

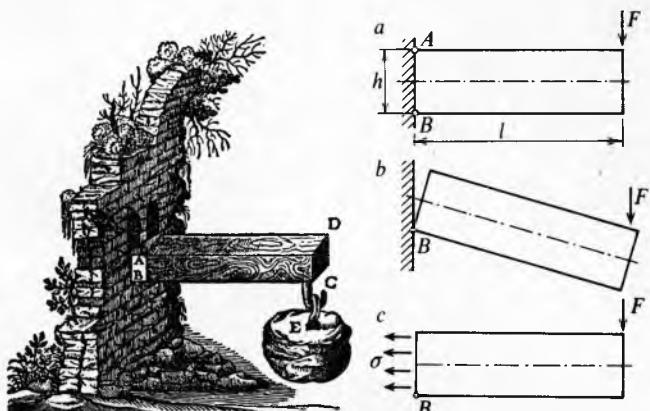
LIT.: Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie: Natrium, System-Nr. 21, Erg.-Bd. Lfg. 2. Verlag Chemie, Weinheim, New York *1965. — F. A. Cotton, G. Wilkinson, Advanced Inorganic Chemistry. Interscience Publishers, New York 1972. — J. C. Bailar Jr. et al., Comprehensive Inorganic Chemistry, Vol. 1. Pergamon Press, New York 1973. — S. Pribičević, Lj. Milosavljević, Natrium-hlorid, I, Osnovi tehnologije. Sodaso, Tuzla 1975. — R. C. Weast, Handbook of Chemistry and Physics. CRC Press, Cleveland 1977. — I. Filipović, S. Lipanović, Opća i anorganska kemija. Školska knjiga, Zagreb *1978. — Ullmanns Encyklopädie der technischen Chemie, Band 17. Verlag Chemie, Weinheim, New York *1979.

N. Pribanić

NAUKA O ČVRSTOĆI, tehnička disciplina koja proučava čvrstoću, krutost i stabilnost dijelova konstrukcija i strojeva i jednostavnijih konstrukcijskih cijelina. Čvrstoća konstrukcije jest sposobnost prenošenja sila i opterećenja bez loma, trajnih plastičnih deformacija ili oštećenja (pukotina). Krutost konstrukcije jest otpornost konstrukcije prema deformiranju. Elastična stabilnost konstrukcije jest sposobnost konstrukcije da zadrži početan ravnotežni oblik. Gubitak elastične stabilnosti naziva se *izvijanje*.

Osim naziva nauka o čvrstoći upotrebljava se i naziv *otpornost materijala*. Oba su naziva tradicionalna i ne odgovaraju u potpunosti. Ne radi se o otpornosti (čvrstoći) materijala, nego o čvrstoći dijelova konstrukcija! Međutim, osim čvrstoće proučava se još krutost i stabilnost, pa ni naziv nauka o čvrstoći nije potpuno prikladan, iako je bolji od naziva otpornost materijala. Bolji naziv bio bi *mehanika deformabilnih čvrstih tijela*, analogno nazivu mehanika krutih tijela i mehanika fluida. Iste probleme proučava teorija elastičnosti, teorija plastičnosti i teorija viskoelastičnosti i viskoplastičnosti, što su sve grane mehanike kontinuma. Međutim, rješavanje problema, svrha i metode rješavanja različiti su u mehanici kontinuma i u nauci o čvrstoći. Nauka o čvrstoći u prvom je redu tehnička (inženjerska) disciplina kojoj je svrha da što jednostavnijim metodama na zadovoljavajući, približan način riješi probleme tehničke prakse. Ponekad se susreće i naziv *elastostatika*, koja proučava statičke probleme elastičnih tijela. Ni taj naziv nije dobra zamjena za naziv nauka o čvrstoći, jer nauka o čvrstoći proučava i neelastična tijela i dinamičke probleme, pa se čini opravdanim zadržati naziv nauka o čvrstoći ili mehanika deformabilnih čvrstih tijela.

Već na početku razvoja civilizacije, kad su se počele graditi veće zgrade, hramovi, mostovi, brodovi, jednostavni strojevi i naprave, bilo je potrebno da se sakupe podaci o svojstvima pojedinih konstrukcijskih materijala i oblika tijela. Bez sumnje su postojala i skupljena pravila o određivanju dimenzija pojedinih dijelova konstrukcija, jer bi bez njih bilo nemoguće izgraditi veličanstvene građevine i spomenike izgrađene još u starom vijeku. Osobito su se svojim graditeljstvom isticali graditelji Rimskog Carstva. Poznate su njihove palače, hramovi, arene, bazilike, akvedukti, te katapulti i drugi ratni i radni strojevi. Nešto o metodama njihova graditeljstva poznato je iz knjige *De architectura libri decem* od Marka Poliona Vitruvija. Najveći dio znanja koji su sakupili Grci i Rimljani i drugi stari narodi izgubljen je u toku ranoga srednjeg vijeka.



Sl. 1. Galilejevo rješenje savijanja grede od 1638. Lijevo originalni crtež; desno: a) zadana greda, b) pretpostavljeni lom greda, c) pretpostavljeni raspored sile (naprezanja) u presjeku

Prve značajne pokuse o ponašanju i čvrstoći materijala obavio je Leonardo da Vinci na prijelazu iz XV u XVI stoljeće. On je ispitivao čvrstoću žice, greda i stupova. Došao je do ispravnog zaključka da je čvrstoća greda na dva oslonca proporcionalna širini i obrnuto proporcionalna rasponu. Nije zabilježeno da li je ispitivao utjecaj visine greda. G. Galilei je prvi pokušao da analitički odredi čvrstoću pojedinih dijelova konstrukcija. Utvrđio je da čvrstoća geometrijski sličnih tijela opada s porastom dimenzija. Poznata su njegova razmatranja o savijanju štapa. On je pogrešno pretpostavio da su sile (naprezanja) pri savijanju jednoliko raspodijeljene po visini presjeka greda i da se greda pri lomu okreće oko najniže točke oslonca B (sl. 1). Uz tu pretpostavku ravnoteža momenata unutrašnjih i vanjskih sila oko točke B daje

$$\sigma b \frac{h}{2} = Fl, \text{ odnosno eksplicitno}$$

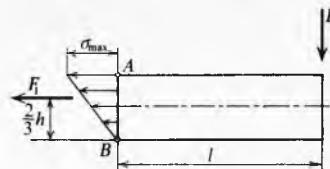
$$\sigma = 2 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (1)$$

Točno rješenje glasi

$$\sigma_{\max} = 6 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (2)$$

Galilejevo rješenje (1) razlikuje se samo za konstantu od točnog rješenja (2). Svoja istraživanja Galilei je objavio u djelu *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica & i movimenti locali*, Leiden 1638.

Problem savijanja greda obradivao je i E. Mariotte. On je u radu objavljenom 1690. zadržao pretpostavku da neutralna linija prolazi kroz donji brid presjeka, ali je uveo pretpostavku da naprezanja linearno rastu prema slici 2.



Sl. 2. Mariotteovo rješenje savijanja greda od 1690.

Ravnoteža momenata oko točke B daje $\frac{1}{2} \sigma_{\max} b h \frac{2}{3} h = Fl$, odnosno eksplicitno

$$\sigma_{\max} = 3 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (3)$$

To je rješenje bliže točnomu od Galilejeve. Parent je također razmatrao savijanje greda. On je 1713. objavio dva rada. U prvome je pokazao da Mariotteovo rješenje može vrijediti samo za pravokutan presjek i izveo je izraz za kružni presjek. U drugom radu je pošao od pretpostavke da neutralna os prolazi kroz sredinu presjeka i došao do ispravnog rješenja. Njegov je rad, međutim, ostao nezapažen, pa su se mnogi inženjeri i dalje služili Mariotteovim rješenjem. Točno rješenje problema savijanja greda izveo je 1773. godine Ch. de Coulomb ne poznavajući Parentovo rješenje. On je 1784. riješio problem uvijanja okruglog štapa i uveo pojam modula smicanja.

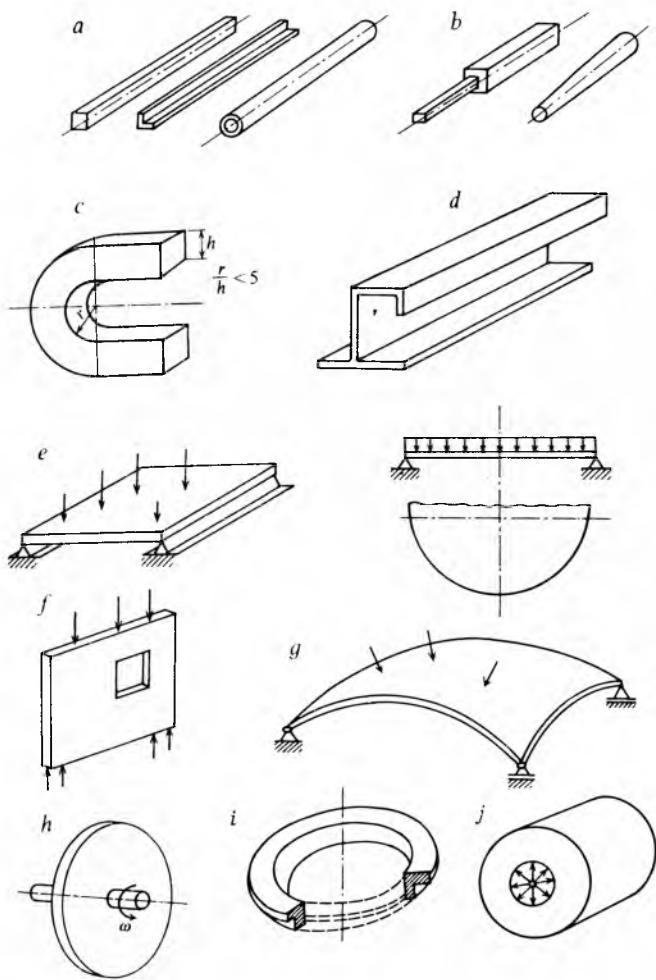
Zakon linearne ovisnosti opterećenja i pomaka, odnosno naprezanja i deformacija postavio je 1660. godine R. Hooke na temelju pokusa s oprugama te ga objavio u obliku anagrama *CEIIINOSSSTTUV*. Međutim, taj zakon, danas poznat kao Hookeov zakon, objavljen je tek 1678. u knjizi *De potentia restitutiva in obliku UT TENSIO SIC VIS*, tj. kakva sila, takvo produženje, što je bilo sadržano u anagramu iz 1660. godine. Th. Young je 1807. matematički formulirao Hookeov zakon za jednoosno rastezanje i uveo pojam modula elastičnosti, koji se po njemu naziva i Youngov modul. Taj je zakon 1828. dopunio S. D. Poisson i uveo pojam koeficijenta poprečne konstrukcije pri rastezanju, koji se po njemu naziva Poissonov koeficijent ili Poissonov omjer.

Znatno su pridonijeli razvoju teorije elastičnosti i analitičkim metodama u nauci o čvrstoći švicarski matematičari, braća Jacob i Johann Bernoulli. Oni su razmatrali deformacije greda pri savijanju. Jacob Bernoulli je uveo pretpostavku da pri savijanju poprečni presjeci ostaju ravni. On je 1694. utvrdio da je zakrivljenos elastične linije proporcionalna momentu savijanja. Daniel Bernoulli, Johannov sin, prvi je izveo diferencijalnu jednadžbu poprečnih vibracija štapa. L. Euler, učenik D. Bernoullija, također je proučavao elastične linije. On je 1744. izveo izraz za kritičnu silu izvijanja vitkog štapa. A. Cauchy je 1822, u radu koji je predložio Francuskoj akademiji znanosti, po prvi put definirao prostorno stanje naprezanja i izveo jednadžbu ravnoteže diferencijalnog elementa. Prvi rad iz teorije ploča objavio je C. L. Navier 1820. On je također prvi dao opći pristup rješavanju statički neodređenih zadataka. Teoriju savijanja ploča razradiovali su dalje S. D. Poisson, G. R. Kirchhoff i drugi. D. J. Züravski je izveo (1844) izraz za posmična naprezanja pri savijanju greda. E. Winkler je (1858) riješio problem savijanja debelog zakrivljenog štapa metodama nauke o čvrstoći. Točno rješenje tog problema dao je 1881. M. Golovin. Uvijanja neokruglih presjeka riješio je 1852. B. de St. Venant. Godine 1857. E. Clapeyron izveo je jednadžbu triju momenata (Clapeyronova jednadžba). J. C. Maxwell je 1870. izveo poučak o recipročnosti uplivnih koeficijenata (Maxwellov poučak), a A. Castigliano je 1873. izveo svoj prvi poučak. O. Mohr je objavio rad o kružnicama naprezanja 1895.

Elementi tehničkih konstrukcija. Svaka tehnička konstrukcija sastavljena je od jednostavnijih oblika, kao npr. ravnih i zakrivljenih štapova, ploče, ljske, stijene, diskovi, prsteni, debele cijevi.

Za svaki od tih oblika posebno se izvode izrazi za naprezanja i deformacije.

Štap je tijelo kojemu su poprečne dimenzije male u usporedbi s njegovom duljinom. Štap može biti ravan i zakrivljen, prizmatičan i promjenljiva poprečnog presjeka. Ako poprečni presjek štapa ima presjek u obliku zakrivljene ili izlomljene trake i ako je debljina trake malena s obzirom na poprečne dimenzije štapa, on se zove *štap s tankom stijenkama*. Njegov presjek može biti otvoren ili zatvoren. Ploče i stijene su plošni elementi konstrukcija kojima je debljina malena u usporedbi s duljinom i širinom. *Ploča* u užem smislu riječi je ploča koja je opterećena okomito na svoju ravninu. *Stijena* je ploča koja je opterećena u svojoj ravnini. Pod pločom u širem smislu smatraju se ploče i stijene. *Ljuske* su zakrivljeni plošni elementi. Ploče i ljuske mogu biti tanke i debele, a debljina može biti stalna ili promjenljiva. *Diskovi* su rotirajuće kružne ploče. *Prsteni* su kružno simetrična tijela kojima su poprečne dimenzije za jedan red veličine manje od srednjeg polumjera. Sl. 3 prikazuje osnovne elemente konstrukcija.



Sl. 3. Osnovni elementi konstrukcija i strojeva. a) ravni prizmatični štapi, b) ravni štapi promjenljiva presjeka, c) debeli zakrivljeni štap, d) štap s tankom stijenkama, e) ploče, f) stijena, g) ljuska, h) rotirajući disk, i) prsten, j) debela cijev

Postupci u nauci o čvrstoći. U teoriji elastičnosti i drugim granama mehanike kontinuma, odnosno matematičke fizike, problemi se rješavaju strogo matematički. Pri tom se postavljaju tri grupe jednadžbi koje se odnose na diferencijalni element tijela: 1) tri diferencijalne jednadžbe ravnoteže, 2) tri diferencijalne jednadžbe koje izražavaju uvjet kompatibilnosti deformacija, 3) šest algebarskih jednadžbi Hookeova zakona.

Ukupno ima 12 jednadžbi sa 12 zavisnih nepoznatih: šest komponenata naprezanja i šest komponenata deformacija. Šest jednadžbi su parcijalne diferencijalne jednadžbe, nezavisne vari-

jable su tri koordinate, a kad se rješavaju dinamički problemi, još je i vrijeme nezavisna varijabla.

Iako su i matematičke metode i mehanika kontinuma veoma napredovale, do danas nije moguće naći rješenje u strogom obliku za proizvoljan oblik tijela i proizvoljno opterećenje i učvršćenje tijela (proizvoljni granični uvjeti). Ipak, danas postoje mnoga za praksu korisna rješenja pomoću teorije elastičnosti. Kad se ne mogu naći stroga analitička rješenja, primjenjuju se eksperimentalne (fotoelasticitet, tenzometrija itd.) i numeričke metode (metoda konačnih elemenata i druge).

U nauci o čvrstoći pristupa se analizi naprezanja i deformacija na drugi način. Kako je broj jednadžbi ravnoteže manji od broja nepoznatih naprezanja, potrebni su dopunski podaci. Dopunski se podaci dobivaju na temelju pretpostavki o deformiranju tijela ili na temelju pretpostavki o raspodjeli naprezanja po presjeku tijela. Često se obje pretpostavke istodobno primjenjuju. U nauci o čvrstoći izvode se izrazi za analizu naprezanja u jednostavnijim oblicima tijela: štapovima, pločama, ljuskama, debelim cijevima, prstenima, diskovima, nosačima s tankim stijenkama itd. Postupak analize naprezanja i deformacija u nauci o čvrstoći može se raščlaniti na sljedeći način:

1) Uvode se pretpostavke o deformiranju ili raspodjeli naprezanja. Na temelju tih pretpostavki geometrijskom (kinematičkom) analizom izvode se izrazi za raspodjelu deformacija. U tim izrazima pojavljuju se nepoznati parametri, pa izrazi daju samo kvalitativnu, ali ne i kvantitativnu raspodjelu naprezanja. Nepoznati su parametri konstante ili nepoznate funkcije.

2) Pomoću Hookeova zakona i izraza za deformacije određuju se kvalitativni izrazi za raspodjelu naprezanja. Ako je tijelo nelinearno elastično ili neelastično, umjesto Hookeova zakona primjenjuju se izrazi koji povezuju deformacije i naprezanja, odnosno brzinu deformacije i naprezanja, tj.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}), \quad (4a)$$

ili

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad (4b)$$

gdje su σ_{ij} komponente naprezanja, ε_{ij} komponente deformacija, a $\dot{\varepsilon}_{ij}$ komponente brzine deformacija.

3) Postavljaju se jednadžbe ravnoteže ili jednadžbe gibanja u koje ulaze izrazi za naprezanje. Rješavanjem tih jednadžbi određuju se nepoznati parametri, a zatim i definitivni izrazi za naprezanja i deformacije. Prema tome nepoznatih parametara smije biti toliko koliko ima nezavisnih uvjeta ravnoteže.

Geometrijska analiza i jednadžbe ravnoteže primjenjuju se pri rješavanju statičkih problema. Kad se rješavaju dinamički problemi, primjenjuje se kinematička analiza i jednadžbe gibanja.

Pretpostavke o deformiranju zamjenjuju uvjete kompatibilnosti. Te se pretpostavke postavljaju na temelju iskustva, poskušaj ili uvjeti simetrije tijela i opterećenja. Uvedene pretpostavke mogu biti približno ili potpuno ispunjene. Ako su pretpostavke potpuno ispunjene, dobivena rješenja su egzaktna i jednaka rješenjima teorije elastičnosti, odnosno drugih grana mehanike kontinuma. Ako su pretpostavke samo približno ispunjene, dobivena će rješenja biti približna. Obično se uzima da rješenje s pogreškom manjom od 5% zadovoljava. Tada je uz izraze naprezanja ili deformacije potrebno navesti ograničenja s obzirom na geometrijski oblik tijela, način opterećenja i maksimalno deformiranje ili pomak za koje navedeni izrazi vrijede. Kad ne postoje točni izrazi, ponekad se dopušta i pogreška veća od 5%, što se uzima u obzir pri određivanju faktora sigurnosti, odnosno dopuštenog naprezanja.

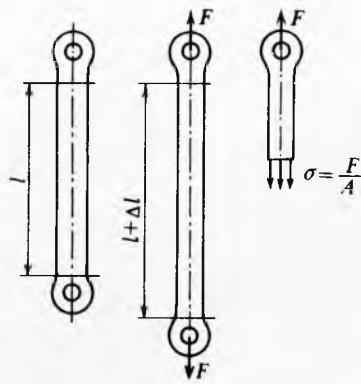
NAPREZANJE

Ako na neko tijelo djeluju vanjske sile, one nastoje da razdvajaju ili približe pojedine čestice tijela. Tome se tijelo suprotstavlja unutrašnjim silama koje djeluju među njegovim česticama. Unutrašnja sila podijeljena ploštinom presjeka na kojem djeluje zove se naprezanje. Prema djelovanju razlikuju se *normalno naprezanje* i *posmično naprezanje*. Normalnim napreza-

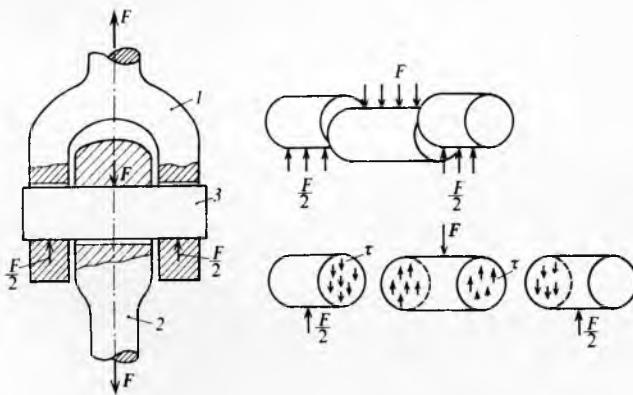
njem tijelo se opire međusobnom primicanju ili razmicanju svojih čestica. Posmičnim naprezanjem tijelo se opire klizanju jednog sloja čestica po drugom.

Na sl. 4 prikazan je štap što ga rastežu dvije jednake i suprotno usmjjerene sile. Zato što pravac djelovanja sila prolazi kroz os štapa kaže se da je štap osno opterećen. Normalno naprezanje σ djeluje jednoliko po poprečnom presjeku ploštine A , pa je ukupna sila u presjeku σA . Iz ravnoteže odsječenog dijela slijedi $\sigma A = F$, odnosno

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (5)$$



Sl. 4. U poprečnom presjeku osno opterećenog štapa djeluje normalno naprezanje σ



Sl. 5. U presjecima osovinice djeluje posmično naprezanje

Na sl. 5 prikazana je zglobna veza dviju poluga; sila F prenosi se s poluge 1 na polugu 2 preko osovinice 3. U presjecima osovinice pojavljuje se posmično ili tangencijalno naprezanje τ . Posmično naprezanje nije jednolikoraspodijeljeno po presjeku, ali je njegova prosječna vrijednost

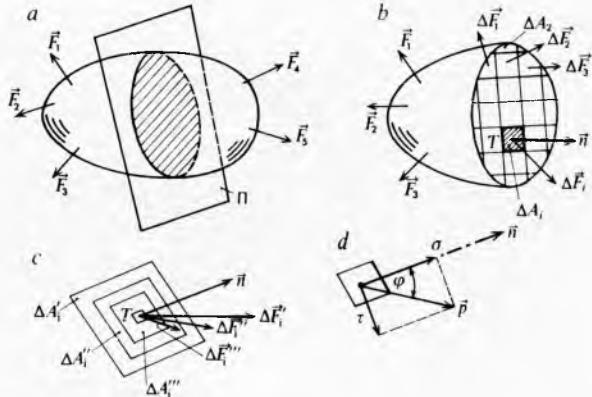
$$\tau_{sr} = \frac{F}{2A}, \quad (6)$$

gdje je A ploština poprečnog presjeka. Unutrašnje sile u tijelu općenito ne djeluju okomito na presjek, tj. u općem slučaju djeluju normalno i posmično naprezanje. Na sl. 6a prikazano je tijelo u ravnoteži na koje djeluju sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$. Zamisljeno je da je tijelo presječeno ravniom Π . Lijevi dio tijela prikazan je na sl. 6b. Rezultanta vanjskih sile \vec{F}_1, \vec{F}_2 i \vec{F}_3 nije jednaka nuli, a kako je taj dio tijela u ravnoteži, moraju se po presjeku pojaviti unutrašnje sile kojima desni dio djeluje na lijevi. Rezultanta i rezultirajući moment svih vanjskih i unutrašnjih sile koje djeluju na lijevi dio jednaki su nuli, jer je taj dio u ravnoteži. Ako se zamisljeni presjek podijeli na niz elemenata kojima su ploštine $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$ itd., kako je prikazano na sl. 6b, na svakom će elementu presjeka djelovati rezultanta unutrašnjih sile $\vec{\Delta F}_1, \vec{\Delta F}_2, \vec{\Delta F}_3, \dots$. Te sile na svakom elementu presjeka mogu imati drugi smjer i iznos. Dijeljenjem sile pripadnom ploštinom

elementa presjeka dobiva se prosječni vektor naprezanja. Tako je npr.

$$\bar{p}_{sr} = \frac{\Delta \vec{F}_i}{\Delta A_i} \quad (7a)$$

prosječno naprezanje na elementu ploštine ΔA_i oko točke T . Ako se promijeni ploština elementa presjeka ΔA_i , promijenit će se i iznos sile $\Delta \vec{F}_i$. Smanjivanjem ploštine zapravo se smanjuje iznos rezultante $\Delta \vec{F}_i$. Ako se ploština elementa presjeka ΔA_i stalno smanjuje preko niza $\Delta A'_i, \Delta A''_i, \Delta A'''_i, \dots$ tako da stalno obuhvaća točku T , tada će uz pripadne unutrašnje sile



Sl. 6. Definicija vektora naprezanja p , normalnog naprezanja σ i posmičnog naprezanja τ

$\Delta \vec{F}'_i, \Delta \vec{F}''_i, \Delta \vec{F}'''_i, \dots$ (sl. 6c) niz omjera $\Delta \vec{F}'_i/\Delta A'_i, \Delta \vec{F}''_i/\Delta A''_i, \Delta \vec{F}'''_i/\Delta A'''_i$ itd. težiti pravoj vrijednosti naprezanja \bar{p} u točki T , tj. bit će

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}. \quad (7b)$$

Vektor \bar{p} u općem slučaju nije okomit na presjek na kojem djeluje, nego s normalnom \vec{n} čini kut φ (sl. 6d).

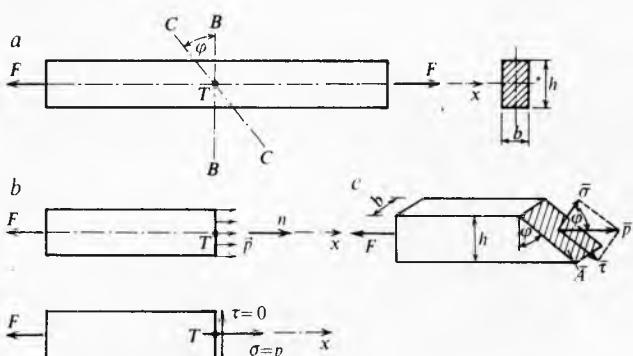
Komponente naprezanja. Vektor naprezanja može se rastaviti na dvije komponente: normalnu σ i posmičnu ili tangencijalnu τ . Te komponente iznose

$$\sigma = p \cos \varphi \quad i \quad \tau = p \sin \varphi, \quad (8)$$

gdje je $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ kut između vektora \bar{p} i normale \vec{n} .

Jedinica tlaka i naprezanja pascal (znak Pa) definirana je kao njutn po četvornom metru, $\text{Pa} = \text{N/m}^2$. Neki autori smatraju da bi pascal trebao biti samo jedinica tlaka, a jedinica naprezanja da bude njutn po četvornom metru.

Komponente naprezanja u nekoj točki tijela ovise između ostalog i o orijentaciji presjeka na kojem djeluju komponente. To se lako može vidjeti na primjeru štapa koji je opterećen dvjema silama (sl. 7). Kroz točku T postavljen je poprečni presjek $B-B$ i kosi presjek $C-C$. Na sl. 7b prikazan je lijevi dio štapa odvojen poprečnim presjekom. Ako se pretpostavi



Sl. 7. Komponente naprezanja ovise o orijentaciji presjeka. U poprečnom presjeku osno opterećenog štapa djeluje samo normalna komponenta naprezanja. U kosom presjeku djeluju normalna i posmična komponenta naprezanja

da je naprezanje jednako po čitavu presjeku, onda ono mora biti okomito na presjek, tj. paralelno sa silom. Uvjet ravnoteže za lijevi dio glasi

$$\Sigma F_x = -F + pA = 0, \quad (9)$$

gdje je pA rezultanta unutrašnjih sila na presjeku. Naime, p je sila na jediničnu ploštinu, a A ploštinu poprečnog presjeka. Iz (9) lako se može dobiti

$$p = \frac{F}{A}. \quad (10)$$

Naprezanje \bar{p} čini s okomicom \vec{n} kut $\varphi = 0$, pa je prema (8)

$$\sigma = p \quad i \quad \tau = 0. \quad (11)$$

Slika 7c prikazuje lijevi dio štapa odvojen kosim presjekom. Ploštinu kosog presjeka \bar{A} iznosi

$$\bar{A} = \frac{A}{\cos \varphi}, \quad (12)$$

gdje je $A = bh$ ploštinu poprečnog presjeka. Iz uvjeta ravnoteže za dio štapa na sl. 7c može se dobiti da je

$$\bar{p} = \frac{F}{\bar{A}} = \frac{F}{A} \cos \varphi, \quad (13)$$

odnosno s pomoću (10)

$$\bar{p} = \sigma \cos \varphi. \quad (14)$$

Komponente naprezanja u kosom presjeku iznose

$$\bar{\sigma} = \bar{p} \cos \varphi = \frac{F}{A} \cos^2 \varphi, \quad (15)$$

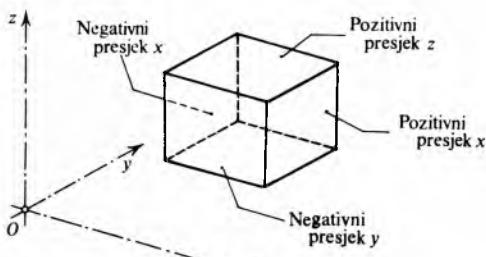
$$\bar{\tau} = \bar{p} \sin \varphi = \frac{F}{A} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Kad se (10) uvrsti u (15) i uzme u obzir (11), dobiva se

$$\bar{\sigma} = \sigma \cos^2 \varphi, \quad (16)$$

$$\bar{\tau} = \sigma \sin \varphi \cos \varphi.$$

Za svaku orientaciju presjeka kroz točku T dobit će se druge vrijednosti komponenata naprezanja. Kako se kroz promatranu točku može postaviti beskonačno mnogo presjeka, ima beskonačno mnogo parova komponenata naprezanja σ i τ koje opisuju isto stanje naprezanja u promatranoj točki. Međutim, ako su poznate komponente naprezanja za tri presjeka, može se pomoću izraza za transformaciju odrediti naprezanje u svim presjecima. Obično se stanje naprezanja zadaje komponentama naprezanja za tri međusobno okomita presjeka (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173).



Sl. 8. Definicija naziva i predznaka presjeka u vezi s koordinatnim sustavom

Uvođenjem koordinatnog sustava olakšava se rad s komponentama naprezanja i njihovo označivanje. Radi toga treba označiti pojedine presjek i komponente naprezanja koje djeluju na njima u skladu s odabranim koordinatnim sustavom. Presjeci su označeni na sl. 8. Presjek ima označku one koordinatne osi na koju je okomit. Ako je vanjska normala usmjerena u pozitivnom smjeru koordinatne osi, presjek je pozitivan, a ako je vanjska normala usmjerena suprotno od koordinatne osi, presjek je negativan. Komponente naprezanja označuju se sim-

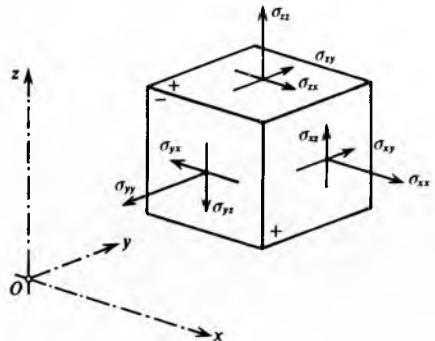
bolum σ sa dva indeksa (sl. 9). Prvi indeks označuje presjek na kojemu djeluje komponenta, a drugi koordinatnu os s kojom je komponenta naprezanja paralelna. Tako je npr. σ_{xy} komponenta naprezanja koja djeluje na presjeku x paralelno s osi y , a σ_{zz} je komponenta koja djeluje na presjeku z paralelno s osi z . Normalne komponente naprezanja imaju oba indeksa jednaka, a posmične komponente imaju različite indekse. Zbog toga nije potrebno uvoditi posebne oznake za normalne i posmične komponente. Ipak, u tehničkoj literaturi prevladava označivanje normalne komponente znakom σ s jednim indeksom, a posmične komponente znakom τ sa dva indeksa. Ako se želi označiti bilo koja komponenta naprezanja a ne neka posebna, pišu se indeksi ij . Umjesto indeksa ij mogu se upotrijebiti bilo koja dva mala latinska slova, osim slova x , y , z . Tako npr.

$$\begin{aligned} i &= x, y \text{ ili } z, \\ \sigma_{ij} & j = x, y \text{ ili } z, \end{aligned} \quad (17)$$

označuje bilo koju komponentu. Isti se znak upotrebljava da bi se označio skup svih komponenata naprezanja. Devet komponenata naprezanja mogu se složiti u kvadratnu matricu koja se skraćeno označuje $[\sigma_{ij}]$, tj.

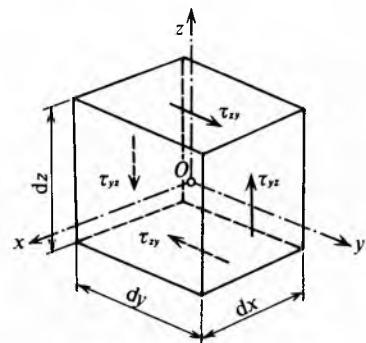
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Desna matrica je uobičajena u tehničkoj literaturi.



Sl. 9. Oznake komponenata naprezanja. Prvi indeks označuje presjek, a drugi smjer komponente

Predznak komponente naprezanja određen je ovim pravilima: a) komponenta je naprezanja pozitivna ako na pozitivnom presjeku djeluje u pozitivnom smjeru ili ako na negativnom presjeku djeluje u negativnom smjeru, b) komponenta je naprezanja negativna ako na pozitivnom presjeku djeluje u negativnom smjeru ili ako na negativnom presjeku djeluje u pozitivnom smjeru.



Sl. 10. Ravnoteža momenata oko osi x
uvjetuje da je $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Na sl. 10 prikazan je diferencijalni element obujma $dx dy dz$, a u njegovu središtu nalazi se ishodište koordinatnog sustava $Oxyz$. Na elementu su ucrtane samo komponente naprezanja koje čine moment oko osi x , tj. τ_{yz} i τ_{zy} . Komponente τ_{zx} i τ_{xy} paralelne su s osi x , a komponente σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} i τ_{xz} pro-

laze kroz os x , pa ne čine moment oko x . Ravnoteža momenata oko osi x glasi

$$\Sigma M_x = [\tau_{yz}(dxdz)]dy - [\tau_{zy}(dxdy)]dz = 0.$$

Okrugle zgrade označuju ploštinu, a uglate silu. Veličine izvan zagrade dy i dz su krakovi sprega sila. Ako se gornji izraz podijeli sa $dxdydz$, dobiva se

$$\tau_{yz} = \tau_{zx}. \quad (19)$$

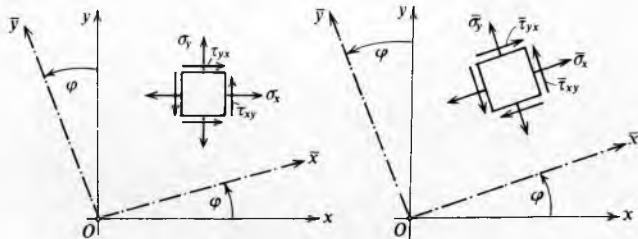
Na sličan način iz ravnoteže momenata oko osi y i z slijedi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad i \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (20)$$

Prema tome, matrica tenzora naprezanja je simetrična, tj. $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ji}]$.

Linearno, ravninsko i prostorno naprezanje. Pri promjeni presjeka mijenja se vektor naprezanja po smjeru i iznosu. Ako vektor naprezanja $\vec{\tau}$ uvijek leži na jednom pravcu, bez obzira na orientaciju presjeka, stanje naprezanja je linearno ili jednoosno. Ako pri promjeni presjeka vektor naprezanja uvijek leži u istoj ravnini, stanje naprezanja je ravninsko ili dvoosno. Ako vektor naprezanja u nekoj točki mijenja orientaciju u prostoru, stanje naprezanja je prostorno ili troosno.

Transformacija komponenata ravninskog stanja naprezanja. Komponente naprezanja ovise o izboru koordinatnog sustava. Ako su poznate komponente naprezanja u jednom koordinatnom sustavu, mogu se izrazima za transformaciju odrediti komponente naprezanja u bilo kojem koordinatnom sustavu; pri tom je potrebno poznavati kutove koje nove osi čine sa starim osima. Slika 11 prikazuje stari koordinatni sustav Oxy i novi sustav $O\bar{x}\bar{y}$, te dva elementa s ucrtanim naprezanjima. Jedan element odnosi se na stari koordinatni sustav i na njemu djeluju komponente σ_x , σ_y i $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Drugi element odnosi se na novi sustav i na njemu djeluju komponente $\bar{\sigma}_x$ (čita se: sigma iks potez), $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$.



