Apscisne udaljenosti između detaljnih točaka odabiru se prema širini korita i prema nepravilnosti dna, a iznose od 0,5···5,0 m. Ekipa za snimanje sastoji se od jednog ili dva stručnjaka i nekoliko pomoćnika. Pomoćnici održavaju čamac na smjeru profila i pokreću ga od jedne prema drugoj obali. Na određenim razmacima jedan od pomoćnika mjeri dubinu vode i diktira očitanja na čeličnom užetu O_i i dubinu h_i, što se unosi u zapisnik mjerenja.

Umjesto održavanja čamca veslima, može se razapeti između obala posebno uže pomoću kojeg se upravlja čamcem. To se primjenjuje kad je korito usko a rijeka brza, pa je zadržavanje čamca veslima otežano.

Na velikim i dubokim rijekama te kad se snimaju profili jezera i mora mjere se dubine s ehosonderom (v. *Hidrometrija*, TE 6, str. 418).

Točnost mjerenja dubine iznosi od ± 10 do ± 20 cm.

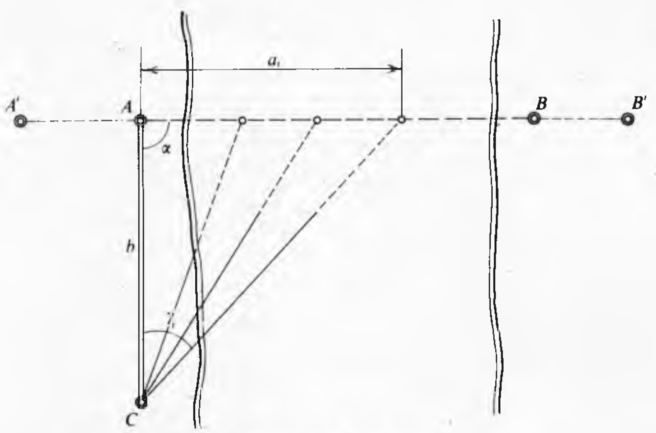
Mjerenje presijecanjem pravaca. Na širokim rijekama otežano je postavljanje čeličnog užeta. Ono se, naime, ne može dovoljno zategnuti. Tada se za položajno određivanje detaljnih točaka profila primjenjuje metoda mjerenja presijecanjem pravaca.

Na obali rijeke stabilizira se i izmjeri baza $AC = b$ i kut α (sl. 64). Čamac se odoka utjeruje u pravac profila AB pomoću signaliziranih točaka AA' ili BB'. U momentu mjerenja dubine u točki C teodolitom se izmjeri kut γ_i. Udaljenosti a_i od krajnje točke profila A do pojedinih detaljnih točaka dobivaju se prema formuli:

$$a_i = \frac{b \sin\gamma_i}{\sin(\alpha + \gamma_i)}. \qquad (131)$$

Kad je baza okomita na poprečni profil ($\alpha = 90°$), a_i se izračunava iz formule

$$a_i = b \tan\gamma_i. \qquad (132)$$



Sl. 64. Mjerenje s jednim teodolitom

Na brzim rijekama čamac je teško održavati na pravcu AB. Za položajno određivanje točaka tada su potrebna dva instrumenta postavljena na krajevima baze A i C. Za svaku točku profila (*1*, *2*,... *i* ...) simultano se mjere kutovi α_i i γ_i (sl. 56). Detaljne se točke određuju presijecanjem. S obzirom na potrebnu točnost presijecanje se ne određuje numeričkim već grafičkim postupkom. Na plan se nanose izmjereni kutovi α_i i γ_i, a u presjeku se dobiva položaj detaljne točke.

U ekipi za snimanje potrebna su tri stručnjaka: jedan u čamcu i dva na obali za mjerenje kutova α_i i γ_i. Kao signalna značka za presjek služi vertikalni signal na čamcu ili jarbol. U trenutku mjerenja dubine pomoćnik u čamcu daje znak opservatorima na obali da izmjere kutove.

Snimanje tahimetrijskom metodom. Uspješno se primjenjuje na plitkim rijekama koje se mogu pregaziti kad se tahimetrijska letva može postaviti neposredno na dno (sl. 60). Primjena je moguća i za široke mirne rijeke s malom brzinom toka. Sa stajališta na obali mjere se orijentacijski kutovi i duljine na tahimetrijskoj letvi pričvršćenoj za jarbol čamca. Kote točaka dobivaju se mjerenjem dubina. Potrebno je raspolagati većim, stabilnijim čamcem, jer njegovo njihanje mnogo otežava očitavanje podjele na vertikalnoj letvi. Umjesto uobičajenog tahimetrijskog instrumenta, određenu prednost imaju daljinomjeri s bazom u stajalištu.

Uzdužni profil rijeke. Na osnovi poprečnih profila, izmjerenih padova razine vode i snimljenih obala izrađuje se uzdužni profil rijeke. Za razliku od profila prometnica, uzdužni profil rijeke sadrži znatno više elemenata. U profil se unose: stacionaža (obično se računa od ušća rijeke idući po osi riječnog korita), kote dna riječnog korita (maksimalne dubine), kote radnih razina vode s datumom niveliranja, kote razina vode reduciranih na stanje u određenom trenutku, maksimalni vodostaji zabilježeni na vodomjernim stanicama, nagibi razine vode, brzine vode, kote obala, obrambenih nasipa i sl., te stacionaže i kote vodomjernih stanica, objekata na rijeci itd. Svaki uzdužni profil ne mora sadržavati sve navedene elemente. Radi preglednosti može se za istu rijeku izraditi više profila, s različitim sadržajem i podacima, koji ne moraju biti u istom mjerilu.

Zbog velike razlike u dimenzijama između horizontalnih i visinskih odnosa grafički prikaz uzdužnog profila izrađuje se u različitim mjerilima za horizontalnu i vertikalnu os. Za izbor horizontalnog mjerila najmjerodavniji je prikaz svih karakterističnih točaka dna riječnog korita. Te se točke redovito nalaze na manjem razmaku, a po visini variraju više od ostalih točaka profila. Tako se i izbor vertikalnog mjerila redovito temelji na visinskim razlikama dna korita. Izbor mjerila općenito ovisi o nagibu razine vode rijeke i o svrsi za koju se profil izrađuje.

Uzdužni prifili prikazuju se u mjerilima: horizontalnom od 1:5000 do 1:500000 i vertikalnom od 1:50 do 1:1000.

LIT.: *O. Sarrazin, H. Oberbeck*, Priručnik za obeležavanje krivina sa prelaznicama ili bez njih na železnicama, drumovima i kanalima. Subotica 1955. — *M. Janković*, Inženjerska geodezija II. Tehnička knjiga, Zagreb: II dio, 1966; I dio, 1968. — *B. Žnideršić*, Priručnik za obeležavanje prelaznice oblika klotoide pravouglim koordinatama. Građevinska knjiga, Beograd 1966. — *Č. Cvetković*, Primena geodezije u inženjerstvu. Građevinska knjiga, Beograd 1970. — *Н. Н. Лебедев*, Курс инженерной геодезии. Недра, Москва 1970. — *Г. Л. Левчик*, Курс инженерной геодезии. Недра, Москва 1970. — Справочник геодезиста, книга 2. Недра, Москва 1975.

Z. Narobe

MJERNA NESIGURNOST, podatak u mjernom rezultatu kojim se iskazuje s kolikom je nesigurnošću poznata izmjerena vrijednost fizikalne veličine. Mjerenje je eksperimentalni postupak kojim se doznaje vrijednost fizikalne veličine. Mjeriti se mogu samo jednoznačno definirane fizikalne veličine (v. *Metrologija, zakonska*), i to prema mjernoj jedinici ili prema nekoj drugoj jednoznačno definiranoj referentnoj vrijednosti mjerene fizikalne veličine. Svaki se mjerni rezultat (izmjerena vrijednost fizikalne veličine) doznaje s nekom pogreškom, tj. svaki je rezultat više ili manje nesiguran.

