasti ili kuboformni agregati koji su podjednako razvijeni u smjeru svih triju osi, b) stupasti ili prizmoformni agregati koji su razvijeni u smjeru vertikalne osi i c) plosnati ili lamoformni agregati koji su razvijeni u smjeru dviju horizontalnih osi. Unutar tih skupina razlikuje se više grupa strukturnih agregata prema njihovoj duljini u smjeru karakterističnih osi.

Pri pedološkim istraživanjima tala koja se žele meliorirati treba svakako utvrditi stabilnost strukture tla. Ta stabilnost ovisi o postojanosti strukturnih agregata u vodi. Ona je često različita i u različitim profilima istog tla. Strukturni agregati nekih tala imaju veliku stabilnost i nakon što su dugo u vodi, dok se oni drugih tala u vodi veoma brzo raspadaju u mikrostrukturne aggregate. Stabilnost strukturnih agregata ovisi o faktorima koji uvjetuju cementaciju i o faktorima koji djeluju kao sredstva za disperziju (peptizatori). Humusne tvari, kalcij, aluminij i trovalentno željezo povećavaju stabilnost strukture, a mehanička obradba i peptizatori smanjuju tu stabilnost.