Sl. 11. Transformacija komponenata naprezanja pri rotaciji koordinatnog sustava za kut φ

Izrazi za transformaciju mogu se izvesti razmatranjem ravnoteže elemenata na sl. 12b. Trokutni je element (sl. 12a) pravokutan, pa je

$$\frac{dx}{dy} = \sin\varphi \quad i \quad \frac{dy}{dx} = \cos\varphi, \quad (21a)$$

gdje su dx , dy i $d\bar{y}$ apsolutne vrijednosti duljina stranica trokuta. Uvjeti ravnoteže elementa za osi \bar{x} i \bar{y} glase:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{F}_x &= d\bar{y}\bar{\sigma}_x - (\sigma_x dy + \tau_{yx} dx)\cos\varphi - \\ &\quad - (\sigma_y dx + \tau_{xy} dy)\sin\varphi = 0, \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{F}_y &= d\bar{y}\bar{\tau}_{xy} - (\sigma_y dx + \tau_{xy} dy)\cos\varphi + \\ &\quad + (\tau_{xy} dx + \sigma_x dy)\sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Te izraze treba podijeliti sa dy , u njih uvrstiti (21a) i srediti uzimajući u obzir da je $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, pa će se dobiti

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi, \quad (22)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos\varphi \sin\varphi + \tau_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

To su izrazi za transformaciju dviju komponenata naprezanja. Izrazi za preostale dvije komponente mogu se dobiti na sličan način razmatranjem ravnoteže elementa na sl. 13. Ti izrazi glase:

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - 2\tau_{xy} \cos\varphi \sin\varphi, \quad (23)$$

$$\bar{\tau}_{yx} = -(\sigma_x + \sigma_y) \cos\varphi \sin\varphi + \tau_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Izrazi (23) mogu se dobiti iz izraza (22) ako se uzme da je

$$\bar{\sigma}_x \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \bar{\sigma}_y (\varphi) \quad i \quad \tau_{xy} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\tau_{yx} (\varphi) \text{ (sl. 14).}$$

Pomoću trigonometrijskih izraza $2\cos\varphi \sin\varphi = \sin 2\varphi$, $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$ i $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ mogu se izrazi (22) i (23) preinaciti u izraze

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \quad (24)$$

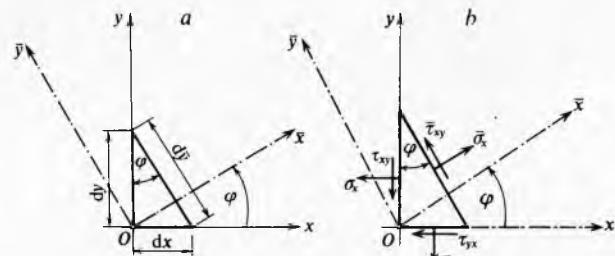
$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

Na temelju tih izraza lako se može uvjeriti da je

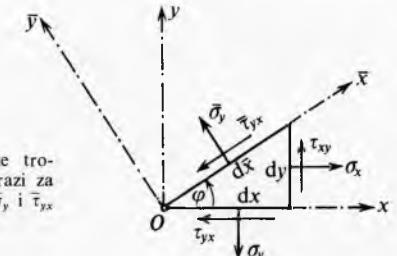
$$I_{1\sigma} = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.},$$

$$I_{2\sigma} = \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y - \bar{\tau}_{xy}^2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \text{const.},$$

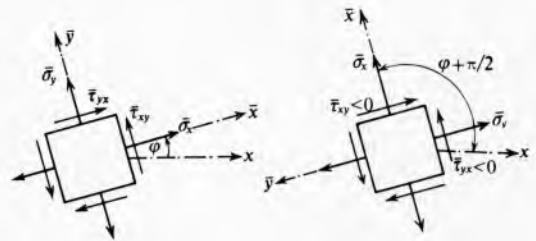
gdje su $I_{1\sigma}$ prva a $I_{2\sigma}$ druga invarijanta naprezanja.



Sl. 12. Iz uvjeta ravnoteže trokutnog elementa izvode se izrazi za transformaciju komponenata naprezanja $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$



Sl. 13. Na temelju ravnoteže trokutnog elementa izvode se izrazi za transformaciju komponenata $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$



Sl. 14. Pri rotaciji koordinatnog sustava za $\pi/2$ komponenta $\bar{\sigma}_x$ postaje $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_y$ postaje $\bar{\sigma}_x$, a $\bar{\tau}_{xy}$ postaje $-\bar{\tau}_{yx}$

Glavna naprezanja. U zadanoj su točki tijela komponente σ_x , σ_y i τ_{xy} konstante, pa su komponente $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$ funkcije samo kuta φ . Ako se okreće presjek, mijenjaju se $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$ kontinuirano. Nakon okreta za kut π rad vrijednosti normalne i posmješne komponente postaju jednakoj početnoj vrijednosti.

Za određeni položaj φ_0 normalna će komponenta σ_x poprimiti ekstremnu vrijednost. Kut φ_0 može se odrediti tako da se prva jednadžba izraza (24) derivira i zatim izjednači s nulom, tj.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \varphi} = 2 \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) = 2\tau_{xy}. \quad (26)$$

Kad ta derivacija postane jednaka nuli, bit će $\varphi = \varphi_0$ i jedno $\tau_{xy} = 0$. Prema tome na presjecima na kojima normalna komponenta naprezanja poprima ekstremnu vrijednost posmična je komponenta jednaka nuli. Iz uvjeta

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi_0 + \tau_{xy} \cos 2\varphi_0 = 0$$

dobiva se

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (27)$$

Kut $2\varphi_0$ ima dvije različite vrijednosti $2\varphi'_0$ i $2\varphi''_0$ koje se međusobno razlikuju za π rad, tj.

$$2\varphi''_0 = 2\varphi'_0 + \pi, \quad (28)$$

odnosno

$$\varphi''_0 = \varphi'_0 + \frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

Presjeci na kojima djeluju ekstremne vrijednosti normalne komponente naprezanja međusobno su okomiti. Kako je funkcija $\sigma_x = \bar{\sigma}_x(\varphi)$ neprekinuta i periodička s periodom π , jedna je ekstremna vrijednost maksimum, a druga minimum. Te ekstremne vrijednosti normalnog naprezanja zovu se *glavna naprezanja*, a pripadne normale *glavni pravci naprezanja*. Glavna naprezanja označuju se sa σ_1 i σ_2 , pri čemu je $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ i $\sigma_2 = \sigma_{\min}$. Vrijednosti glavnih naprezanja mogu se dobiti ako se φ_0 uvrsti u (24). Na temelju izraza (27) može se pisati

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi'_0 &= -\sin 2\varphi''_0 = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}, \\ \cos 2\varphi'_0 &= -\cos 2\varphi''_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Kad se izrazi (30) uvrste u prvu jednadžbu (24), dobiva se nakon sređivanja

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (31)$$

Mohrova kružnica naprezanja. Promjena komponenata naprezanja u nekoj točki tijela pri zakretanju presjeka kroz tu točku može se zorno prikazati pomoću tzv. Mohrove kružnice (O. Mohr, 1895). Prva i treća jednadžba izraza (24) mogu se napisati u obliku

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Ako se obje gornje jednadžbe kvadriraju pa zatim zbroje, dobit će se

$$\left(\bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \bar{\tau}_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (33)$$

U koordinatnom sustavu $O\sigma\tau$ izraz (33) predstavlja jednadžbu kružnice polumjera

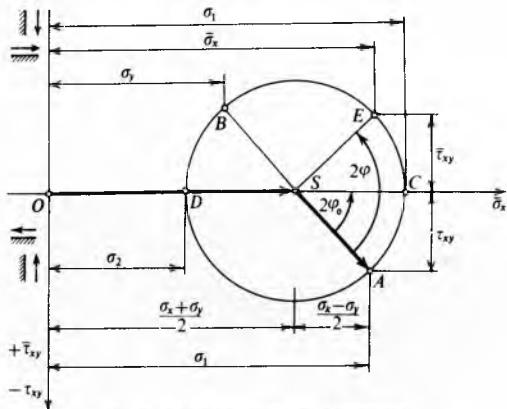
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \overline{SA}, \quad (34)$$

s središtem na osi σ . Središte S je udaljeno od ishodišta za iznos

$$\overline{OS} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (35)$$

Ta se kružnica zove Mohrova kružnica naprezanja (sl. 15).

Na svakom presjeku koji je određen kutom φ djeluju dvije komponente naprezanja σ_x i τ_{xy} koje određuju jednu točku Mohrove kružnice. Pri zakretanju presjeka za kut φ_1 opisat će točka po kružnici luk koji pripada kutu $2\varphi_1$. Ako se pozitivna os τ_{xy} usmjeri prema dolje (sl. 15), presjek će se zakretati i točka će se gibati po Mohrovoj kružnici u istom smjeru. Točke Mohrove kružnice koje definiraju stanje naprezanja na dva međusobno okomita presjeka nalaze se na kružnici dijagonalno suprotno, tj. razmaknute su za srednji kut 180° . Ako se jedna točka nalazi iznad osi σ_x , druga se nalazi ispod nje, tj. pripadna posmična naprezanja moraju imati suprotan predznak. Zbog toga se iznimno, radi prikaza na Mohrovoj kružnici naprezanja, uvodi posebna definicija o predznaku posmičnog naprezanja. Prema toj definiciji posmično je naprezanje pozitivno ako nastoji zakrenuti element na kojem djeluje u smjeru kazaljke na satu. Ako nastoji zakrenuti element suprotno, posmično naprezanje je negativno. Za normalna naprezanja dogovor o predznaku ostaje nepromijenjen, tj. vlačno naprezanje je pozitivno, a tlačno negativno.



Sl. 15. Mohrova kružnica naprezanja

Kako σ_x , ovisno o kutu φ , predstavlja sva normalna naprezanja, pa tako i σ_x i σ_y , ubičajeno je da se pri crtanju Mohrove kružnice os apscisa označuje sa σ , a os ordinata sa τ , jer τ_{xy} predstavlja sve posmične komponente. Iznad osi apscisa crtaju se komponente τ koje nastoje zakrenuti element u smislu kazaljke na satu.

Kad je stanje naprezanja zadano na ubičajeni način, tj. pomoću četiri komponente naprezanja: σ_x , σ_y i $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, koje se odnose na poznati koordinatni sustav, Mohrova kružnica naprezanja crta se ovako:

1) Skicira se element i na njemu ucrtaju zadane komponente naprezanja. Na elementu se označe dva presjeka velikim slovima, npr. A i B kao na sl. 16.

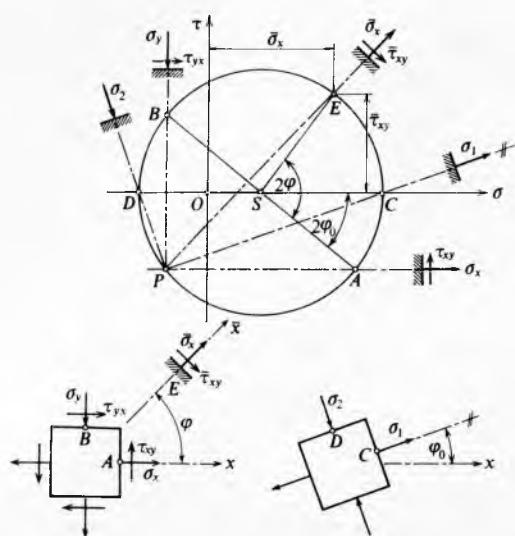
2) U koordinatnom sustavu $O\sigma\tau$ ucrtaju se točke $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ i $B(\sigma_y, \tau_{yx})$ koje odgovaraju presjecima A i B .

3) Konstruira se kružnica koja prolazi točkama A i B , a njen je središte S na osi σ . Središte S nalazi se u presjeku osi σ i dužine AB .

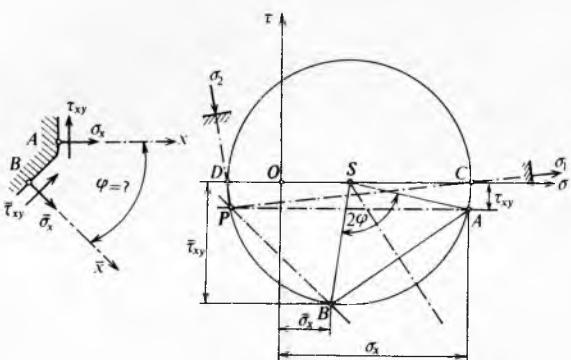
4) Apse presječista C i D Mohrove kružnice s osi apscisa predstavljaju glavna naprezanja σ_1 i σ_2 .

5) Pol normala P određuje se tako da se iz bilo koje točke na Mohrovoj kružnici povuče paralela s pripadnom normalom na elementu. Ta paralela sijeće kružnicu u točki P , koja predstavlja pol normala. Npr., kroz točku A na sl. 16 povlači se paralela s normalom u A na elementu, tj. s osi x . Kad je poznat pol P , mogu se lako odrediti pravci glavnih naprezanja. To su na sl. 16 pravci na kojima leže dužine PC i PD .

6) Komponente naprezanja na bilo kojem presjeku E određuju se tako da se iz P povlači paralela s normalom n_E . Ta paralela sijeće Mohrovu kružnicu u točki E kojoj apscisa i ordinata određuju naprezanja σ_x i τ_{xy} .



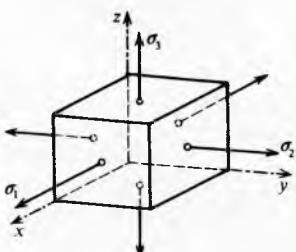
Sl. 16. Određivanje glavnih pravaca naprezanja i komponenata naprezanja na proizvoljnom presjeku pomoću Mohrove kružnice



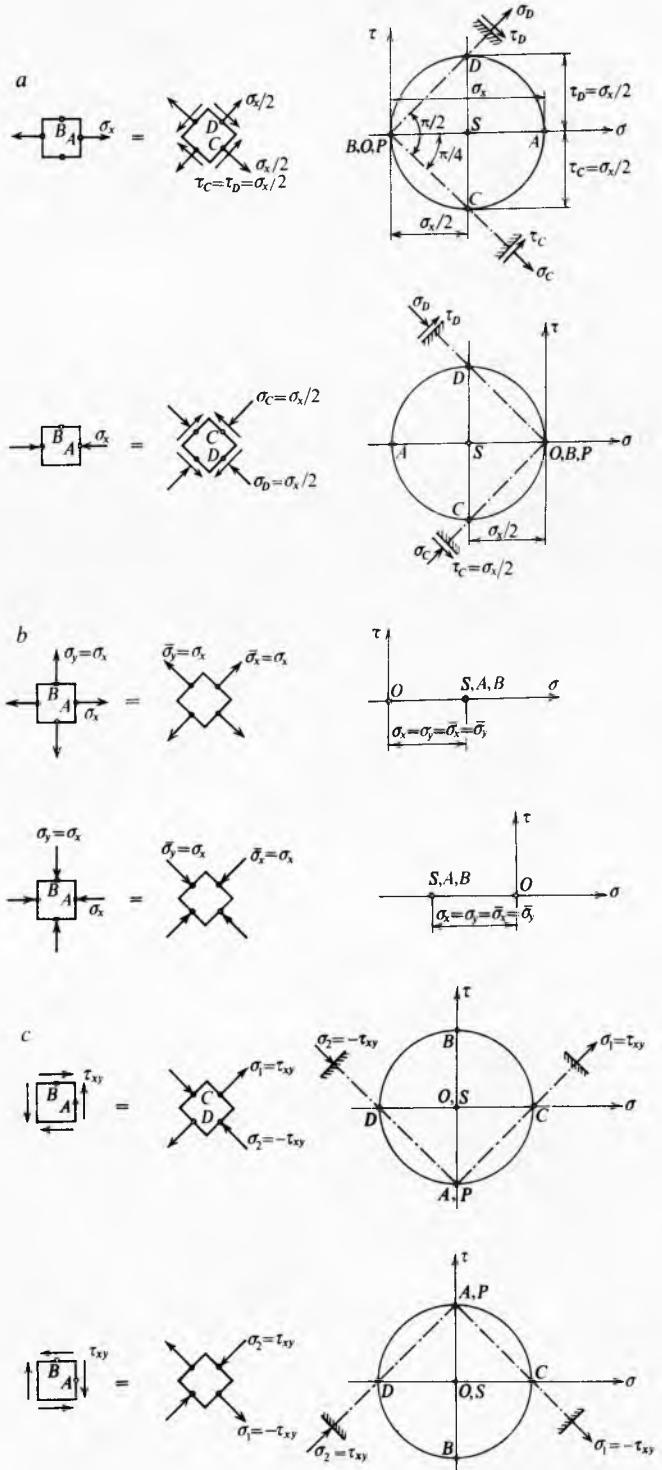
Sl. 17. Konstrukcija Mohrove kružnice kad su poznate komponente naprezanja na dva proizvoljna presjeka

Stanje naprezanja može biti zadano i na drugi način, npr. mogu biti zadane obje komponente naprezanja na svakom presjeku, dok kut među presjecima ne mora biti poznat. (Za potpuno poznavanje naprezanja na konkretnom elementu konstrukcije položaj jednog presjeka treba biti poznat.) Ako je poznat kut među presjecima, dovoljno je zadati samo tri komponente, npr. dva normalna naprezanja i samo jedno posmično naprezanje. Na sl. 17 prikazana je konstrukcija Mohrove kružnice kad su zadane komponente naprezanja, a kut među njima nije poznat. U sustavu $O\sigma\tau$ određe se točke $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ i $B(\sigma_y, \tau_{xy})$. Zatim se konstruira simetrala dužine AB . U presjeku sime traile i osi σ nalazi se središte kružnice S . Kad je određeno središte S i jedna točka kružnice, npr. točka A , određena je Mohrova kružnica. Na sl. 18 prikazane su Mohrove kružnice nekih karakterističnih stanja naprezanja.

Mohrova kružnica troosnog naprezanja. Na sl. 19 prikazan je element tijela na kojem djeluju tri glavna naprezanja σ_1 , σ_2 i σ_3 . Koordinatne osi tako su odabrane da se podudaraju s pravcima glavnih naprezanja. Ako se element presječe ravni-

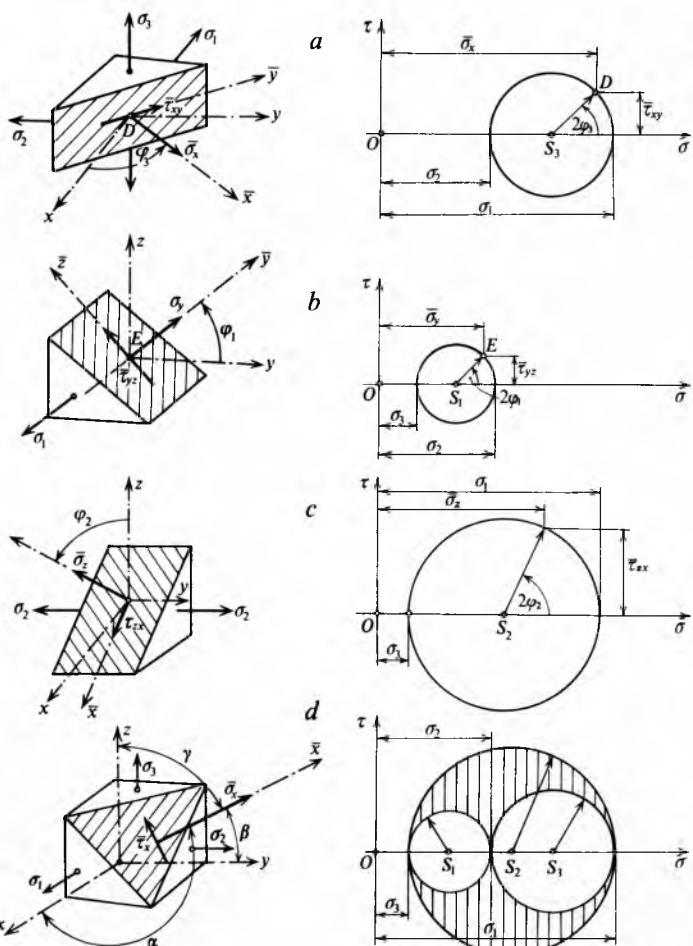


Sl. 19. Element tijela na koji djeluju tri glavna naprezanja σ_1 , σ_2 i σ_3



Sl. 18. Mohrove kružnice tipičnih stanja naprezanja. a) jednoosno vlačno (tlačno) naprezanje σ_x ekvivalentno je izotropnom vlačnom (tlačnom) naprezanju $\bar{\sigma}_x = \sigma_y = \sigma_x/2$ na kojoj je superponirano čisto smicanje $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} = \sigma_x/2$. Osi x, y čine s osima x, y kut od 45° ; b) pri izotropnom stanju naprezanja Mohrova kružnica naprezanja reducira se na točku. Normalno naprezanje je jednako na svim presjecima, dok je posmično naprezanje jednako nuli u svim presjecima; c) čisto smicanje τ_{xy} ekvivalentno je istodobnom vlačnom i tlačnom naprezanju intenziteta $\sigma_1 = -\sigma_2 = \pm \tau_{xy}$.

nom koja je paralelna s pravcem naprezanja σ_3 , dobit će se element prema sl. 20a. Naprezanje σ_3 ne utječe na ravnotežu elementa u smjeru osi x i y , pa za određivanje $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$ vrijede izrazi (24). Prema tome mogu se σ_x i τ_{xy} odrediti iz Mohrove kružnice kojoj su krajnje točke na osi σ određene sa σ_1 i σ_2 . Na sličan način može se zaključiti da su komponente naprezanja $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\sigma}_{yz}$ određene Mohrovom kružnicom kojoj su



Sl. 20. Objasnjenje konstrukcije Mohrove kružnice za troosno stanje naprezanja

krajnje točke definirane naprezanjima σ_2 i σ_3 . Komponente naprezanja u presjecima paralelnim sa σ_2 mogu se odrediti pomoću Mohrove kružnice koja leži između σ_1 i σ_3 (sl. 20c).

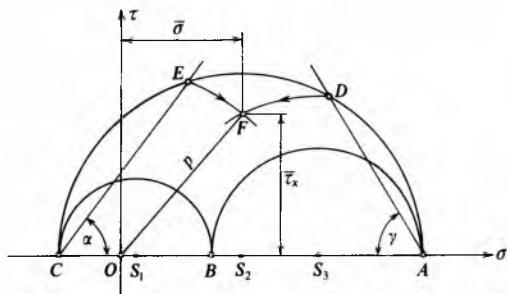
Ako je presjek proizvoljno orijentiran, kao na sl. 20d, može se pokazati da je stanje naprezanja definirano točkama koje leže unutar iscrtane površine između triju kružnica. Bilo koji kosi presjek definiran je pomoću tri kuta α , β i γ , koje čini normala na presjek s osima x , y i z . Dovoljno je zadati samo dva kuta, jer se treći može odrediti iz relacije

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (36)$$

Naprezanje u presjeku određeno kutovima α , β i γ određuje se na sljedeći način:

1) Konstruira se gornja polovica Mohrove kružnice troosnog naprezanja (sl. 21) i na njoj se označe točke $A(\sigma_1, 0)$, $B(\sigma_2, 0)$ i $C(\sigma_3, 0)$.

2) U točki A odmjeri se od osi σ kut γ . Drugi krak tog kuta sijeće kružnicu u točki D . U točki C odmjeri se kut α koji definira točku E .

Sl. 21. Određivanje naprezanja $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_x$ u proizvoljnom presjeku

3) Iz S_1 povlači se luk polujmra $\overline{S_1E}$, a iz S_3 luk polujmra $\overline{S_3D}$. Sjedište tih luka definira točku F . Apscisa točke F odgovara naprezanju $\bar{\sigma}_x$, a ordinata naprezanju $\bar{\tau}_x$. Dužina OF odgovara punom naprezanju $p = \sqrt{\bar{\sigma}_x^2 + \bar{\tau}_x^2}$.

Posmično naprezanje $\bar{\tau}_x$ je rezultanta od $\bar{\tau}_{xy}$ i $\bar{\tau}_{xz}$, tj.

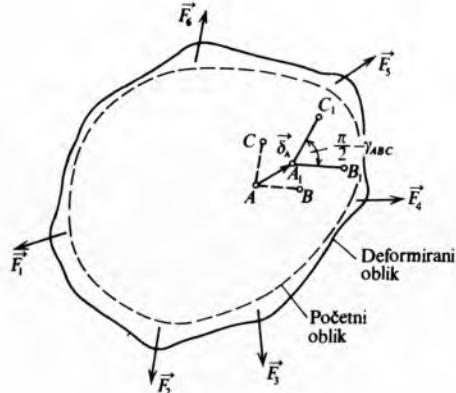
$$\bar{\tau}_x = \sqrt{\bar{\tau}_{xy}^2 + \bar{\tau}_{xz}^2}. \quad (37)$$

Mohrova kružnica za troosno stanje naprezanja može se konstruirati samo ako su zadana glavna naprezanja σ_1 , σ_2 i σ_3 .

DEFORMACIJA

Duljinska i kutna deformacija. Pod nazivom *deformiranje* tijela razumijeva se promjena oblika i obujma tijela. Najčešći su uzrok deformiranju tijela vanjska opterećenja, odnosno sile. Međutim, tijelo se može deformirati zbog promjene temperature, vlažnosti, promjene svoje strukture itd.

Deformacija je pak skup geometrijski definiranih veličina koje jednoznačno definiraju deformiranje beskonačno malog elementa tijela. Naime, za potpuno opisivanje deformiranja (beskonačno) malog elementa tijela potrebno je definirati devet veličina koje, ako se pogodno odaberu, tvore simetričan tenzor drugog reda (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173). Te su veličine duljinske i kutne deformacije.



Sl. 22. Ravninski model nastajanja duljinske i kutne deformacije

Radi jednostavnosti pojma duljinske i kutne deformacije bit će opisan pomoću ravninskog modela. Na sl. 22 crtanom linijom prikazan je početni oblik u dimenzije ravninskog modela. U točki A modela ucrteane su, također crticano, dvije međusobno okomite dužine \overline{AB} i \overline{AC} . Ako sada na model djeluju sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_6$, model će se povećati i deformirati, kako je prikazano punom linijom na istoj slici. Pri tom točke A , B i C prelaze u novi položaj A_1 , B_1 i C_1 . Dužine \overline{AB} i \overline{AC} mijenjaju svoju duljinu. Pravi kut BAC mijenja se u kut $B_1A_1C_1$. Ta promjena iznosi γ . S tim u vezi definiraju se srednje duljinske deformacije i srednja kutna deformacija:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB, sr} &= \frac{\overline{A_1B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}}, \\ \varepsilon_{AC, sr} &= \frac{\overline{A_1C_1} - \overline{AC}}{\overline{AC}}, \\ \gamma_{ABC, sr} &= \gamma_{ABC} - \gamma_{A_1B_1C_1}. \end{aligned} \quad (38)$$

Vrijednost tako definiranih deformacija ovisi o udaljenosti točaka B i C od točke A . Izrazi (38) predstavljaju srednje ili prosječne deformacije za čitavo područje dužina \overline{AB} i \overline{AC} . Što su točke B i C bliže točki A , to će vrijednosti srednjih deformacija biti bliže pravim vrijednostima deformacija u točki A . Pogodno je uvesti koordinatni sustav Oxy tako da je os x paralelna s dužinom \overline{AB} . Tada se prave deformacije u točki A definiraju izrazima:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{AB} = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\overline{A_1 B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}}, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{AC} = \lim_{C \rightarrow A} \frac{\overline{A_1 C_1} - \overline{AC}}{\overline{AC}}, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \gamma_{ABC} = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ C \rightarrow A}} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha A_1 B_1 C_1 \right).\end{aligned}\quad (39)$$

Prema tom izrazu duljinska deformacija predstavlja *relativno produljenje*. Ona je pozitivna ako se dužina produljuje, a negativna ako se ona skraćuje. Kutna je deformacija promjena prvobitno pravog kuta izražena u radijanima. Predznak kutne deformacije definira se u vezi s koordinatnim sustavom. Kutna deformacija je pozitivna ako se smanjuje kut u prvom i trećem kvadrantu, a povećava u drugom i četvrtom kvadrantu. Kad se, međutim, povećava kut u prvom kvadrantu, kutna je deformacija negativna.

Za trodimenzionalno tijelo mogu se definirati tri duljinske deformacije koje se odnose na tri međusobno okomite dužine, te šest kutnih deformacija $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ i $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Tako definirane kutne deformacije upotrebljavaju se u tehničkoj literaturi, pa se često nazivaju *tehničkim kutnim deformacijama* za razliku od tensorskih kutnih deformacija ε_{xy} , ε_{yz} i ε_{zx} koje su definirane sljedećim izrazima:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}. \quad (40)$$

Komponente deformacije predstavljaju komponente simetričnog tensora drugog reda kojima matrica glasi:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (41)$$

U prvoj su matrici tehničke, a u drugoj tensorske oznake.

Kako je deformacija simetričan tenzor drugog reda kao i naprezanje, svi izrazi izvedeni za naprezanje vrijedit će i za deformaciju ako se σ_x , σ_y i τ_{xy} zamijene sa ε_x , ε_y i $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$.

Tako izrazi za transformaciju komponenata deformacije, analogno izrazima (22) i (23), glase:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_x \sin^2 \varphi + \varepsilon_y \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \varphi \cos \varphi + \gamma_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

odnosno, analogno izrazu (24),

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi, \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi,\end{aligned}\quad (43)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi.$$

Glavne deformacije ε_1 i ε_2 određene su izrazom

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} [\varepsilon_x + \varepsilon_y \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}]. \quad (44)$$

Pravci glavnih deformacija određeni su kutom φ_0 za koji vrijedi relacija

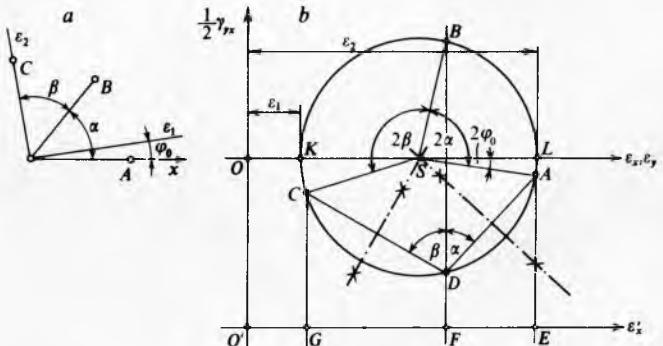
$$\tan 2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (45)$$

Mohrova kružnica deformacije. Umjesto izraza (42), (43), (44) i (45) može se upotrijebiti i Mohrova kružnica deformacije koja je potpuno analogna Mohrovoj kružnici naprezanja, samo

što se na ordinatnu os nanosi $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ umjesto τ_{xy} , a na apscisnu ε_x i ε_y umjesto σ_x i σ_y .

Primjena Mohrove kružnice deformacije bit će prikazana na primjeru određivanja glavnih deformacija kad su poznate tri duljinske deformacije u tri poznata pravca (sl. 23a).

Taj se problem često susreće kod mjerjenja naprezanja i deformacija pomoću elektrootpornih tenzometara (v. *Ispitivanje građevnih materijala i konstrukcija*, TE 6, str. 551; v. *Tenzometrija*).



Sl. 23. Određivanje glavnih deformacija pomoću Mohrove kružnice deformacije kad su poznate tri duljinske deformacije

Mohrova kružnica konstruira se tada na sljedeći način (sl. 23): u pomoćnom koordinatnom sustavu ε'_x , $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ s ishodištem

u točki O' označe se točke E , F , G kojima apscise iznose ε_A , ε_B i ε_C i u tim točkama podižu okomice na pomoćnu os ε'_x . Odabire se proizvoljna točka D na okomici kroz F . Iz te točke povlače se pravci koji s okomicom kroz F čine kutove α i β (sl. 23b). Presjecišta tih pravaca s okomicama kroz E i G određuju točke A i C . U presjecištu simetrala dužina DA i DC nalazi se središte S Mohrove kružnice. Sada se opiše kružnica kroz točke C , D i A . Okomica u F sijeće kružnicu u točki B , dok je $\angle ASB = 2\alpha$ i $\angle BSC = 2\beta$. Točke K i L definiraju glavne deformacije ε_1 i ε_2 . Pravac ε_1 otklonjen je od pravca ε_A za kut φ_0 suprotno od kazaljke na satu.

Obujamna deformacija. Obujamna ili volumenska deformacija definirana je kao relativna promjena obujma, tj.

$$\vartheta = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V}, \quad (46)$$

gdje je V početni obujam elementa, a ΔV njegova promjena. Obujamna je deformacija u nekoj točki tijela pozitivna ako obujam elementa u okolisu točke raste pri deformiranju. Ako obujam opada, obujamna je deformacija negativna.

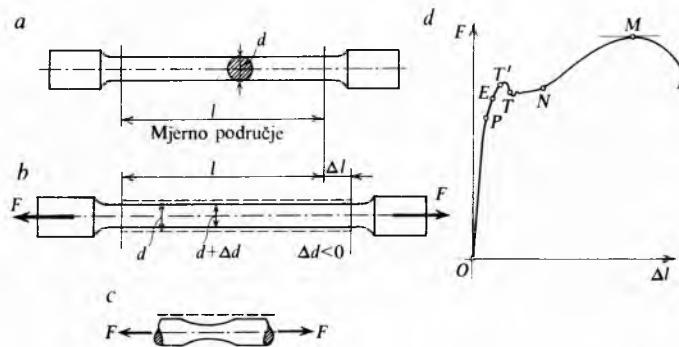
U području malih deformacija, reda veličine 0,001, obujamna je deformacija jednaka približno zbroju duljinskih deformacija za tri međusobno okomite osi, tj.

$$\vartheta \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (47)$$

Obujamna je deformacija prema tome jednaka prvoj invariјanti tensora malih deformacija.

MEĐUSOBNA OVISNOST NAPREZANJA I DEFORMACIJE

Dijagram rastezanja. Deformacije očito ovise o naprezanjima. Pri povećanju opterećenja rastu naprezanja, ali istodobno rastu i deformacije tijela. Osim o naprezanjima, deformacije ovise i o deformabilnosti tijela. Gumeni se štap mnogo više produljuje od jednakog metalnog štapa ako su opterećeni jednakim silama, pa prema tome u njima djeluju jednakata naprezanja. Svojstva deformabilnosti tijela ispituju se pokusima: rastezanja, sabijanja, smicanja, jednolikoga troosnog sabijanja i drugim. Takvi se pokusi provode na standardnim uzorcima, tzv. epruvetama. Najčešće se provodi pokus rastezanja, pa će pokus



Sl. 24. Pokus rastezanja niskougljičkog čelika. a oblik epruvete, b početno deformiranje epruvete, c pojave vrata na epruveti, d dijagram ovisnosti sile i produženja

rastezanja epruvete od niskougljičkog čelika biti podrobnije opisan. Rastezna epruveta prikazana je na sl. 24a. Mjerni dio epruvete ima duljinu l i promjer d . Epruveta je tako oblikovana da su u mjernom dijelu naprezanje i deformacije jednoliko raspodijeljeni po presjeku i čitavoj mjernoj duljini. Kad se epruveta optereti na rastezanje silom F , produžiti će se za iznos Δl , a istodobno će se promjer smanjiti za iznos Δd . Do određene vrijednosti sile F produženje Δl proporcionalno je sili, tj. ovisnost F i Δl je linearna. Pri daljem opterećenju ovisnost Δl o sili F postaje nelinearna (sl. 24d). Dijeljenjem sile F početnom ploštinom A_0 dobiva se konvencionalno naprezanje

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0}, \quad (48a)$$

koje se razlikuje od stvarnog naprezanja

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (48b)$$

gdje je A stvarna ploština poprečnog presjeka. Pri rastezanju je $A < A_0$, pa je $\sigma > \sigma_0$. Pri sabijanju povećava se poprečni presjek, pa je $\sigma < \sigma_0$. Ako se produženje Δl podijeli početnom duljinom l , dobiva se prosječna relativna deformacija mjernog dijela epruvete. To je ujedno i prava deformacija, jer su deformacije jednoliko raspodijeljene po duljini l , tj.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (49)$$

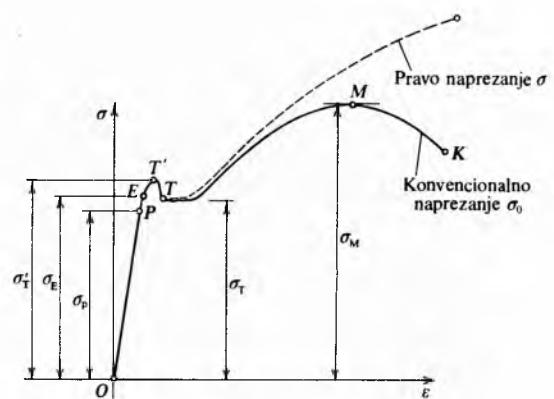
Ta se deformacija zove *uzdužna duljinska deformacija*, za razliku od *poprečne duljinske deformacije*

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}, \quad (50)$$

gdje je d početni promjer epruvete, a Δd promjena tog promjera.

Dijagram na sl. 24 predstavlja u nekom drugom mjerilu također ovisnost konvencionalnog naprezanja σ_0 o prosječnoj deformaciji ε , kako je prikazano na sl. 25. Na dijagramu se uočavaju karakteristične vrijednosti naprezanja: granica proporcionalnosti σ_p , granica elastičnosti σ_E , gornja granica tečenja σ'_T , donja granica tečenja σ_T i vlačna čvrstoća σ_M . Dok je naprezanje manje od granice proporcionalnosti σ_p , ovisnost je naprezanja i deformacije linearna. Kad naprezanje postane veće od σ_p , ovisnost postaje nelinearna, ali se materijal i dalje ponaša elastično, tj. nakon rasterećenja epruveta se vraća u prvobitni oblik i dimenzije. Kad naprezanje premaši granicu elastičnosti, materijal se počinje ponašati neelastično ili plastično, tj. nakon rasterećenja u materijalu zaostaju trajne ili plastične deformacije. Kad naprezanje dostigne gornju granicu tečenja σ'_T , naglo opada na vrijednost σ_T ; deformacije dalje rastu bez povećanja sile, odnosno naprezanja. Nakon određene deformacije konvencionalno naprezanje ponovno raste, dostiže maksimalnu vrijednost σ_M , a zatim opada dok se epruveta ne slomi.

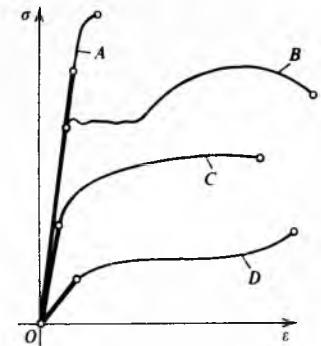
Produženje epruvete prati poprečno skupljanje, odnosno smanjenje promjera. Do pojave tečenja materijala poprečno je



Sl. 25. Dijagram rastezanja niskougljičnog čelika

skupljanje jednoliko po čitavoj duljini. Kad se naprezanje približi granici tečenja, počinje naglo suženje i pojavljuje se vrat epruvete (sl. 24c). Do pojave vrata naprezanja i deformacije jednoliko su raspodijeljeni u epruveti. Nakon pojave vrata, naprezanja i deformacije u blizini vrata su veći od naprezanja i deformacija u ostalom dijelu epruvete. Do pojave vrata konvencionalno i stvarno naprezanje neznatno se razlikuju. Nakon pojave vrata ta se naprezanja (σ i σ_0) sve više razlikuju, pa omjer $\Delta l/l$ predstavlja samo prosječnu, a ne pravu deformaciju. Ovisnost pravog naprezanja σ o deformaciji ε prikazana je crtano na sl. 25.

Dijagrami rastezanja različitih tehničkih materijala vrlo su različiti po obliku i vrijednostima naprezanja. Međutim, svi se dijagrami mogu svrstati u četiri osnovne grupe koje su prikazane na sl. 26. (Više o elastičnim, plastičnim i viskoelastičnim materijalima v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173; v. *Otpornost građevnih materijala*).