Iskazivanje mjernog rezultata. Radi jedinstvenosti mjeriteljskog sustava državni standardi (DIN, ГОСТ, BS itd.) propisuju *način iskazivanja nesigurnosti.* Kao obvezni sastavni dijelovi mjernog rezultata iskazuju se: *a*) izmjerena i standardnim postupkom obrađena vrijednost mjerne fizikalne veličine x, *b*) mjerna nesigurnost (pogreška) $U(x)$ iskazana svojom donjom i gornjom granicom, *c*) statistička sigurnost (vjerojatnost) P da se naznačena nesigurnost nalazi unutar iskazanih granica (v. jednadžbe (7) i (8)). Npr., izmjerena toplinska provodnost ($x = \lambda$) neke izolacijske tvari pri naznačenoj srednjoj temperaturi, vlažnosti i tlaku iznosi

$$\lambda = 59\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{K\,m}}, \qquad U(\lambda) = \pm 3\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{K\,m}}, \qquad P = 0{,}68.$$

Mjerni se iskaz može napisati i u obliku

$$\lambda = (59 \pm 3)\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{K\,m}}, \qquad P = 68\%,$$

odnosno s pomoću relativne nesigurnosti $u(x) = U(x)/x$ u oblicima:

$$\lambda = 59\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{Km}}, \qquad u(\lambda) = \pm\, 0{,}05 = \pm\, 5 \cdot 10^{-2} = \pm\, 5\%,$$

$$P = 0{,}68 = 68\%;$$

$$\lambda = 59\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{Km}} \cdot (1 \pm 5 \cdot 10^{-2}), \qquad P = 0{,}68.$$

Ako granice nesigurnosti nisu simetrične, one se moraju iskazati pojedinačno. Npr., izmjerena brzina ($x = v$) nekog tijela iznosila je

$$v = 121\ \mathrm{m/s}, \qquad U(v) = (-1 \cdots +2)\ \mathrm{m/s}, \qquad P = 0{,}99.$$

Za točnija i vrhunska mjerenja neki državni standardi zahtijevaju podrobnije mjerne iskaze. Tako se mjerna nesigurnost iskazuje sljedećim svojim dijelovima: donjom i gornjom granicom sustavne mjerne pogreške, statističkom sigurnošću tih granica, standardnim odstupanjem (srednjom kvadratnom pogreškom) i standardnom aproksimacijom funkcije raspodjele slučajne mjerne pogreške. Pri tom se upotrebljavaju sljedeće raspodjele: normalna (Gaussova), trokutna (Simpsonova), trapezna, jednolika, prva antimodalna, druga antimodalna i Rayleighova. Npr., ponavljanim mjerenjima protoka i obradbom rezultatâ dobio se konačan rezultat u obliku: $10{,}75\ \mathrm{m^3/s}$, sustavna pogreška od $+0{,}15$ do $+0{,}23\ \mathrm{m^3/s}$ uz statističku sigurnost 0,95, standardno odstupanje $0{,}20\ \mathrm{m^3/s}$, jednolika raspodjela. Postoje i drugi standardizirani iskazi rezultata sigurnijih mjerenja. U svim tim iskazima razumijeva se pod sustavnom mjernom pogreškom procijenjena *preostala sustavna pogreška*, tj. onaj dio sustavne pogreške koji se nije mogao odrediti i uzeti korekcijom (popravkom) u obzir prilikom standardne obradbe mjernog rezultata. Preostala sustavna pogreška uzrokuje da je mjerni rezultat neispravan (netočan, neistinit).

Mjere i mjerila obilježavaju se prema DIN pojmom *relativna pogreška* koji se definira jednadžbom

$$\text{relativna pogreška} = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{x}{x_0} - 1. \tag{1}$$

Kod *mjera* je x naznačena vrijednost koju mjera utjelovljuje (*mjera* je tako izrađeno tijelo da jedno od njegovih svojstava utjelovljuje i pohranjuje stanovitu vrijednost neke fizikalne veličine), a x_0 je prava (istinita, stvarna) vrijednost. Npr., na trgovačkom je utegu naznačena njegova masa $m = 500\ \mathrm{g}$. Kontrolnim mjerenjem pomoću laboratorijskog utega i odgovarajuće vage ustanovljena je istinita masa trgovačkog utega $m_0 = 499{,}85\ \mathrm{g}$. Pogreška njegove mase iznosi $m - m_0 = 0{,}15\ \mathrm{g}$, pa mu je netočnost (relativna pogreška) $0{,}15/500 = 3 \cdot 10^{-4} = 0{,}03\%$.

U *pokaznih mjerila* je x u jednadžbi (1) izmjerena vrijednost, tj. ona koju mjerilo pokazuje svojom kazaljkom, svjetlosnom značkom, bridom, meniskusom stupca tekućine itd., a x_0 je prava vrijednost. U nekim se pak primjerima (VDE 0410) pod relativnom pogreškom mjerila razumijeva izraz $(x - x_0)/x_e$, u kojemu je x_e najveća (krajnja) vrijednost mjerila. Ako bi se mogla pojaviti dvojba, treba navesti što se razumijeva pod relativnom pogreškom, odnosno točnošću (DIN 1319).

Izvori pogrešaka. Prema porijeklu pogreške se grubo svrstavaju u tri skupine: propusti (grube pogreške), sustavne pogreške i slučajne pogreške. *Propusti* nastaju zbog nedovoljne pozornosti mjeritelja, njegova nemara ili manjkava stručnog znanja, zbog izbora neprikladna postupka, zbog previda pri istraživanju izvora pogreške itd. Mogućnost propustâ jedan je od razloga zašto se mjerenja ponavljaju. Ako se u mnoštvu tako dobivenih rezultata jedan bitno razlikuje, postoji snažna sumnja da je grubo pogriješeno. Propust se čini npr. kad se pri očitavanju teodolita pogriješi za 10 minuta ili čak 100 stupnjeva, a pri viziranju na crkvu sa dva tornja može se grubo pogriješiti tako što se vizira na pogrešan toranj, a ne na onaj koji je odabran za trigonometrijsku točku. Kemijski mjeritelj može učiniti pogrešku, propust, ako ne korigira obujam odmjernih posuda s obzirom na promjene temperature, ako zanemari uzgon itd. Mjerni rezultati s grubim pogreškama ne uzimaju se u obzir pri obradbi mjernih rezultata, već se odbacuju. No, to ne valja učiniti naprečac, već takav rezultat treba prije ispitati, tj. pokušati ustanoviti zašto je toliko pogrešan. Tako se često i brzo može otkriti uzrok i iznos grube pogreške, pa se korekcijom taj rezultat pri obradbi može čak iskoristiti ravnopravno s ostalim rezultatima ponovljenih mjerenja.

Sustavne pogreške u prvom redu nastaju zbog nesavršenosti mjernog postupka, mjera i mjernih uređaja, a u drugom redu zbog utjecaja poremećajnih veličina okoliša i osobnog utjecaja mjeritelja. Većina sustavnih pogrešaka ima stalnu vrijednost, a time i određeni predznak. Zato se pri obradbi mjernih rezultata takve odredljive (obuhvatljive) sustavne pogreške mogu uzeti u obzir korekcijom. Ima, međutim, i takvih sustavnih pogrešaka koje je vrlo teško ili čak nemoguće odrediti. Takve se preostale sustavne pogreške *procjenjuju* na temelju dodatnih mjernih postupaka. To procjenjivanje sigurno je najteži mjeriteljski posao; olakšava ga to što su neodredljive sustavne pogreške redovito stalne vrijednosti i predznaka. Posljedica je sustavnih pogrešaka *neispravan* (netočan, neistinit) rezultat.