Sl. 26. Tipovi dijagrama rastezanja tehničkih materijala. A krhki materijali: legirani čelik, staklo, lijevano željezo itd., B konstrukcijski čelik, C rastezljivi ili duktilni materijali, D polimerni materijali

Hookeov zakon. Za sve vrste dijagrama rastezanja (sl. 26) postoji područje proporcionalnosti naprezanja i deformacija. Ta su područja na dijagramu izvučena debljom linijom. U tom je području poprečna deformacija ε_q proporcionalna uzdužnoj deformaciji ε i u svakom je suprotni predznaka. Te su dvije zakonitosti prikazane izrazima:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{i} \quad \varepsilon_q = -v \varepsilon. \quad (51)$$

Konstante proporcionalnosti E i v u svakom su pozitivne i nazivaju se *Youngov modul elastičnosti* i *Poissonov omjer* ili *koefficijent*. Modul elastičnosti E ima dimenziju naprezanja, pa mu je jedinica paskal. Poissonov omjer (koefficijent) v je bezdimenzijska veličina. Za izotropne je materijale Poissonov omjer $0 < v < 0,5$, a za većinu je metala $v \approx 0,3$.

Izraz (51) predstavlja Hookeov zakon za jednoosno naprezanje. Pokusi sabijanja daju slične dijagrame kao i pokusi rastezanja, pa Hookeov zakon vrijedi i za tlačna naprezanja.

Na sl. 27 prikazani su dijagrami smicanja za tri tipična materijala: legirani čelik, meki čelik i bakar. U tim dijagramima postoji područje linearnosti, što se prikazuje izrazom

$$\tau = G \gamma, \quad (52)$$

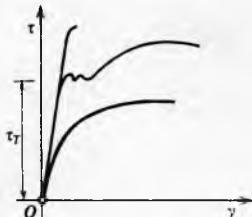
gdje je G modul smičnosti (smicanja) ili modul klizanja. Izraz (52) predstavlja Hookeov zakon za čisto smicanje.

Pri pokusu jednolikog troosnog sabijanja, odnosno hidrostatičkom tlačenju tlakom p , mjeri se relativna promjena obujma, odnosno obujamna (volumenska) deformacija ϑ ovisno o tlaku p . U elastičnom području obujamna deformacija linearno je ovisna o tlaku p , pa vrijedi izraz

$$\vartheta = -\frac{p}{K}. \quad (53)$$

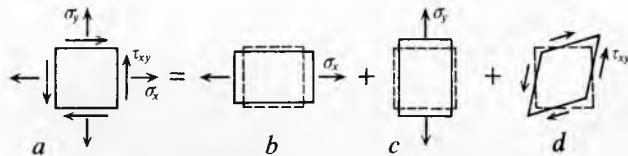
U tom se izrazu pojavljuje negativan predznak jer hidrostatički tlak uzrokuje negativno naprezanje u uzorku. Konstanta K naziva se modul slijaljivosti (kompresibilnosti) ili obujamni (volumenski) modul elastičnosti. Od četiri konstante elastičnosti E , G , K i v za izotropne materijale samo su dvije međusobno nezavisne. Među njima postoje sljedeće veze:

$$G = \frac{E}{2(1+v)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2v)}. \quad (54)$$



Sl. 27. Dijagrami smicanja

Hookeov zakon za ravninsko stanje naprezanja. Dok se materijal ponaša elastično i dok su deformacije malene, smije se primjeniti princip superpozicije, tj. princip nezavisnosti djelovanja sila, odnosno naprezanja. Na sl. 28 prikazan je element tijela u kojem vrlada ravninsko stanje naprezanja.



Sl. 28. Ravninsko stanje naprezanja

To se stanje naprezanja može prikazati kao zbroj jednoosnog naprezanja u smjeru osi x (sl. 28b), jednoosnog naprezanja u smjeru osi y (sl. 28c) i čistog smicanja (sl. 28d). Prema sl. 28b komponente deformacije iznose

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{\sigma_x}{E}, & \varepsilon'_y &= -\frac{v}{E} \sigma_x, \\ \gamma'_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Za element prema sl. 28c vrijedi

$$\varepsilon''_x = -\frac{v}{E} \sigma_y, \quad \varepsilon''_y = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \gamma''_{xy} = 0, \quad (56)$$

dok je za element prema sl. 28d

$$\varepsilon'''_x = \varepsilon'''_y = 0, \quad \gamma'''_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (57)$$

Deformacije za element na sl. 28a dobit će se zbrajanjem deformacija u relacijama (55), (56) i (57):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y, \\ \gamma_{xy} &= \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} + \gamma'''_{xy}, \end{aligned} \quad (58)$$

odnosno

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v}{E} \sigma_y,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v}{E} \sigma_x, \quad (59)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+v)}{E} \tau_{xy}.$$

Izraz (59) u matričnom zapisu glasi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Izraz (59) pogodan je za izračunavanje komponenata deformacije kad je poznato naprezanje. Ako je poznata deformacija, a traže se komponente naprezanja, dobivaju se iz izraza (59) relacije:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_x + v \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_y + v \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+v)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (61)$$

što u matričnom zapisu glasi

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Za opće troosno stanje naprezanja mogu se analognim razmatranjem dobiti izrazi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - v(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - v(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (63)$$

Komponente deformacije prikazane su kao funkcije naprezanja. Ako se pak komponente naprezanja prikažu kao funkcije deformacije, bit će

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+v} \left(\varepsilon_x + \frac{v}{1-2v} \vartheta \right), & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+v} \left(\varepsilon_y + \frac{v}{1-2v} \vartheta \right), & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+v} \left(\varepsilon_z + \frac{v}{1-2v} \vartheta \right), & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (64)$$

gdje je $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ obujamna deformacija.

Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacije. Za ravninsko stanje deformacije vrijedi $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0$, što uvršteno u (63) daje

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - v(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \sigma_z &= -v(\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \quad (65)$$

Ako se treća jednadžba ovog izraza uvrsti u prvu i drugu jednadžbu, nakon sređivanja dobiva se

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-v^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{v}{1-v} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-v^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{v}{1-v} \sigma_x \right). \quad (66) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.\end{aligned}$$

Uvođenjem oznaka za reducirane konstante elastičnosti

$$E^* = \frac{E}{1-v^2}, \quad v^* = \frac{v}{1-v}, \quad G^* = G \quad (67)$$

dobiva se

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E^*} (\sigma_x - v^* \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E^*} (\sigma_y - v^* \sigma_x), \quad (68) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G^*} = \frac{2(1-v^*)}{E} \tau_{xy}.\end{aligned}$$

Izrazi (66) i (68) predstavljaju Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacije. Analogno izrazu (61), može se izraz (68) napisati u obliku

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-(v^*)^2} (\varepsilon_x + v^* \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E^*}{1-v^*} (\varepsilon_y + v^* \varepsilon_x), \quad (69) \\ \tau_{xy} &= G^* \gamma_{xy}.\end{aligned}$$

Dopušteno i proračunsko naprezanje, koeficijent sigurnosti. U tabl. 1 navedeni su podaci o konstantama elastičnosti, a u tabl. 2 mehanička svojstva važnijih tehničkih materijala. Navedeni podaci samo su prosječne vrijednosti. Stvarne vrijednosti za konkretni materijal mogu se razlikovati od navedenih. Takvi podaci služe pri dimenzioniranju tehničkih konstrukcija. Jedno je od bitnih pitanja pri dimenzioniranju: koliko je najveće naprezanje koje se smije pojavit u dijelu što ga treba dimenzionirati?

Da bi se odgovorilo na to pitanje, uvodi se pojam *stvarnog naprezanja i proračunskog naprezanja*. Stvarno je naprezanje ono koje se u konstrukciji pojavljuje u toku rada konstrukcije, dok je proračunsko naprezanje ono koje se očekuje da će se pojavit u konstrukciji na temelju predviđenog opterećenja i proračuna. Proračunsko naprezanje razlikuje se od stvarnoga. Za to postoji više razloga. Često je tome uzrok nedovoljno poznavanje opterećenja koje će djelovati na konstrukciju. Teško je, naime, računski odrediti sile koje djeluju, npr., na avionsko krilo, oplatu broda koji plavi na uzborkanu moru ili na osovinu pri vožnji na neravn putu. Drugi je uzrok u izboru proračunske sheme, pri čemu se mnogi detalji zanemaruju. Treći je uzrok ograničena točnost izraza koji se upotrebljavaju u nauci o čvrstoći.

Tablica 1
ELASTIČNE KONSTANTE MATERIJALA

| Materijal | Youngov modul elastičnosti E GPa | Modul smičnosti G GPa | Poissonov omjer v |
|-----------------------|----------------------------------|-----------------------|-------------------|
| Ugljični čelik | 200...210 | 80...81 | 0,24...0,28 |
| Legirani čelik | 210...220 | 80...81 | 0,25...0,30 |
| Lijevano željezo | 115...160 | 45 | 0,25...0,27 |
| Bakar | 84...130 | 40...49 | 0,31...0,34 |
| Bronca | 105...115 | 40...42 | 0,32...0,35 |
| Mjed | 90...120 | 35...37 | 0,32...0,42 |
| Aluminij i Al slitine | 70...71 | 26...27 | 0,32...0,36 |
| Magnezij i Mg slitine | 45 | 17 | |
| Olovo | 17 | 7 | 0,42 |
| Staklo | 56 | 22 | 0,25 |
| Beton | 15...40 | | 0,08...0,18 |
| Guma | 0,01 | | 0,47 |
| Pluto | 0,06 | | 0,00 |

toči. Osim toga, u konstrukciji mogu postojati početna, montažna ili toplinska naprezanja koja su najčešće nepoznata. Zbog toga je proračunsko naprezanje samo procjena stvarnog naprezanja.

Stvarno naprezanje očito mora biti manje od čvrstoće materijala, inače bi se konstrukcija slomila. Međutim, vrlo se često ne smije dopustiti pojave ni najmanje plastične deformacije. Točnost izradbe pojedinih strojnih dijelova izražava se desetinkama ili stotinkama milimetra. Takva bi točnost bila nepotrebna kad bi se stroj u radu plastično deformirao makar za desetinku milimetra. Prema tome, treba osigurati da stvarno naprezanje u duktilnim materijalima bude manje od granice tečenja σ_T , a kod krvkih materijala mnogo manje od čvrstoće materijala σ_M ili τ_M . Budući da stvarno naprezanje može biti veće od proračunskog, treba osigurati da maksimalno proračunsko naprezanje bude manje od dopuštenog naprezanja σ_{dop} odnosno τ_{dop} . Dopušteno naprezanje krvkih materijala definira se izrazima

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_M}{S}, \quad \tau_{dop} = \frac{\tau_M}{S}. \quad (70)$$

Kod duktilnih je materijala dopušteno naprezanje

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_T}{S}, \quad \tau_{dop} = \frac{\tau_T}{S}, \quad (71)$$

gdje su σ_M vlačna, odnosno tlačna čvrstoća, τ_M smična čvrstoća, σ_T granica tečenja i τ_T smična granica tečenja materijala, a S je koeficijent sigurnosti. Koeficijent sigurnosti uvijek je veći od jedinice, najčešće je $1,5 \leq S \leq 2,5$, ali može biti i $S > 10$.

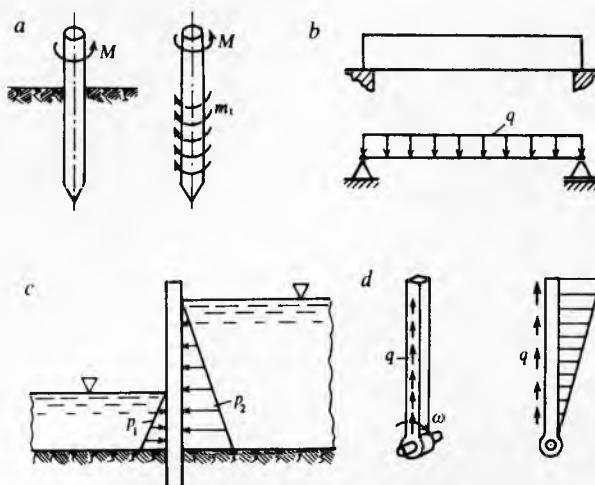
Izbor koeficijenta sigurnosti ovisi o mnogim okolnostima, između ostalog o poznavanju opterećenja, o opasnosti za ljudski život, o važnosti konstrukcije itd.

Tablica 2
MEHANIČKA SVOJSTVA MATERIJALA

| Materijal | Granica proporcionalnosti MPa | | | Čvrstoća MPa | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|--------|--------|--------------|--------|--------|
| | vlačna | tlačna | smična | vlačna | tlačna | smična |
| Ugljični čelik, 0,2% C | 210 | 240 | 145 | 410 | 620 | 310 |
| 0,6% C | 410 | 410 | 250 | 690 | 550 | |
| 1,0% C | 550 | 550 | 330 | 930 | 790 | |
| Čelični lijev, odžaren, 0,2% C | 210 | 210 | 125 | 410 | | 310 |
| Sivi lijev | 42 | 170 | 140 | | 550 | |
| Kovkasti lijev | 140 | 140 | 70 | 345 | | 275 |
| Bakar { odžaren | 22 | 22 | 13 | 220 | | |
| tvrdi | | | | | | |
| vučen | 260 | 260 | 160 | 380 | | |
| Mjed, lijevana, 60% Cu, 40% Zn | 140 | | | 350 | | |
| Bronca, lijevana, 90% Cu, 10% Sn | 140 | | | 280 | | |
| Aluminij { odžaren | | | | 70 | | |
| tvrdi | | | | | 130 | |
| valjan | | | | | | |
| Duraluminij, 96% Al, 2,9% Cu, 1% Mg | 50 | | | 170 | | |
| žareni, temperirani | 130 | | | 350 | | |

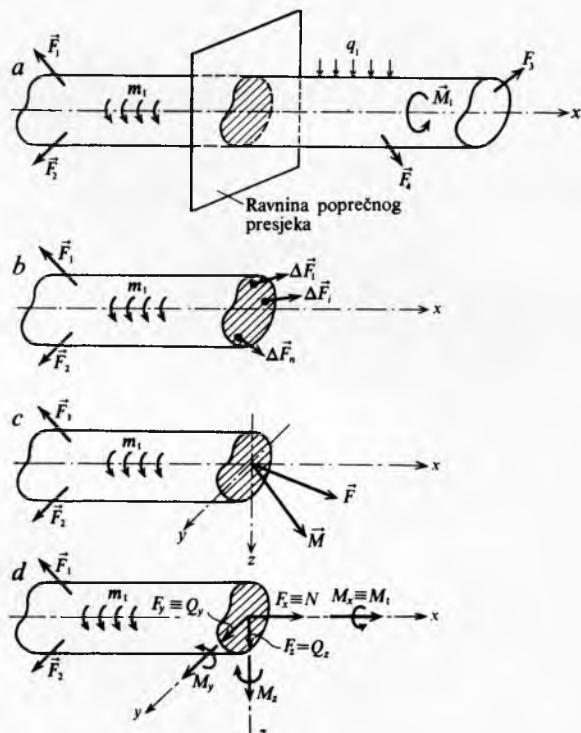
UNUTRAŠNJE SILE U POPREČNOM PRESJEKU ŠTAPA

Vrste opterećenja konstrukcije. U vanjsko opterećenje konstrukcija ubrajaju se aktivna opterećenja i reakcije veza. Opterećenje može biti u obliku koncentrirane sile F , koncentriranog momenta M , linijski raspodijeljene sile q , koja se obično naziva kontinuiranim opterećenjem, linijski raspodijeljenog sprega m , površinski raspodijeljene sile p , tj. tlaka itd. Kontinuirana opterećenja mogu biti jednolika, mogu se mijenjati linearno ili prema kojem drugom zakonu. Na sl. 29 prikazane su neke vrste opterećenja.



Sl. 29. Neke vrste opterećenja štapa. a) kontinuirano opterećenje na uvijanje, b) jednoliko kontinuirano opterećenje, c i d) trokutno kontinuirano opterećenje

Opći slučaj opterećenja štapa. Na sl. 30 prikazan je ravni opterećeni štap. Neka je štap u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila. Ako se štap presijeće na bilo kojem mjestu, lijevi i desni dio neće biti u ravnoteži pod djelovanjem samo vanjskih sila, pa se na mjestu presjeka neminovno moraju pojavit uutrašnje sile $\Delta\vec{F}_i$ (sl. 30b). Te se sile mogu reducirati na težište poprečnog presjeka, pa će se dobiti rezultanta unutrašnjih sili \vec{F} i rezultirajući moment \vec{M} (sl. 30c). U daljoj analizi uvođe se koordinatni sustav $Oxyz$ tako da se os x podudara s osi štapa. Tada rezultanta \vec{F} ima tri komponente F_x , F_y i F_z . Komponenta F_x zove se *normalna ili uzdužna sila* (normalna na presjek, odnosno paralelna s uzdužnom osi štapa) i označuje se N . Komponente F_y i F_z nazivaju se *poprečne sile* i označuju se Q_y i Q_z . Komponenta momenta M_x uzrokuje uvijanje štapa, pa se zove *moment uvijanja ili moment torzije* i označuje se M_t . Komponente M_x i M_y zovu se *momenti savijanja*.



Sl. 30. Definicija komponenata unutrašnjih sili

U širem smislu riječi pod pojmom komponente unutrašnjih sili podrazumijevaju se normalna sila N , poprečne sile Q_y i Q_z , moment uvijanja M_t te momenti savijanja M_y i M_z . Osim

naziva komponente unutrašnjih sili upotrebljava se i naziv *presječne sile*, odnosno *presječni momenti*. Na potpuno isti način definiraju se komponente unutrašnjih sili i kad štap nije u ravnoteži.

Na temelju razmatranja ravnoteže presječnih dijelova mogu se dati sljedeće definicije:

a) Normalna ili uzdužna sila N u nekom presjeku štapa jednaka je po absolutnoj vrijednosti algebarskom zbroju uzdužnih komponenata svih vanjskih sila koje djeluju s jedne strane presjeka.

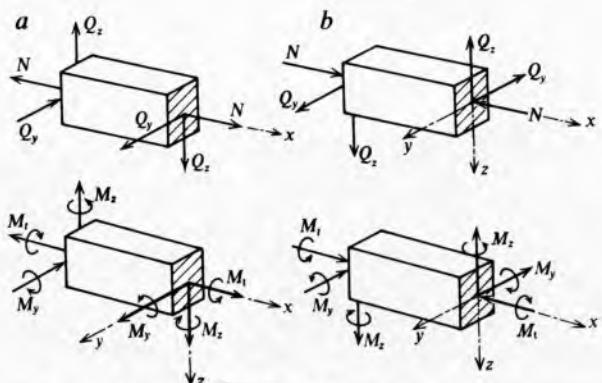
b) Poprečna sila Q_y jednaka je po absolutnoj vrijednosti algebarskom zbroju poprečnih y -komponenata svih vanjskih sila s jedne strane presjeka. Analogna definicija vrijedi i za poprečnu silu Q_z .

c) Moment savijanja M_t , jednak je po absolutnoj vrijednosti algebarskom zbroju momenata svih vanjskih sila i spregova što djeluju s jedne strane. Momenți se računaju s obzirom na os y koja prolazi težištem poprečnog presjeka. Analogna definicija vrijedi i za moment M_z .

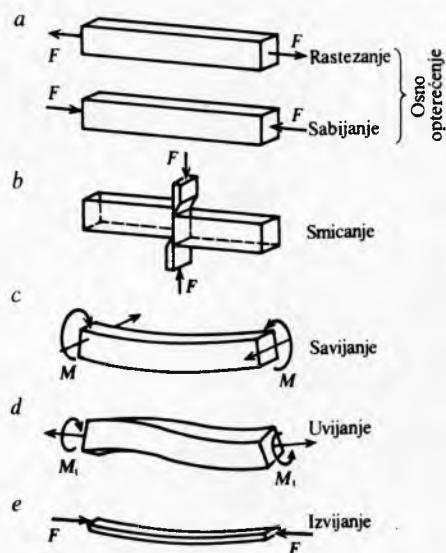
d) Moment uvijanja M_t u nekom presjeku štapa jednak je po absolutnoj vrijednosti algebarskom zbroju momenata svih sili koje djeluju s jedne strane presjeka. Momenți se računaju s obzirom na os x koja prolazi težištem presjeka.

Predznak komponenta unutrašnjih sili definira se na isti način kao i predznak komponenta naprezanja: komponenta je unutrašnjih sili pozitivna ako na pozitivnom presjeku djeluje u pozitivnom smjeru, odnosno ako na negativnom presjeku djeluje u negativnom smjeru. Na sl. 31a prikazane su pozitivne, a na sl. 31b negativne komponente unutrašnjih sili.

Analiza naprezanja i deformacija u proizvoljno opterećenom štalu vrlo je složena, pa se posebno analiziraju pojedine vrste opterećenja štapa. Na sl. 32 prikazane su osnovne vrste opterećenja.



Sl. 31. Komponente unutrašnjih sili: a) pozitivne, b) negativne



Sl. 32. Osnovni načini opterećenja štapa

čenja štapa: osno opterećenje, smicanje, savijanje i uvijanje. Posebno se razmatra izvijanje tlačno opterećenih vitkih štapova.

Diferencijalne jednadžbe ravnoteže elementa štapa. Ako je štap proizvoljno opterećen, komponente unutrašnjih sile mijenjaju se od presjeka do presjeka, tj. one su funkcije od x , pa vrijede relacije $N = N(x)$, $Q_y = Q_y(x)$, $Q_z = Q_z(x)$, $M_t = M_t(x)$, $M_y = M_y(x)$ i $M_z = M_z(x)$.

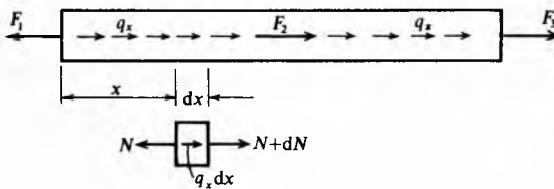
Zakon promjene unutrašnjih sila ovisi o načinu promjene opterećenja. Ta se ovisnost može dobiti razmatranjem ravnoteže diferencijalnog elementa štapa. Radi jednostavnosti razmatrat će se odvojeno pojedini osnovni slučajevi opterećenja. Pri razmatranju ravnoteže birat će se elementi na koje ne djeluju koncentrirana opterećenja, pa će izvedeni izrazi vrijediti za područja između dva koncentrirana opterećenja.

Osnovno opterećenje. Pri takvu opterećenju štap može biti opterećen samo koncentriranim silama paralelnim s osi x i kontinuiranim opterećenjem q_x (sl. 33). Ako u presjeku x normalna sila ima vrijednost N , u presjeku $x + dx$ imat će vrijednost $N + dN$. Osim tih sila na element djeluje još vanjsko opterećenje $q_x dx$, pa uvjet ravnoteže glasi

$$\sum F_x = -N + q_x dx + N + dN = 0, \quad (72a)$$

pa je nakon sređivanja

$$\frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (72b)$$



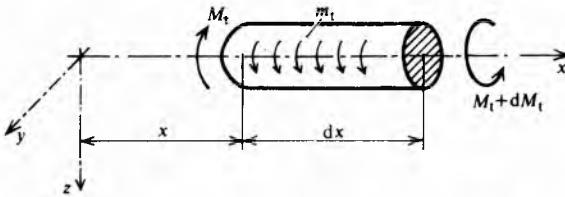
Sl. 33. Ravnoteža elementa osno opterećenog štapa

Uvijanje. Štap je opterećen na uvijanje ako su sve komponente unutrašnjih sila osim momenta uvijanja M_t jednake nuli. To će biti ispunjeno ako je štap opterećen samo kontinuiranim momentima m_t i koncentriranim momentima M koji djeluju oko osi x . Uvjet ravnoteže za element štapa opterećena na uvijanje (sl. 34) bit će

$$\sum M_x = -M_t + m_t dx + M_t + dM_t = 0, \quad (73a)$$

a nakon sređivanja

$$\frac{dM_t}{dx} = -m_t. \quad (73b)$$



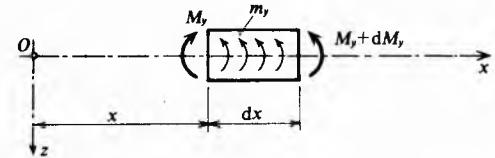
Sl. 34. Element štapa opterećenog na uvijanje

Čisto savijanje. Tada se u presjeku štapa pojavljuje samo moment savijanja, dok su ostale unutrašnje sile jednake nuli. Za takvo savijanje štap može biti opterećen samo koncentriranim i kontinuiranim momentima. Za element štapa opterećena čistim savijanjem u ravni Oxz (sl. 35) uvjet ravnoteže glasi

$$\sum M_y = -M_y + m_y dx + M_y + dM_y = 0, \quad (74a)$$

odnosno

$$\frac{dM_y}{dx} = -m_y. \quad (74b)$$



Sl. 35. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na čisto savijanje

Poprečno savijanje. Element štapa je opterećen na savijanje u ravnini Oxz (sl. 36). U poprečnom presjeku štapa osim momenta savijanja M_y djeluje i poprečna sila Q_z . Uvjeti ravnoteže za taj element glase

$$F_z = -Q_z + q_z dx + Q_z + dQ_z = 0, \quad (75a)$$

$$M_B = -M_y - Q_z dx + m_y dx + q_z \frac{dx^2}{2} + M_y + dM_y = 0, \quad (75b)$$

a nakon sređivanja se dobiva

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z, \quad (76a)$$

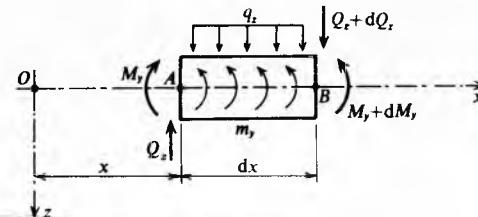
$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z - m_y. \quad (76b)$$

Vrlo je često $m_y = 0$, pa izraz (76b) prelazi u oblik

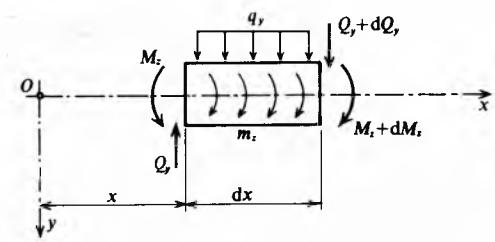
$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (77)$$

Ako se izraz (74b) derivira po x i u njega uvrsti (76a), dobiva se

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z. \quad (78)$$



Sl. 36. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na poprečno savijanje u ravnini Oxz



Sl. 37. Element štapa koji je opterećen na poprečno savijanje u ravnini Oxy

Razmatranjem ravnoteže elementa štapa koji je opterećen u ravnini Oxy (sl. 37), sličnim kao kad je savijanje u ravnini Oxz , dobiva se

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y, \quad (79a)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y - m_z. \quad (79b)$$

Ako je $m_z = 0$, bit će

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y. \quad (80)$$

odnosno

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = q_y. \quad (81)$$

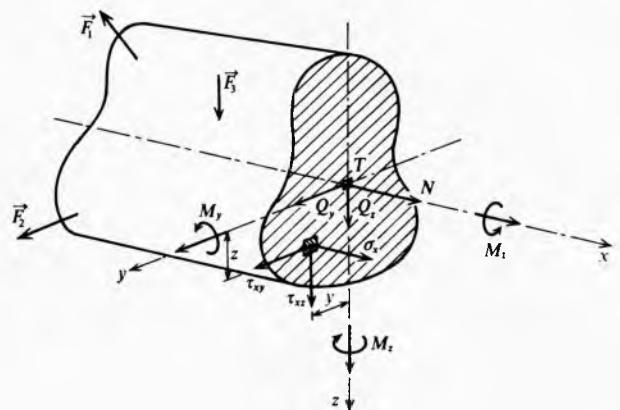
Veza unutrašnjih sila i naprezanja. Na sl. 38 prikazan je presjek štapa s ucrtnim koordinatnim osima i komponentama unutrašnjih sila. Na elementu poprečnog presjeka ploštine dA ucrte su komponente naprezanja σ_x , τ_{xy} i τ_{xz} . Elementarna normalna sila koja djeluje na elementu presjeka ploštine dA iznosi $\sigma_x dA$. Zbrajajući sve elementarne sile po čitavom presjeku dobiva se ukupna normalna sila, tj.

$$N = \int \sigma_x dA. \quad (82)$$

Na sličan se način mogu dobiti poprečne sile

$$Q_y = \int \tau_{xy} dA \quad \text{i} \quad Q_z = \int \tau_{xz} dA. \quad (83)$$

Elementarni moment savijanja oko osi y iznosi $dM_y = \sigma_x z dA$. Komponenta naprezanja τ_{xy} ne pridonosi momentu



Sl. 38. Komponente unutrašnjih sila i naprezanja u poprečnom presjeku štapa

Tablica 3
TIPIČNI NOSAČI S DIJAGRAMIMA SILA I POPREČNIH MOMENATA SAVIJANJA

| | | | |
|---|--|---|---|
| 1. Greda opterećena silom | 2. Greda opterećena jednoliko kontinuirano | 3. Greda opterećena trokutnim kontinuiranim opterećenjem | 4. Greda opterećena spregom unutar raspona |
| | | | |
| | | | |
| 5. Greda opterećena spregom na jednom kraju | 6. Konzola opterećena silom na slobodnom kraju | 7. Konzola opterećena jednoliko kontinuirano | 8. Konzola opterećena trokutnim kontinuiranim opterećenjem koje opada prema kraju |
| | | | |
| | | | |
| 9. Konzola opterećena trokutnim kontinuiranim opterećenjem koje opada prema kraju | 10. Greda sa dva jednakaka prepusta, opterećena na oba kraja jednako silom | 11. Greda opterećena spregom i jednoliko kontinuirirano | 12. Greda sa dva jednakaka prepusta, opterećena jednoliko kontinuirano |
| | | | |
| | | | |
| 13. Greda s prepustom, opterećena silom na kraju prepusta | 14. Greda opterećena sa dvije nejednakane sile | 15. Greda s prepustom, opterećena spregovima na oba kraja | 16. Greda opterećena sa dva sprega |
| | | | |
| | | | |

oko osi y , jer je paralelna s osi y , a komponenta τ_{xz} prolazi kroz os y . Prema tome vrijedi

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad (84)$$

odnosno

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA. \quad (85)$$

Moment uvijanja dobiva se na sličan način, pa iznosi

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \quad (86)$$

Pravila o konstrukciji dijagrama M i Q . Ako su kontinuirani spregovi m_y i m_z jednaki nuli, mogu se na temelju izraza (72) i (74) i definicija poprečne sile, odnosno momenta savijanja, postaviti sljedeća pravila:

1) Ako na dijelu nosača ne djeluje kontinuirano opterećenje q_z , poprečna je sila Q_z konstantna, a moment se savijanja M_y mijenja linearno.

2) Na dijelu nosača na kojemu je kontinuirano opterećenje $q_z = \text{const.}$, poprečna se sila Q_z mijenja linearno, a moment savijanja M_y po paraboli 2. reda.

3) Ako se na nekom dijelu nosača kontinuirano opterećenje q_z mijenja linearno, poprečna sila Q_z mijenja se po paraboli 2. reda, a moment savijanja M_y po paraboli 3. reda.

4) Ako se na nekom dijelu nosača kontinuirano opterećenje q_z mijenja po paraboli reda n , poprečna sila Q_z mijenja se po paraboli reda $n+1$, a moment savijanja M_y po paraboli reda $n+2$.

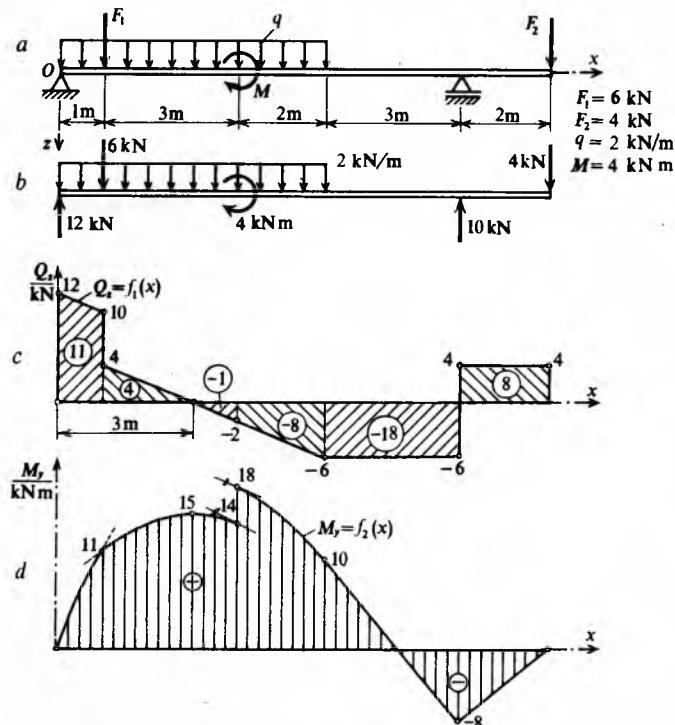
5) Ako je za neki presjek poprečna sila $Q_z = 0$, onda moment savijanja M_y u tom presjeku ima ekstremnu vrijednost.

6) Ako u nekom presjeku djeluje koncentrirana sila F , dijagram za poprečnu silu Q_z ima skok za F , a dijagram za moment savijanja M_y ima lom tangente.

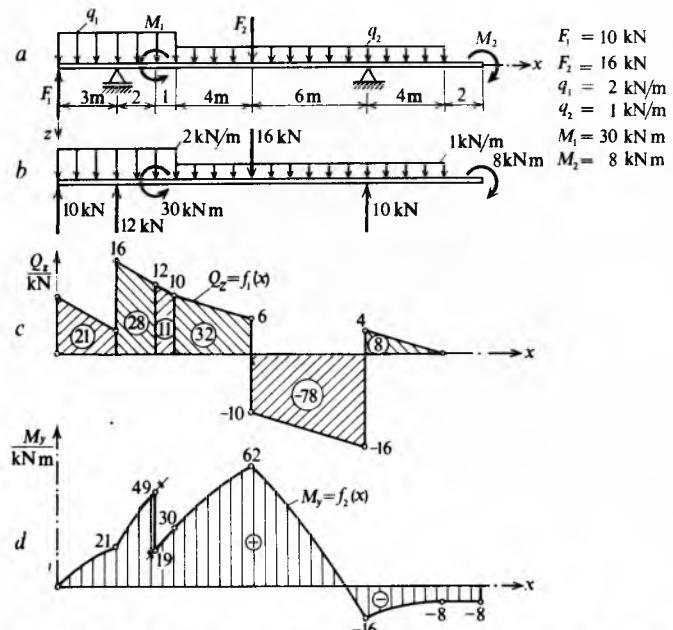
7) U presjeku gdje djeluje vanjski koncentrirani spreg dijagram za moment savijanja M_y ima skok za iznos tog sprega, a dijagram za poprečnu silu ostaje nepromijenjen.

8) U presjecima gdje prestaje djelovati kontinuirano opterećenje dijagram za moment savijanja M_y nema loma.

9) Ordinate dijagrama za moment savijanja M_y u dva različita presjeka razlikuju se za iznos ploštine ispod dijagrama za poprečnu silu Q_z između tih dvaju presjeka.



Sl. 39. Primjer dijagrama poprečne sile i momenta savijanja. a) zadani nosač, b) nosač oslobođen veza, c) Q_z -dijagram, d) M_y -dijagram



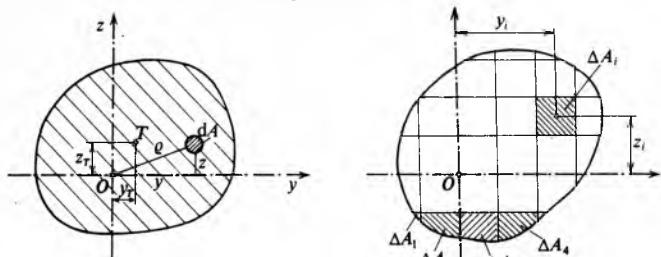
Sl. 40. Nosač s pripadnim dijagramima Q_z i M_y . a) zadani nosač, b) nosač oslobođen veza, c) Q_z -dijagram, d) M_y -dijagram

Na sl. 39 i 40 prikazana su dva nosača s pripadnim dijagramima momenta savijanja i poprečne sile.

U tabl. 3. prikazan je niz tipičnih nosača s pripadnim dijagramima za poprečnu silu Q_z i moment savijanja M_y .

GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNOG PRESJEKA ŠTAPA

Momenti tromosti (momenti inercije). Na sl. 41 prikazan je poprečni presjek štapa proizvoljna oblika. Koordinatni sustav Oyz postavljen je također po volji. Ishodište O ne podudara se općenito s težištem T poprečnog presjeka.



Sl. 41. Definicija momenta tromosti

Aksijalni momenti tromosti oko osi y , odnosno z , definirani su izrazima

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad \text{i} \quad I_z = \int_A y^2 dA. \quad (87)$$

Momenti tromosti mogu se približno odrediti i bez integriranja tako da se cijeli presjek podijeli u više manjih dijelova, a zatim ploština svakog dijela presjeka pomnoži kvadratom udaljenosti težišta tog dijela presjeka od osi oko koje se računa moment tromosti, tj.

$$I_y \approx \sum_{i=1}^n z_i^2 \Delta A_i; \quad I_z \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta A_i. \quad (88)$$

Kako je prema definiciji ΔA_i , odnosno dA pozitivna veličina, aksijalni momenti tromosti uvijek su pozitivne veličine.

Devijacijski ili centrifugalni moment tromosti za osi y i z definiran je izrazom

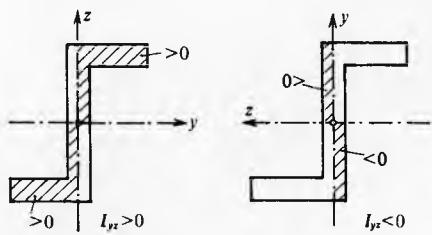
$$I_{yz} = \int_A yz dA = I_{zy}, \quad (89)$$

odnosno

$$I_{yz} \approx \sum_{i=1}^n y_i z_i \Delta A_i. \quad (90)$$

Devijacijski moment tromosti može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli.

Pri zakretu koordinatnog sustava za 90° devijacijski moment tromosti mijenja predznak. To se pravilo može rastumačiti po moću sl. 42. Naime, dijelovi presjeka koji se nalaze u prvom i trećem kvadrantu daju pozitivan doprinos devijacijskom momentu tromosti, jer tada obje koordinate imaju isti predznak, pa je njihov umnožak uvijek pozitivan. Umnožak je koordinata u drugom i četvrtom kvadrantu negativan. Pri zakretu koordinatnog sustava za 90° prvi i treći kvadrant zamijene mjesta s drugim i četvrtim, tj. njihov doprinos devijacijskom momentu tromosti mijenja predznak.



Sl. 42. Pri zakretu koordinatnog sustava za 90° devijacijski moment tromosti mijenja predznak

Ako je makar jedna od koordinatnih osi, y ili z , ujedno i os simetrije presjeka, devijacijski moment tromosti jednak je nuli (sl. 43). Čitav presjek može se podijeliti na niz parova elementarnih ploština dA i dA' koje su međusobno jednakne. Jedna od koordinata jednaka je po predznaku i iznosu za obje ploštine dA i dA' , druga koordinata jednaka je po iznosu, a suprotna po predznaku, tj.

$$dA = dA', \quad z = z', \quad y = -y',$$

pa je

$$dI_{yz} = yz dA + y'z' dA' = 0.$$

Polarni moment tromosti definiran je (sl. 41) izrazom

$$I_p = \int_A \varrho^2 dA \approx \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 dA_i. \quad (91)$$

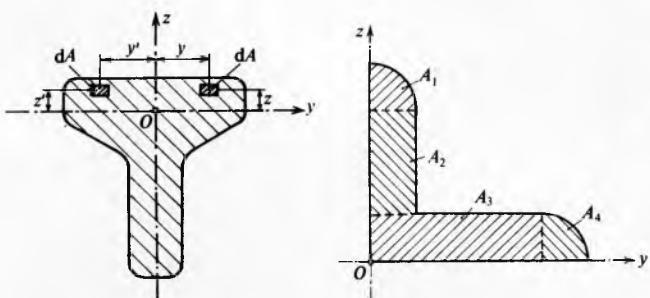
Polarni moment tromosti je prema definiciji pozitivna veličina. Kako je $y^2 + z^2 = \varrho^2$ (sl. 41), bit će

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA, \quad (92)$$

odnosno

$$I_p = I_y + I_z = \text{const.} \quad (93)$$

Polarni moment tromosti definiran je za točku i ne ovisi o orientaciji koordinatnih osi y i z . Prema tome je i zbroj aksijalnih momenata tromosti za dvije međusobno okomite osi konstanta koja ne ovisi o orientaciji koordinatnih osi. Taj je zaključak analogan izrazu (93).



Sl. 43. Devijacijski moment tromosti simetričnog presjeka jednak je nuli

Sl. 44. Izračunavanje momenata tromosti sastavljenog lika

Zbrajanje momenata tromosti. Momenati tromosti jednostavnih likova: pravokutnika, kruga, trokuta itd. određuju se neposredno integriranjem. Izračunavanje momenata tromosti sastavljenih likova integriranjem vrlo je mukotrapan posao koji se može olakšati primjenom pravila o zbrajanju momenata tromosti. Sl. 44 prikazuje lik koji se sastoji od dva pravokutnika i dva kružna isječka. Prema definiciji aksijalni je moment tromosti oko osi y

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad (94)$$

gdje je A ukupna ploština lika, a A_1, A_2, A_3 i A_4 ploštine pojedinih dijelova od kojih je lik sastavljen. Izraz (94) može se pisati u obliku

$$I_y = \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA + \int_{A_3} z^2 dA + \int_{A_4} z^2 dA, \quad (95)$$

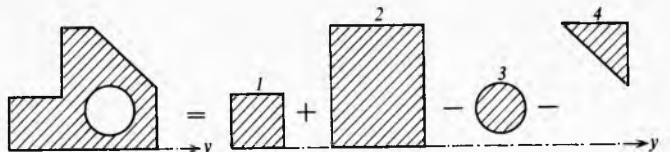
odnosno

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4}, \quad (96)$$

gdje su momenti tromosti pojedinih dijelova oko zajedničke osi y

$$I_{y1} = \int_{A_1} z^2 dA, \quad I_{y2} = \int_{A_2} z^2 dA \quad \text{itd.} \quad (97)$$

Prema tome pravilo o zbrajanju momenata tromosti glasi: Moment tromosti sastavljenog lika oko neke osi jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih njegovih dijelova oko te iste osi. Ovo pravilo vrijedi također za devijacijske i polarne momente tromosti.



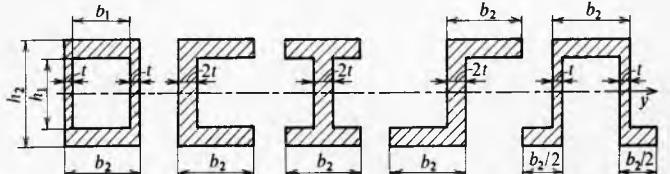
Sl. 45. Određivanje momenta tromosti oslabljenog lika

Ako je presjek oslabljen otvorima ili izrezima (sl. 45), momente tromosti izrezanih dijelova treba oduzeti od momenta tromosti osnovnog lika. Tako za lik na sl. 45 vrijedi

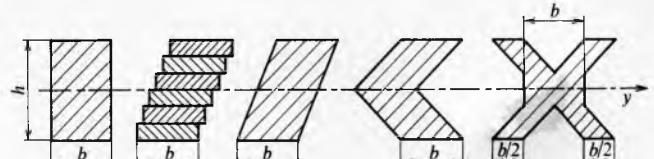
$$I_y = I_{y1} + I_{y2} - I_{y3} - I_{y4}, \quad (98)$$

gdje su I_{y1} i I_{y2} momenti tromosti malog i velikog pravokutnika, I_{y3} moment tromosti kruga, a I_{y4} moment tromosti trokuta oko osi y .

Paralelni pomak presjeka. Pri paralelnom pomaku nekog presjeka ili njegova dijela, takvom da je pomak paralelan s nekom osi, ne mijenja se udaljenost dijelova presjeka od te osi. Zato se ne mijenja ni vrijednost aksijalnog momenta tromosti oko te osi.



Sl. 46. Likovi jednakog momenta tromosti I_y



Sl. 47. Likovi jednakog momenta tromosti oko osi y ($I_y = bh^3/12$)

Na sl. 46 i 47 prikazano je nekoliko presjeka. Svi imaju jednaku ploštinu i mogu se dobiti jedan iz drugoga pomicanjem pojedinih dijelova paralelno s osi y . Prema tome svi oni imaju

jednak moment tromosti oko osi y . Moment tromosti šupljeg pravokutnika (sl. 46) iznosi

$$I_y = \frac{b_2 h_2^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad (99)$$

pa je to ujedno i moment tromosti oko osi y ostalih likova na sl. 46. Očito se njihovi momenti tromosti oko drugih osi međusobno razlikuju.

Paralelni pomak koordinatnog sustava. Neka se koordinatni sustav pomakne u novi položaj tako da ostane paralelan sa svojim početnim položajem (sl. 48). Momenti tromosti za novi položaj osi razlikovat će se od momenata tromosti za stari položaj, ali će među njima postojati veza. Od svih međusobno paralelnih koordinatnih sustava osobito značenje ima sustav koji prolazi težištem presjeka T . Koordinatne osi koje prolaze težištem nazivaju se *središnje ili težišne osi*. Pripadni momenti tromosti zovu se *središnji ili težišni momenti tromosti*. Težišni momenti tromosti označavat će se sa I_y , I_z , I_{yz} , a momenti tromosti oko paralelnih osi sa I'_y , I'_z i I'_{yz} . Prema definiciji za lik na sl. 48 vrijedi

$$\begin{aligned} I'_y &= \int_A (z')^2 dA = \int_A (b+z)^2 dA, \\ I'_z &= \int_A (y')^2 dA = \int_A (a+y)^2 dA, \\ I'_{yz} &= \int_A y' z' dA = \int_A (a+y)(b+z) dA, \end{aligned} \quad (100)$$

jer je $y' = a + y$ i $z' = b + z$. Ako se prva jednadžba sredi, dobiva se

$$I'_y = b^2 \int_A dA + b \int_A zdA + \int_A z^2 dA, \quad (101)$$

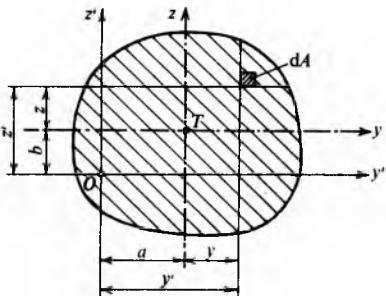
odnosno

$$I'_y = b^2 A + I_y, \quad (102)$$

jer je $\int_A zdA = S_y$ statički moment presjeka oko osi y . Međutim, os y je težišna os, pa je tada $S_y = 0$. Također je $\int_A dA = A$. Na sličan način može se dobiti

$$I'_z = a^2 A + I_z \quad i \quad I'_{yz} = I_{yz} + ab A. \quad (103)$$

Veličine a i b mogu biti pozitivne i negativne, ali je njihov kvadrat uvijek pozitivan. Na temelju toga i izraza (102) i (103) može se zaključiti da od svih aksijalnih momenata tromosti oko međusobno paralelnih osi najmanju vrijednost ima težišni moment tromosti. To očito ne vrijedi za devijacijski moment tromosti I'_{yz} .



Sl. 48. Promjena momenata tromosti pri paralelnom pomaku koordinatnog sustava

Izraz (102) naziva se ponekad *Steinerovo pravilo*, koje izraženo riječima glasi: Aksijalni moment tromosti oko neke osi y jednak je momentu tromosti oko paralelne težišne osi uvećanom za umnožak ploštine presjeka i kvadrata udaljenosti tih dviju osi.

Rotacija koordinatnog sustava. Na sl. 49 prikazan je presjek sa dva ucrtna koordinatna sustava: stari Oyz i novi $O\bar{y}\bar{z}$ koji je prema starom zakrenut za kut φ . Momenti tromosti za stari koordinatni sustav označeni su sa I_y , I_z i I_{yz} , a momenti tromosti za novi sustav sa $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{z}}$ i $I_{\bar{y}\bar{z}}$.

Veza između starih koordinata y , z i novih \bar{y} , \bar{z} glasi:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y \cos \varphi + z \sin \varphi, \\ \bar{z} &= -y \sin \varphi + z \cos \varphi. \end{aligned} \quad (104)$$

Prema definiciji momenti su tromosti za novi sustav

$$\bar{I}_y = \int_A \bar{z}^2 dA, \quad \bar{I}_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}^2 dA, \quad \bar{I}_{\bar{y}\bar{z}} = \int_A \bar{y} \bar{z} dA. \quad (105)$$

Kad se uzme u obzir (104), bit će

$$\begin{aligned} \bar{I}_y &= \int_A (-y \sin \varphi + z \cos \varphi)^2 dA, \\ \bar{I}_{\bar{z}} &= \int_A (y \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 dA, \\ \bar{I}_{\bar{y}\bar{z}} &= \int_A (y \cos \varphi + z \sin \varphi)(-y \sin \varphi + z \cos \varphi) dA, \end{aligned} \quad (106)$$

pa je

$$\bar{I}_y = \cos^2 \varphi \int_A z^2 dA + \sin^2 \varphi \int_A y^2 dA - 2 \cos \varphi \sin \varphi \int_A yz dA. \quad (107)$$

Kad se uzmu u obzir izrazi (87) i (89), dobiva se

$$\bar{I}_y = I_y \cos^2 \varphi + I_z \sin^2 \varphi - I_{yz} 2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (108)$$

Na sličan način se dobiva

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \varphi + I_z \cos^2 \varphi + I_{yz} 2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \bar{I}_{\bar{y}\bar{z}} &= (I_y - I_z) \cos \varphi \sin \varphi + I_{yz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (109)$$

Usporednom izraza (108) i (109) sa (22) i (23) vidi se da su oni potpuno analogni ako se zamjeni I_y sa σ_x , I_z sa σ_y i $-I_{yz}$ sa τ_{xy} . Prema tome momenti tromosti I_y , I_z i $-I_{yz}$ jesu komponente tenzora tromosti I_{ij} kojemu matrica glasi

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Sve što vrijedi za tenzor naprezanja vrijedi i za tenzor tromosti. Analogno izrazu (24) može se napisati

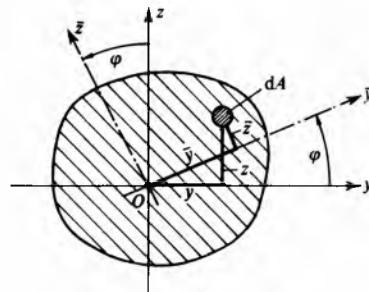
$$\begin{aligned} \bar{I}_y &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi, \\ \bar{I}_{\bar{z}} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi, \\ \bar{I}_{\bar{y}\bar{z}} &= \bar{I}_{\bar{z}\bar{y}} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (111)$$

Glavni momenti tromosti I_1 i I_2 dani su sa

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (112)$$

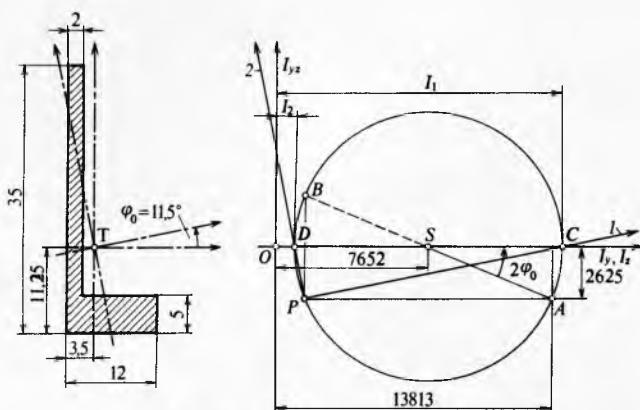
Za kut φ_0 koji glavne osi tromosti čine s osima y i z , analogno izrazu (27), vrijedi

$$\tan 2\varphi_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (113)$$



Sl. 49. Promjena momenta tromosti pri rotaciji koordinatnog sustava

Mohrova kružnica tromosti. Analogno Mohrovoj kružnici naprezanja može se konstruirati Mohrova kružnica tromosti. Na osi apscisa nanosi se aksijalni moment tromosti I_y ili I_z , a na osi ordinata devijacijski moment tromosti I_{yz} (sl. 50).



Sl. 50. Mohrova kružnica tromosti

Polumjeri tromosti i elipsa tromosti. Polumjeri tromosti nekog presjeka ploštine A definirani su izrazom

$$i_y = \frac{I_y}{A}, \quad i_z = \frac{I_z}{A}. \quad (114)$$

Na sličan način definiraju se i glavni polumjeri tromosti

Tablica 4
MOMENTI TROMOSTI NEKIH PRESJEKA

| Presjek | A | Momenti tromosti | | |
|---------|---------------------|---|-----------------------|----------------------|
| | | I_y | I_z | I_{yz} |
| | bh | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{hb^3}{12}$ | 0 |
| | a^2 | $\frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$ | $\frac{a^4}{12}$ | 0 |
| | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{bh^3}{36}$ | $\frac{hb^3}{36}$ | $-\frac{b^2h^2}{72}$ |
| | $\frac{\pi d^2}{4}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | 0 |
| | $\frac{\pi d^2}{8}$ | $\frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0.00686d^4$ | $\frac{\pi d^4}{128}$ | 0 |
| | πab | $\frac{\pi a^3 b}{4}$ | $\frac{\pi a b^3}{4}$ | 0 |

$$i_1 = \frac{I_1}{A}, \quad i_2 = \frac{I_2}{A}. \quad (115)$$

Pomoću glavnih polumjera tromosti može se konstruirati elipsa tromosti kojoj jednadžba glasi

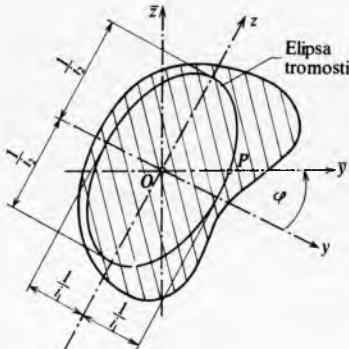
$$i_1^2 y^2 + i_2^2 z^2 = 1. \quad (116)$$

Moment tromosti oko osi y iznosi

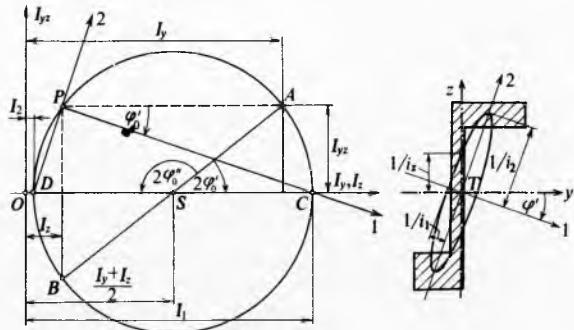
$$\bar{I}_y = i_y^2 A = \frac{A}{(OP)^2}, \quad (117)$$

djedje je i_y polumjer tromosti za os y , a dužina OP označena je na sl. 51.

U tabl. 4 navedeni su momenti tromosti nekih jednostavnijih presjeka.



Sl. 51. Elipsa tromosti



Sl. 52. Presjek Z s pripadnom Mohrovom kružnicom tromosti i elipsom tromosti

NAPREZANJE I DEFORMIRANJE ŠTAPA

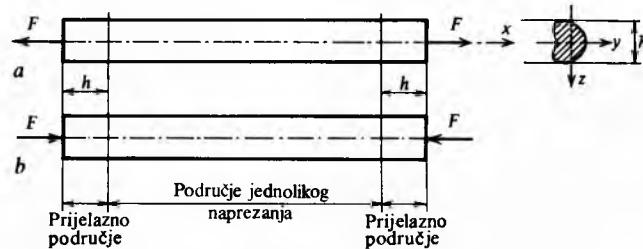
Na štalu kao modelu tijela kojemu je jedna dimenzija (dužina) znatno veća od drugih dviju promatraju se jednostavna opterećenja: rastezanje, uvijanje, savijanje, izvijanje itd.

Osno opterećenje štapa

Štap je osno ili aksijalno opterećen ako su u svakom presjeku štapa sve komponente unutrašnjih sila osim normalne sile N jednake nuli. Pri izvođenju izraza za naprezanja i deformacije uvode se sljedeće pretpostavke o raspodjeli naprezanja: 1) Sve su komponente naprezanja osi x jednake nuli, tj. u štalu vlada jednoosno stanje naprezanja, i 2) naprezanja su jednoliko raspodijeljeni po presjeku štapa.

Izvedeni izrazi vrijede ograničeno samo na mjestima koja su dovoljno udaljena od mesta djelovanja koncentriranih sila i od mesta naglih promjena poprečnog presjeka. Dovoljna je udaljenost jedna do dvije debljine štapa.

Sl. 53 prikazuje najjednostavnije osno opterećenje štapa. Na oba kraja štapa nalazi se prijelazno područje nejednolike raspodjele naprezanja koje se proteže na duljini od približno jedne debljine štapa.



Sl. 53. Osno opterećenje štapa. a rastezanja, b sabijanje

U središnjem su dijelu naprezanja jednoliko raspodijeljena i u njima naprezanje iznosi

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad (118)$$

gdje je N normalna sila, a A ploština poprečnog presjeka. Za opterećenje prema sl. 53a vrijedi da je $N = F$, pa izraz (118) prelazi u oblik

$$\sigma_x = \frac{F}{A}. \quad (119)$$

Ako je štap opterećen kao na sl. 53b, onda je $N = -F$, pa je

$$\sigma_x = -\frac{F}{A}. \quad (120)$$

Ako je duljina štapa mnogo veća od debljine ($l/h > 10 \dots 20$), može se utjecaj odstupanja od jednolikog naprezanja u rubnom prijelaznom području na produljenje zanemariti. Tada je

$$\Delta l = \varepsilon l, \quad (121)$$

gdje je Δl promjena duljine, a l duljina štapa. Primjenom Hookeova zakona izraz (121) prelazi u

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l,$$

odnosno uz pomoć (118) u

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}. \quad (122)$$

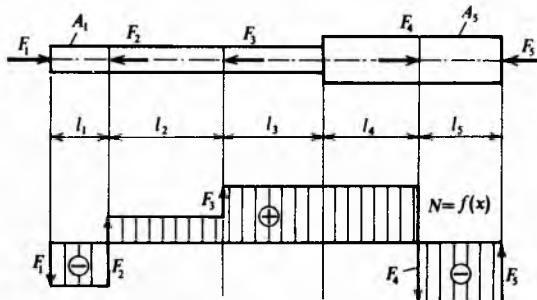
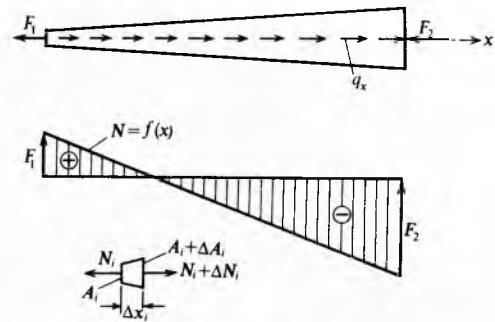
Ovaj se izraz može primijeniti samo ako je štap konstantnoga poprečnog presjeka i ako je normalna sila N konstantna po čitavoj duljini štapa. Veličina $E A$ zove se osna ili aksijalna krutost štapa. Kad se ploština A i normalna sila N mijenjaju skokovito (sl. 54), produljenje štapa Δl može se izračunati pomoću izraza

$$\Delta l = \prod_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E A_i}. \quad (123a)$$

Ako je štap opterećen kontinuirano ili ako se poprečni presjek mijenja postupno, treba štap podijeliti na više dijelova što manje duljine Δx_i . Ukupno produljenje štapa jednako je zbroju produljenja pojedinih dijelova, pa iznosi

$$\Delta l_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{N_i \Delta x_i}{E A_i}, \quad (123b)$$

gdje su N_i i A_i srednje vrijednosti za svaki odsječak. Što je

Sl. 54. Štap s naglom promjenom sile N i presjeka A Sl. 55. Štap s postepenom promjenom sile N i presjeka A

broj elemenata veći i što su oni kraći, bit će rezultat točniji. Kad broj elemenata teži u beskonačnost, a njihova duljina nuli, produljenje teži pravoj vrijednosti, tj.

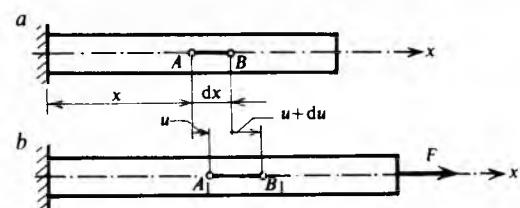
$$\Delta l = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{N_i x_i}{E A_i} = \int \frac{N dx}{E A}. \quad (124)$$

Pomak presjeka štapa u smjeru osi x označuje se sa u . Kad je štap opterećen osno, pomak u ne ovisi o koordinatama y i z , tj. $u = u(x)$. Sl. 56a prikazuje neopterećeni štap. Točke A i B leže na osi štapa na međusobnoj udaljenosti dx , tj. $\overline{AB} = dx$. Kad se štap optereti, točka A pomiče se u novi položaj A_1 za iznos u , a točka B u položaj B_1 za iznos $u + du$ (sl. 56b). Deformacija, tj. relativno produljenje dužine AB iznosi

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A_1 B_1} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(dx + du) - dx}{dx},$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (125)$$

(Više o ovisnosti deformacija i pomaka v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173; v. *Teorija elastičnosti*).

Sl. 56. Definicija pomaka u

Prema (125) vrijedi

$$du = \varepsilon_x dx, \quad (126)$$

odnosno

$$u = \int \varepsilon_x dx + C. \quad (127)$$

Kako je $N = A \sigma_x$, a $\sigma_x = \varepsilon_x E$, bit će $N = EA \varepsilon_x$, odnosno

$$N = AE \frac{du}{dx}, \quad (128)$$

ili

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}. \quad (129)$$

Ako se izraz (128) derivira po x i uzme u obzir (72), dobiva se

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) = -q_x. \quad (130)$$

Vrlo često je $AE = \text{const.}$, pa izraz (130) prelazi u

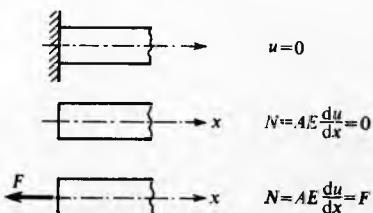
$$AE \frac{d^2 u}{dx^2} = -q_x. \quad (131)$$

Izraz (130) predstavlja osnovnu diferencijalnu jednadžbu osno opterećenog štapa. On povezuje pomak u s opterećenjem q_x . Nakon integriranja i određivanja konstanta integracije iz rubnih uvjeta bit će poznat zakon $u = u(x)$. Odатle se pomoću (125) može odrediti ε_x , a zatim σ_x i ostale tražene veličine.

Deriviranjem (124) dobit će se alternativni oblik diferencijalne jednadžbe osno opterećenog štapa

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{N}{EA} \right). \quad (132)$$

Rubni uvjeti određuju se prema sl. 57.



Sl. 57. Rubni uvjeti osno opterećenog štapa

Štap opterećen vlastitom težinom. Na sl. 58 prikazan je štap duljine l i konstantnog presjeka ploštine A . Specifična težina štapa je $\gamma = \rho g$.

Kako je štap konstantnog presjeka, za njega vrijedi izraz (131), tj.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{q_x}{AE}. \quad (133)$$

Opterećenje q_x je duljinska težina, tj.

$$q_x = \frac{dG}{dx} = \gamma \frac{dV}{dx} = \gamma \frac{Adx}{dx} = \gamma A \quad (134)$$

gdje je dV obujam elementa kojemu je težina dG . Sada izraz (133) prelazi u oblik

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\gamma}{E} \quad (135)$$

odnosno nakon dvostrukog integriranja u izraz

$$u = -\frac{\gamma x^2}{2E} + C_1 x + C_2. \quad (136)$$

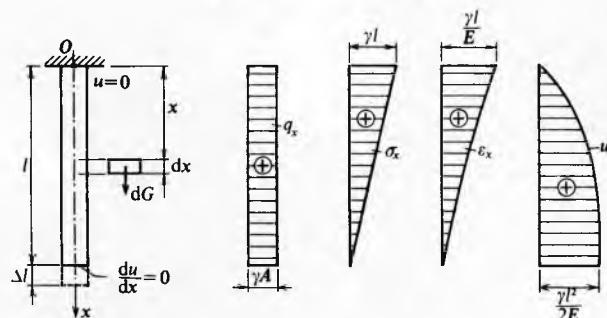
Rubni uvjeti su $u(0) = 0$ i $\frac{du}{dx}(l) = 0$, što daje $C_1 = \gamma l/E$ i $C_2 = 0$, pa izraz za pomak glasi

$$u = \frac{\gamma l}{E} x - \frac{\gamma x^2}{2E} = \frac{\gamma l^2}{2E} \left[2\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]. \quad (137)$$

Odatle se može dobiti

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\gamma l}{E} \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad (138)$$

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \gamma l \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (139)$$

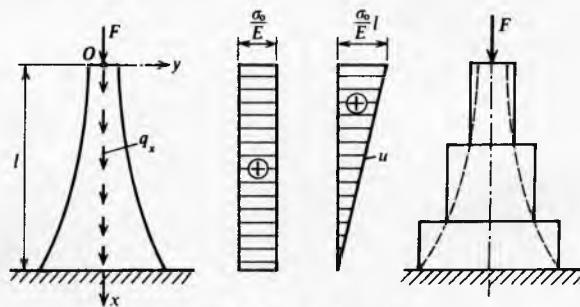


Sl. 58. Štap konstantnog presjeka opterećen vlastitom težinom

Dijagrami ovisnosti opterećenja q_x , deformacije ε_x , naprezanja σ_x i pomaka u prikazani su na sl. 58. Kako je pomak gornjeg kraja jednak nuli, produljenje Δl štapa jednako je pomaku donjeg kraja, tj.

$$\Delta l = u(l) = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Gl}{2EA}. \quad (140)$$

Štap jednake čvrstoće. To je štap koji je tako oblikovan da je naprezanje u svakom presjeku jednako. Takav štap (sl. 59) opterećen je vlastitom težinom i silom F na gornjem kraju.



Sl. 59. Štap jednake čvrstoće

Tada je

$$N = \sigma_0 A, \quad (141)$$

gdje je naprezanje $\sigma_0 = \text{const.}$, a A promjenjiva ploština poprečnog presjeka. Ako se (141) uvrsti u (132), dobiva se

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_0}{E} \right) = 0. \quad (142a)$$

Dvostrukim integriranjem ovog izraza dobiva se

$$u = C_1 x + C_2. \quad (142b)$$

Rubni su uvjeti:

$$\begin{aligned} \text{za } x = 0: \quad EA_1 \frac{du}{dx} &= N = -F, \\ \text{za } x = 1: \quad u &= 0, \end{aligned} \quad (143)$$

što daje $C_1 = F/(EA_1)$ i $C_2 = F/(EA_2)$, gdje je A_1 ploština poprečnog presjeka na gornjem kraju, a A_2 ploština poprečnog presjeka na donjem kraju. Tada je

$$u = \frac{F}{EA_1} (l - x) = \frac{\sigma_0}{E} (l - x). \quad (144)$$

Slično kao i u prethodnom primjeru može se dobiti

$$q_x = \gamma A. \quad (145)$$

Ako se (141) i (145) uvrste u (130), dobiva se

$$\frac{d}{dx} (\sigma_0 A) = -\gamma A. \quad (146a)$$

Kako je $\sigma_0 = \text{const.}$, bit će

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_0}, \quad (146b)$$

odnosno

$$\ln A = -\frac{\gamma}{\sigma_0} x + C. \quad (146c)$$

Iz uvjeta da je $A = A_0$ za $x = 0$, dobiva se $C = \ln A_1$, pa izraz (146c) prelazi u izraz

$$\ln \frac{A}{A_1} = \frac{\gamma}{\sigma_0} x, \quad (146d)$$

odnosno

$$A = A_1 \exp \frac{\gamma}{\sigma_0} x. \quad (146e)$$

Taj izraz predstavlja zakon promjene poprečnog presjeka.

Konični štap opterećen vlastitom težinom. Normalna sila u presjeku x može se odrediti iz ravnoteže odsječenog dijela štapa (sl. 60), tj.

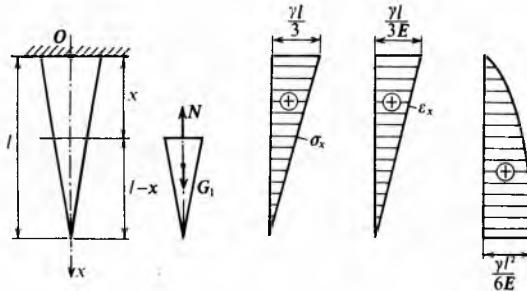
$$N = \frac{1}{3} \gamma A(l-x), \quad (147a)$$

što uvršteno u (132) daje

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\gamma}{3E}, \quad (147b)$$

odnosno

$$u = -\frac{\gamma x^2}{6E} + C_1 x + C_2. \quad (147c)$$



Sl. 60. Konični štap opterećen vlastitom težinom

Rubni su uvjeti:

$$\text{za } x=0: \quad u=0,$$

$$\text{za } x=l: \quad \frac{du}{dx}=0.$$

Odatle je $C_1 = \gamma l/(3E)$, $C_2 = 0$, pa je

$$u = \frac{\gamma l^2}{6E} 2\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2. \quad (148)$$

Produljenje štapa jednako je pomaku donjeg kraja štapa, tj.

$$\Delta l = u(l) = \frac{\gamma l^2}{6E} = \frac{Gl}{2EA}, \quad (149)$$

gdje je G ukupna težina štapa.

Uvijanje štapa

Uvijanje ravnih štapova okruglog presjeka. Raspodjela naprezanja pri uvijanju okruglih štapova bitno se razlikuje od raspodjele naprezanja pri uvijanju štapova neokruglog presjeka, pa će izvedeni izrazi vrijediti samo za okrugle presjekte. Analiza naprezanja i deformacije provest će se uz sljedeće pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja:

1) Pri deformiranju štapa poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na os štapa.

2) Poprečni presjeci zakreću se pri deformiranju kao krute figure, tj. polumjeri u toku deformiranja ostaju ravni.

Izrazi koji se izvode na temelju tih pretpostavki vrijede ako su štapovi ravni i konstantna poprečnog presjeka, a poprečni presjek je krug ili kružni vijenac.

Geometrijska analiza. Pri uvijanju štapa pojedini njegovci presjeci zakreću se za kut α koji je funkcija položaja, tj.

$$\alpha = \alpha(x). \quad (150)$$

Ako se presjek x zakrene za kut α , presjek $x + \Delta x$ zakrenut će se za kut $\alpha + \Delta\alpha$ (sl. 61). Relativni kut uvijanja ϑ definiran je izrazom

$$\vartheta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx}. \quad (151)$$

Kako je $d\alpha = \vartheta dx$, bit će

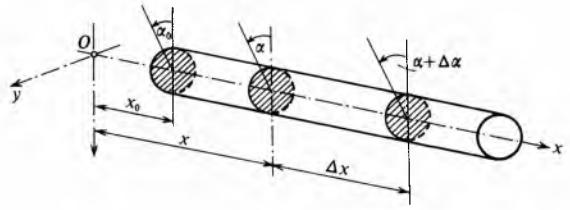
$$\int_{x_0}^x d\alpha = \int_{x_0}^x \vartheta dx, \quad (152a)$$

odnosno

$$\alpha = \alpha_0 + \int_{x_0}^x \vartheta dx. \quad (152b)$$

Specifični kut uvijanja ϑ ovisi o ploštinu i obliku poprečnog presjeka, o elastičnim svojstvima materijala te o momentu uvijanja. Ako je štap homogen, konstantnog poprečnog presjeka i ako je moment uvijanja konstantan, bit će $\vartheta = \text{const.}$, pa je

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta(x - x_0). \quad (153)$$



Sl. 61. Element štapa opterećen na uvijanje

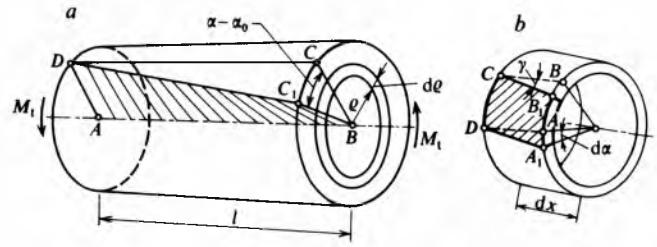
Na sl. 62a prikazan je štap opterećen na uvijanje. Kako pomak štapa kao krutog tijela ne utječe na naprezanje i deformaciju, može se, radi jednostavnosti, zamisliti da je lijevi kraj nepomičan, a da se desni zakrenu za kut $\alpha - \alpha_0$, gdje je α_0 zakret lijevog kraja. Ravnina ABCD pri deformiranju prelazi u zavojnu plohu ABC1D1. Na sl. 62b prikazan je element štapa duljine dx, unutrašnjeg promjera ρ i vanjškoga $\rho + d\rho$. Desni kraj zakrenut je prema lijevom za iznos $d\alpha = \vartheta dx$. Pravokutnik ABCD, ucrtan na vanjskom plasu elementa, u toku deformiranja prelazi u romboid A1B1C1D1. Kut smicanja $\angle CBB_1 = \gamma$ predstavlja zapravo kutnu deformaciju. Za male deformacije (sl. 62b) vrijedi

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BC}} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{d\alpha}{dx}. \quad (154)$$

Kad se (151) uvrsti u taj izraz, dobiva se

$$\gamma = \vartheta \frac{d\alpha}{dx}. \quad (155)$$

Izraz (155) daje kvalitativnu raspodjelu kutnih deformacija po presjeku. U sredini je štapa $\gamma = 0$, jer je $\vartheta = 0$. Kutne deformacije rastu linearno prema rubu presjeka. Pomoću izraza (155) ne mogu se odrediti konkretnе vrijednosti kutne deformacije jer je u izrazu nepoznat parametar ϑ .



Sl. 62. Geometrijska analiza deformacije pri uvijanju štapa

Primjena Hookeova zakona. Prema Hookeovu zakonu za smicanje iznosi naprezanje $\tau = \gamma G$, odnosno, uvezvi u obzir (155),

$$\tau = \vartheta G. \quad (156)$$

Primjena uvjeta ravnoteže. Ako je štap u ravnoteži, moment vanjskih sila jednak je momentu unutrašnjih sila. Za element prema sl. 63 uvjet ravnoteže glasi

$$\sum M_x = -M_t + \int_A \tau \varrho dA = 0. \quad (157a)$$

Kad se u taj izraz uvrsti (156), dobiva se

$$M_t = G \int_A \varrho^2 dA, \quad (157b)$$

jer je za zadani presjek $G\vartheta = \text{const.}$ Ako se uzme u obzir da prema (91) vrijednost integrala predstavlja polarni moment trostosti, bit će

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_p}, \quad (158)$$

što uvršteno u (156) daje

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \varrho. \quad (159)$$

Ako se (158) uvrsti u (152), dobiva se

$$\alpha = \alpha_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_t}{GI_p} dx. \quad (160)$$

Za homogeni je štap konstantnog poprečnog presjeka $GI_p = \text{const.}$, pa je

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{GI_p} \int_{x_0}^x M_t dx. \quad (161)$$

Ako je štap duljine l opterećen konstantnim momentom uvijanja, relativni kut zakreta njegovih krajeva iznosi

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 = \frac{M_t l}{GI_p}. \quad (162)$$

Na temelju (158) i (151) može se napisati da je

$$GI_p \frac{d\alpha}{dx} = M_t \quad (163)$$

Ako se taj izraz derivira po x i uzme u obzir (73b), dobiva se

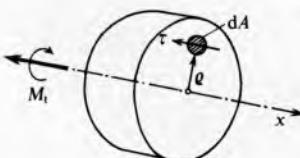
$$\frac{d}{dx} \left(GI_p \frac{d\alpha}{dx} \right) = -m_t, \quad (164)$$

odnosno, ako je $GI_p = \text{const.}$,

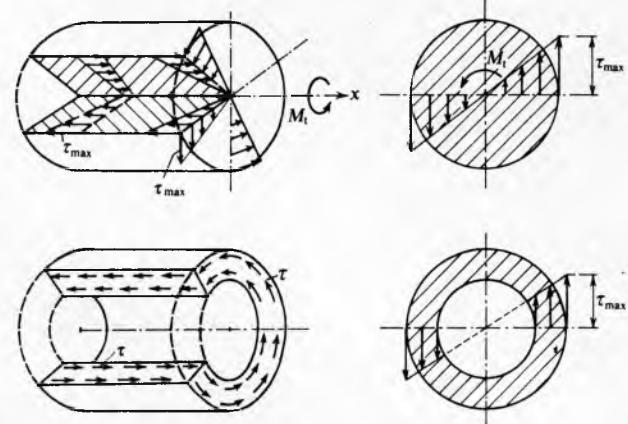
$$GI_p \frac{d^2\alpha}{dx^2} = -m_t \quad (165)$$

Alternativni je oblik izraza (163)

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_t}{GI_p} \right). \quad (166)$$



Sl. 63. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na uvijanje

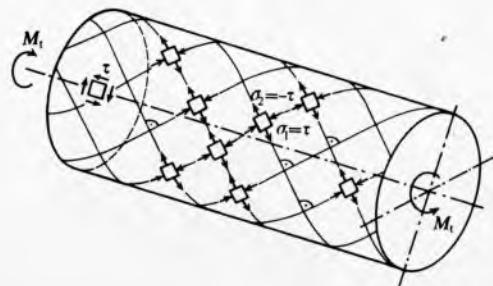


Sl. 64. Raspodjela naprezanja u punom i šupljem štalu opterećenom na uvijanje

Na sl. 64 prikazan je raspored naprezanja u poprečnom i uzdužnom presjeku štapa, i to za puni i šuplji kružni štap. Prema sl. 18c čisto smicanje ekvivalentno je rastezanju i sabijanju

u dva međusobno okomita presjeka. Prema tome pri uvijanju štapa trajektorije naprezanja su zavojnice (sl. 65).