Tri su glavne skupine sustavnih pogrešaka. Izvor je *metodičnih* sustavnih pogrešaka mjerni postupak. Takve sustavne pogreške nastaju, npr., pri mjerenju toplinske provodnosti izolatora pločastim uređajem ako temperaturno polje nije ustaljeno, ako jednadžba za gustoću toplinskog toka ne obuhvaća raspor između grijala i zaštitnog grijala itd. Drugi izvor jesu sustavne *pogreške mjernih uređaja.* Zbog njih geodeti moraju korigirati pogrešne duljine svojih mjernih traka, nejednolike podjele limba itd., a kemičari moraju pri analitičkom vaganju pronaći korekciju zbog odavno nebaždarenih utega, pomaka ahatnih ležajnih prizama, nepravilnog položaja vage itd. Sustavna pogreška mjernih uređaja može biti *progresivna* ako raste s vrijednošću mjerene veličine, npr. ona se gomila pri zakretanju mikrometarskog vijka, pri graviranju crtica na skalama instrumenata itd. *Mjesna* sustavna pogreška uređaja pojavljuje se u pojedinim intervalima mjernog područja, a *periodička* nakon približno jednakih vremenskih razmaka itd. Uz te tzv. unutarnje sustavne pogreške mjernih uređaja postoje i tzv. vanjske koje uzrokuju mnogobrojne vanjske i okolišne poremećajne fizikalne veličine. Tako, npr., elektrotehničari moraju pri točnijim mjerenjima uzeti u obzir djelovanje niza veličina; to su npr. oblik napona, termonaponi, viši harmonici, okolno magnetno i električno polje, kapacitet prema zemlji, vlažnost zraka itd. Treći glavni izvor sustavnih pogrešaka tvore *osobne pogreške* mjeritelja uzrokovane njegovim psihičkim i fiziološkim nedostacima. Npr., pri kemijskoj analizi neki mjeritelj nema dovoljnu sposobnost opažanja promjene boje u toku titriranja, a neki geodet uvijek navizira malo udesno. Neki treći mjeritelj prilikom procjenjivanja vrijednosti između susjednih crtica na skali nehotice izbjegava neke rezultate, četvrti je pak sklon takvim rezultatima ponovljenih mjerenja koje je već utvrdio itd. Dva su bitna uzroka velikim osobnim pogreškama: nedovoljna sklonost čovjeka za mjerenje i pomanjkanje želje za točnim očitavanjem.

Metodične sustavne pogreške i sustavne pogreške mjernih uređaja mogu se uspješno odrediti i time korigirati mjerni rezultat ako se temeljito poznaju značajke mjerne metode, mjernog uređaja i mjernog objekta. Ako djelovanje pojedinih utjecajnih fizikalnih veličina nije dovoljno poznato, treba ih utvrditi *eksperimentalno* tako da se namjerno mijenja svaka od njih i registrira učinak na mjerni rezultat. Iz tog učinka može se otkriti što valja učiniti da bi se pogreške smanjile. Sustavne se pogreške, naime, pokoravaju prirodnim zakonima i zato se njihov utjecaj na mjerni rezultat može uzeti u obzir naknadno. U vrhunskom mjeriteljstvu nije rijetko da se sustavne pogreške korigiraju i desetke godina pošto su provedena mjerenja (npr. gravimetrijska mjerenja, strujna vaga itd.), jer je tek nakon tolika vremena otkriveno njihovo postojanje, njihovi uzroci i zakonitosti.

Slučajne mjerne pogreške rezultat su promjena koje za vrijeme mjerenja nastaju u mjerilima, mjerama, mjernom objektu, okolišu i u mjeritelju. Slučajne se pogreške mogu prepoznati *ponavljanjem* mjerenja u *jednakim okolnostima.* Ako, naime, isti mjeritelj uzastopce mnogo puta jednako brižljivo mjeri istu stalnu fizikalnu veličinu istim mjernim uređajem i pod istim vanjskim utjecajima, on će ipak dobivati rezultate koji će se međusobno razlikovati. Ti se rezultati gomilaju, odnosno rasipaju oko neke vrijednosti. Razlike su posljedica brojnih međusobno nezavisnih uzroka koji prilikom svakog od ponovljenih mjerenja djeluju na drugačiji način. Za mjeritelja te su međusobne razlike neobjašnjive, nepredvidljive, neodredljive i neizbježne, pa se zato smatraju slučajnima. Posljedica je tih slučajnih razlika *nepouzdanost* (nepreciznost) mjernog rezultata.

Nepouzdanost i neispravnost (netočnost) mjernog rezultata, kao posljedica djelovanja slučajnih i sustavnih pogrešaka, može se ilustrirati gađanjem puškom u metu. Može se dogoditi da se i nepouzdanom puškom otprve pogodi u središte mete. No, ako treba taj rezultat ponoviti sljedećim metkom, pa onda mnogim drugim mecima, to će rjeđe uspjeti puškom za koju se kaže da je neprecizna. Baš zbog rasipanja pogodaka u širokom krugu puška je obilježena kao neprecizna; naprotiv, pogoci precizne puške gomilat će se tijesno oko središta mete. Ali, ako puše jak i stalan poprečni vjetar ili ako je mušica puške malo zakrenuta, i pogoci precizne puške bit će odmaknuti od središta, ali će se svi gomilati na nekom dijelu mete. To je ilustracija utjecaja sustavne pogreške, tj. sustavne poremećajne veličine, stalnog vjetra, pomaknute mušice itd. Odstupanje gomile pogodaka od središta mete ilustracija je netočnosti gađanja. Velika rasipanja pogodaka, toliko velika da se na meti ne razabire što je posljedica slučajnih a što sustavnih utjecaja, mogu nastati ako je vjetar promjenljiv ili ako se između pojedinih gađanja nasumce pomiče mušica. Tada cjelokupno gađanje nije izvedeno u *jednakim okolnostima*.

Nepouzdanost srednje vrijednosti. Da bi se doznao što sigurniji mjerni rezultat, fizikalna se veličina mjeri više puta pod jednakim okolnostima. To su tzv. *ponovljena* ili *prekobrojna mjerenja*, jer se mjeri više puta nego što je teoretski potrebno. Rezultat je ponovljenih mjerenja n međusobno nezavisnih vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. Svaka od tih vrijednosti određena je pod jednakim okolnostima, pa zato svaka od njih jednako utječe na *srednju vrijednost* (aritmetičku sredinu) $\bar{x}$ kao najsigurniju procjenu *istinite vrijednosti* mjerene veličine x. Srednja se vrijednost izračunava jednadžbom

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i. \quad (2)$$

Kad postoji mnogo mjernih rezultata, srednja vrijednost može se odrediti pomoću jednadžbi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum f_i x_i, \qquad \sum f_i = n, \quad (3)$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum f_i (x_i - x_0), \quad (4)$$

gdje je f_i frekvencija vrijednosti x_i, a x_0 po volji odabrana vrijednost, ali svakako u blizini očekivane srednje vrijednosti.

Razlika između srednje $\bar{x}$ i istinite vrijednosti x mjerene fizikalne veličine iščezla bi ako bi brojnost ponovljenih mjerenja n bila beskonačno velika. Budući da je to nemoguće provesti, a nije ni prijeko potrebno, razlika $x - \bar{x}$ procjenjuje se teorijom slučajnih pogrešaka. Za normalnu (Gaussovu) raspodjelu slučajnih pogrešaka *procjena nepouzdanosti* (nepreciznosti) C srednje vrijednosti definira se jednadžbom

$$C = \frac{z \cdot s}{\sqrt{n}}, \quad (5)$$

u kojoj je s procjena standardnog odstupanja pojedinog mjerenja (srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja), a z višekratnik standardnog odstupanja, $z = (x - \bar{x})/s$, koji ovisi o odabranoj statističkoj sigurnosti P.

Procjena standardnog odstupanja računa se s pomoću izraza

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6)$$

i ona se podudara s *istinitim standardnim odstupanjem* kad je brojnost n međusobno nezavisnih mjerenja vrlo velika, teoretski beskrajno velika. Standardno odstupanje neka je vrsta ekvivalentne pogreške: kad bi svako od n pojedinačnih mjerenja bilo učinjeno s pogreškom s, zbroj njenih kvadrata bio bi jednak zbroju kvadrata stvarnih slučajnih pogrešaka $x_i - x$. Omjer $r = s/\bar{x}$ zove se *relativno standardno odstupanje*; izraz pod korijenom jednadžbe (6), a to je s^2, zove se *varijanca* ili *disperzija*. Neki standardi definiraju s samo kao pozitivni korijen jednadžbe (6).