Trajektorije naprezanja su linije kojih se smjer u svakoj točki podudara s pravcima glavnih naprezanja. Trajektorije naprezanja sastoje se od dvije međusobno ortogonalne porodice krivulja. Pravci σ_1 tangencijalni su na jednu porodicu, a pravci σ_2 na drugu porodicu krivulja.



Sl. 65. Trajektorije naprezanja okruglog štapa koji je opterećen na uvijanje

Dimenzioniranje vratila i osovina. Vratila, osovine i drugi štapovi opterećeni na uvijanje mogu se dimenzionirati prema uvjetu čvrstoće i prema uvjetu krutosti. Za laka vratila malog promjera najvažnija je krutost, a za teška vratila čvrstoća. Način loma štapa opterećenog na uvijanje ovisi o materijalu štapa. Ako je štap izrađen od krvkog materijala, lom nastupa kad najveće vlačno naprezanje prijeđe vlačnu čvrstoću materijala, pri čemu lom nastaje po presjeku koji čini s osi štapa kut od 45° (sl. 66a). Ako je štap izrađen od rastezljiva (duktilna) materijala, lom nastupa kad posmično naprezanje prijeđe smičnu čvrstoću. Vratila se uglavnom izrađuju od rastezljivih materijala, pa uvjet čvrstoće glasi

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \varrho_{\max} \leq \tau_{\text{dop}}, \quad (167)$$

gdje je τ_{dop} dopušteno posmično naprezanje, a $\varrho_{\max} = r$ polujmjer vratila. Uvođenjem označke

$$W_p = \frac{I_p}{\varrho_{\max}} = \frac{I_p}{r}, \quad (168)$$

gdje je W_p polarni moment otpora, izraz (167) prelazi u oblik

$$\frac{M_t}{W_p} \leq \tau_{\text{dop}}. \quad (169)$$

Ako se radi o punom vratilu, tada je

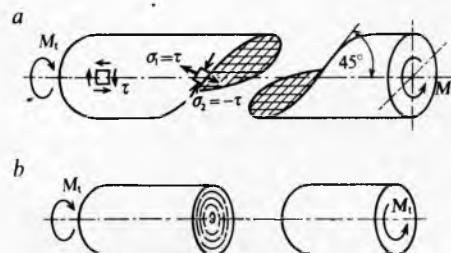
$$W_p = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (170)$$

pa uvjet čvrstoće glasi

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{M_t}{\tau_{\text{dop}}}, \quad (171)$$

odnosno

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \tau_{\text{dop}}}}. \quad (172)$$



Sl. 66. Lom štapa opterećenog na uvijanje. a) štap od krvkog materijala, b) štap od rastezljivog materijala

Iz rasporeda naprezanja (sl. 64) vidi se da materijal u blizini osi štapa praktički ne sudjeluje u prenošenju momenta uvijanja. Ne samo što su ondje naprezanja malena nego je i njihov krak prema osi malen, pa taj dio osovine prenosi samo neznatan dio momenta uvijanja. Materijal je mnogo bolje iskorišten ako je vratiло šuplje. Tada polarni moment tromosti iznosi

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi d^4}{32}(1 - k^4), \quad (173)$$

gdje je d vanjski promjer, d_1 unutrašnji promjer, a njihov omjer $k = d_1/d$. Tada je polarni moment otpora

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{d^3}{16}(1 - k^4), \quad (174)$$

pa uvjet čvrstoće glasi

$$W_p = \frac{d^3}{16}(1 - k^4) \geq \frac{M_t}{\tau_{dop}},$$

odnosno

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi(1 - k^4)\tau_{dop}}}. \quad (175)$$

Polarni moment tromosti sastavljenog presjeka jednak je zbroju, odnosno razlici pojedinih njegovih dijelova. To, međutim, ne vrijedi za polarni moment otpora. On se određuje tako da se odredi moment tromosti sastavljenog presjeka, pa zatim podijeli vanjskim polumjerom.

Da bi se zadovoljio uvjet krutosti, mora biti

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_p} \leq \vartheta_{dop}, \quad (176)$$

gdje je ϑ_{dop} dopušteni specifični kut uvijanja izražen u radijima. Odатле je

$$I_p \geq \frac{M_t}{G\vartheta_{dop}}. \quad (177)$$

Za puni je presjek $I_p = \pi d^4/32$, pa je uvjet krutosti ispunjen ako je

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi G\vartheta_{dop}}}. \quad (178a)$$

Na sličan način može se dobiti za šuplji presjek da je

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi G\vartheta_{dop}(1 - k^4)}} \quad (178b)$$

Dopušteni moment uvijanja s obzirom na čvrstoću iznosi $M'_{dop} = \tau_{dop}\pi d^3/16$, a dopušteni moment uvijanja s obzirom na krutost $M''_{dop} = G\vartheta_{dop}\pi d^4/32$. Izjednačenjem tih veličina,

$$\frac{\pi d_0^3}{16} \tau_{dop} = \frac{\pi d^4}{32} G\vartheta_{dop} \quad (179a)$$

dobiva se vrijednost prijelaznog promjera d_0 :

$$d_0 = \frac{2\tau_{dop}}{G\vartheta_{dop}}, \quad (179b)$$

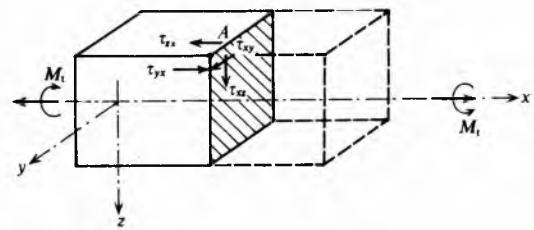
odnosno prijelaznog momenta M_{10} :

$$M_{10} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\tau_{dop}}{G\vartheta_{dop}} \right)^3 \tau_{dop} \quad (180)$$

Ako je $d > d_0$, odnosno $M_t > M_{10}$, proračun se vrši prema čvrstoći, a ako je $d < d_0$, odnosno $M_t < M_{10}$, za proračun je mjerodavna krutost.

Svi do sada izvedeni izrazi vrijede za ravne okrugle štapove, ali oni približno vrijede i za zakrivenje okrugle neprizmatične štapove ako je polumjer zakrivenosti štapa R velik prema njegovu promjeru, te ako se poprečni presjek mijenja postepeno.

Uvijanje štapa neokruglog presjeka. Izrazi izvedeni za uvijanje okruglih presjeka ni približno ne vrijede za uvijanje neokruglih presjeka. Sl. 67 prikazuje pravokutni štap opterećen na uvijanje. U blizini točke A koja se nalazi na bridu



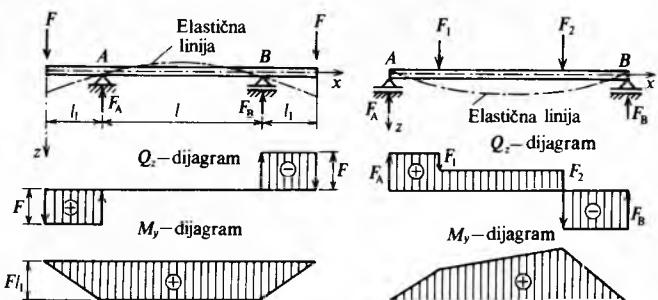
Sl. 67. U uglovima presjeka posmično naprezanje jednako je nuli

tangencijalna su naprezanja $\tau_{zx} = 0$ i $\tau_{yx} = 0$, jer stranice štapa nisu opterećene. Na temelju parnosti posmičnih naprezanja vrijedi da je $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ i $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. Kako su obje posmične komponente jednake nuli, bit će ukupno posmično naprezanje u točki A jednako nuli. Nasuprot tome, prema teoriji uvijanja okruglih štapova, moglo bi se očekivati da će u točki A biti najveće naprezanje τ jer je točka A najudaljenija od osi štapa.

Analiza uvijanja neokruglih presjeka mnogo je složenija i provodi se u teoriji elastičnosti.

Savijanje štapa

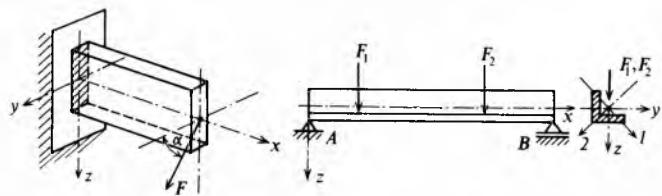
Za razliku od osnog opterećenja i uvijanja, pri savijanju štapa deformira se uzdužna os štapa. Deformirana uzdužna os zove se *elastična (progibna) linija*. Razlikuje se čisto savijanje i poprečno savijanje. Pri čistom savijanju sve su komponente unutrašnjih sila jednake nuli, osim momenta savijanja. Dio štapa između oslonaca na sl. 68 opterećen je na čisto savijanje. Pri poprečnom savijanju osim momenta savijanja pojavljuje se još i poprečna sila koja uzrokuje smicanje (sl. 69). Čisto savijanje zove se još i savijanje spregovima, a poprečno savijanje, savijanje silama.



Sl. 68. Između oslonaca A i B štap je opterećen na čisto savijanje

Sl. 69. Poprečno savijanje štapa

Obično savijanje je onda kad moment savijanja djeluje oko glavne osi tromosti poprečnog presjeka. Ako moment savijanja ne djeluje oko glavne osi tromosti poprečnog presjeka, to je *koso savijanje*. Na sl. 70 prikazana su dva primjera kosog savijanja.



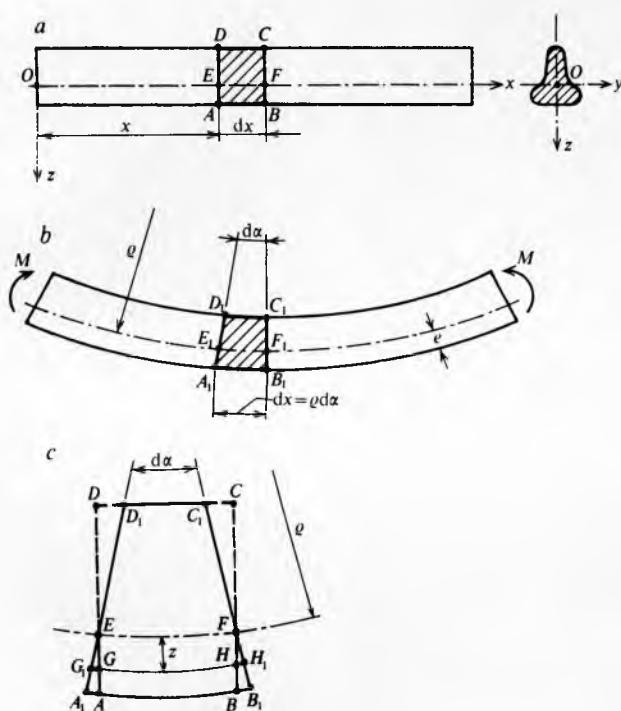
Sl. 70. Dva primjera kosog savijanja

Cisto savijanje. Analiza naprezanja pri čistom savijanju provodi se uz sljedeće pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja: 1) poprečni presjeci pri deformiranju ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju i 2) sve komponente naprezanja osim σ_x jednake su nuli.

Izrazi za naprezanja, deformacije i pomak koji se izvode na temelju tih pretpostavki vrijede ako je visina štapa h malena u usporedbi s rasponom l , tj. ako je $h/l < \frac{1}{5} \dots \frac{1}{4}$, i ako je maksimalni nagib tangente izražen u radijanima mnogo manji od jedinice, tj. ako je $\alpha_{\max} < 0,05 \dots 0,1$. Ponekad se taj uvjet izražava omjerom maksimalnog progiba w_{\max} i raspona l . Tada mora biti $w_{\max}/l < 0,02 \dots 0,05$.

Geometrijska analiza. Na sl. 71a prikazan je nedeformirani, a na sl. 71b deformirani štap koji je opterećen čistim savijanjem. Na oba štapa ucrtan je element duljine dx .

Prema sl. 71b vidi se da se gornja vlakna štapa skraćuju, a donja prodljuju. Negdje u sredini štapa nalaze se vlakna koja ne mijenjaju duljinu. Ta vlakna čine tzv. *neutralnu plohu*. Ishodište koordinatnog sustava odabrano je tako da bude na neutralnoj plohi. Element štapa $ABCD$ u toku deformiranja prelazi u $A_1B_1C_1D_1$. Dužina \overline{EF} nalazi se na neutralnoj plohi i u toku deformiranja ostaje nepromijenjena, tj. $E_1F_1 = \varrho d\alpha = \overline{EF} = dx$, pa je $dx = \varrho d\alpha$.



Sl. 71. Geometrijska analiza elementa štapa opterećenog na čisto savijanje

Na sl. 71c ucrtani su jedan preko drugoga nedeformirani element $ABCD$ i deformirani $A_1B_1C_1D_1$. Duljinska deformacija vlakna \overline{GH} koje se nalazi na udaljenosti z od neutralne plohe iznosi $\epsilon_x = (G_1H_1 - GH)/GH$. Kako je $\overline{GH} = \varrho d\alpha = dx$, a $G_1H_1 = (\varrho + z)d\alpha$, bit će nakon sređivanja

$$\epsilon_x = \frac{z}{\varrho}. \quad (181)$$

Izraz (181) daje kvalitativno raspodjelu deformacija, koje su u neutralnoj plohi jednake nuli i mijenjaju se linearno prema krajevima presjeka, tako da su na jednoj strani pozitivne, a na drugoj negativne. U tom su izrazu dva nepoznata parametra. Polumjer zakrivljenosti ϱ i, implicitno, položaj neutralne plohe e od koje se mjeri koordinata z .

Primjena Hookeova zakona. Kako je stanje naprezanja prema pretpostavci jednoosno, bit će

$$\sigma_x = E \epsilon_x, \quad (182a)$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{E}{\varrho} z. \quad (182b)$$

Primjena uvjeta ravnoteže. Ako je štap u ravnoteži, vrijede izrazi (82), (84) i (85), pa se dobiva

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0,$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad (183)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA.$$

Kad se uvrsti (182) u prvu jednadžbu (183), dobiva se

$$N = \frac{E}{\varrho} \int_A z dA = \frac{E}{\varrho} S_y = 0, \quad (184)$$

gdje je S_y statički moment poprečnog presjeka oko osi y . Pri savijanju zakrivljuje se uzdužna os, pa je $\varrho \neq \infty$. Prema tome mora biti $S_y = 0$, što znači da neutralna os y prolazi težištem poprečnog presjeka. Ako se (182) uvrsti u drugu jednadžbu izraza (183), dobiva se

$$M_y = \frac{E}{\varrho} \int_A z^2 dA = \frac{E}{\varrho} I_{yz}, \quad (185a)$$

pa je

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad (185b)$$

što uvršteno u (182) daje

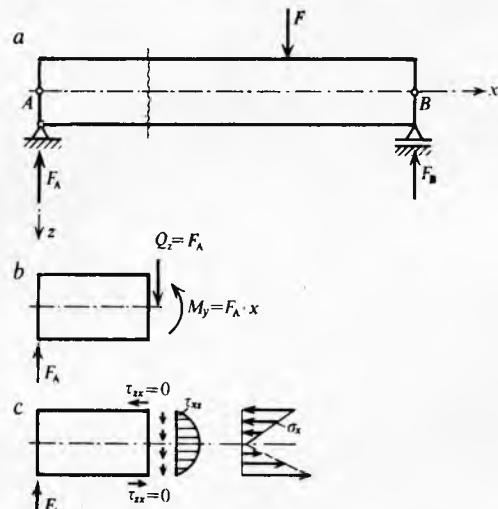
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (186)$$

Na sličan način, ako se uvrsti (182) u treću jednadžbu (183), slijedi

$$M_z = \frac{E}{\varrho} \int_A y z dA = \frac{E}{\varrho} I_{yz} = 0. \quad (187)$$

Odatle je $I_{yz} = 0$, tj. os y je glavna os tromosti presjeka. Prema tome izvedeni izrazi vrijede samo za ravno savijanje, tj. savijanje oko jedne glavne osi tromosti presjeka štapa.

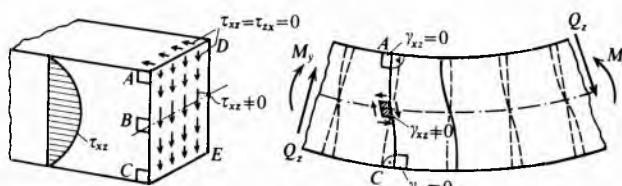
Poprečno savijanje. Ako u poprečnom presjeku uz moment savijanja M_y djeluje i poprečna sila Q_z , pojavit će se u presjeku normalno naprezanje σ_x i posmično naprezanje τ_{xz} (sl. 72).



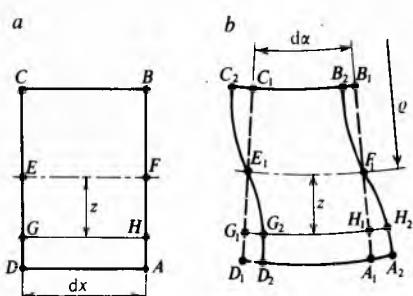
Sl. 72. Raspored normalnog naprezanja σ_x i posmičnog naprezanja τ_{xz} pri poprečnom savijanju

Na gornjem i donjem rubu štapa posmično naprezanje τ_{xz} jednak je nuli, jer su to slobodni rubovi. To je prikazano na sl. 73. Uzduž gornjeg ruba AD i donjeg ruba CE poprečnog presjeka posmično naprezanje τ_{xz} također je jednako nuli, jer je $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Prema tome, može se zaključiti da je posmično

naprezanje na krajevima jednako nuli i postepeno raste prema sredini presjeka (sl. 72). Elementi A i C na gornjem, odnosno donjem rubu presjeka slobodni su od smicanja ($\tau_{xz} = 0$), pa u toku deformiranja ostaju pravokutni. Element B u sredini presjeka iskrivljuje se ($\gamma_{xz} \neq 0$) jer na njega djeluje posmično naprezanje τ_{xz} . To uvjetuje *deplanaciju* ili *iskrivljenje* poprečnog presjeka.



Sl. 73. Pri poprečnom savijanju posmična naprezanja prouzrokuju deplaniranje (vitoperenje) poprečnog presjeka



Sl. 74. Deformirani element pri poprečnom savijanju

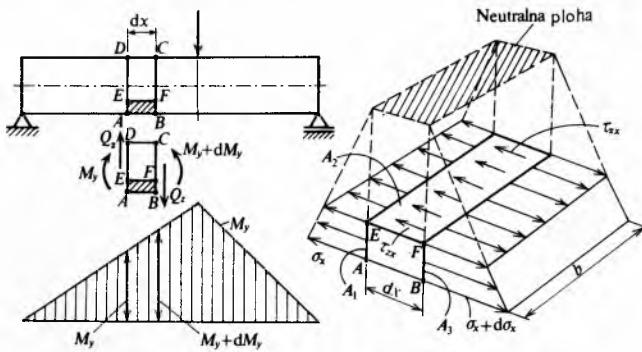
Nedeformirani pravokutni element štapa $ABCD$ prikazan je na sl. 74a, a deformirani element na sl. 74b. Radi usporedbe, crtkanom linijom $A_1B_1C_1D_1$ prikazan je deformirani element pri čistom savijanju, a punom linijom $A_2B_2C_2D_2$ deformirani element pri poprečnom savijanju. Za grede velikog raspona, tj. kad je $l/h \gg 1$, pomaci zbog deplanacije maleni su u usporedbi s pomacima zbog zakretanja poprečnog presjeka, pa deplanacija neznatno utječe na duljinsku deformaciju ϵ_x , a time i na naprezanje σ_x . Prema tome za grede velikog raspona vrijedi približno izraz (186), pa je

$$\sigma_x \approx \frac{M_y}{I_y} z. \quad (188)$$

Međutim, ako je $Q_z = \text{const.}$, dva susjedna presjeka deplaniraju se na isti način. Pomaci G_1G_2 i H_1H_2 (sl. 74b) potpuno su jednakih, pa deplanacija presjeka uopće ne utječe na deformaciju ϵ_x , odnosno naprezanje σ_x , pa za $Q_z = \text{const.}$ vrijedi

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z.$$

Raspored posmičnog naprezanja τ_{xz} može se odrediti pomoću sl. 75, tj. razmatranjem ravnoteže dijela elementa $ABEF$. U presjeku AD djeluje moment M_y i poprečna sila Q_z , a u presjeku BC moment $M_y + dM_y$ i poprečna sila Q_z . Element



Sl. 75. Posmična naprezanja pri poprečnom savijanju

$ABCD$ kao cjelina nalazi se u ravnoteži. Naime, u ravnoteži su vlačne i tlačne sile u svakom presjeku. Prirast momenta dM_y u desnom presjeku uravnovežuje spreg poprečnih sila $Q_z dx$.

Ako se razmotri ravnoteža u smjeru osi x dijela elementa $ABEF$, koji je na sl. 75 crtan, vidjet će se da naprezanje $\sigma_x + d\sigma_x$ koje djeluje na desnoj plohi A_3 nije u ravnoteži s naprezanjem σ_x koje djeluje na lijevoj plohi A_1 . Zbog toga se pojavljuje naprezanje τ_{zx} na gornjem presjeku A_2 koje je zajedno s naprezanjem σ_x u ravnoteži s naprezanjem $\sigma_x + d\sigma_x$. Zapravo naprezanje τ_{zx} uravnovežuje prirast naprezanja $d\sigma_x$, pa se može pisati da je

$$\int \tau_{zx} dA_2 = \int d\sigma_x dA_3. \quad (189a)$$

Kako je $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$ i $\sigma_x + d\sigma_x = \frac{M_y + dM_y}{I_y} z$, bit će

$$d\sigma_x = \frac{dM_y}{I_y} z. \quad (189b)$$

Ploha A_2 ima beskonačno malu duljinu dx , pa se može uzeti da je τ_{zx} konstantno na plohi A_2 . Pod pretpostavkom da je τ_{zx} jednoliko raspodijeljeno po širini grede, bit će

$$\tau_{zx} A_2 = \int \frac{dM_y}{I_y} z dA_3, \quad (189c)$$

odnosno

$$\tau_{zx} b dx = \frac{dM_y}{I_y} \int z dA_3. \quad (189d)$$

Ako se uzme u obzir da je

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad \text{i} \quad \int z dA_3 = S_y, \quad (189e)$$

dobiva se

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y}, \quad (189f)$$

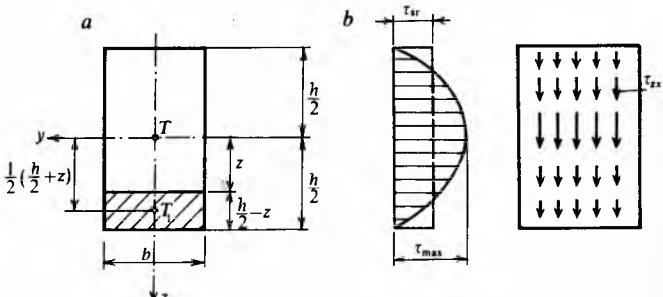
gdje je b širina presjeka, a S_y statički moment plohe A_3 oko neutralne osi y .

Posmična naprezanja na pravokutnom presjeku. Statički je moment iscrtane plohe na sl. 76a $S_y = \left(\frac{h}{2} - z\right) b \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$, a moment tromosti je $I_y = bh^3/12$. Kad se to uvrsti u (189) i sredi, dobiva se

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{A} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad (190)$$

gdje je $A = bh$ ploština poprečnog presjeka. Vidi se da je naprezanje τ_{xz} raspodijeljeno prema zakonu parabole. Maksimalna je vrijednost

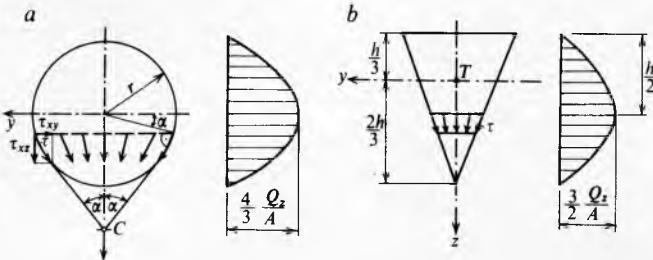
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{A}, \quad (191)$$



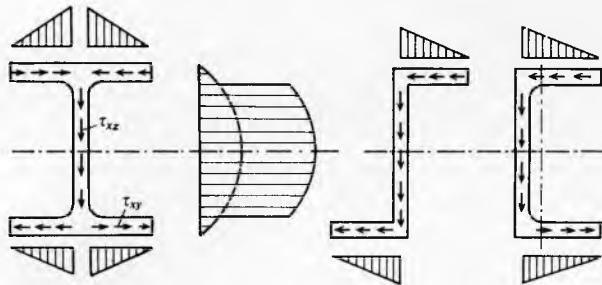
Sl. 76. Raspored posmičnih naprezanja pri poprečnom savijanju štapa pravokutnog poprečnog presjeka

a pojavljuje se u sredini presjeka, te je za polovicu veća od srednje vrijednosti $\tau_{sr} = Q_z/A$.

Na sličan način može se pokazati da je i za ostale presjekte, kružni, trokutni (sl. 77 i 78) itd., posmično naprezanje raspodijeljeno prema zakonu parabole.



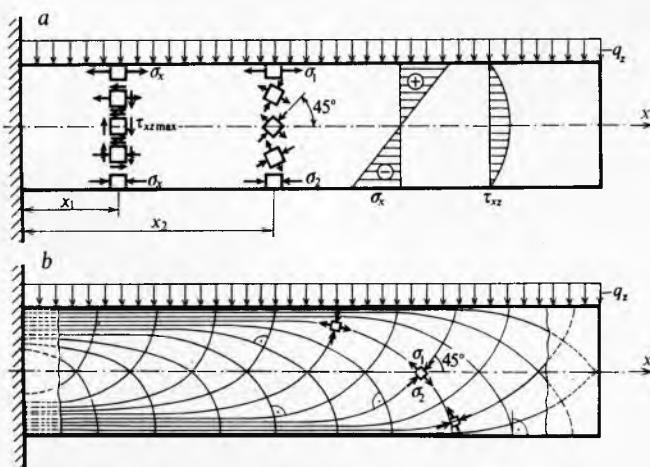
Sl. 77. Raspored posmičnog naprezanja u kružnom i trokutnom presjeku



Sl. 78. Raspored posmičnih naprezanja u tankostjenim presjecima I, Z i U

Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja. Pri poprečnom savijanju na elemente grede djeluje normalno naprezanje σ_x i posmično naprezanje τ_{xz} , koja se mogu odrediti pomoću izraza (186) i (189). Kad su poznata naprezanja σ_x i τ_{xz} , mogu se pomoći izraza (31) odrediti glavna naprezanja σ_1 i σ_2 i njihov smjer.

Na sl. 79a prikazana je konzola koja je opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem q_z . U presjeku x_1 konzole prikazano je pet elemenata s ucrtnim naprezanjem σ_x i τ_{xz} , dok su u presjeku x_2 prikazana glavna naprezanja σ_1 i σ_2 . Istodobno je prikazan dijagram linearne raspodjele normalnog naprezanja σ_x i parabolične raspodjele posmičnog naprezanja τ_{xz} . Na sl. 79b prikazane su trajektorije sijeku os x pod kutom od 45° , jer glavna naprezanja na osi x čine toliki kut s osi x . U blizini gornjeg i donjeg ruba konzole trajektorije su naprezanja paralelne, odnosno okomite na rub, jer su i glavna naprezanja paralelna i okomita na rub.



Sl. 79. Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja u konzoli opterećenoj jednolikom kontinuiranim opterećenjem

Dimenzioniranje grede: racionalni oblici poprečnog presjeka. U općenitom slučaju savijanja grede pojavljuju se normalna i posmična naprezanja. Međutim, za uobičajene raspone i oblike poprečnog presjeka normalna su naprezanja mnogo veća od posmičnih. Osim toga, u točkama gdje se pojavljuju maksimalna normalna naprezanja posmična su naprezanja jednaka nuli. Zbog toga se posmična naprezanja mogu zanemariti u proračunu čvrstoće grede, pa uvjet čvrstoće glasi

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{y \max}}{I_y} z_{\max} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (192)$$

odnosno

$$\frac{M_{y \max}}{W_y} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (193)$$

gdje je W_y aksijalni moment otpora definiran izrazom

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (194)$$

Izraz (193) obično se upotrebljava u obliku

$$W_y = \frac{M_{y \max}}{\sigma_{\text{dop}}}. \quad (195)$$

Ako greda ima kružni presjek, onda je

$$W_y = \frac{I_y}{d/2} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad (196)$$

pa se izraz (195) može napisati u obliku

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{y \max}}{\pi \sigma_{\text{dop}}}}. \quad (197)$$

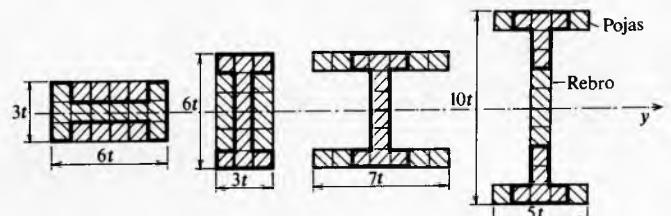
Ako je presjek grede pravokutnik visine h i širine b s omjerom $h/b = k$, bit će

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3 k^2}{6}, \quad (198)$$

pa mora biti

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 M_{y \max}}{k^2 \sigma_{\text{dop}}}}. \quad (199)$$

Na sličan način mogu se dimenzionirati i ostali oblici poprečnog presjeka.

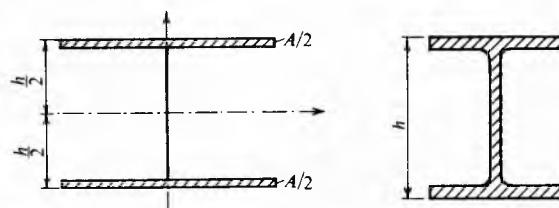


Sl. 80. S udaljavanjem dijelova presjeka od neutralne osi raste moment tromosti i moment otpora. Svi presjeci na slici imaju jednaku ploštinu $A = 18 t^2$

Pri dimenzioniranju grede, odnosno pri izboru oblika i veličine poprečnog presjeka treba nastojati da se sa što manjom ploštinom presjeka postigne što veći moment otpora. S udaljavanjem dijelova poprečnog presjeka od neutralne osi raste moment otpora i moment tromosti (sl. 80). Idealno bi bilo kad bi sav presjek bio podijeljen na dva vrlo uska pojasa, svaki ploštine $A/2$ (sl. 81). Moment tromosti I_{id} i moment otpora W_{id} takva idealnog presjeka iznose

$$I_{id} = 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{4} A h^2. \quad (200)$$

$$W_{id} = \frac{I_{id}}{h} = \frac{1}{2} A h. \quad (201)$$



Sl. 81. Idealizirani i realni I-presjek

U stvarnosti pojasci ne smiju biti preširoki, a također moraju biti spojeni rebrrom koje nije pretanko da preuzme posmična naprezanja. Osim toga, odviše tanko rebro i pojasci mogu uvjetovati lokalno izvijanje u području tlačnih naprezanja. Prema tome je za realne I-profile

$$W_y < 0,5 A h = W_{id}. \quad (202)$$

Obično je $W_y = (0,3 \dots 0,38) A h$. Za pravokutni je presjek $W_y = b h^2 / 6 = A h / 6$. Omjer stvarnog i idealnog momenta otpora zove se *stupanj iskoristenja* ili *korisnost* presjeka η , a iznosi

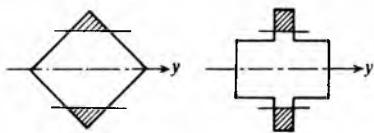
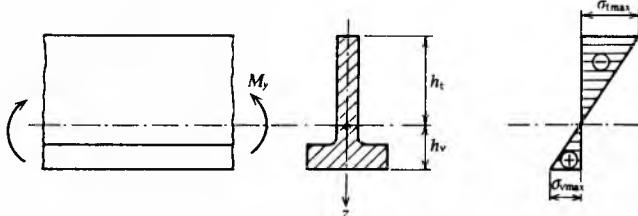
$$\eta = \frac{W_y}{W_{id}} < 1. \quad (203)$$

U tabl. 5 navedena je korisnost nekih presjeka i nekih valjanih profila.

Tablica 5
KORISNOST PRESJEKA PRI SAVIJANJU

| Presjek | Korisnost |
|------------|---------------|
| Kružni | 0,25 |
| Pravokutni | 0,33 |
| Profil I | 0,61 ... 0,65 |
| Profil L | 0,59 ... 0,61 |
| Profil T | 0,57 ... 0,60 |

Ponekad se odsijecanjem dijelova presjeka povećava moment otpora, a time i čvrstoća pri savijanju. To se tumači time da se odsijecanjem dijelova koji strše više smanjuje z_{max} nego I_x , čime se prema (194) povećava W_y . Dva takva presjeka prikazana su na sl. 82.

Sl. 82. Odsijecanjem iscrtanih dijelova povećava se moment otpora W_y 

Sl. 83. Racionalan presjek nosača od krhkog materijala i raspodjela naprezanja u njemu

Krhki materijali, kao lijevano željezo, staklo, beton itd., imaju veću tlačnu od vlačne čvrstoće. Presjeke greda od takvih materijala treba oblikovati tako da težište bude bliže vlačnoj strani (sl. 83).

Najveće vlačno, odnosno tlačno naprezanje (sl. 83) iznosi

$$\sigma_{v_{max}} = \frac{M_y}{I_y} h_v \leq \sigma_{v_{dop}} \quad (204)$$

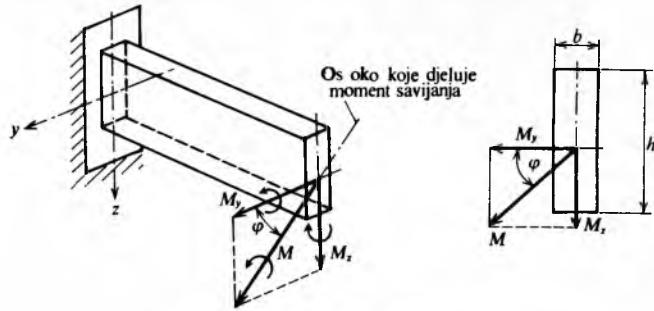
$$\sigma_{t_{max}} = \frac{M_y}{I_y} h_t = \sigma_{t_{dop}}$$

gdje je h_v i h_t udaljenost krajnjih vlakana u vlačnoj, odnosno tlačnoj zoni od neutralne osi, a $\sigma_{v_{dop}}$ i $\sigma_{t_{dop}}$ dopušteno vlačno, odnosno dopušteno tlačno naprezanje. Na temelju (204) dobiva se

$$\frac{h_v}{h_t} = \frac{\sigma_{v_{dop}}}{\sigma_{t_{dop}}}. \quad (205)$$

Pri oblikovanju presjeka nosača od krhkih materijala treba težiti da bude ispunjen uvjet (205).

Koso savijanje. Koso savijanje nastaje kad moment savijanja ne djeluje oko glavne osi tromosti presjeka. Naprezanje i pomaci određuju se pomoću principa superpozicije. Na sl. 84 prikazana je konzola kojoj na slobodnom kraju djeluje moment M koji s osi y čini kut φ . Osi y i z su glavne osi tromosti.



Sl. 84. Koso savijanje štapa

Ako se moment M rastavi u dvije komponente $M_y = M \cos \varphi$ i $M_z = M \sin \varphi$ i zatim primjeni princip superpozicije, dobiva se za naprezanje izraz

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = M \left(\frac{z \cos \varphi}{I_y} - \frac{y \sin \varphi}{I_z} \right). \quad (206)$$

Ako se taj izraz izjednači s nulom, dobiva se jednadžba neutralne osi

$$\frac{z \cos \varphi}{I_y} - \frac{y \sin \varphi}{I_z} = 0, \quad (207)$$

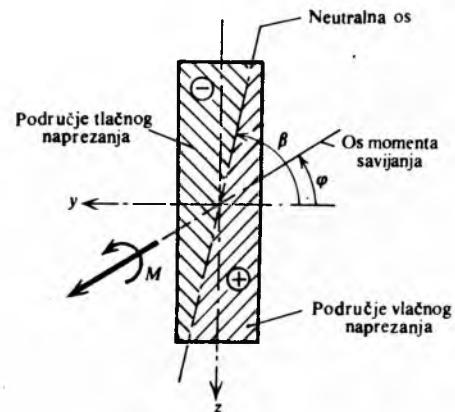
odnosno

$$z = y \frac{I_y}{I_z} \tan \varphi = y \tan \beta, \quad (208)$$

gdje je β kut nagiba neutralne osi (sl. 85), pa je

$$\tan \beta = \frac{I_y}{I_z} \tan \varphi. \quad (209)$$

Ako je $I_y \neq I_z$, bit će $\beta \neq \varphi$.