Statistički obrađen rezultat ponovljenih mjerenja, oslobođen *svih* sustavnih pogrešaka, iskazuje se procjenom istinite vrijednosti x mjerene fizikalne veličine i naznakom statističke sigurnosti P (vjerojatnosti)

$$x = \bar{x} \pm C; \quad P, \quad (7)$$

što znači da se istinita vrijednost x sa sigurnošću P nalazi između

donje granice pouzdanosti $\bar{x} - C$ i

gornje granice pouzdanosti $\bar{x} + C$.

Iskaz (7) izražajniji je kad se piše u obliku

$$x = \bar{x} \cdot (1 \pm c); \quad P, \quad (8)$$

gdje je c *relativna nepouzdanost* (relativna nepreciznost) definirana jednadžbom

$$c = \frac{C}{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{rz}{\sqrt{n}}, \quad (9)$$

u kojoj je $z = z(P)$; za normalnu raspodjelu tu ovisnost prikazuje tabl. 1.

Tablica 1

OVISNOST VIŠEKRATNIKA STANDARDNOG ODSTUPANJA O STATISTIČKOJ SIGURNOSTI

Statistička sigurnost P	*Višekratnik standardnog odstupanja* z	*Granice unutar kojih se nalazi* $n \cdot P$ *mjernih rezultata*	*Udio rezultata izvan granica* $n(1-P)/n$ %	*Nepouzdanost srednje vrijednosti* $C = zs/\sqrt{n}$
0,50	0,674	$\bar{x} \pm 0{,}674s$	50	$0{,}674s/\sqrt{n}$
0,683	1	$\bar{x} \pm s$	31,7	$s/\sqrt{n}$
0,95	1,960	$\bar{x} \pm 1{,}960s$	5	$1{,}960s/\sqrt{n}$
0,9544	2	$\bar{x} \pm 2s$	4,56	$2s/\sqrt{n}$
0,99	2,576	$\bar{x} \pm 2{,}576s$	1	$2{,}576s/\sqrt{n}$
0,9973	3	$\bar{x} \pm 3s$	0,27	$3s/\sqrt{n}$
0,999 94	4	$\bar{x} \pm 4s$	0,006	$4s/\sqrt{n}$

Primjena opisanog postupka za obradbu rezultata ponovljenih mjerenja prikazana je u tabl. 2 i na sl. 1. Pod jednakim okolnostima (stalna temperatura, tlak i sl.) izmjerena je 51 put ($n = 51$) duljina čelične štapne mjere nazivne duljine 1 m. Ako se ocijeni da prilikom mjerenjâ nije bilo sustavnih pogrešaka, onda su istinite pojedinačne vrijednosti x_i koje su u tabl. 2. Neki su se rezultati pojavili više puta, pa je f_i njihova frekvencija. Za računanje prema relaciji (4) prikladno je odabrati $x_0 = 1$ m (točno), pa se, ako se uzmu u obzir podaci u tabl. 2, dobiva srednja vrijednost

$$\bar{x} = 1\,\text{m} + \frac{275\,\mu\text{m}}{51} = 1\,\text{m} + 5{,}4\,\mu\text{m}.$$

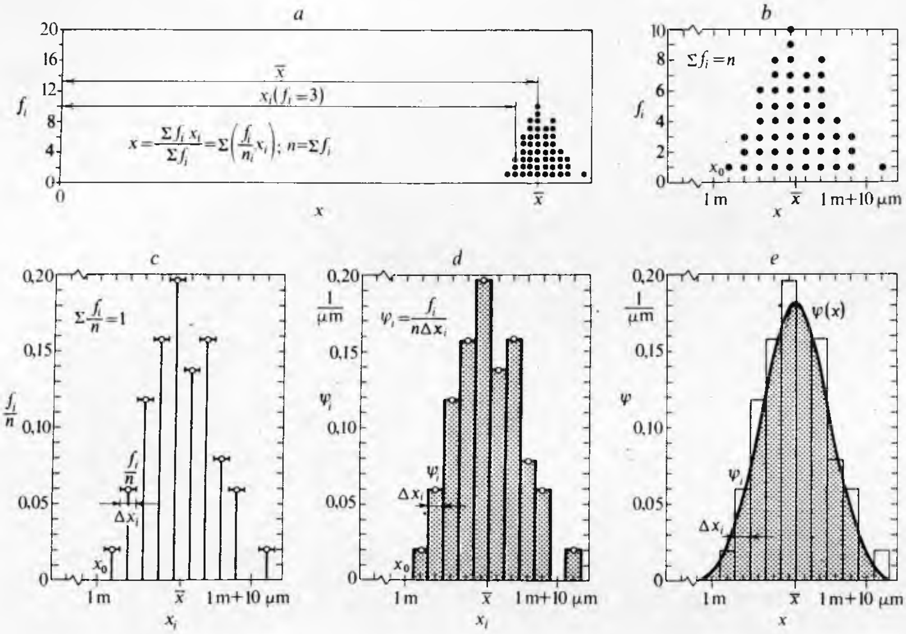
Iz relacije (6) i podataka u tablici procjena standardnog odstupanja iznosi

$$s = \sqrt{\frac{240{,}72\,\mu\text{m}^2}{50}} = 2{,}19\,\mu\text{m}.$$

Relativna nepouzdanost rezultata (srednje vrijednosti) izračunava se iz jednadžbe (9), pa za statističku sigurnost $P = 0{,}99$ (prema tabl. 1, $z = 2{,}576$) iznosi

Tablica 2
PRIMJER REZULTATA PONOVLJENIH MJERENJA

x_i m	f_i	$x_i - x_0$ μm	$f_i(x_i - x_0)$ μm	$x_i - \bar{x}$ μm	$f_i(x_i - \bar{x})$ μm	$(x_i - \bar{x})^2$ μm²	$f_i(x_i - \bar{x})^2$ μm²
1,000001	1	1	1	−4,4	−4,4	19,40	19,40
1,000002	3	2	6	−3,4	−10,2	11,60	34,80
1,000003	6	3	18	−2,4	−14,4	5,76	34,56
1,000004	8	4	32	−1,4	−11,2	1,96	15,68
1,000005	10	5	50	−0,4	−4,0	0,16	16,00
1,000006	7	6	42	+0,6	+4,2	0,36	2,52
1,000007	8	7	56	+1,6	+12,8	2,56	20,48
1,000008	4	8	32	+2,6	+10,4	6,76	27,04
1,000009	3	9	27	+3,6	+10,8	12,96	38,88
1,000010	0	10	0	+4,6	0	21,16	0
1,000011	1	11	11	+5,6	+5,6	31,36	31,36
$\sum$	$n = 51$	$x_0 = 1$ m	275				240,72



Sl. 1. Grafički prikazi rezultata ponovljenih mjerenja čelične štapne mjere ($n = 51$) nazivne duljine 1 m: *a* frekvencija f_i pojedinih mjernih rezultata x_i prikazanih u dijagramu točkama; prvi rezultat slijeva udesno dobiven je samo jedanput ($f_1 = 1$), drugi triput ($f_2 = 3$), treći šest puta ($f_3 = 6$) itd.; srednja vrijednost označena je sa $\bar{x}$. *b* povećan prikaz područja u kojem se nalaze mjerni rezultati. *c* prikaz istih mjernih rezultata relativnom frekvencijom f_i/n. *d* ista mjerenja prikazana gustoćom mjernih rezultata φ_i; relativna frekvencija f_i/n prikazana je ploštinom pojedinih stupaca širine Δx_i. *e* zvonolika krivulja, nacrtana preko primjera na sl. *d*, prikazuje tzv. normalnu raspodjelu mjernih rezultata (Gaussova krivulja raspodjele) koja bi se postigla za $n \to \infty$

$$c(0{,}99) = \frac{2{,}19\ \mu\text{m}}{1\ \text{m}} \cdot \frac{2{,}576}{51} = 7{,}9 \cdot 10^{-7}.$$

Rezultat mjerenja može se iskazati u obliku

$$x = (1\ \text{m} \pm 5{,}4\ \mu\text{m})(1 \pm 7{,}9 \cdot 10^{-7}); \quad P = 0{,}99.$$

Primjena Studentove raspodjele. Budući da je pri maloj brojnosti n ponovljenih mjerenja procjena s standardnog odstupanja prema jednadžbi (6) nedovoljno sigurna, u mjeriteljstvu se za određivanje nepouzdanosti srednje vrijednosti (C) upotrebljava *Studentova raspodjela* (Student je pseudonim W. S. Gosseta, 1908). Njome se pri malim n nepouzdanost doznaje pomoću jednadžbe

$$C = \frac{ts}{\sqrt{n}} = fs; \qquad f = \frac{t}{\sqrt{n}}, \tag{10}$$

gdje je s procjena standardnog odstupanja (6), a t faktor Studentove raspodjele, $t = t(n,P)$(tabl. 3). Faktor t uvijek je veći od faktora z normalne raspodjele (sl. 2). S porastom n razlika među njima iščezava.

Pri iskazivanju rezultata ponovljenih mjerenja u obliku (8), relativna se nepouzdanost c prema Studentovoj raspodjeli računa jednadžbom

$$c = \frac{C}{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} \frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\bar{x}} f = rf, \tag{11}$$

gdje je r relativno standardno odstupanje, $r = s/\bar{x}$.

Primjer. Duljina je mjere izmjerena $n = 10$ puta; jednom je izmjereno 114,6 mm, dva puta 114,7 mm, četiri puta 114,8 mm i tri puta 114,9 mm. Srednja duljina mjere prema jednadžbi (4) iznosi $\bar{x} = 114{,}79$ mm, a procjena standardnog odstupanja prema (6) ima vrijednost $s = 0{,}108$ mm. Pri statističkoj sigurnosti $P = 99{,}73\%$ i $n = 10$ faktor je Studentove raspodjele $f = 1{,}30$ (tabl. 3). Jednadžba (11) daje relativnu nepouzdanost srednje vrijednosti

$$c = fs/\bar{x} = 1{,}3 \cdot 0{,}108\ \text{mm}/114{,}8\ \text{mm} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}.$$

Mjerni je rezultat prema (8)

$$x = 114{,}79\ \text{mm} \cdot (1 \pm 1{,}2 \cdot 10^{-3}); \qquad P = 99{,}73\%,$$

ili prema (7), pomoću $C = c\bar{x} = 0{,}138$ mm:

$$x = (114{,}79 \pm 0{,}14)\text{mm}; \qquad P = 99{,}73\%.$$

Taj rezultat kaže da se s vjerojatnošću 0,9973, odnosno s nevjerojatnošću 27:10000, istinita duljina mjere nalazi negdje u rasponu između donje granice pouzdanosti 114,65 mm i gornje granice pouzdanosti 114,93 mm. Pri ovoj se obradbi mjernih rezultata ocijenilo da je preostala sustavna mjerna pogreška bila bitno manja od iskazane nepouzdanosti.

Mjerna nesigurnost. Konačan rezultat ponovljenih mjerenja može se iskazati pomoću nepouzdanosti, prema relacijama (5), (9), (10) i (11), samo ako postoji potpuna sigurnost da su pri obradbi n mjernih rezultata uzete u obzir sve sustavne pogreške. Toj pretpostavci rijetko je u mjeriteljstvu udovoljeno, jer koliko god pažljivo i spretno mjeritelji otkrivali sustavne pogreške, gotovo im uvijek preostaju takve sustavne pogreške koje nisu sposobni utvrditi i uzeti ih u obzir u obliku korekcije. Te neobuhvaćene i neodredljive preostale sustavne pogreške uzrokuju da je konačan rezultat n ponovljenih mjerenja nesigurniji nego što to pokazuju jednadžbe (7) i (8). Procjenjivanje preostale sustavne pogreške E konačnog mjernog iskaza najteži je mjeriteljski podatak koji zahtijeva temeljito znanje mjeritelja, iskustvo i dodatna eksperimentiranja.

Katkada se preostala sustavna pogreška E može procijeniti povećanjem broja n pojedinih mjerenja. Katkada se analizom niza rezultata mogu utvrditi sustavne pogreške koje nije bilo moguće uočiti uz manji broj n. Povećanjem broja n postala je vrijednost preostale sustavne pogreške manja, time se smanjila nesigurnost konačnog rezultata, ali još uvijek preostaju neke koje treba *procijeniti*. U određenim slučajevima to može učiniti iskusan eksperimentator pomoću analogija s mjerenjima i analizama pogrešaka koje je obavio u prošlosti. Ako je mjerena veličina takva da na njenu vrijednost ne utječe transport, nesigurnost se može smanjiti *usporedbenim mjerenjima*: niz laboratorija redom mjeri istu veličinu, po mogućnosti istovrsnim mjernim uređajem. Pri tom svaki laboratorij utvrdi svoju srednju vrijednost i pripadno standardno odstupanje pojedinih mjerenja. Skup tako dobivenih rezultata može se smatrati novim nizom pojedinih mjerenja koji ima svoju srednju vrijednost i svoje standardno odstupanje. Tako preostale sustavne pogreške pojedinih laboratorija ulaze u završni račun kao slučajne pogreške. Time se, doduše, povećava standardno odstupanje, ali se smanjuje udio preostalih sustavnih pogrešaka. Na kraju se ipak mora procijeniti kolika je preostala sustavna pogreška E.

Dodatni utjecaj preostale sustavne pogreške E izražava se prema DIN pojmom *mjerna nesigurnost*

$$U = |C| + |E|, \tag{12}$$

odnosno pojmom *relativna mjerna nesigurnost*

$$u = U/\bar{x} = |c| + |e|, \tag{13}$$

gdje je $\bar{x}$ srednja vrijednost iz koje su korekcijom već uklonjene obuhvatljive sustavne pogreške, c relativna nesigurnost ($c = C/\bar{x} = sf/\bar{x}$), a e preostala relativna sustavna pogreška ($e = E/\bar{x}$).

S pomoću tih fizikalnih veličina konačan se mjerni rezultat ponovljenih mjerenja iskazuje u obliku

$$x = \bar{x} \pm U \quad \text{ili} \quad x = \bar{x} \cdot (1 \pm u). \tag{14}$$

Kad su preostale sustavne pogreške zanemarljive prema nesigurnosti, $e/c \to 0$, nesigurnost se smanjuje u nepouzdanost, $u \to c$.

Jednadžbe (12) i (14) potkrepljuju stav praktičnog mjeriteljstva da nema svrhe pretjerano povećavati brojnost n ponovljenih mjerenja. Zbog preostalih sustavnih pogrešaka E (procijenjenih!) mjerna se nesigurnost U može, naime, smanjiti samo do neke granice (utjecaj $\sqrt{n}$ na C), a i teoretski samo do $U \to E$ pri $n \to \infty$. Mnogo većim brojem n postignuto smanjenje nesigurnosti U nije u skladu s povećanjem trajanja i troškova mjerenja. Ako je unatoč tome potrebno, npr. u vrhunskom mjeriteljstvu, da se nesigurnost U bitno smanji, onda treba usporedo s povećanjem broja mjerenja n smanjiti E. To se može učiniti spomenutim usporedbenim kružnim mjerenjima u različitim laboratorijima.