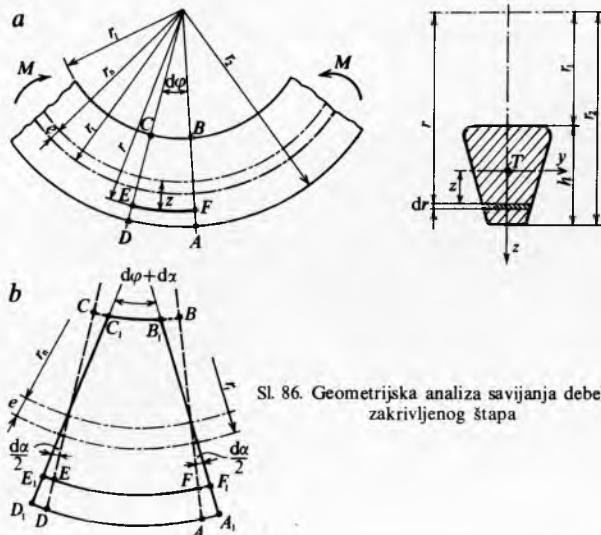
Sl. 85. Pri kosom savijanju neutralna os ne podudara se s osi momenta savijanja

Savijanje debelih zakrivljenih štapova. Izrazi koji su izvedeni za ravni štap mogu se primjeniti i na slabo zakrivljene štapove, tj. štapove kojima je polumjer zakrivljenosti r_T velik prema

debljini štapa h . Ako je omjer r_T/h veći od 5–10, štap se može razmatrati kao ravan.

Analiza naprezanja i deformacija izvest će se uz pretpostavku da poprečni presjeci u toku deformiranja ostaju ravni i da je u štalu jednoosno stanje naprezanja.

Na sl. 86 prikazan je debeli zakrivljeni štap koji je opterećen na savijanje spregovima M . Na slici su upotrijebljene sljedeće oznake: r_1 i r_2 unutrašnji i vanjski polumjer štapa, r_t polumjer težišne linije, tj. linije koja spaja težišta poprečnih presjeka, r_n polumjer neutralne plohe, r polumjer kao polarna koordinata, z udaljenost elementa od neutralne plohe.



Sl. 86. Geometrijska analiza savijanja debelog zakrivljenog štapa

Nedeformirani oblik elementa štapa prikazan je crtkanom linijom $ABCD$, a deformirani oblik punom linijom $A_1B_1C_1D_1$ na sl. 86b. Presjeci AB i CD prije deformiranja čine kut $d\varphi$, a nakon deformiranja kut $d\varphi + d\alpha$. Deformacija vlastina EF iznosi

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\overline{E_1 F_1} - \overline{E F}}{\overline{E F}} = \frac{(r - r_n) d\alpha}{r d\varphi} = \left(1 - \frac{r_n}{r}\right) \frac{d\alpha}{d\varphi}. \quad (210)$$

Primjena Hookeova zakona. Kako je prema pretpostavci u štalu jednoosno stanje naprezanja, bit će

$$\sigma_\varphi = E \varepsilon_\varphi = \left(1 - \frac{r_n}{r}\right) E \frac{d\alpha}{d\varphi}. \quad (211)$$

Veličine $E \frac{d\alpha}{d\varphi}$ i r_n su konstante za promatrani presjek, pa izrazi (210) i (211) predstavljaju hiperbolički zakon promjene deformacije, odnosno naprezanja po presjeku. U tim izrazima pojavljuju se dva nepoznata parametra, polumjer neutralne plohe r_n i diferencijalni omjer $d\alpha/d\varphi$.

Primjena uvjeta ravnoteže. Uvjeti ravnoteže štapa glase:

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma_\varphi dA = 0, \\ M &= \int \sigma_\varphi (r - r_n) dA. \end{aligned} \quad (212)$$

Nakon uvrštenja (211) u prvu jednadžbu (212) i nakon sređivanja slijedi

$$\int dA - r_n \int \frac{dA}{r} = 0, \quad (213)$$

odakle je

$$r_n = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}. \quad (214)$$

Premda to položaj neutralne plohe ne ovisi o opterećenju i može se unaprijed izračunati na temelju geometrijskog oblika štapa.

Ako se (211) uvrsti u drugu jednadžbu (212) i sredi, dobiva se

$$E \frac{d\alpha}{d\varphi} \left[\int r dA - r_n \int dA - r_n \left(\int dA - r_n \int \frac{dA}{r} \right) \right] = M. \quad (215)$$

Prvi je integral statički moment presjeka oko osi y' , koji iznosi $r_t A$, pa prva dva integrala daju $(r_t - r_n) A$. Razlika u okrugloj zagradi izraza (215), prema (213), jednaka je nuli, pa je

$$E \frac{d\alpha}{d\varphi} (r_t - r_n) A = M. \quad (216)$$

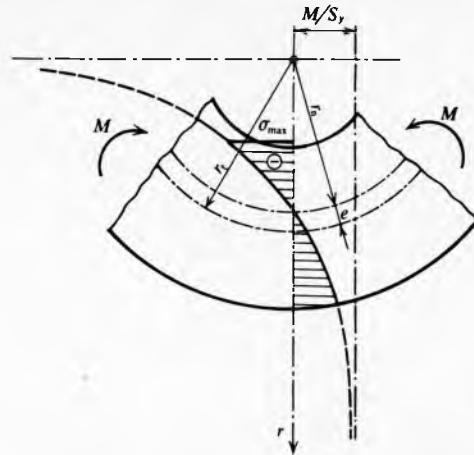
Kako je $(r_t - r_n) A = e A$ jednako statičkom momentu S_y , presjeka oko osi y , bit će

$$E \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{M}{S_y}, \quad (217)$$

što uvršteno u (211) daje

$$\sigma_\varphi = \frac{M}{S_y} \left(1 - \frac{r_n}{r}\right). \quad (218)$$

Kad r teži prema nuli, σ_φ teži prema $-\infty$. Kad r teži prema $+\infty$, σ_φ teži prema M/S_y . Raspored naprezanja prikazan je na sl. 87.



Sl. 87. Raspored naprezanja u debelom zakrivljenom štalu

Prema tome neutralna se os pri savijanju zakrivljenog štapa pomiče od težišta prema središtu zakrivljenosti. U dvostruko simetričnom presjeku maksimalno naprezanje djeluje na unutrašnjoj strani štapa. Ako se želi smanjiti naprezanje na unutrašnjoj strani, zadebljava se unutrašnji dio presjeka (sl. 86a).

Promjena zakrivljenosti. Neka je r_n polumjer neutralne plohe prije deformiranja, a r'_n polumjer neutralne plohe poslije deformiranja. Kako se vlastina neutralne plohe ne deformiraju, vrijedi

$$r'_n (d\alpha + d\varphi) = r_n d\varphi, \text{ pa je } r'_n \left(1 + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = r_n, \text{ odnosno}$$

$$\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} = \frac{d\alpha}{d\varphi} \cdot \frac{1}{r_n}. \quad (219)$$

Ako se uzme u obzir (217) i da je $r_n \approx r_v$, dobiva se

$$\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} = \frac{M}{E S_y} \cdot \frac{1}{r_t}. \quad (220)$$

Diferencijalna jednadžba elastične linije ravnog štapa. Na sl. 88 prikazana je elastična linija grede. Na njoj su naznačeni pozitivni smjerovi progiba w i nagiba α za odabrani koordinatni sustav. Takoder je naznačena pozitivna i negativna zakrivljenost. Za male progibe i nagibe vrijedi

$$\alpha \approx \tan \alpha = -\frac{dw}{dx}. \quad (221)$$

Takoder je

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} \approx \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dw}{dx} \right). \quad (222)$$

Ako se uzme u obzir (185b), dobiva se

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \quad (223)$$

Taj izraz predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije kad su progibi maleni. Ako progibi nisu maleni, treba upotrijebiti točan izraz za zakrivljenost, i tada diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \quad (224)$$

Očito, kad je $dw/dx \ll 1$, izraz (224) prelazi u (223). Izraz (223) može se napisati i u obliku

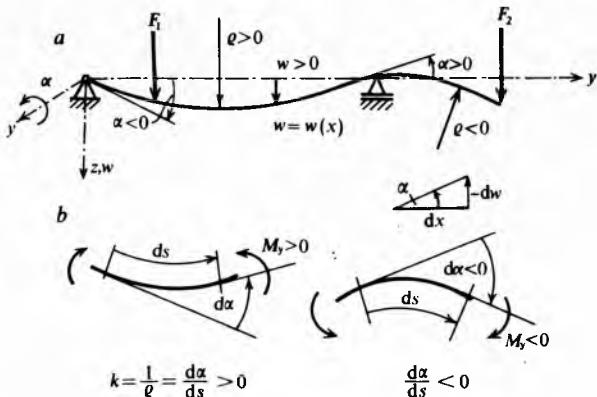
$$M_y = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (225)$$

Ako je $EI_y = \text{const.}$, može se deriviranjem izraza (225) uz pomoć (75) i (77) dobiti

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = -EI_y \frac{d^3w}{dx^3}, \quad (226)$$

$$q_z = -\frac{dQ_z}{dx} = EI_y \frac{d^4w}{dx^4}. \quad (227)$$

Izraz (227) predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije četvrtog reda. Pomoću nje se mogu odrediti progibi i nagibi bez prethodnog izračunavanja reakcija, momenata savijanja i poprečnih sila.



Sl. 88. Definicija predznaka progiba w , nagiba α i zakrivljenosti $1/\rho$

Elastična linija jednoliko kontinuirano opterećene grede. Reakcije grede (sl. 89) iznose

$$F_A = F_B = \frac{1}{2}ql, \quad (228a)$$

pa izraz za moment savijanja glasi

$$M_y = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2, \quad (228b)$$

što uvršteno u (223) daje

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qlx. \quad (228c)$$

Nakon dvostrukog integriranja slijedi

$$EI_y w = \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{12}qlx^3 + C_1x + C_2.$$

Iz rubnih uvjeta $w(0) = 0$ i $w(l) = 0$ dobiva se $C_1 = ql^3/24$ i $C_2 = 0$, pa je

$$w = \frac{ql^4}{24EI_y} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right) \right], \quad (229)$$

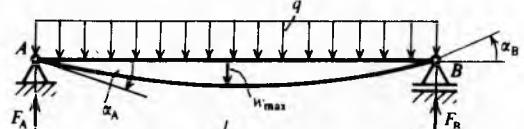
odnosno

$$\alpha = -\frac{dw}{dx} = -\frac{ql^3}{24EI_y} \left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right]. \quad (230)$$

Odatle je

$$w_{\max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y}, \quad (231)$$

$$\alpha_A(0) = -\alpha_B(l) = -\frac{ql^3}{24EI_y}.$$



Sl. 89. Elastična linija i progib jednoliko kontinuirano opterećene grede

Metoda analogne grede. Na analogiji diferencijalnih jednadžbi koje povezuju opterećenje q_z , poprečnu silu Q_z i moment savijanja M_y , te diferencijalnih jednadžbi koje povezuju progib w , nagib α i moment savijanja podijeljen fleksijskom krutušću $M_y/(EI_y)$, zasniva se metoda analogne grede. Analogne su jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{d^2M_y}{dx^2} &= -q_z & \text{i} & \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \\ \frac{dM_y}{dx} &= Q_z & \text{i} & \frac{dw}{dx} = -\alpha, \\ \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z & \text{i} & \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}. \end{aligned} \quad (232)$$

Među tim jednadžbama postoji potpuna analogija. Ako se veličine $M_y/(EI_y)$, α i w s desne strane zamijene sa q_z , $-Q_z$, $-M_y$, odnosno M_y , dobivaju se jednadžbe lijeve strane. Ako su analogni rubni uvjeti, bit će analogni i rješenja tih diferencijalnih jednadžbi

Da bi se odredili pomaci stvarne grede, treba stvarnu gredu zamijeniti analognom (fiktivnom, konjugiranim) gredom, tj. gredom koja će imati analogni rubni uvjeti. Analognu gredu optereti se kontinuiranim opterećenjem koje odgovara dijagramu momenta savijanja stvarne grede podijeljenom sa EI_y . Momenti savijanja i poprečna sila analognog grede odgovaraju progibu i negativnom nagibu stvarne grede. Obično se veličine koje se odnose na analognu gredu označuju zvjezdicom, pa vrijedi

$$\frac{M}{EI_y} = q_z^*, \quad \alpha = -Q_z^*, \quad w = M_y^*. \quad (233)$$

U tabl. 6 navedeni su analogni rubni uvjeti stvarne i analognе grede.

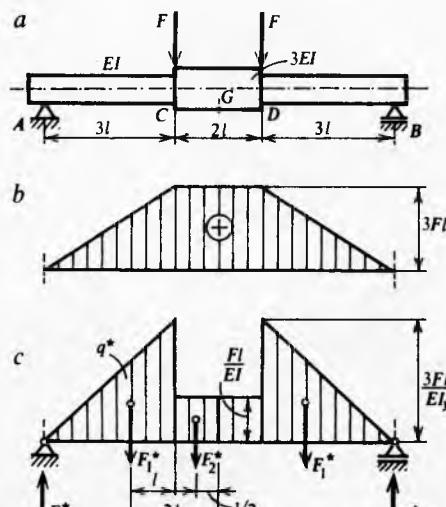
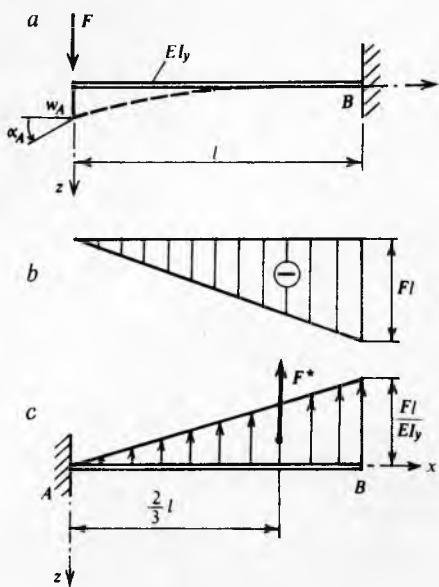
Pri rješavanju zadatka metodom analognog grede potrebno je poznavati ploštine pojedinih dijelova momentnog dijagrama. Da bi se izbjeglo integriranje, navedene su u tabl. 7 ploštine likova od kojih se najčešće sastoje momentni dijagrami.

Konzola opterećena na kraju. Na sl. 90a prikazana je stvarna greda, tj. konzola opterećena silom F na kraju, ispod nje ucrtan je momentni dijagram, a ispod toga na sl. 90c analognog grede. Prema tabl. 6 slobodnom kraju odgovara uklještenje, a uklještenju slobodan kraj. Rezultanta opterećenja F^* iznosi

$$F^* = \frac{1}{2}Fl = \frac{Fl^2}{2}. \quad (234a)$$

Lako se može odrediti analogni moment M_y^* i analogni poprečna sila Q_z^* u točki A , pa poprečna sila Q_{zA}^* i moment savijanja M_{yA}^* u točki A konjugirane grede iznose

$$Q_{zA}^* = -F^*, \quad M_{yA}^* = F^* \frac{2}{3}l, \quad (234b)$$



Sl. 91. Greda promjenljive debljine

Tablica 6
ANALOGNE I STVARNE GREDE

| Stvarna greda | Analogna greda |
|--|----------------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| Nagib tangente je različit lijevo i desno od točke A | |
| | |
| | |
| | |

Tablica 7
PLOŠTINE I TEŽIŠTA DIJELOVA MOMENTNOG DIJAGRAMA

| Lik | Ploština | Lik | Ploština |
|-----|----------------------|-----|-----------------------|
| | $A = \frac{1}{2}bh$ | | $A = \frac{1}{2}bh$ |
| | $A = \frac{1}{3}bh$ | | $A = \frac{1}{4}bh$ |
| | $A = \frac{bh}{n+1}$ | | $A = \frac{n}{n+1}bh$ |

$$F_A^* = F_B^* = F_1^* + F_2^* = \frac{11}{2} \cdot \frac{Fl^2}{EI}. \quad (235b)$$

Fiktivne poprečne sile u presjecima C i G jesu

$$Q_A^* = F_A^*, \quad Q_C^* = F_A^* - F_1^* \text{ i } Q_G^* = F_A^* - F_1^* - F_2^*, \quad (235c)$$

a fiktivni momenti savijanja

$$M_C^* = F_A^* 3l - F_1^* l = 12 \frac{Fl^3}{EI}, \quad (235d)$$

$$M_G^* = F_A^* 4l - F_1^* 2l - F_2^* \frac{l}{2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{Fl^3}{EI}.$$

Kutovi nagiba tangente na elastičnu liniju u presjecima A i C jesu

$$\alpha_A = -Q_{zA}^* = \frac{Fl^2}{2EI_y}, \quad w_A = M_{yA}^* = \frac{Fl^3}{3EI_y}. \quad (234c)$$

Greda promjenljive debljine. Na sl. 91 prikazana je greda promjenljive debljine sa svojim momentnim dijagramom i analognom gredom. Fiktivne sile (sl. 91 c) iznose

$$F_1^* = \frac{9Fl^2}{2EI}, \quad F_2^* = \frac{Fl^2}{EI}, \quad (235a)$$

a fiktivne su reakcije u osloncima

$$\alpha_A = -Q_A^* = -\frac{11}{2} \cdot \frac{Fl^2}{EI},$$

$$\alpha_C = -Q_C^* = -\frac{Fl^2}{EI}. \quad (235e)$$

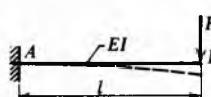
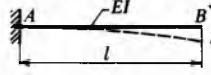
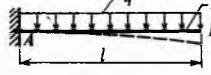
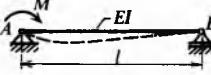
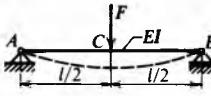
Progibi u presjecima C i G iznose

$$w_C = M_C^* = 12 \frac{Fl^3}{EI},$$

$$w_G = M_G^* = \frac{25}{2} \cdot \frac{Fl^3}{EI}. \quad (236)$$

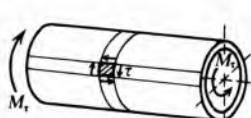
U tabl. 8 navedene su apsolutne vrijednosti progiba i nagiba karakterističnih presjeka nekih nosača.

Tablica 8
PROGIBI I NAGIBI NEKIH GREDA

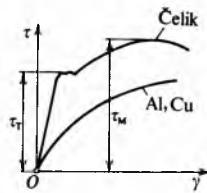
| | | |
|---|---------------------------------------|--|
|  | $w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$ | $\alpha_B = \frac{Fl^2}{2EI}$ |
|  | $w_B = \frac{Ml^2}{2EI}$ | $\alpha_B = \frac{Ml}{EI}$ |
|  | $w_B = \frac{ql^4}{8EI}$ | $\alpha_B = \frac{ql^3}{6EI}$ |
|  | $\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}$ | $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI}$ |
|  | $w_C = \frac{F l^3}{48EI}$ | $\alpha_A = \alpha_B = \frac{F l^2}{16EI}$ |
|  | $w_C = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$ | $\alpha_A = \alpha_B = \frac{ql^3}{24EI}$ |

Smicanje

Smicanje je gotovo uvijek povezano sa savijanjem. Izračunavanje posmičnih naprezanja zbog poprečne sile protumačeno je u vezi s poprečnim savijanjem štapa. I u laboratorijskim uvjetima teško je ostvariti čisto smicanje, pa se pokus smicanja provodi uvijanjem tankih cijevi (sl. 92 i 93).



Sl. 92. Pokus smicanja

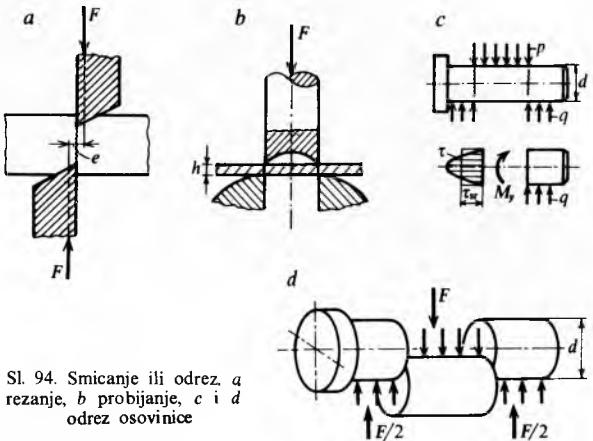


Sl. 93. Grafički prikaz ovisnosti tangencijalnog naprezanja τ o kutu uvijanja γ

Na sl. 94 prikazano je nekoliko primjera opterećenja kad pravljada smicanje. Posmično naprezanje nije jednolikom raspodijeljeno po presjeku smicanja. Egzaktno određivanje raspodjele posmičnog naprezanja vrlo je složeno, pa se u praksi prora-

čunava prosječno naprezanje. Prosječno naprezanje osovinice proračunava se prema sl. 94c i d. Očito je da se odrez pojavljuje istodobno na dva presjeka, pa je

$$\tau_{sr} = \frac{F}{2A} = \frac{2F}{\pi d^2}. \quad (237)$$



Sl. 94. Smicanje ili odrez, a rezanje, b probijanje, c i d odrez osovinice

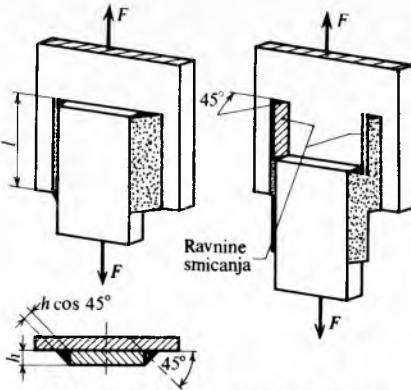
Na sl. 95 ilustriran je proračun smicanja zavarenog spoja. Smicanje se događa po presjeku najmanje ploštine. To je presjek koji s ravnninom pločica čini kut 45° . Ukupna ploština smicanja iznosi

$$A = 2lh \cos 45^\circ, \quad (238a)$$

pa je

$$\tau_{sr} = \frac{F}{A} = 0,707 \frac{F}{lh}. \quad (238b)$$

Kad se štap poprečno savija, naprezanja zbog smicanja su to važnija što je štap kraći.

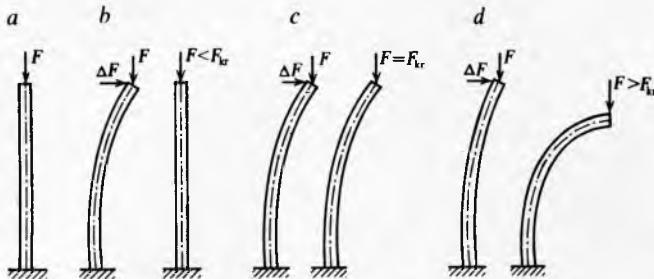


Sl. 95. Proračun smicanja zavarenog spoja

Izvijanje štapa i elastična stabilnost

Stabilnost ravnotežnog oblika. Pod djelovanjem sila čvrsto tijelo se deformira i poprima novi ravnotežni oblik. Ako su naprezanja u tijelu pretežno tlačna, ravnotežni deformirani oblik tijela može biti nestabilan, što znači da vrlo mali poremećaj opterećenja može uzrokovati potpunu promjenu ravnotežnog oblika, koja često uzrokuje lom. Ta će pojava biti podrobnije protumačena na primjeru tlačno opterećenog štapa prema sl. 96. Pretpostavlja se da je štap idealno ravan, homogen i idealno centrično opterećen. Tada štap ostaje ravan (sl. 96a). Ako na štap djeluje kratkotrajno mala bočna sila, on će se saviti u stranu. Dalje ponašanje štapa može biti trojako. Ako je sila F manja od neke kritične vrijednosti $F < F_{kr}$ nakon uklanjanja poremećaja ΔF štap se ponovno vraća u ravan ravnotežni oblik. Kaže se da je štap u stabilnoj elastičnoj ravnoteži. Ako je $F = F_{kr}$ nakon uklanjanja poremećaja štap zadržava izvijeni oblik, ali se dalje ne deformira. Ako je $F > F_{kr}$ štap se i pri-

najmanjem poremećaju izvija u stranu i nastavlja se deformirati nakon uklanjanja poremećaja, tako da se jako savija u stranu, a vrlo se često prije toga štap slomi. U realnim konstrukcijama tlačno opterećeni štapovi nikada nisu idealno ravni, homogeni i strogo osno (centrično) opterećeni. To odstupanje od idealnosti adekvatno je poremećaju ΔF . Zbog toga se u realnim konstrukcijama uvek pojavljuje izvijanje kad sila postane veća od kritične vrijednosti F_{kr} .



Sl. 96. Tri slučaja elastične stabilnosti štapa. a) kruti štap, b) stabilna ravnoteža $F < F_{kr}$, c) indiferentna ravnoteža $F = F_{kr}$, d) nestabilna ravnoteža $F > F_{kr}$

Izvijanje štapa u elastičnom području. Kritična sila izvijanja F_{kr} određuje se razmatranjem štapa koji je zglobno vezan na oba kraja (sl. 97). Moment savijanja u presjeku x iznosi

$$M_y = Fw, \quad (239)$$

pa diferencijalna jednadžba savijanja glasi

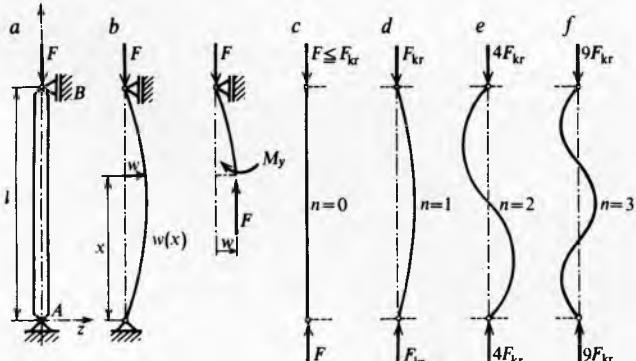
$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = -\frac{F}{EI_y} w, \quad (240)$$

odnosno

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0, \quad (241)$$

gdje je

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI_{min}}}. \quad (242)$$



Sl. 97. Izvijanje štapa zglobno vezanog na oba kraja koji je opterećen različitim iznosima sile F

Naime, izvijanje štapa zbiva se oko osi najmanjeg momenta tromosti, pa os y treba da se podudara s tom osi, tj. $I_y = I_{min}$. Opće je rješenje diferencijalne jednadžbe (241)

$$w = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x.$$

Rubni uvjeti jesu $w(0) = 0$ i $w(l) = 0$. Iz prvog uvjeta slijedi da je $C_1 = 0$, a iz drugoga da je $C_2 \sin \alpha l = 0$. Rješenje $C_1 = 0$ nije prihvatljivo jer bi to značilo da nema izvijanja. Prema tome mora biti $\sin(\alpha l) = 0$, odnosno

$$\alpha l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (243)$$

Ako se (243) uvrsti u (242) i sredi, dobiva se

$$F = n^2 \frac{EI_{min}}{l^2} \pi^2. \quad (244)$$

Jednadžba elastične linije tada glasi $w = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x$.

Već prema vrijednosti n postoji nekoliko oblika izvijanja. Slučaj $n = 0$ nije upotrebljiv jer daje $F = 0$. Ako je $n = 1$, oblik je elastične linije polusinusoide, a sila izvijanja je najmanja, tj. jednaka je kritičnoj sili

$$F_{kr} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{l^2}. \quad (245)$$

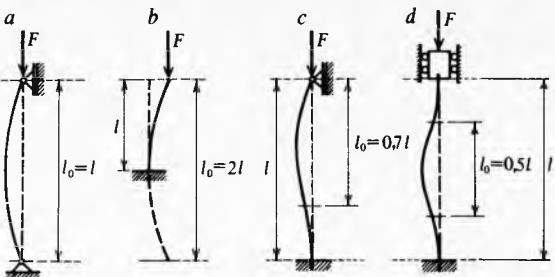
Ta se sila prema L. Euleru (1757. god.) zove i *Eulerova kritična sila*. Ako je $n = 2$, elastična linija ima oblik pune sinusoide, a sila izvijanja je 4 puta veća. Kad je $n = 3$, sila izvijanja je $3^2 = 9$ puta veća itd. Štap nije moguće držati u ravnoteži silom $F_{kr} < F < 4F_{kr}$.

Potrebno je ili silu smanjiti na F_{kr} , da bi se zadržao prvi oblik izvijanja ($n = 1$), ili povećati silu na $4F_{kr}$ i prisiliti štap da se izvija prema drugom obliku izvijanja. Ako se to ne učini, štap se jako izvija i lomi.

Izraz (245) u preinačenom obliku može se primijeniti i za druge načine učvršćenja štapa. Preinačeni je oblik

$$F_{kr} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{l_0^2}, \quad (246)$$

gdje je l_0 duljina izvijanja štapa, zapravo duljina jedne polusinusoide (sl. 98).



Sl. 98. Oblici štapa za različite načine učvršćenja

Ako se izraz (246) podijeli ploštinom A poprečnog presjeka štapa, dobiva se

$$\sigma_{kr} = \pi^2 E \left(\frac{l_{min}}{l_0} \right)^2, \quad (247)$$

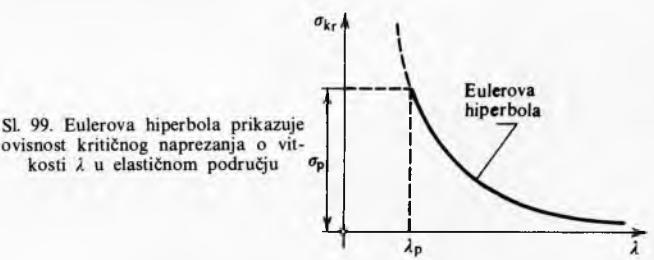
gdje je $\sigma_{kr} = F_{kr}/A$, $l_{min}^2 = I_{min}/A$. Ako se uvede oznaka za vitkost štapa

$$\lambda = \frac{l_0}{l_{min}}, \quad (248)$$

izraz (247) prelazi u oblik

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}. \quad (249)$$

Taj je izraz prikazan grafički na sl. 99.



Izvijanje štapa u plastičnom području. Izraz (249) izведен je uz pretpostavku da je $E = \text{const.}$, odnosno da je naprezanje proporcionalno deformaciji, što znači da izraz (249) vrijedi samo u području $\sigma_{kr} \leq \sigma_p$ odnosno u području $\lambda = \lambda_p$ gdje je σ_p granica proporcionalnosti, a λ_p je granična vitkost određena

izrazom

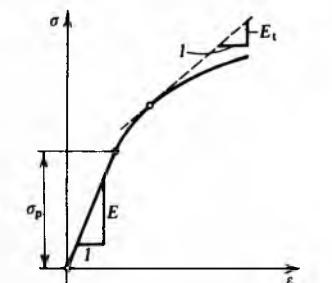
$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \quad (250)$$

Međutim, izraz (249) može formalno vrijediti i u području kad je $\sigma > \sigma_p$ ako se umjesto modula elastičnosti E primjeni tzv. tangentni modul elastičnosti E_t koji je (sl. 100) definiran izrazom

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (251)$$

Tada izraz (249) prelazi u izraz

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E_t}{\lambda^2}. \quad (252)$$



Sl. 100. Definicija tangentnog modula elastičnosti

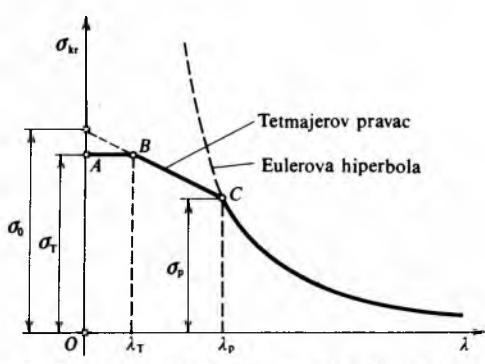
Zbog složenosti analitičkog proračuna u praksi se za proračun izvijanja izvan granice proporcionalnosti primjenjuju približni empirijski izrazi koji su određeni na temelju mnogobrojnih pokusa. Postupak se sastoji u tome da se krivulja $\sigma_{kr} = f(\lambda)$ za područje $\sigma_{kr} > \sigma_p$ aproksimira pravcem (F. S. Jasinskij, L. Tetmajer), parabolom (L. Tetmajer, Johnson), hiperbolom (W. Rankine, S. A. Gordon) itd. U zagradi su imena autora aproksimacija.

Za čelik i neke druge materijale Tetmajer je predložio izraz u obliku

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p) \frac{\lambda}{\lambda_p}, \quad (253)$$

gdje je σ_p granica proporcionalnosti, a σ_0 karakteristično naprezanje određeno eksperimentalno.

Naprezanje σ_0 označeno je na sl. 101. Kako u konstrukcijama mora biti ispunjen uvjet $\sigma < \sigma_T$, razlikuju se tri slučaja tlačno opterećenog štapa:



Sl. 101. Ovisnost kritičnog naprezanja o vitkosti štapa

1) Kratki štapovi, $\lambda < \lambda_T$, u kojih se tečenje materijala pojavljuje prije nego izvijanje.

2) Srednje dugi štapovi, $\lambda_T < \lambda < \lambda_p$, koji se proračunavaju na izvijanje pomoću izraza (253) ili kojega drugog empirijskog izraza.

3) Vitki štapovi, $\lambda > \lambda_p$, koji se proračunavaju na izvijanje pomoću Eulerova izraza (249).

TEORIJE ČVRSTOĆE

Svojstva čvrstoće i elastičnosti tehničkih materijala utvrđuju se pokusima rastezanja, sabijanja ili čistog smicanja. Ako je dio konstrukcije opterećen tako da u njemu vlada jednoosno naprezanje ili čisto smicanje, čvrstoća se tijela lako može provjeriti tako da se normalno ili posmično naprezanje usporedi s kritičnim naprezanjem koje je određeno pokusom rastezanja, sabijanja ili smicanja. Kritično naprezanje krhkih materijala jednak je lomnom naprezanju, dok je kritično naprezanje rastezljivih materijala jednako granici tečenja.

Taj bi se princip provjere čvrstoće vrlo teško primjenio za dvoosno, odnosno troosno stanje naprezanja. Naime, bilo bi potrebno eksperimentalno imitirati sve moguće kombinacije naprezanja, tj. eksperimentalno utvrditi kritično naprezanje za različite kombinacije $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$, pa onda stvarno naprezanje u konstrukciji usporediti s pripadnim kritičnim naprezanjem koje je određeno eksperimentalno. Ispitivanje kritičnog naprezanja za sve materijale i za mnogo kombinacija $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ bilo bi vrlo skupo, dugotrajno, a za mnoge kombinacije tehnički teško provedivo.

Zbog toga se uvode teorije čvrstoće (kriteriji loma) koje nastoje da predvide pojavu loma za dvoosno, odnosno troosno stanje naprezanja na temelju eksperimentalnih podataka dobivenih pri rastezanju. Postoji više teorija čvrstoće. Nijedna od njih nije sveobuhvatna, tj. nije upotrebljiva za sve vrste materijala. Neke teorije čvrstoće odgovaraju kriterijima plastičnosti (v. *Mehanika kontinuma*, TE 8, str. 173; v. *Otpornost građevnih materijala*).

Teorija najvećeg normalnog naprezanja. Prema toj teoriji opasnost od loma nastaje kada najveće normalno naprezanje postigne kritičnu vrijednost; od tri glavna naprezanja mjerodavno je ono koje je najveće po apsolutnoj vrijednosti, a ostala dva ne utječu na čvrstoću materijala. Uvjet čvrstoće tada glasi

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leq \sigma_{dop} \quad (254)$$

gdje je σ_{ekv} ekvivalentno (efektivno, reducirano) naprezanje, σ_{max} je najveće apsolutna vrijednost glavnih naprezanja, a σ_{dop} dopušteno naprezanje.

Ako materijal ima različitu vlačnu i tlačnu čvrstoću, uvjet čvrstoće glasi

$$\sigma_1 \leq \sigma_{vdop} \quad \sigma_3 = \sigma_{tdop} \quad (255)$$

gdje je σ_{vdop} dopušteno vlačno naprezanje, a σ_{tdop} dopušteno tlačno naprezanje.

Teorija najveće duljinske deformacije. Opasnost od loma, prema toj teoriji, nastaje kad najveća duljinska deformacija dostigne kritičnu vrijednost određenu pokusom rastezanja, koja iznosi

$$\varepsilon_{dop} = \frac{\sigma_{dop}}{E}. \quad (256a)$$

Prema tome, uvjet čvrstoće glasi

$$|\varepsilon_{max}| = \frac{\sigma_{dop}}{E}. \quad (256b)$$

Npr. ako je $|\sigma_1| > |\sigma_3|$, bit će

$$|\varepsilon_{max}| = \frac{\sigma_1 - v(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}, \quad (256c)$$

pa je uvjet čvrstoće

$$\frac{\sigma_1 - v(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \leq \frac{\sigma_{dop}}{E}, \quad (256d)$$

odnosno

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - v(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{dop} \quad (257)$$

Na sličan način može se odrediti ekvivalentno naprezanje za ostala naprezanja. Npr. ako je $|\sigma_3| > |\sigma_1|$, bit će

$$\sigma_{ekv} = |\sigma_3 - v(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq \sigma_{dop} \quad (258)$$

Teorija najvećeg posmičnog naprezanja. Prema toj teoriji opasno stanje materijala nastaje kad najveće posmično napre-

zanje dostigne kritičnu vrijednost $\tau_{\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}}/2$. Kako je $\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, uvjet je čvrstoće

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2}, \quad (259a)$$

odnosno

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{dop}} \quad (259b)$$

Teorija najveće distorzijiske energije. Prema toj teoriji opasno stanje materijala nastaje kad gustoća distorzijiske energije dostigne kritičnu vrijednost. Uvjet čvrstoće tada glasi

$$U_{0d} = (U_{0d})_{\text{dop}} \quad (260)$$

gdje je U_{0d} gustoća distorzijiske energije ili energije promjene oblika, a $(U_{0d})_{\text{dop}}$ dopuštena gustoća distorzijiske energije koja je određena pokusom rastezanja. Prema (296) izraz za gustoću distorzijiske energije glasi

$$U_{0d} = \frac{1+v}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (261)$$

Ako se u taj izraz uvrsti $\sigma_1 = \sigma_{\text{dop}}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, dobiva se

$$(U_{0d})_{\text{dop}} = \frac{1+v}{3E} \sigma_{\text{dop}}^2. \quad (262)$$

Ako se (261) i (262) uvrste u (260) i to sredi, bit će

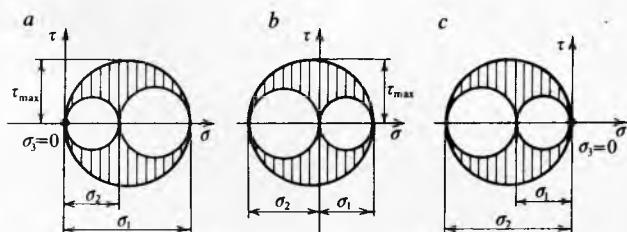
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_{\text{dop}}^2, \quad (263a)$$

pa je

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_{\text{dop}} \quad (263b)$$

Ova se teorija naziva i teorijom HMH po autorima koji su na njoj radili (Huber, R. von Mises, Hencky).

Dvoosno napregnuto stanje. Za dvoosno napregnuto stanje izrazi (254), (257), (259) i (263) vrijede formalno i dalje ako je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Ako su oba glavna naprezanja suprotnog predznaka, treba paziti da σ_3 bude manje naprezanje a $\sigma_2 = 0$. Međutim, uobičajeno je da se tada postavi da je $\sigma_3 = 0$ i da je $\sigma_2 < 0$, pa navedene izraze treba preinaciti.



Sl. 102. Određivanje σ_{ekv} prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja za tri slučaja ravinskog stanja naprezanja

Na sl. 102 prikazane su Mohrove kružnice naprezanja za tri moguća dvoosna stanja naprezanja, pa ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja iznosi

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ekv}} &= \sigma_1 && \text{ako je } \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \\ \sigma_{\text{ekv}} &= |\sigma_2| && \text{ako je } \sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \\ \sigma_{\text{ekv}} &= \sigma_1 - \sigma_2 && \text{ako je } \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0. \end{aligned} \quad (264)$$

Ako se u (263) uvrsti $\sigma_3 = 0$, dobiva se uvjet čvrstoće prema teoriji distorzijiske energije, koji glasi

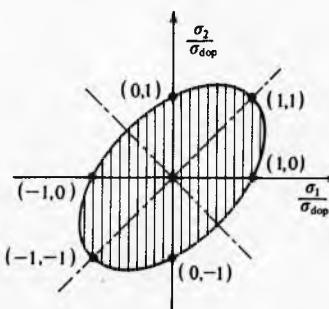
$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_{\text{dop}} \quad (265a)$$

Taj se izraz može preinaciti u oblik

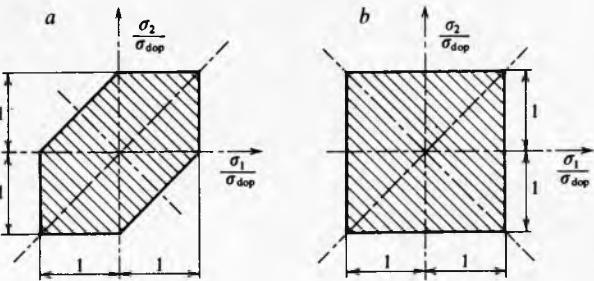
$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{dop}}}\right)^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{dop}}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{dop}}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{dop}}}\right)^2 \leq 1, \quad (265b)$$

koji predstavlja elipsu (sl. 103). Ta je elipsa analogna elipsi kriterija plastičnosti (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173). Ako točka s koordinatama $\sigma_1/\sigma_{\text{dop}}, \sigma_2/\sigma_{\text{dop}}$ padne unutar elipse,

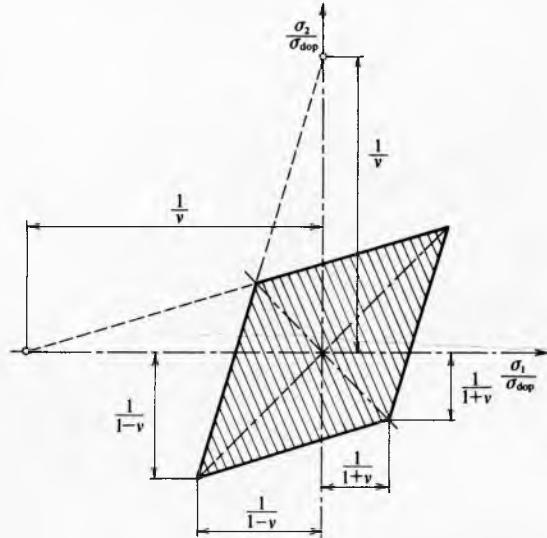
zadovoljen je uvjet čvrstoće. Slične krivulje čvrstoće mogu se konstruirati i za ostale teorije čvrstoće. To su zapravo višekutnici prikazani na slikama 104 i 105.



Sl. 103. Prema teoriji distorzijiske energije krivulja čvrstoće je elipsa



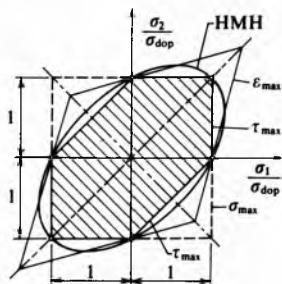
Sl. 104. Područje sigurnosti: a) prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja, b) prema teoriji najvećeg normalnog naprezanja



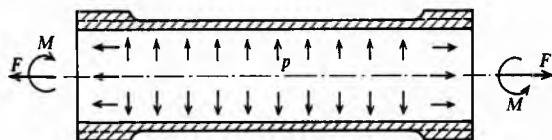
Sl. 105. Krivulja čvrstoće prema teoriji najveće duljinske deformacije

Usporedba teorija čvrstoće. Na sl. 106 prikazane su krivulje čvrstoće prema svim teorijama. Područje sigurnosti po teoriji najvećeg normalnog naprezanja na slici je iscrtano. Kako se vidi, područje sigurnosti prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja nalazi se unutar područja sigurnosti svih ostalih teorija, što znači da teorija najvećeg posmičnog naprezanja za dvoosno stanje naprezanja daje najveću sigurnost. Kako je primjena te teorije jednostavnija, ona se mnogo primjenjuje.

Teorije čvrstoće provjeravane su eksperimentalno. Na sl. 107 prikazan je uzorak pomoću kojeg se mogu ostvariti različite kombinacije dvoosnog stanja naprezanja. To je zapravo tanka kružna cijev, koja se može istodobno opteretiti unutrašnjim tlakom p , uzdužnom silom F i momentom uvijanja M . Ako se mijenjaju nezavisno vrijednosti veličina p , F i M , dobivaju se u stijenci cijevi različne kombinacije naprezanja σ_1 i σ_2 .

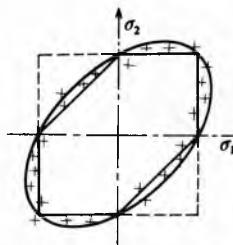


Sl. 106. Usporedba teorija čvrstoće za dvoosno stanje naprezanja



Sl. 107. Uzorak za ispitivanje čvrstoće pri dvoosnom stanju naprezanja

Na sl. 108 prikazani su rezultati ispitivanja. Rastezljivi ili duktilni materijali dobro slijede teoriju najvećeg posmičnog naprezanja, odnosno teoriju distorzionske energije, a krhki materijali bolje slijede teoriju najvećeg normalnog naprezanja, pa se prema tome za rastezljive materijale primjenjuje teorija najvećeg posmičnog naprezanja, odnosno teorija distorzionske energije. Za krhke materijale u području vlaka primjenjuje se teorija najvećeg normalnog naprezanja.



Sl. 108. Usporedba teorija čvrstoće

Sve što je navedeno odnosi se na izotropne materijale koji imaju jednaku vlačnu, odnosno tlačnu čvrstoću. Osim navedenih teorija, postoje i druge teorije koje uzimaju u obzir anizotropna svojstva materijala, te različitost vlačnih i tlačnih svojstava čvrstoće.

SLOŽENA OPTEREĆENJA

Metoda superpozicije opterećenja. Do sada su analizirana naprezanja i deformacije za osnovna opterećenja štapa: osno opterećenje, smicanje, uvijanje i savijanje. Ako u presjeku štapa djeluje istodobno nekoliko komponenata unutrašnjih sila, radi se o složenom opterećenju. U području malih pomaka i za linearno elastične konstrukcije, tj. konstrukcije kojima su pomaci linearne i jednoznačno ovisni o opterećenju, smije se primjeniti princip superpozicije, tj. odrede se komponente naprezanja pojedinačno od svakog opterećenja, a zatim se pripadne komponente zbroje. Pri tom se sve komponente naprezanja moraju odnositi na isti koordinatni sustav.

Pri provjeri čvrstoće složeno opterećenog štapa ili drugog dijela konstrukcije potrebno je naći ekvivalentno naprezanje i njega usporediti s dopuštenim, tj. treba ispuniti uvjet $\sigma_{ekv} \leq \sigma_{dop}$.

Poprečno savijanje (savijanje i smicanje) te koso savijanje (istodobno savijanje oko dviju osi) zapravo su složena opterećenja. Međutim, pri provjeri čvrstoće tako opterećenih štapova nije potrebno primjeniti teorije čvrstoće.

Za primjenu u tehniči posebno su zanimljivi istodobno savijanje i osno opterećenje, te savijanje i uvijanje okruglih štapova.

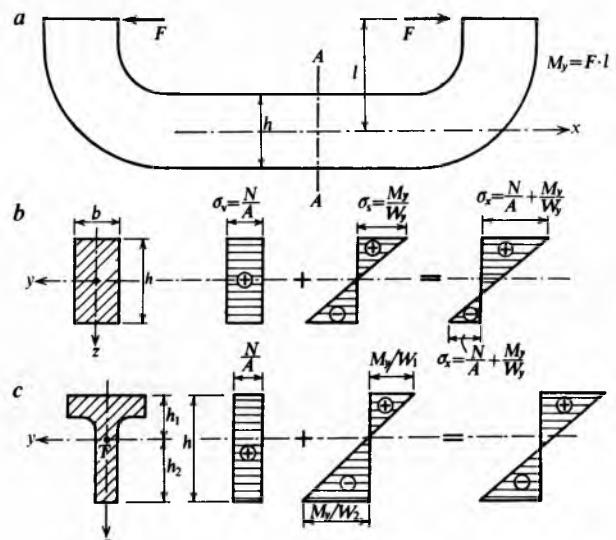
Savijanje i osno opterećenje. Na sl. 109 prikazan je štap koji je u presjeku $A-A$ istodobno opterećen na vlak i na savijanje. Naprezanje σ_x u presjeku iznosi

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (266)$$

Prvi dio desne strane izraza potječe od osnog opterećenja, a drugi od savijanja. Ako je presjek dvostruko simetričan (sl. 109b), maksimalno vlačno naprezanje bit će veće od maksimalnog tlačnog naprezanja, pa je taj oblik presjeka nepovoljan. To osobito dolazi do izražaja ako je $\sigma_{vdop} < \sigma_{tdop}$. Zbog toga se upotrebljava presjek prikazan na sl. 109c. Povoljnim izborom dimenzija h_1 i h_2 može se postići jednak naprezanje na oba kraja ako materijal ima jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću. Ako su vlačna i tlačna čvrstoća različite, treba postići razmjer

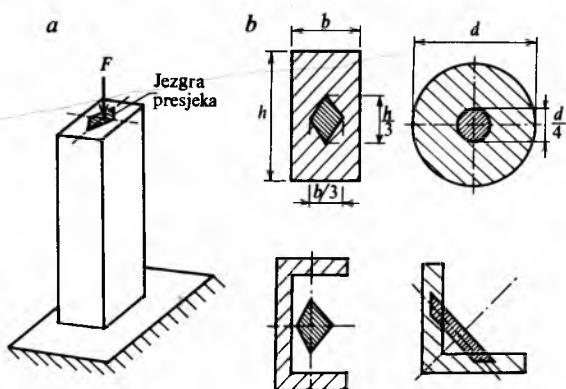
$$\sigma_{max} : |\sigma_{min}| = \sigma_{vdop} : \sigma_{tdop} \quad (267)$$

gdje su σ_{vdop} i σ_{tdop} dopušteno vlačno i dopušteno tlačno naprezanje.

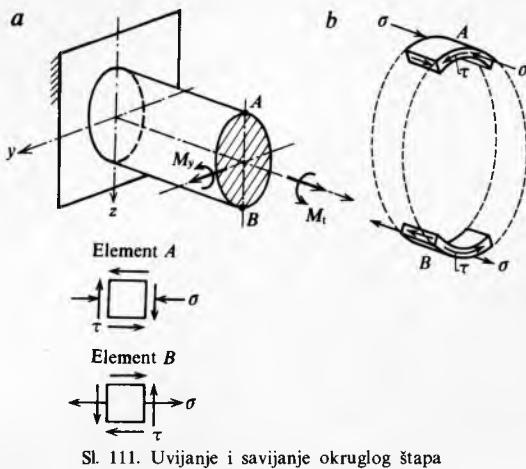


Sl. 109. Savijanje i rastezanje štapa

Ako je stup opterećen ekscentrično, u njemu se zbog savijanja mogu pojaviti i vlačna naprezanja. Za krhke materijale (opeka, beton itd.) vlačna naprezanja su nepoželjna. Područje unutar kojeg mora djelovati sila F da se ne bi pojavila vlačna naprezanja naziva se *jezgrom presjeka*. Na sl. 110b prikazane su jezgre presjeka za nekoliko vrsta poprečnog presjeka štapa.

Sl. 110. Jezgra presjeka je dio poprečnog presjeka unutar kojeg mora djelovati tlačna sila F da se u presjeku ne bi pojavila vlačna naprezanja

Savijanje i uvijanje štapa kružnog presjeka. Na sl. 111a prikazan je dio kružnog štapa koji je istodobno opterećen na savijanje i uvijanje. Na sl. 111b vidi se raspored naprezanja.



Posmična naprezanja od uvijanja maksimalna su na rubu, i po čitavom su rubu jednaka. Maksimalna naprezanja od savijanja najveća su po apsolutnoj vrijednosti u točkama A i B na rubu presjeka, pa je u tim točkama i najveća opasnost od looma. Za oba elementa posmično naprezanje iznosi

$$\tau = \frac{M_t}{W_p}. \quad (268a)$$

Normalno naprezanje jednako je po iznosu, a suprotno po predznaku i iznosi

$$\sigma = \frac{M_y}{W_p}, \quad (268b)$$

gdje je σ apsolutna vrijednost normalnog naprezanja u točkama A i B. Glavna naprezanja za elemente A i B iznose

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad (269a)$$

odnosno

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (269b)$$

Ako materijal ima jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću, oba elementa A i B podjednako su opasno napregnuta. Kako je za kružni presjek $W_p = 2W_y = \pi d^3/32$, bit će

$$\tau = \frac{M_t}{2W_y} \quad i \quad \sigma = \frac{M_y}{W_y}, \quad (270)$$

što uvršteno u (269b) daje

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2W_y}(M_y \pm \sqrt{M_y^2 + M_t^2}). \quad (271)$$

Ako se taj izraz uvrsti u izraze za ekvivalentno naprezanje prema različitim teorijama čvrstoće, tj. u izraze (254), (257), (264) i (265a), dobit će se za teoriju najvećeg normalnog naprezanja:

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{2W_y}(M_y + \sqrt{M_y^2 + M_t^2}) \leq \sigma_{dop}, \quad (272)$$

$$M_{ekv} = \frac{1}{2}(M_y + \sqrt{M_y^2 + M_t^2}), \quad (273)$$

za teoriju najveće duljinske deformacije:

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{ekv}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad (274)$$

$$M_{ekv} = \frac{1-\nu}{2}M_y + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_t^2}, \quad (275)$$

za teoriju najvećeg posmičnog naprezanja:

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{ekv}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad (276)$$

$$M_{ekv} = \sqrt{M_y^2 + M_t^2}, \quad (277)$$

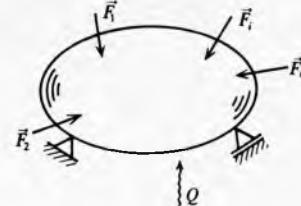
za teoriju distorzionske energije:

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{ekv}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \quad (278)$$

$$M_{ekv} = \sqrt{M_y^2 + 0,75M_t^2}. \quad (279)$$

ENERGIJSKE METODE

Rad vanjskih sila i energija deformiranja. Na sl. 112 prikazano je tijelo na koje djeluje niz vanjskih sila F_1, F_2, \dots, F_n . Djelovanjem sila tijelo se deformira, a pri tom vanjske sile vrše rad W_e . Osim toga, tijelo od okoliša prima ili okolišu predaje toplinu Q . Rad vanjskih sila i dovedena toplina troše se na povećanje unutrašnje energije i kinetičke energije tijela



Sl. 112. Rad vanjskih sila i dovedena toplina troše se na povećanje unutrašnje energije tijela U i na povećanje njegove kinetičke energije E_k

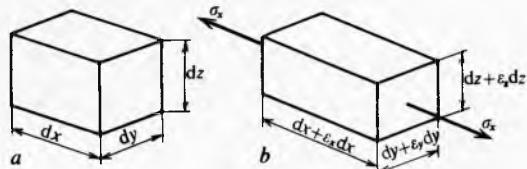
Prema prvom zakonu termodinamike vrijedi

$$W_e + Q = U + \Delta E_k. \quad (280)$$

Pri polaganom povećanju opterećenja prirast je kinetičke energije zanemarljivo malen, ali se ipak opterećivanje može smatrati dovoljno brzim da se izmjena topline s okolišem može zanemariti, pa izraz (280) prelazi u izraz

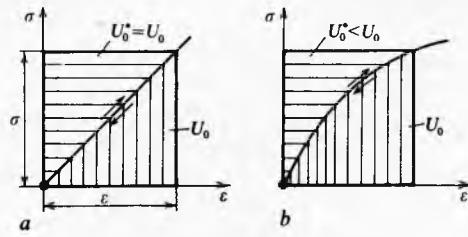
$$W_e = U, \quad (281)$$

tj. čitav rad vanjskih sila troši se na povećanje unutrašnje energije, koja se tada naziva i energijom deformiranja. Ako je tijelo elastično, energija deformiranja može se ponovno pretvoriti u mehanički rad. Ako drugačije nije napomenuto, sva se razmatranja u ovom poglavlju odnose na linearno elastična tijela (sl. 113).



Sl. 113. Dijagrami rastezanja. a linearno elastičnog, b nelinearno elastičnog tijela

Na sl. 114a prikazan je element tijela obujma $dV = dx dy dz$, a na sl. 114b isti element deformiran pod djelovanjem naprezanja σ_x .



Sl. 114. Rad jednoosnog naprezanja σ_x

Pri polaganom opterećivanju (sile inercije su zanemarljivo malene) naprezanje postepeno raste s porastom deformacije (sl. 113). Ako su deformacije malene, sila koja djeluje na element iznosi približno $\sigma_x d\gamma_{xz}$, dok je produljenje elementa u smjeru djelovanja sile $\varepsilon_x dx$, pa je rad sile

$$dW_e = \frac{1}{2} \sigma_x d\gamma_{xz} \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV, \quad (282a)$$

odnosno

$$dW_e = dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (282b)$$

Gustoća energije deformiranja U_0 definirana je izrazom

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x. \quad (283a)$$

U izrazima (282a), (282b) i (283a) pojavljuje se faktor $1/2$, jer naprezanje linearne raste od nule do konačne vrijednosti σ_x . Ako tijelo nije linearno elastično, bit će

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = k \sigma_x \varepsilon_x, \quad (283b)$$

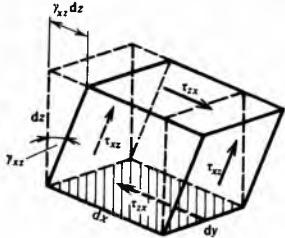
gdje je $0 < k < 1$ konstanta ovisna o obliku dijagrama $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$. Osim energije deformiranja, uvodi se i pojam komplementarne energije deformiranja, a njena gustoća U_0 definira se izrazom

$$U_0^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x. \quad (284a)$$

Za linearno elastično tijelo komplementarna energija deformiranja iznosi (sl. 113a)

$$U_0^* = U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x. \quad (284b)$$

Na sl. 115 prikazan je element koji se nalazi u čistom smicanju. Crtkom linijom prikazan je nedeformirani element, a punom linijom deformirani element. Na element djeluju četiri



Sl. 115. Rad posmičnog naprezanja $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

sile. Ako je donja ploha nepomična, sila koja na njoj djeluje ne obavlja rad. Rad bočnih sile $\tau_{xz} d\gamma_{xz}$ također je jednak nuli, jer je pomak okomit na pravac sile. Rad sile koja djeluje na gornjoj plohi iznosi

$$dW_e = \frac{1}{2} \tau_{zx} dx dy \gamma_{xz} dz, \quad (285a)$$

odnosno

$$dW_e = dU = \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{xz} dV, \quad (285b)$$

gdje je γ kut deformacije. Gestoća energije deformiranja elementa iznosi

$$U_0 = \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{xz}. \quad (286a)$$

Ako na element istodobno djeluje svih šest komponenata tenzora naprezanja, gustoća energije deformiranja iznosi

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = U_0^*. \quad (286b)$$

Ako tijelo nije linearno elastično, onda je

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_z d\varepsilon_z + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \quad (287a)$$

Izraz za ukupnu energiju deformiranja tijela obujma V glasi

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (287b)$$

Također je za nelinearno elastično tijelo

$$U_0^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x + \int_0^{\sigma_y} \varepsilon_y d\sigma_y + \int_0^{\sigma_z} \varepsilon_z d\sigma_z + \int_0^{\tau_{xy}} \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \int_0^{\tau_{yz}} \gamma_{yz} d\tau_{yz} + \int_0^{\tau_{zx}} \gamma_{zx} d\tau_{zx}, \quad (288a)$$

odnosno

$$U^* = \int_V U_0^* dV. \quad (288b)$$

Energija deformiranja ovisi o naprezanju i deformaciji, međutim pomoću Hookeova zakona (63) može se U_0 prikazati kao funkcija naprezanja, odnosno kao funkcija deformacije. Kad se (65) uvrsti u (286b) dobiva se nakon sređivanja

$$U_0 = U_0^* = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{v}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (289)$$

Dilatacijska i distorsijska energija. U općenitom slučaju tijelo se deformira tako da mijenja oblik i obujam, pa se energija deformiranja može rastaviti na energiju promjene obujma ili dilatacijsku (hidrostatičku) energiju i energiju promjene oblika ili distorsijsku energiju.

Tenzor naprezanja može se rastaviti na sferni dio i devijatorski dio (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 178), pa je

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_0) \end{bmatrix}, \quad (290)$$

gdje je

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (291)$$

srednje normalno naprezanje.

Prva matrica na desnoj strani izraza (290) odnosi se na sferni dio, a druga na devijatorski dio naprezanja. Sferni dio predstavlja jednoliko sabijanje ili jednoliko rastezanje u svim smjerovima i uzrokuje samo promjenu obujma. To naprezanje odgovara hidrostatičkom tlaku, pa odatle i naziv hidrostatička energija. Devijatorski dio uzrokuje samo promjenu oblika.

Ako se koordinatne osi zakrenu tako da se podudaraju s glavnim pravcima naprezanja, bit će $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ i $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$, pa izraz (289) prelazi u oblik

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{v}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1). \quad (292)$$

Kad se u taj izraz uvrste komponente sfernog tenzora naprezanja, tj. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, i sredi, dobiva se

$$U_{0h} = \frac{3(1-2v)}{E} \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2K}, \quad (293)$$

gdje je $K = \frac{E}{3(1-2v)}$ obujamni (volumenski) modul elastičnosti, a U_{0h} gustoća dilatacijske (hidrostatičke) energije. Izraz (293) može se preinaciti u oblik

$$U_{0h} = \frac{1}{2K} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 = \frac{1-2v}{6} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (294)$$

Distorzijska energija U_{od} dobit će se ako se od ukupne energije oduzme dilatacijska energija, pa distorzija energija iznosi

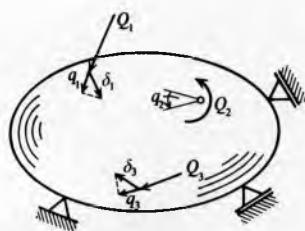
$$U_{od} = U_0 - U_{oh} \quad (295)$$

Kad se (292) i (294) uvrste u (295), nakon sređivanja se dobiva

$$U_{od} = \frac{1+v}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (296)$$

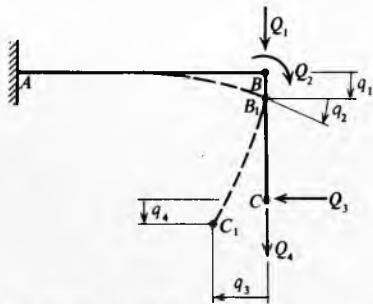
Poopcene sile i poopceni pomaci. Sl. 116 prikazuje tijelo opterećeno nizom sila i spregova. Pod poopcenom silom Q_i razumijeva se bilo sila, bilo spreg, što je i naznačeno na slici.

Poopceni pomak q_i jest projekcija pomaka hvatišta sile Q_i u pravac djelovanja sile Q_i . Ako je Q_i sila u užem smislu riječi, q_i je linearni pomak. Ako je Q_i spreg, q_i je kutni pomak oko iste osi oko koje djeluje Q_i . Ako je q_i usmjeren kao Q_i , onda je prema definiciji pozitivan, a ako je usmjeren suprotno od Q_i , onda je negativan.



Sl. 116. Definicija poopcenih sila i poopcenih pomaka

Poopcene sile i pomake treba tako definirati da su međusobno nezavisni. U jednoj točki tijela može se definirati šest poopcenih sile: tri sile i tri sprega. U jednoj točki ravnninskih konstrukcija mogu se definirati tri poopcena pomaka: dva linearne i jedan kutni (sl. 117).



Sl. 117. Poopcene sile i poopceni pomaci

Utjecajni koeficijenti. Sl. 118 prikazuje gredu s prepustom gdje djeluju tri poopcene sile. Greda je linearno elastična, pa se može primjeniti metoda superpozicije, tj. odvojeno promatrati djelovanje svake poprečne sile.

Prema definiciji utjecajni koeficijent α_{ij} jednak je poopcenom pomaku q_i koji nastaje djelovanjem jedinične poopcene sile $Q_j = 1$. Ako sila nije jedinična, nego iznosi $Q_j \neq 1$, pomaci će biti Q_j puta veći. Ako na gredu (sl. 118b) djeluje samo poopcena sila $Q_1 = 1$, poopceni pomaci će biti

$$q'_1 = \alpha_{11} Q_1, \quad q'_2 = \alpha_{21} Q_1, \quad q'_3 = \alpha_{31} Q_1. \quad (297)$$

Na sličan način mogu se dobiti pomaci koji nastaju djelovanjem sile Q_2 i Q_3 . Ukupni pomaci jednaki su zbroju pojedinačnih pomaka, tj.

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3, \\ q_2 &= \alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \alpha_{23} Q_3, \\ q_3 &= \alpha_{31} Q_1 + \alpha_{32} Q_2 + \alpha_{33} Q_3, \end{aligned} \quad (298)$$

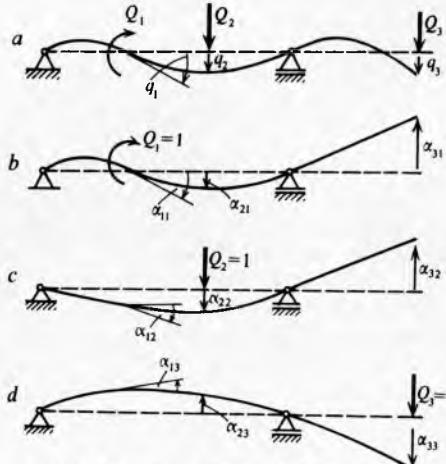
što u matričnom zapisu glasi

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}, \quad (299)$$

odnosno još kraće

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{Q}. \quad (300)$$

Utjecajni koeficijenti α_{ij} zovu se još i *koeficijenti gipkosti ili podatljivosti*. Prvi indeks odnosi se na pomak, a drugi na silu. Na elastičnoj konstrukciji može se odabrat po volji mnogo poprečnih sila i pomaka, pa matrica utjecajnih koeficijenata ima toliko redaka koliko ima sile i toliko stupaca koliko ima pomaka.



Sl. 118. Definicija utjecajnih koeficijenata α_{ij}

U izrazu (289) odnosno (299), poopceni pomaci q_i prikazani su kao funkcije poopcenih sila Q_i . Ako se riješi sustav od n linearnih jednadžbi (u promatranom primjeru sustav od 3 jednadžbe), dobit će se sile Q_i kao funkcije pomaka q_i , tj.

$$\begin{aligned} Q_1 &= f_{11} q_1 + f_{12} q_2 + f_{13} q_3, \\ Q_2 &= f_{21} q_1 + f_{22} q_2 + f_{23} q_3, \\ Q_3 &= f_{31} q_1 + f_{32} q_2 + f_{33} q_3, \end{aligned} \quad (301)$$

odnosno

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}. \quad (302)$$

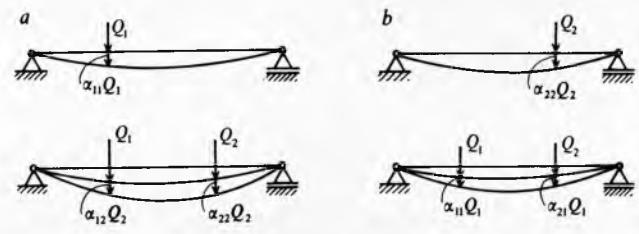
Koeficijenti f_{ij} zovu se *recipročni utjecajni koeficijenti* ili *koefficijenti krutosti*. Matrice $\boldsymbol{\alpha}$ i \mathbf{f} su inverzne matrice, tj. $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \mathbf{f}$, $\mathbf{f}^{-1} = \boldsymbol{\alpha}$.

Maxwellov i Bettijev poučak. Maxwellov poučak glasi: Poopceni pomak q_i koji nastaje djelovanjem jedinične poopcene sile Q_j jednak je poopcenom pomaku q_j koji nastaje djelovanjem jedinične poopcene sile Q_i .

Ako se linearno elastična konstrukcija optereti silom Q_1 , pa zatim silom Q_2 (sl. 119a), izvršeni rad, pa prema tome i akumulirana energija elastičnog deformiranja, iznosi

$$W_e' = U' = \frac{1}{2} \alpha_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} Q_2^2 + \alpha_{12} Q_2 Q_1. \quad (303)$$

Prvi član predstavlja rad sile Q_1 kad djeluje na konstrukciju. Tu je $\alpha_{11} Q_1$ pomak, a faktor $1/2$ pojavljuje se zbog toga što sila Q_1 linearno raste od nule do konačne vrijednosti. Drugi član predstavlja rad sile Q_2 koja djeluje nakon sile Q_1 . Opet se pojavljuje faktor $1/2$, jer sila Q_2 raste također linearno od nule do konačne vrijednosti. Treći član, tj. $\alpha_{12} Q_2 Q_1$ predstavlja rad sile Q_1 na pomaku $\alpha_{12} Q_2$ što ga prouzrokuje sila



Sl. 119. Dokaz Maxwellova poučka

Q_2 . Tu nema faktora $1/2$, jer sila Q_1 cijelo vrijeme djeluje punim intenzitetom.

Ako se konstrukcija optereti silom Q_2 , a zatim silom Q_1 (sl. 119 b), akumulirana energija iznosi

$$U'' = \frac{1}{2} \alpha_{22} Q_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_{11} Q_1^2 + \alpha_{21} Q_1 Q_2. \quad (304)$$

U linearno elastičnoj konstrukciji akumulirana energija ne ovisi o redoslijedu primjene sila, pa je $U' = U''$. Usporedbom izraza (303) i (304) slijedi da je $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Sličan zaključak može se izvesti i ako na tijelo djeluje više sila, pa općenito vrijedi

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (305)$$

To je matematička formulacija Maxwellova poučka iz kojeg slijedi da je matrica utjecajnih koeficijenata simetrična.

Bettijev poučak glasi: Ako na linearne elastične konstrukcije djeluju dvije grupe sila Q_i i P_j , rad sila Q_i na pomacima koji nastaju djelovanjem sila P_j jednak je radu sila P_j na pomacima koji nastaju djelovanjem sila Q_i . Bettijev poučak je poopćenje Maxwellova poučka.

Castiglianovi poučci. Energija deformiranja U može se izraziti pomoću rada vanjskih sila, pa se dobiva

$$U = W_e = \frac{1}{2} (q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + \dots + q_n Q_n). \quad (306)$$

Pomoću utjecajnih koeficijenata mogu se poopćeni pomaci prikazati pomoću poopćenih sila, pa je tada

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} [& (\alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3 + \dots + \alpha_{1n} Q_n) Q_1 + \\ & + (\alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \alpha_{23} Q_3 + \dots + \alpha_{2n} Q_n) Q_2 + \\ & \dots \\ & + (\alpha_{n1} Q_1 + \alpha_{n2} Q_2 + \alpha_{n3} Q_3 + \dots + \alpha_{nn} Q_n) Q_n]. \end{aligned} \quad (307)$$

Ako se sada izraz (307) derivira parcijalno po bilo kojoj sili, npr. sili Q_2 , dobiva se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Q_2} = \frac{1}{2} (& \alpha_{12} Q_1 + \alpha_{32} Q_3 + \alpha_{42} Q_4 + \dots + \alpha_{n2} Q_n) + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \alpha_{23} Q_3 + \dots + \alpha_{2n} Q_n). \end{aligned} \quad (308a)$$

Prvi je član derivacija prvog, trećeg, četvrtog, ... retka, a drugi derivacija drugog retka. Kad se uzme u obzir Maxwellov poučak, može se izraz (308a) napisati u obliku

$$\frac{\partial U}{\partial Q_2} = \alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \dots + \alpha_{2n} Q_n, \quad (308b)$$

odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial Q_2} = q_2. \quad (308c)$$

Kako je sila Q_2 po volji odabrana, vrijedi općenito

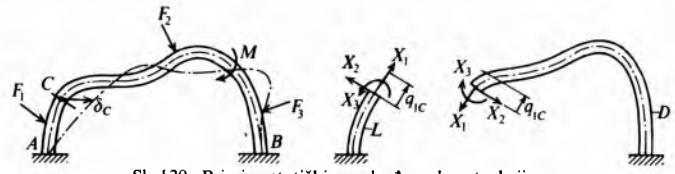
$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i, \quad (309)$$

što znači da je derivacija energije deformiranja po sili jednaka pomaku hvišta te sile u smjeru sile. Derivacija energije deformiranja po spregu jednaka je kutnom zakretu oko osi oko koje spreg djeluje. Izraz (309) predstavlja *drugi Castiglianov poučak*. Na sličan način može se dobiti i *prvi Castiglianov poučak*, koji glasi

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i. \quad (310)$$

Pri rješavanju konkretnih problema mnogo više se primjenjuje drugi Castiglianov poučak.

Poučak o minimumu energije deformiranja. Statički neodređena konstrukcija opterećena je silama F_1, F_2, \dots, F_n (sl. 120).



Sl. 120. Primjer statički neodređene konstrukcije

Punom linijom prikazan je nedeformirani, a crtanom linijom deformirani oblik konstrukcije. Zadana konstrukcija može se pretvoriti u statički određenu zamjensku konstrukciju ako se presječe na proizvoljnom mjestu C . Na mjestu presjeka treba dodati nepoznate komponente unutrašnjih sila, tj. normalnu X_1 i poprečnu silu X_2 , te moment savijanja X_3 . Ako te sile imaju pravu vrijednost, naprezanja i pomaci u zamjenskoj konstrukciji bit će jednaki naprezanjima i pomacima zadane konstrukcije. Neka je q_{1c} poopćeni pomak koji odgovara poopćenoj sili X_1 . Ako se razmatra posebno lijevi, a posebno desni dio konstrukcije, bit će

$$q_{1c} = \frac{\partial U_L}{\partial X_1}, \quad q_{1c} = -\frac{\partial U_D}{X_1}, \quad (311)$$

gdje je U_L i U_D energija deformiranja lijevog, odnosno desnog dijela konstrukcije. Pred derivacijom energije desnog dijela pojavljuje se negativan predznak jer se pomak q_{1c} zbiva suprotno od djelovanja sile X_1 , pa je

$$\frac{\partial U_L}{\partial X_1} = -\frac{\partial U_D}{\partial X_1}, \quad (312)$$

odnosno

$$\frac{\partial U_L}{\partial X_1} + \frac{\partial U_D}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad (313)$$

gdje je $U = U_L + U_D$ energija deformiranja čitave konstrukcije. Izraz (313) izведен je za silu X_1 . Analogan izraz može se izvesti za bilo koju drugu silu X_i , pa vrijedi

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (314)$$

Taj je izraz nuždan uvjet da funkcija $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ima ekstrem. Može se lako pokazati da je taj ekstrem minimum. Naime, izraz za energiju deformiranja može se napisati u obliku

$$U(X_1, X_2, \dots, X_n) = U(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i+j}}^n \alpha_{ij} X_i^2 + \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} X_i X_j. \quad (315)$$

Prvi član na desnoj strani tog izraza predstavlja energiju deformiranja tijela kad na njega djeluju sve sile X_1, \dots, X_n osim sile X_i . Drugi član predstavlja rad sile X_i , a treći član rad svih ostalih sila na pomacima koje uzrokuje sila X_i . Deriviranjem izraza (315) po X_i dobiva se

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \alpha_{ii} X_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i+j}}^n \alpha_{ji} X_j, \quad (316)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i^2} = \alpha_{ii} > 0. \quad (317)$$

Kako je $\alpha_{ii} > 0$, to je i $\frac{\partial^2 U}{\partial X_i^2} > 0$, tj. promatrani ekstrem je minimum. Na temelju toga može se formulirati poučak o minimumu energije deformiranja koji glasi: Od svih statički mogućih raspodjela naprezanja u linearne elastičnom tijelu nastupa ona za koju energija deformiranja ima minimum.

Energija deformiranja štapa. Energija deformiranja štapa može se prikazati kao funkcija komponenata unutrašnjih sila. Radi jednostavnosti razmotrit će se osnovni slučajevi opterećenja štapa.

Osnovno opterećenje. Osnovno opterećeni štap promjenljiva presjeka prikazan je na sl. 121.