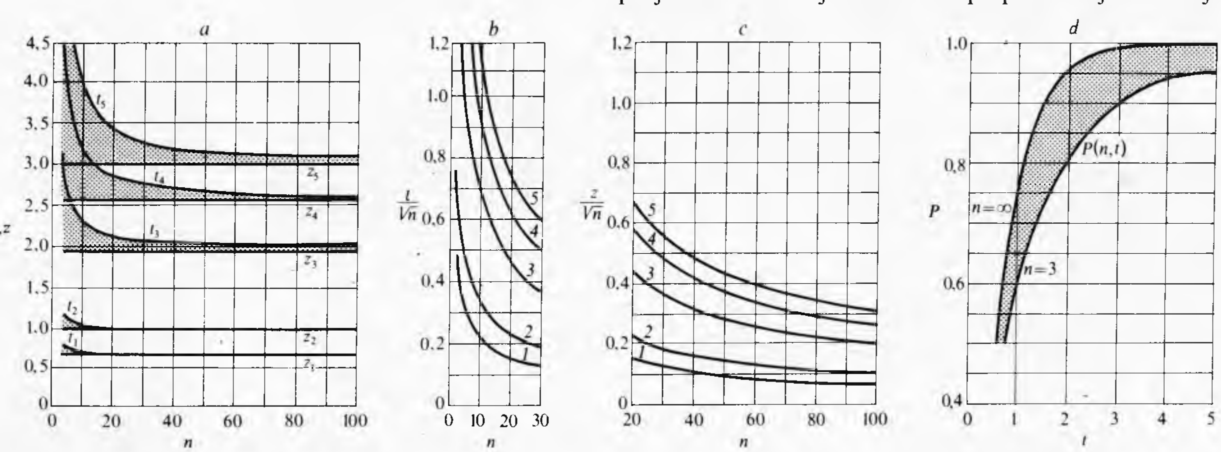
Norma DIN 1319 (1972) preporučuje da se pri iskazivanju vrijednosti veličina U i u upozori i riječima na te pojmove, te da se izbjegavaju općeniti nedefinirani pojmovi, npr. netočnost, točnost itd., pa se navode primjeri: »Relativna mjerna nesigurnost pri određivanju toplinske provodnosti kovina iznosi $\pm$ 2%«, »Izmjerena frekvencija 10 MHz nesigurna je za $\pm$ 10 Hz«. Ako preostale sustavne pogreške nisu procijenjene, pogodno je mjerni rezultat izraziti i ovako: »Kinematička je viskoznost izmjerena Ubbelohdeovim viskozimetrom; vrijednost $\nu = 120\,\text{mm}^2/\text{s}$ određena je sa standardnim odstupanjem $0{,}3\,\text{mm}^2/\text{s}$.«

Granična pogreška mjernog uređaja. Za svakodnevno mjeriteljstvo bitan je pojam granična pogreška mjernog uređaja ili mjere. Spomenuta norma definira se ovako: »Granična pogreška je ugovoreno ili garantirano najveće dopušteno odstupanje od stvarne vrijednosti ili od propisane vrijednosti mjerene

Tablica 3

OVISNOST FAKTORA STUDENTOVE RASPODJELE t I f O BROJU PONOVLJENIH MJERENJA n ZA NEKOLIKO IZNOSA STATISTIČKE SIGURNOSTI P

n	*Statistička sigurnost P*											
	0,50		0,683		0,90		0,95		0,99		0,9973	
	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f
3	0,82	0,47	1,32	0,76	2,92	1,69	4,30	2,48	0,92	5,73	18,35	10,60
4	0,76	0,38	1,20	0,60	2,35	1,18	3,18	1,59	5,84	2,92	9,16	4,58
5	0,74	0,33	1,15	0,51	2,13	0,95	2,78	1,24	4,60	2,06	6,60	2,96
6	0,73	0,30	1,11	0,45	2,02	0,82	2,57	1,05	4,03	1,65	5,50	2,25
7	0,72	0,27	1,09	0,41	1,94	0,73	2,46	0,93	3,71	1,40	4,90	1,85
8	0,71	0,25	1,08	0,38	1,90	0,67	2,37	0,84	3,50	1,24	4,53	1,60
9	0,71	0,23	1,07	0,36	1,86	0,62	2,31	0,77	3,35	1,12	4,27	1,42
10	0,70	0,22	1,06	0,34	1,83	0,58	2,26	0,72	3,25	1,03	4,09	1,30
11		0,21		0,33	1,81	0,55	2,23	0,67	3,17	0,96	3,96	1,19
12		0,20		0,31	1,79	0,52	2,20	0,63	3,11	0,90	3,85	1,11
13		0,19		0,29	1,78	0,49	2,18	0,60	3,05	0,85	3,76	1,04
14		0,19		0,28	1,77	0,47	2,16	0,58	3,01	0,81	3,69	0,99
15		0,18	1,04	0,27	1,76	0,45	2,14	0,55	2,98	0,77	3,64	0,94
16				0,26	1,75	0,44	2,13	0,53	2,95	0,74	3,59	0,90
17				0,25		0,42	2,12	0,51	2,92	0,71	3,54	0,86
18				0,24		0,41	2,11	0,50	2,90	0,68	3,51	0,83
19				0,24		0,40	2,10	0,48	2,88	0,66	3,48	0,80
20		0,15		0,23	1,73	0,39	2,09	0,47	2,86	0,64	3,45	0,77
21				0,22		0,38		0,45	2,84	0,62	3,42	0,75
22				0,22		0,37		0,44	2,83	0,60	3,40	0,72
23				0,22		0,36		0,43	2,82	0,59	3,38	0,70
24				0,21		0,35		0,42	2,81	0,57	3,36	0,69
25	0,68	0,14	1,03	0,21	1,71	0,34	2,06	0,41	2,80	0,56	3,34	0,67
30				0,19		0,31		0,37	2,8	0,50	3,28	0,60
50				0,14		0,24		0,28	2,7	0,38	3,18	0,45
100				0,10		0,17		0,20	2,6	0,26	3,10	0,31
200				0,07		0,12		0,14	2,6	0,18	3,04	0,22
∞	0,674	0	1.000	0	1,645	0	1,960	0	2,576	0	3,000	0



Sl. 2. Usporedba normalne i Studentove raspodjele. *a* ovisnost faktora t i z o brojnosti n ponovljenih mjerenja za pet statističkih sigurnosti P, *b* ovisnost faktora $f = t/\sqrt{n}$ Studentove raspodjele o brojnosti n ponovljenih mjerenja za pet statističkih sigurnosti P, *c* ovisnost faktora $z/\sqrt{n}$ normalne raspodjele o brojnosti n ponovljenih mjerenja za pet statističkih sigurnosti P, *d* ovisnost statističke sigurnosti o faktoru t za $n = 3 \cdots \infty$

veličine.« To odstupanje može biti jednostrano (predznak + ili predznak −) ili dvostrano (±), i ne smije biti premašeno, neovisno o tome kolika je mjerna nesigurnost U kojom se može utvrditi mjerni rezultat. Prema tome granična pogreška označuje granice unutar kojih mjerni rezultat smije biti *neispravan*, što omogućuje da se mjerni uređaji i mjere jednoznačno razvrstavaju na ispravne i neispravne.

Norma dijeli graničnu pogrešku u dvije vrste. Pod *garantiranom graničnom pogreškom* mjernog uređaja (ili mjere) razumijeva se ovo: ako proizvođač mjernog uređaja (mjere) garantira da vrijednost veličine, izmjerene tim uređajem (ili utjelovljene tom mjerom), ne odstupa od stvarne vrijednosti više nego što je propisano, onda se to odstupanje zove garantirana granična pogreška. Pri tom se uređaj ili mjera moraju primjenjivati pri utvrđenim okolnostima, npr. pri temperaturi 20 °C ili u temperaturnom intervalu 10···30 °C itd. Garantiranom graničnom pogreškom proizvođač mjernog uređaja (mjere), dakle, garantira da će pri ispravnoj upotrebi uređaja (mjere) pogreška biti manja od garantirane granične pogreške, a u najnepovoljnijem slučaju njoj jednaka. Pod *baždarnom graničnom pogreškom* norma razumijeva najveće dopušteno odstupanje vrijednosti koju pokazuje mjerni uređaj ili utjelovljuje mjera od vrijednosti standarda (normale, pramjerila, etalona). To npr. znači da će *mjera* (uteg, mjerna traka itd.) dobiti baždarni pečat samo ako se njena stvarna vrijednost nalazi unutar područja: potrebna (naznačena) vrijednost ± baždarna granična pogreška. Za *mjerne uređaje* analogan uvjet glasi: stvarno pokazivanje = potrebno pokazivanje ± baždarna granična pogreška.

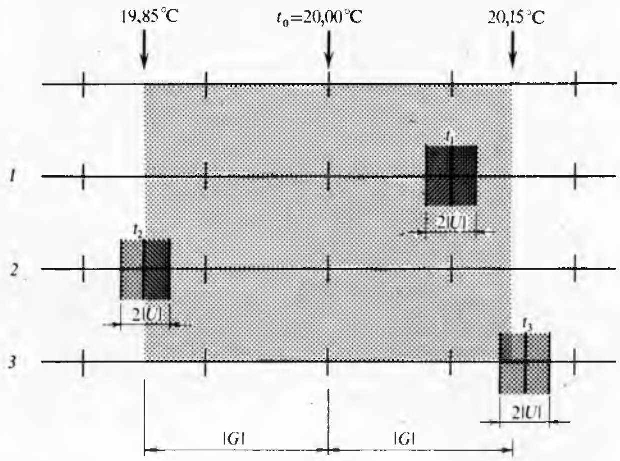
Ako nije drugačije dogovoreno, granične pogreške obuhvaćaju sustavne pogreške te odstupanja uzrokovana neujednačenošću proizvodnje i starenjem materijala. Da bi se granična pogreška G mjernog uređaja ili mjere sigurno mogla održati, mjerna nesigurnost U treba da bude mnogo manja od nje, dakle $U < G$. Tako npr. norma preporučuje da mjerna nesigurnost U ne premaši jednu petinu granične pogreške G, tj. $U < G/5$.

Granična se pogreška uglavnom naznačuje *područjem* unutar kojega se može nalaziti vrijednost veličine. Pri tom postoje dvije mogućnosti: navođenje vrijednosti granične pogreške (npr. baždarna granična pogreška termometra iznosi ± 0,15 K) ili navođenje vrijednosti *relativne* granične pogreške (npr. relativna granična pogreška pokaznog instrumenta iznosi 0,2% od punog otklona).

Radi sigurnog razumijevanja tih važnih pojmova svakodnevnog mjeriteljstva navodi se primjer laboratorijske kontrole triju živinih termometara s mjernim opsegom 0···50 °C, kojima je skala crticama podijeljena na dijelove po 0,1 °C. Trebalo je utvrditi da li granična pogreška termometara premašuje garantiranu vrijednost $G = \pm 0{,}15$ K. Ispitivalo se u vodenoj kupki; temperatura vode istodobno je mjerena laboratorijskim termometrom i ispitivanim termometrima. Tako su uspoređena pokazivanja termometara pri nizu temperatura između 0 i 50 °C. Bilo je poznato da je nesigurnost laboratorijskog termometra zanemarljiva prema nesigurnosti U ispitivanih termometara.

Jedna od usporedaba načinjena je pri temperaturi vode za koju je laboratorijski termometar pokazao vrijednost $t_0 = 20{,}00$ °C. Tri provjeravana termometra istodobno su na svojim skalama pokazala vrijednosti $t_1 = 21{,}10$ °C, $t_2 = 19{,}85$ °C i $t_3 = 20{,}16$ °C. Međusobne odnose prikazuje sl. 3, na kojoj je područje granične pogreške $G = \pm 0{,}15$ K prikazano sivom plohom. Za prvi je termometar utvrđena sustavna pogreška $t_1 - t_2 = + 0{,}10$ K. Prema tome prvi se termometar pri 20 °C nalazi unutar granične pogreške ± 0,15 °C. Ako je tako i pri ostalim temperaturama, te ako udovoljava ostalim propisanim uvjetima, termometar *1* dobit će baždarni pečat za graničnu pogrešku ± 0,15 K. Budući da je mjerna nesigurnost termometara te vrste $U \approx \pm 0{,}02$ K (tamnija površina na slici), onda je $G/U = 0{,}15/0{,}02 = 7{,}5$. To znači da je $G/U > 5$, što se preporučuje radi sigurnog utvrđivanja možebitna premašenja garantirane granične pogreške G. Ako je u cijelom mjernom području utvrđena sustavna pogreška + 0,10 K, vlasnik termometra *1* može se njime služiti na dva načina. Ili se zadovoljava time da se pogreška njegova termometra nalazi unutar ± 0,15 K ili da pri svakom očitanju dodaje očitanoj vrijednosti korekturu, tj. sustavnu pogrešku sa suprotnim predznakom. U tom će primjeru dodavati − 0,10 °C, tj. oduzimati 0,10 °C. Pri tom će mjerna nesigurnost iznositi $U = \pm 0{,}02$ K.

Drugi termometar ima pri $t_0 = 20$ °C sustavnu pogrešku $t_2 - t_0 = - 0{,}15$ K. Njegovo pokazivanje nalazi se, dakle, na samoj granici područja dopuštene granične pogreške $G = \pm 0{,}15$ K. I taj će termometar dobiti baždarni žig. Neće ga, međutim, dobiti treći, jer mu pogreška iznosi $t_3 - t_0 = 20{,}16\,°C - 20{,}00\,°C = 0{,}16\,K > G = 0{,}15$ K.



Sl. 3. Rezultati baždarenja triju živinih termometara pri temperaturi 20,00 °C. Zajamčena granična pogreška iznosi $G = \pm 0{,}15$ K. Termometar *1* je unutar dopuštene granične pogreške, termometar *2* na granici, a termometru *3* pogreška je veća od dopuštene granične pogreške

Nesigurnost posrednih mjerenja. Većina se fizikalnih veličina mjeri posredno. Tako se ploština pravokutnika dobiva s pomoću jednadžbe $A = ab$; pri tom su izravno mjerene duljine a i b stranica pravokutnika. Općenito je posredno mjerena fizikalna veličina y funkcija niza međusobno nezavisnih veličina $x_1, x_2, \ldots$ kojima se vrijednosti određuju izravnim mjerenjem

$$y = y(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n). \tag{15}$$

Svaka od vrijednosti x_i ima svoju nesigurnost srednje vrijednosti $U(x_i)$, odnosno relativnu nesigurnost $u(x_i) = U(x_i)/x_i$.

Ako udjel procijenjenih preostalih sustavnih pogrešaka u nesigurnostima $U(x_i)$ nije mnogo veći od udjela nepouzdanosti $c(x_i)$, tj. od udjela slučajnih pogrešaka, nesigurnost $U(y)$ srednje vrijednosti posredno mjerene veličine (15) izračunava se jednadžbom

$$[U(y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} U(x_i) \right|^2. \tag{16}$$

Pripadna *relativna nesigurnost* iznosi

$$u(y) = \frac{U(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} u(x_i) \right|^2}; \qquad u(x_i) = \frac{U(x_i)}{x_i}. \tag{17}$$

Posve identično su građeni izrazi za (relativno) standardno odstupanje.

Kao općenit primjer određivanja relativne nesigurnosti posredno mjerene fizikalne veličine navodi se izraz

$$y = K x_1^a x_2^b \ldots; \qquad K = \text{const.} \tag{18}$$

Primjenom izraza (17) dobiva se

$$u(y) = \sqrt{a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 + \ldots}. \tag{19}$$

Pri tom su relativne nesigurnosti izravno mjerenih veličina definirane izrazima $u_1 = U_1/x_1$, $u_2 = U_2/x_2$ itd.

Često nesigurnosti $U(x_i)$ nisu poznate, ali se zna kolike su granične pogreške $G(x_i)$ svih izravno mjerenih veličina x_i koje prema (15) tvore posredno mjerenu veličinu y. U najnepovoljnijem i malo vjerojatnom slučaju granična će pogreška iznositi

$$G(y) = \pm \sum \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G(x_i) \right|, \tag{20}$$

a vrijednost y nalazit će se posve sigurno unutar vrijednosti

$$y = \bar{y} \pm |G(y)|. \tag{21}$$

Zato $G(y)$, prema (18), mnogi autori zovu *sigurnom pogreškom* ili maksimalno mogućom pogreškom (engl. limit error, maximum possible error), a dvije moguće vrijednosti (21) *sigurnim granicama vrijednosti* veličine y.

Vrlo je mala vjerojatnost da će se stvarna vrijednost posredno mjerene veličine y nalaziti baš na gornjoj ili donjoj granici propisanoj jednadžbom (21). Drugim riječima: mala je vjerojatnost da granična pogreška $G(y)$ bude tako velika kako to opisuje izraz (20). Ta je vjerojatnost to manja što je broj i izravno mjerenih veličina x_i veći. Zato se prema DIN 1319 *statistička granična pogreška* izračunava formulom

$$^*G(y) = \sqrt{\sum \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G(x_i) \right|^2}. \tag{22}$$

Usporedba pokazuje da je statistička granična pogreška $^*G(y)$ uvijek manja od granične pogreške, tj. $|^*G(y)| < |G(y)|$. Zato su statističke granice

$$y = \bar{y} \pm |^*G(y)| \tag{23}$$

uvijek uže od sigurnih granica (21).

Određivanjem razine statističke sigurnosti rezultata (23) bavi se matematička statistika primijenjena na mjerenje. Radi orijentacije korisno je reći da sigurnost P praktički ne ovisi o brojnosti i izravno mjerenih veličina x_i koje tvore funkciju y. Statistička sigurnost je najmanja onda kad je funkcija y umnožak ili zbroj dviju izravno mjerenih veličina. Uobičajeni mjerni uređaji suvremene tehnike omogućuju (pri ispravnoj primjeni uređaja) da statistička sigurnost bude $\sim 0{,}95$ ako se granične pogreške $^*G(y)$ računaju pomoću izraza (22). Kvalitetnija mjerna oprema povećava sigurnost i do $P \approx 0{,}99$.

Primjena granične pogreške ilustrirana je primjerom posrednog mjerenja jalove snage Q jednofaznog potrošača na temelju istodobnog mjerenja napona U, struje I i djelatne snage P. Garantirane relativne granične pogreške (razredi, klase instrumenata) svih triju instrumenata međusobno su jednake i iznose $e(U) = G(U)/U = e(I) = e(P) = 0{,}5\% = 5 \cdot 10^{-3}$. Treba izračunati koliko iznose relativna sigurna granična pogreška $e(Q) = G(Q)/Q$ i relativna statistička granična pogreška $f(Q) = {}^*G(Q)/Q$ posredno mjerene veličine Q pri različitim kutovima φ između vektora napona U i struje I.

Računa se jednadžbama (20) i (22) u relativnom obliku. Ulogu posredno mjerene veličine (15) ima jalova snaga, $y = Q$. Budući da je $Q = UI\sin\varphi$ i $P = UI\cos\varphi$, funkcija $Q = Q(U,I,P)$ ima oblik

$$y = Q = (U^2I^2 - P^2)^{1/2}, \tag{24}$$

pa su parcijalne derivacije

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial U} &= \frac{1}{2}\frac{1}{Q}2UI^2 = \frac{UI^2}{Q} = \frac{I}{\sin\varphi}, \\ \frac{\partial Q}{\partial I} &= \frac{1}{2}\frac{1}{Q}2U^2I = \frac{U^2I}{Q} = \frac{U}{\sin\varphi}, \\ \frac{\partial Q}{\partial P} &= \frac{1}{2}\frac{-1}{Q}2P = -\frac{P}{Q} = -\cot\varphi. \end{aligned} \tag{25}$$

Tablica 4

GRANIČNA I STATISTIČKA GRANIČNA POGREŠKA PRI ODREĐIVANJU JALOVE SNAGE PREMA (24)

φ	90°	60°	45°	30°	0°
$\cos\varphi$	0	0,5	0,707	0,866	1
$e(Q)$	1%	1,5%	2,5%	5,5%	∞
$f(Q)$	0,71%	0,96%	1,5%	3,2%	∞

Iz relacije (20) dobiva se granična pogreška

$$e(Q) = \pm\left\{\left|\frac{1}{\sin^2\varphi}e(U)\right| + \left|\frac{1}{\sin^2\varphi}e(I)\right| + \left|e(P)\cot^2\varphi\right|\right\}, \tag{26}$$

dok se statistička granična pogreška izračunava pomoću izraza

$$f(Q) = \sqrt{\frac{^*G(Q)}{Q}} = \left\{\left[\frac{e(U)}{\sin^2\varphi}\right]^2 + \left[\frac{e(I)}{\sin^2\varphi}\right]^2 + [e(P)\cot^2\varphi]^2\right\}^{1/2}, \tag{27}$$

koji je izveden iz jednadžbe (22) i funkcije (24). Rješenja se nalaze u tabl. 4.

LIT.: *L. Jánossy*, Theory and practice of the evaluation of measurements. University Press, Oxford 1965. — *N. Čubranić*, Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Tehnička knjiga, Zagreb ²1967. — Organisation Internationale de Métrologie Légale, Vocabulaire de Métrologie Légale. Termes fondamentaux. OIML, Paris 1968. — *M. Brezinšćak*, Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti. Tehnička knjiga, Zagreb 1971. — *C. Eisenhart*, Contribution to panel discussion on adjustments of the fundamental constants. National Bureau of Standards Special Publication 343, Washington 1971, 509—518. — DIN 1319, Grundbegriffe der Messtechnik, Blatt 1 (1971), Blatt 2 (1968), Blatt 3 (1972). — ГОСТ 8.011' (1972), Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений. — BS 5233 (1975), British standard glossary of terms used in metrology. — IUPAC, Nomenclature, symbols, units and their usage in spectrochemical analysis — II. Data Interpretation (Rules aproved 1975). Pure and Appl. Chem., Vol. 45 (1976), 99—103. — *V. Bego*, Mjerenja u elektrotehnici. Tehnička knjiga, Zagreb ³1976. — *M. Brezinšćak*, Procjenjivanje mjerne nesigurnosti. Savezni zavod za mjere i dragocjene kovine, Beograd 1976. — *P. Profos*, Handbuch der industriellen Messtechnik. Vulkan Verlag, Essen 1978.

M. Brezinšćak

MJERNI TRANSFORMATORI, naprave koje transformiraju mjerene napone ili struje u praktički stalnom omjeru i gotovo bez faznog pomaka u vrijednosti koje su prikladne za napajanje mjernih instrumenata, zaštitnih i regulacijskih uređaja. Time se postižu sljedeće osnovne prednosti: *a*) mjerene struje i naponi vrlo različitih nazivnih vrijednosti transformiraju se u uvijek iste nazivne vrijednosti (redovno u struje od 1 A ili 5 A i napone od 100 V, 200 V, $100/\sqrt{3}$ V ili $200/\sqrt{3}$ V), što bitno smanjuje broj potrebnih tipova mjernih, zaštitnih i regulacijskih instrumenata i uređaja, te omogućuje da se oni serijski proizvode; *b*) pomoću mjernih transformatora mjerni se instrumenti i uređaji izoliraju od visokih napona u mjerenom krugu, tako da rukovanje njima postaje neopasno, a njihova se konstrukcija pojednostavnjuje jer ih ne treba izolirati za visoki napon; *c*) mjerni instrumenti i uređaji mogu biti prostorno veoma udaljeni od mjerenog strujnog kruga, što omogućuje da se postavljaju ondje gdje će to biti najpovoljnije za upravljanje postrojenjem, npr. u zajedničku komandnu prostoriju; *d*) udaljavajući mjerne instrumente i uređaje od mjerenog strujnog kruga sprečava se da na rad instrumenata utječu često snažna magnetska i električna polja mjerenog kruga; *e*) posebnim izvedbama mjernih transformatora zaštićuju se mjerni instrumenti i uređaji od štetnoga dinamičkog i termičkog učinka struja kratkog spoja u mjerenome strujnom krugu; *f*) strujni krugovi se galvanski odvajaju, što je često prijeko potrebno u različitim mjernim i drugim sklopovima.

Mjerni se transformatori obično sastoje od jezgre izrađene od magnetskog materijala, te od primarnog i sekundarnog namota koji su međusobno odvojeni i izolirani, već prema visini napona u mjerenom krugu. Primarni se namoti uključuju u mjereni krug, a na sekundarne se priključuju mjerni instrumenti ili zaštitni uređaji. Upotrebljavaju se dvije vrste mjernih transformatora: *naponski* i *strujni*. Primarni namot naponskoga transformatora priključuje se paralelno trošilu kojemu se mjeri napon. Pri tom struja kroz njegov primarni namot mora biti mnogo manja od struje trošila, slično kao i struja voltmetra kad se napon izravno mjeri. Primarni namot strujnog transformatora uključuje se u seriju s trošilom, pa njime teče puna