Sve komponente naprezanja, osim σ_x , jednake su nuli. Naprezanje σ_x , deformacija ε_x i element obujma dV iznose:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}, \quad dV = A dx. \quad (318)$$

Premda (289) potencijalna je energija štapa određena izrazom

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV. \quad (319)$$

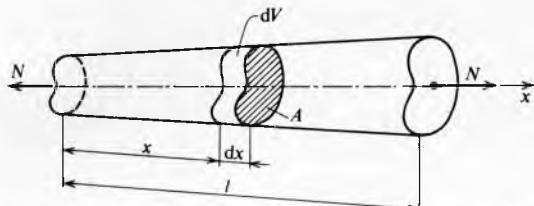
Kad se (318) uvrsti u (319) i sredi, dobiva se

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2 dx}{EA}, \quad (320)$$

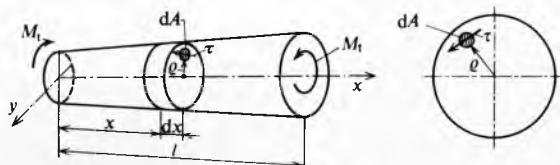
odnosno

$$U = \frac{1}{2EA} \int_l N^2 dx \quad (321)$$

ako je $EA = \text{const.}$



Sl. 121. Određivanje energije deformiranja osnovno opterećena štapa



Sl. 122. Određivanje energije deformiranog štapa kružnog presjeka koji je opterećen na uvijanje

Uvijanje okruglog štapa. Štap opterećen na uvijanje prikazan je na sl. 122. Tada je

$$\tau = \frac{M_t \varrho}{I_p}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M_t}{G I_p} \varrho, \quad dV = dA dx. \quad (322)$$

Ostale komponente naprezanja jednake su nuli, pa izraz za energiju deformiranja glasi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV \quad (323)$$

Kad se (322) uvrsti u (323) i sredi, dobiva se

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left[\frac{M_t}{I_p^2 G} \int_A \varrho^2 dA \right] dx, \quad (324)$$

odnosno

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_t^2}{G I_p} dx, \quad (325)$$

jer je $I_p = \int_A \varrho^2 dA$.

Čisto savijanje u dvije ravnine. Na sl. 123 prikazan je štap koji je opterećen momentom M koji ne djeluje oko glavne osi tromosti. Tu se radi o kosom savijanju, pa je

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y. \quad (326)$$

Ostale komponente naprezanja jednake su nuli, pa izraz za energiju deformiranja glasi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_x^2}{E} dV. \quad (327)$$

Također je

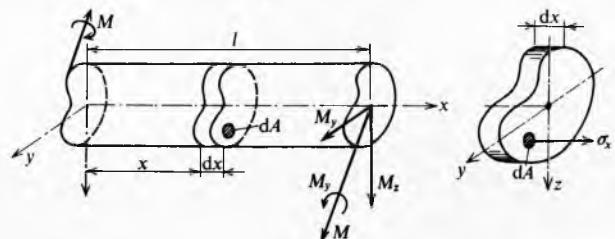
$$dV = dA dx. \quad (328)$$

Kad se (326) i (328) uvrste u (327), nakon sređivanja dobiva se

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{1}{E} \left[\frac{M_y^2}{I_y^2} \int_A z^2 dA - 2 \frac{M_y M_z}{I_y I_z} \int_A yz dA + \frac{M_z^2}{I_z^2} \int_A y^2 dA \right] dx. \quad (329)$$

Kako je $\int_A yz dA = I_{yz} = 0$ jer su osi y i z glavne osi tromosti presjeka, izraz (329) uz pomoć (87) prelazi u oblik

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) dx. \quad (330)$$



Sl. 123. Određivanje energije deformiranja štapa opterećenog na savijanje

Poprečno savijanje u ravnini. Tada se pojavljuju dvije komponente naprezanja:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad \text{i} \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y} \quad (331)$$

pa izraz za energiju deformiranja glasi

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xz}^2}{G} \right) dV. \quad (332)$$

Kad se u (332) uvrsti (331) i postavi da je $dV = A dx$, dobiva se

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_l \frac{M_y^2}{EI_y} dx + \int_l \frac{Q_z^2}{EI_y} \left(\int_A \left(\frac{S_y}{b} \right)^2 dA \right) dx \right], \quad (333)$$

odnosno

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{Q_z^2}{G A^2} k_y \right) dx, \quad (334)$$

gdje je

$$k_y = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left(\frac{S_y}{b} \right)^2 dA, \quad (335)$$

koefficijent kojemu vrijednost ovisi o obliku poprečnog presjeka.

Za pravokutni je presjek

$$S_y = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh.$$

Kad se to uvrsti u (335) i sredi, dobiva se za pravokutni presjek $k_y = \frac{3}{2} = 1,5$.

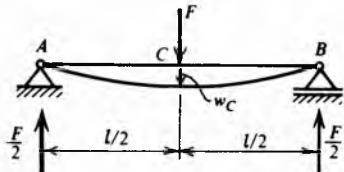
Slično se može odrediti koeficijent k_y i za ostale presjeke. Tako je za krug $32/27 = 1,185$.

Rad svake komponente unutrašnjih sila na pomacima koje uzrokuju ostale komponente jednak je nuli, pa energija općenito opterećenog štapa iznosi

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_{l/2}^{N^2 dx / EA} + \int_{l/2}^{k_y Q_z^2 / GA} dx + \int_{l/2}^{k_z Q_y^2 / GA} dx + \int_{l/2}^{M_y^2 / EI_y} dx + \int_{l/2}^{M_z^2 / EI_z} dx + \int_{l/2}^{M_t^2 / GI_p} dx \right]. \quad (336)$$

Energija osnog opterećenja i smicanja često je zanemarljiva u usporedbi s energijom savijanja i uvijanja, pa se integrali koji sadrže normalnu силу N i poprečne силе Q_z i Q_y mogu zanemariti.

Primjer. Treba odrediti progib presjeka C grede zadane i opterećene prema sl. 124. Zadano je F , l , EI .



Sl. 124. Određivanje progiba grede na dva oslonca

Greda je simetrična, pa je ukupna energija deformiranja jednaka dvostrukoj energiji jedne polovice, tj.

$$U = 2 \frac{1}{2EI_y} \int_0^{l/2} M_y^2 dx. \quad (337)$$

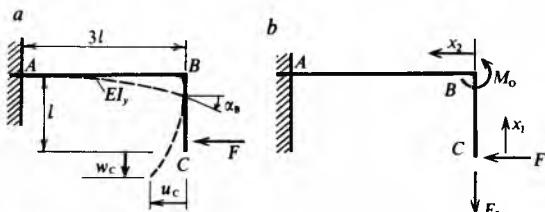
Kako je $M_y = Fx/2$, bit će

$$U = \frac{1}{4EI_y} \int_0^{l/2} (Fx)^2 dx. \quad (338)$$

Prema drugom Castigianovu poučku progib ispod sile F jednak je parcijalnoj derivaciji energije deformiranja po sili F , tj.

$$w_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{2EI_y} \int_0^{l/2} Fx^2 dx = \frac{Fl^3}{48EI_y}. \quad (339)$$

Primjer. Treba odrediti vertikalni pomak točke C i kutni pomak točke B konstrukcije prema sl. 125a. Zadano je F , l , EI_y .



Sl. 125. Određivanje linearnog i kutnog pomaka

Kako u smjeru traženog pomaka ne djeluju pripadne poprečne sile, treba ih dodati (sl. 125b). Energija deformiranja konstrukcije uz dodanu silu F_0 i spreg M_0 iznosi

$$U = \frac{1}{2EI} \left[\int_c^B M^2 dx_1 + \int_B^A M^2 dx_2 \right], \quad (340a)$$

odnosno

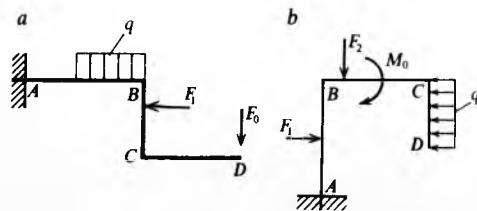
$$U = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^l (Fx_1)^2 dx_1 + \int_0^{3l} (Fl + F_0 x_2 + M_0)^2 dx_2 \right], \quad (340b)$$

pa je

$$w_C = \frac{\partial U}{\partial F_0} \Big|_{M_0=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{3l} Fl x_2 dx_2 = \frac{9Fl^3}{2EI}, \quad (341)$$

$$\alpha_B = \frac{\partial U}{\partial M_0} \Big|_{F_0=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{3l} Fl dx_2 = \frac{3Fl^2}{EI}. \quad (342)$$

Mohrova metoda određivanja pomaka. Ako je potrebno odrediti pomak neke točke konstrukcije u smjeru u kojem ne djeluje vanjska sila, odabire se u odabranom smjeru pomocna sila F_0 (sl. 126a). Ako se traži kutni pomak, dodaje se pomoći spreg M_0 (sl. 126b).



Sl. 126. Objasnjenje Mohrove metode određivanja pomaka

Komponente unutrašnjih sila tada iznose

$$\begin{aligned} N &= N_F + N_1 F_0, & M_y &= M_{yF} + M_{y1} F_0, \\ Q_y &= Q_{yF} + Q_{y1} F_0, & M_z &= M_{zF} + M_{z1} F_0, \\ Q_z &= Q_{zF} + Q_{z1} F_0, & M_1 &= M_{zF} + M_{z1} F_0, \end{aligned} \quad (343)$$

gdje su $N_F, Q_{yF}, \dots, M_{zF}$ komponente unutrašnjih sila koje uzrokuju zadano opterećenje, a $N_1, Q_{y1}, \dots, M_{z1}$ komponente unutrašnjih sila koje bi nastale pod djelovanjem jedinične sile F_0 . Energija deformiranja određena je, prema (336), izrazom

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \left[\int_l^{(N_F + N_1 F_0)^2 / EA} dx + \int_l^{k_y (Q_{yF} + Q_{y1} F_0)^2 / GA} dx + \right. \\ \left. + \int_l^{k_z (Q_{zF} + Q_{z1} F_0)^2 / GA} dx + \int_l^{(M_{yF} + M_{y1} F_0)^2 / EI_y} dx + \right. \\ \left. + \int_l^{(M_{zF} + M_{z1} F_0)^2 / EI_z} dx + \int_l^{(M_{tF} + M_{t1} F_0)^2 / GI_p} dx \right]. \quad (344) \end{aligned}$$

Pomak u smjeru sile F_0 iznosi

$$\begin{aligned} q_0 = \frac{\partial U}{\partial F_0} \Big|_{F_0=0} = \int_l^{N_F N_1} \frac{dx}{EA} + \int_l^{k_y Q_{yF} Q_{y1}} \frac{dx}{GA} + \\ + \int_l^{K_z Q_{zF} Q_{z1}} \frac{dx}{GA} + \int_l^{M_{yF} M_{y1}} \frac{dx}{EI_y} + \int_l^{M_{zF} M_{z1}} \frac{dx}{EI_z} + \\ + \int_l^{M_{tF} M_{t1}} \frac{dx}{GI_p}. \quad (345) \end{aligned}$$

Taj se integral često naziva *Mohrov integral*, a opisani postupak Mohrov postupak određivanja pomaka. Integrali koji sadrže normalnu silu N i poprečne sile Q_x i Q_y , često se mogu zanemariti.

Vereščaginovo pravilo. U izrazu (345) pojavljuje se integral umnoška dviju funkcija od kojih je jedna linearna. Tada se izračunavanje integrala može pojednostaviti. Zadane su dvije funkcije (sl. 127): linearna $f_1(x) = kx + l$ i nelinearna $f_2(x)$. Treba odrediti integral umnoška tih dviju funkcija uzduž intervala duljine l . Zadani je integral

$$I = \int_0^l f_1(x)f_2(x)dx, \quad (346)$$

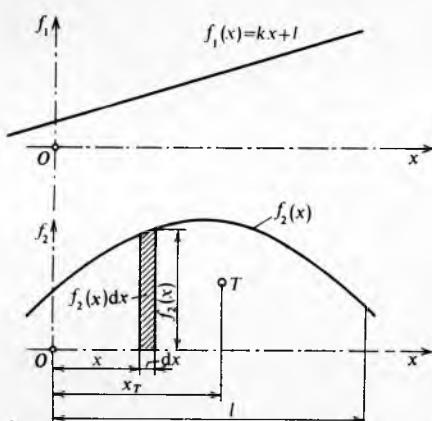
odnosno

$$I = k \int_0^l xf_2(x)dx + l \int_0^l f_2(x)dx. \quad (347)$$

Kako je $\int f_2(x)dx = A$ ploština, a $\int xf_2(x)dx = S_y = x_T A$ statički moment iscrtane plohe ispod krivulje $f_2(x)$, bit će

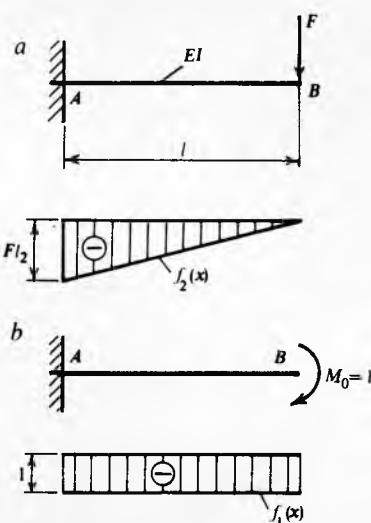
$$I = (kx_T + l)A = f_1(x_T)A, \quad (348)$$

gdje je x_T apscisa težišta iscrtane plohe, a $f_1(x_T)$ vrijednost funkcije f_1 iznad težišta iscrtane plohe.



Sl. 127. Grafički prikaz linearne i nelinearne funkcije

Primjer. Treba odrediti kut nagiba kraja konzole zadane prema sl. 128. Zadano je F , l , EI_y .



Sl. 128. Određivanje kuta zakreta konzole Mohrovom metodom

Da bi se odredio kut zakreta kraja B , treba dodati u B jedinični moment $M_0 = 1$ (sl. 128b). Tada je $A = Fl^2/2$ i $f_1(x_T) = 1$, pa je

$$\alpha_B = \frac{1}{EI} \int_0^l f_1(x)f_2(x)dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Fl^2}{2} \cdot 1 = \frac{Fl^2}{2EI}. \quad (349)$$

Zanemaren je utjecaj poprečne sile na kut zakreta α_B .

Primjer. Treba odrediti progib u sredini jednoliko kontinuirano opterećene grede (sl. 129a). Zadano je q , l , E , I . Za funkciju $f_1(x)$ ne vrijedi isti izraz u cijelom području (sl. 129b), pa se integracija provodi za svaku polovicu posebno. Ako se primjeni simetrija, progib iznosi

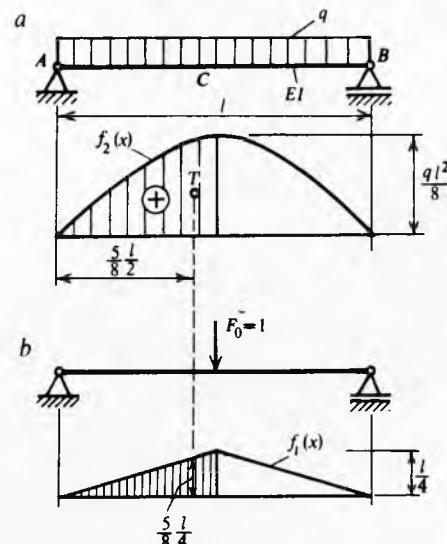
$$w_C = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} f_1(x)f_2(x)dx, \quad (350a)$$

što uz pomoć izraza (348) postaje

$$w_C = \frac{2}{EI} Af_1(x_T). \quad (350b)$$

Budući da je $f_2(x)$ parabola, to je prema tabl. 7: $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{q l^3}{24}$, $x_T = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2}$, $f_1(x_T) = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4}$. Konačno se za progib u sredini grede dobiva

$$w_C = \frac{2}{EI} \cdot \frac{q l^3}{24} \cdot \frac{5l}{8 \cdot 4} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EI}. \quad (350c)$$



Sl. 129. Određivanje progiba Mohrovom metodom

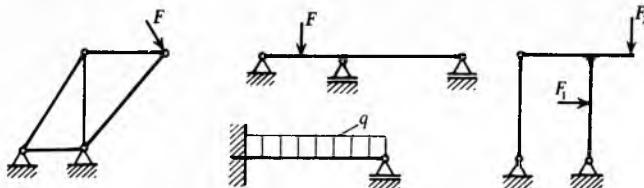
STATIČKI NEODREĐENE ŠTAPNE KONSTRUKCIJE

Statička neodređenost. Pri proračunu nekih konstrukcija nije moguće odrediti reakcije oslonaca, odnosno unutrašnje sile samo pomoću metoda statike krutih tijela. Takve konstrukcije su statički neodređene i za njihovu potpunu analizu, osim statičkih uvjeta ravnoteže, treba razmatrati i deformiranje pojedinih dijelova konstrukcije. Na početku analize potrebno je odrediti stupanj statičke neodređenosti i odabrati zamjensku (osnovnu, nadomjesnu) statički određenu konstrukciju.

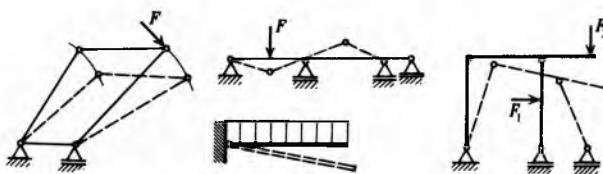
Stupanj statičke neodređenosti jednak je broju veza koje treba ukloniti (v. *Mehanika*, TE 8, str. 8) da bi zadani sustav postao statički određen i ostao geometrijski nepromjenljiv. Sustav je geometrijski nepromjenljiv ako se njegov geometrijski oblik može promijeniti samo uz deformiranje njegovih elemenata (sl. 130).

Uklanjanjem samo jedne veze te konstrukcije postaju geometrijski promjenljive (sl. 131).

Štapovi konstrukcije razvrstavaju se na pune ravne nosače ili grede, rešetkaste nosače i okvirne nosače. Štapovi u rešetkastim nosačima, prema pretpostavci, povezani su zglobno u čvorovima, a vanjske sile smiju djelovati samo u čvorovima, pa su štapovi rešetkastih nosača osno opterećeni. Nasuprot tome štapovi okvirnih nosača mogu biti kruto spojeni, opterećenje može biti raspoređeno po volji, pa se u presjecima okvirnih nosača pojavljuju normalne i poprečne sile te momenti uvijanja i savijanja.



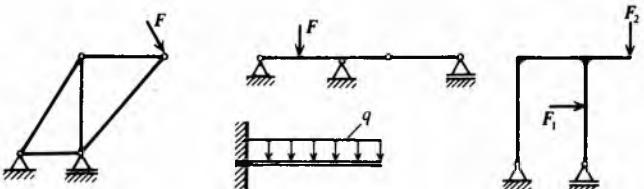
Sl. 130. Statički određene i geometrijski nepromjenljive konstrukcije



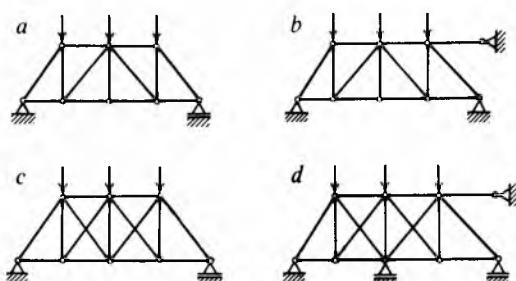
Sl. 131. Uklanjanjem samo jedne veze statički određene konstrukcije postaju geometrijski promjenljive

Statička neodređenost može se uvjetno razvrstati na vanjsku i unutrašnju. Sustav je izvana statički određen kad se reakcije veza mogu odrediti na temelju uvjeta ravnoteže. Sustav je iznutra statički određen ako se uz poznate reakcije mogu odrediti komponente unutrašnjih sila u svim presjecima. Ako to nije moguće, sustav je iznutra statički neodređen.

Konstrukcije ili mehanički sustav mogu biti ravninski, ravninsko-prostorni i prostorni.



Sl. 132. Dodavanjem samo jedne veze statički određene konstrukcije postaju statički neodredene



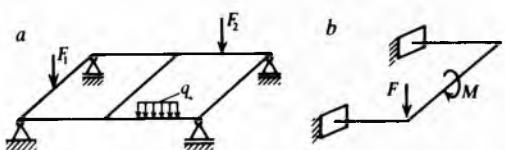
Sl. 133. Rešetkasti nosač: a) statički određen, b) dva puta izvana statički neodređen, c) dva puta iznutra statički neodređen, d) četiri puta statički neodređen (dva puta izvana i dva puta iznutra)

Konstrukcija je *ravninska* ako svi elementi konstrukcije i sva opterećenja leže u jednoj istoj ravnini (sl. 130 do 133).

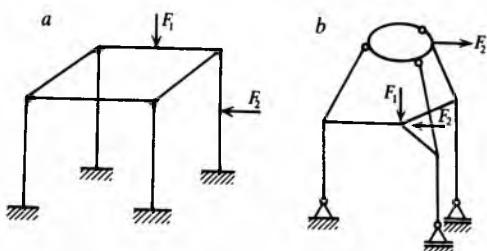
Konstrukcija je *prostorno-ravninska* ako elementi konstrukcije leže u jednoj ravnini i ako su vanjska opterećenja

okomita na tu ravninu (sl. 134). Konstrukcije koje ne idu u te dvije kategorije jesu *prostorne* konstrukcije (sl. 135).

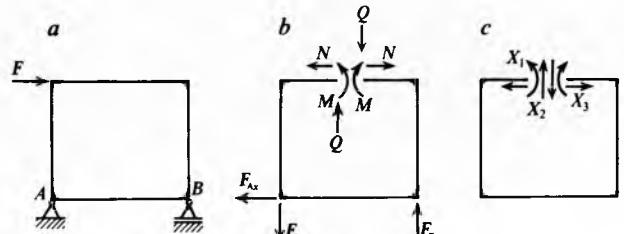
Jednostruki zatvoreni ravninski okvir (petlja) koji je opterećen u svojoj ravnini tri puta je statički neodređen. Naime, iako su poznate sve vanjske sile (sl. 136), nije moguće odrediti komponente unutrašnjih sila. Ako se okvir presijeće na jednom mjestu, na tom će mjestu djelovati tri unutrašnje sile M_1 , N_1 i Q_1 (sl. 136b). Kad bi te tri sile bile poznate, okvir bi bio statički određen. Dvostruka petlja je 6 puta statički neodređena itd. Kako su sile u presjeku nepoznate, često se označuju oznakama X_1 , X_2 , X_3 itd.



Sl. 134. Prostorno-ravninske konstrukcije



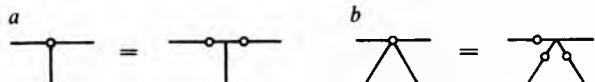
Sl. 135. Prostorne konstrukcije



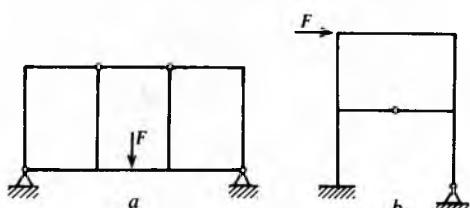
Sl. 136. Jednostruka je ravninska petlja tri puta statički neodređena

Dodavanjem rotacijskog zgloba oslobađa se jedna veza, jer je moment savijanja na tom mjestu jednak nuli. Prema tome, dodavanjem jednostrukog zgloba smanjuje se stupanj statičke neodređenosti za jedan. Ako se u zglobu sastaju više od dva štapa, zglob je višestruk (sl. 137).

Konstrukcija na sl. 138a ima tri petlje, ali i dva dvostruka zgloba, pa je stupanj unutrašnje statičke neodređenosti $3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$. Budući da je konstrukcija izvana jedanput statički neodređena, to je ukupan stupanj statičke neodređenosti 6. Konstrukcija je na sl. 138b četiri puta statički neodređena, dva puta izvana i dva puta iznutra.



Sl. 137. Višestruki rotacijski zglobovi: a) dvostruki, b) trostruki



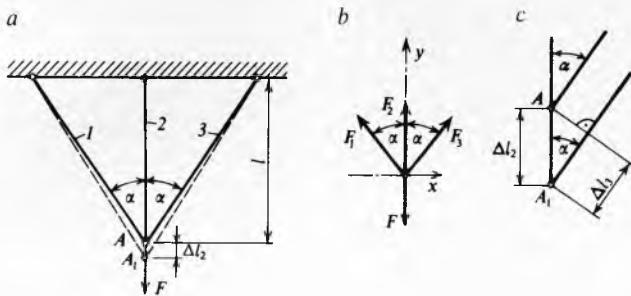
Sl. 138. Statički neodredene ravninske konstrukcije: a) šest puta statički neodređena, b) četiri puta statički neodređena

Prostorna je petlja šest puta statički neodređena, jer na mjestu presjeka treba dodati 6 nepoznatih komponenata unutrašnjih sila. Tako je na sl. 135a konstrukcija statički neodređena $4 \cdot 6 = 24$ puta.

Metoda sila i metoda pomaka. Pri rješavanju statički neodređenih problema broj nepoznatih sile (reakcija veza ili komponenata unutrašnjih sila) veći je od broja jednadžbi, pa su potrebne dopunske jednadžbe, a to su uvjeti deformiranja i jednadžbe koje povezuju pomake (produljenja) sa silama.

U prvoj grupi jednadžbi nepoznanice su sile. U drugoj grupi jednadžbi nepoznanice su produljenja, odnosno pomaci. U trećoj grupi jednadžbi nepoznanice su sile i pomaci. Postoje dvije osnovne metode rješavanja statički neodređenih problema: metoda sila i metoda pomaka. U *metodi sila* pomaci se eliminiraju, pa se u konačnom sustavu jednadžbi kao nepoznanice pojavljuju sile. U *metodi pomaka* iz sustava jednadžbi eliminiraju se sile, pa se u konačnom sustavu jednadžbi kao nepoznanice pojavljuju pomaci. Te dvije metode bit će ilustrirane dvama primjerima.

Primjer. Konstrukcija se sastoji od tri štapa jednakih preseka i modula elastičnosti E , a opterećena je silom F (sl. 139). Treba naći sile u štapovima 1, 2 i 3 ako je zadano F , l , E , A , α .



Sl. 139. Rješavanje statički neodređene konstrukcije metodom sila

Uvjeti ravnoteže čvora A (sl. 139b) glase:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= -F_1 \sin \alpha + F_3 \sin \alpha = 0, \\ F_y &= F_1 \cos \alpha + F_2 + F_3 \cos \alpha - F = 0.\end{aligned}\quad (351)$$

Te dvije jednadžbe nisu dovoljne da se odrede tri nepoznanice: F_1 , F_2 i F_3 . Zbog toga se postavlja uvjet deformiranja kojim se kaže da se i nakon produljenja vrhovi štapova sastaju u jednoj točki A_1 . Uz pretpostavku da su pomaci maleni, ostaje pri deformiranju kut α približno isti, pa uvjet deformiranja (sl. 139c) glasi:

$$\Delta l_2 \cos \alpha = \Delta l_3. \quad (352)$$

Treća grupa jednadžbi prikazuje međusobnu ovisnost produljenja i nepoznatih sile. Te jednadžbe prema (122) glase:

$$\Delta l_1 = \frac{F_1}{EA} \frac{l}{\cos \alpha} = \Delta l_3, \quad \Delta l_2 = \frac{F_2 l}{EA}. \quad (353)$$

Kad se (353) uvrsti u (352) i sredi, dobiva se

$$F_2 \cos^2 \alpha = F_1. \quad (354)$$

Tri jednadžbe (351) i (354) sa tri nepoznanice predstavljaju konačne jednadžbe metode sila, a njihova su rješenja:

$$F_1 = F_3 = F \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad F_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (355)$$

Ta je metoda rješavanja neprikladna ako je sustav nesimetričan i ako ima više štapova. Tada je prikladnija metoda pomaka.

Primjer. Konstrukcija se sastoji od n štapova duljine l_i , krutosti $E_i A_i$, koji s pravcem sile F čine kut α_i (sl. 140a). Kut α_i je pozitivan ako je otklon štapa u smjeru kazaljke na satu, a negativan ako je otklon u suprotnom smjeru. Zbog djelovanja

opterećenja točka A pomiče se u novi položaj A_1 (sl. 140b). Pomak \overline{AA}_1 ima komponente u i v , pa produljenje i -tog štapa iznosi

$$\Delta l_i = us \sin \alpha_i + v \cos \alpha_i. \quad (356)$$

Uvjeti ravnoteže čvora A glase:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \Sigma F_i \sin \alpha_i = 0, \\ \Sigma F_y &= -\Sigma F_i \cos \alpha_i + F = 0.\end{aligned}\quad (357)$$

Veze između pomaka i sile prikazane su izrazom

$$\Delta l_i = \frac{F_i l_i}{E_i A_i}, \quad (358)$$

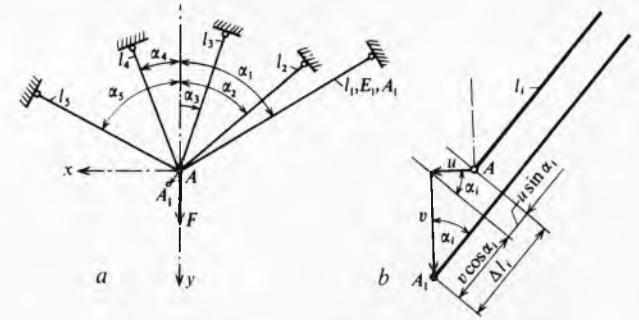
odosno

$$F_i = E_i A_i \frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{E_i A_i}{l_i} (us \sin \alpha_i + v \cos \alpha_i). \quad (359)$$

Kad se (359) uvrsti u (357) i sredi, dobiva se

$$\begin{aligned}u \sum \frac{E_i A_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i + v \sum \frac{E_i A_i}{l_i} \cos \alpha_i \sin \alpha_i &= 0, \\ u \sum \frac{E_i A_i}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i + v \sum \frac{E_i A_i}{l_i} \cos^2 \alpha_i &= F.\end{aligned}\quad (360)$$

Pomaci u i v nalaze se ispred znaka sume jer su zajednički za sve štapove. Naznačene sume mogu se lako odrediti jer su u njima samo poznate veličine. Izraz (360) predstavlja sustav od dviju jednadžbi s dvije nepoznanice u i v . Kad se odrede pomaci u i v , pomoću izraza (359) određuju se sile.

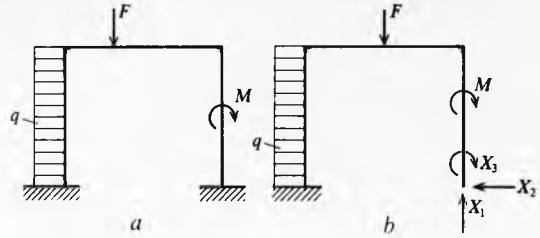


Sl. 140. Rješavanje statički neodređene konstrukcije metodom pomaka

Kanonske jednadžbe metode sila. Ako je konstrukcija linearno elastična, može se primijeniti princip superpozicije, tj. odvojeno se može promatrati djelovanje svake pojedine sile. Na sl. 141a prikazana je tri puta statički neodređena konstrukcija, a na sl. 141b zamjenska statički određena konstrukcija na koju djeluju tri nepoznate poopćene sile X_1 , X_2 i X_3 . Tim poopćenim silama odgovaraju poopćeni pomaci q_1 , q_2 i q_3 , koji iznose

$$\begin{aligned}q_1 &= q_{1F} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3, \\ q_2 &= q_{2F} + \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3, \\ q_3 &= q_{3F} + \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3,\end{aligned}\quad (361)$$

gdje je q_{1F} dio pomaka q_1 zamjenske konstrukcije koji potječe od zadanog vanjskog opterećenja. Za promatranoj konstrukciji to je sila F , moment M i kontinuirano opterećenje q . Drugi član desne strane izraza (361) predstavlja dio pomaka od sile



Sl. 141. Tri puta statički neodređena konstrukcija (a) i zamjenska statički određena konstrukcija (b)

X_1 , treći član predstavlja pomak od sile X_2 itd. U zadanoj konstrukciji pomaci q_1 , q_2 i q_3 jednaki su nuli, pa se nepoznate reakcije X_1 , X_2 i X_3 mogu odrediti iz tog uvjeta, tj. pomoću izraza

$$\begin{aligned}\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + q_{1F} &= 0, \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 + q_{2F} &= 0, \\ \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3 + q_{3F} &= 0.\end{aligned}\quad (362)$$

Ako je konstrukcija n -puta statički neodređena, dobivaju se izrazi u obliku

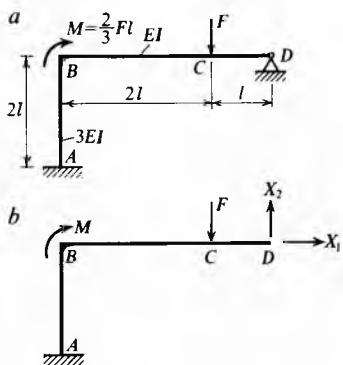
$$\begin{aligned}\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \dots + \alpha_{1i}X_i + \dots + \alpha_{1n}X_n + q_{1F} &= 0, \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \dots + \alpha_{2i}X_i + \dots + \alpha_{2n}X_n + q_{2F} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \alpha_{ni}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \dots + \alpha_{ni}X_i + \dots + \alpha_{nn}X_n + q_{nF} &= 0,\end{aligned}\quad (363)$$

što u matričnom obliku glasi

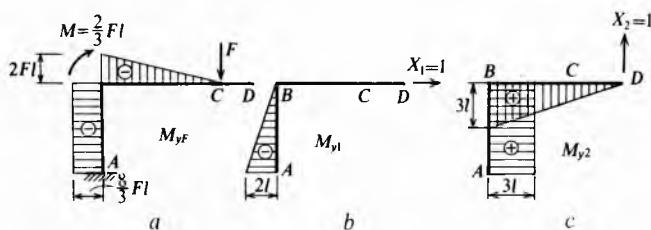
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ni} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1F} \\ q_{2F} \\ \vdots \\ q_{nF} \end{bmatrix} = 0. \quad (364)$$

Problem je sada sveden na određivanje utjecajnih koeficijenata α_{ij} i pomaka q_{if} , te na rješavanje sustava n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica. Izraz (363), odnosno (364), predstavlja kanonske jednadžbe metode sila.

Primjer. Treba odrediti reakcije veza konstrukcije zadane i opterećene prema sl. 142a. Zadano je F , l , EI .



Sl. 142. Statički neodređena konstrukcija (a) i zamjenski statički određena konstrukcija (b)



Sl. 143. Momentni dijagrami zamjenske konstrukcije: a za vanjsko opterećenje, b za jediničnu silu X_1 , c za jediničnu silu X_2

Zadana konstrukcija je dva puta statički neodređena. Zamjenska statički određena konstrukcija prikazana je na sl. 142b. Momentni dijagrami koji potječu od vanjskog opterećenja, te pojedinačnih nepoznatih sila $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ prikazani su na sl. 143.

Prema (345) utjecajni koeficijenti iznose

$$\alpha_{11} = \int_A^B \frac{M_{y1}M_{y1}}{3EI} dx + \int_B^D \frac{M_{y1}M_{y1}}{EI} dx. \quad (365a)$$

Pomoću Vereščaginova pravila gornji izraz može se odrediti množenjem momentnog dijagrama M_{y1} samim sobom, pa je

$$\alpha_{11} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l = \frac{8}{9} \cdot \frac{l^3}{EI}. \quad (365b)$$

Na sličan način mogu se odrediti i ostali utjecajni koeficijenti, tj.

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_A^B \frac{M_{y1}M_{y2}}{3EI} dx + \int_B^D \frac{M_{y1}M_{y2}}{EI} dx. \quad (366a)$$

Budući da je drugi integral jednak nuli, dobiva se

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot 3l = -\frac{2l^3}{EI}. \quad (366b)$$

Također je

$$\alpha_{22} = \int_A^B \frac{M_{y2}M_{y2}}{3EI} dx + \int_B^D \frac{M_{y2}M_{y2}}{EI} dx, \quad (367)$$

odnosno

$$\alpha_{22} = \frac{1}{3EI} 3l \cdot 2l \cdot 3l + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} 3l = \frac{15l^3}{EI}. \quad (368)$$

Poopćeni pomaci q_{1F} i q_{2F} za sile X_1 i X_2 dobivaju se množenjem dijagrama M_{y1} i M_{yF} , odnosno M_{y2} i M_{yF} , pa je

$$q_{1F} = \int_A^B \frac{M_{y1}M_{yF}}{3EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \cdot \frac{8}{3} Fl = \frac{16}{9} \cdot \frac{Fl^3}{EI}, \quad (369)$$

$$q_{2F} = \int_A^B \frac{M_{y1}M_{yF}}{3EI} dx + \int_B^C \frac{M_{y2}M_{yF}}{EI} dx = -10 \frac{Fl^3}{EI}. \quad (370)$$

Kad se utjecajni koeficijenti i poopćeni pomaci uvrste u kanonske jednadžbe metode sila i zatim srede, dobiva se

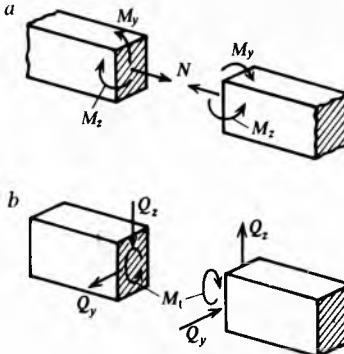
$$\begin{aligned}\frac{8}{9}X_1 - 2X_2 + \frac{16}{9}F &= 0, \\ -2X_1 + 15X_2 - 10F &= 0,\end{aligned}\quad (371)$$

a odатle je $X_1 = -\frac{5}{7}F$, $X_2 = \frac{4}{7}F$.

Simetrija i antimetrija konstrukcija. Komponente unutrašnjih sila mogu biti simetrične i antimetrične. Momenti savijanja M_y i M_z te normalna sila N , koji prouzrokuju normalno naprezanje σ_x , jesu simetrične komponente. Poprečne sile Q_y i Q_z te moment uvijanja M_v , koji prouzrokuju posmična naprezanja τ_{xy} i τ_{xz} , jesu antimetrične komponente (sl. 144).

Simetrična konstrukcija može biti opterećena simetrično i antimetrično (sl. 145). Antimetrično opterećenje dobije se iz simetričnog tako da se promjeni predznak opterećenju s jedne strane simetrale.

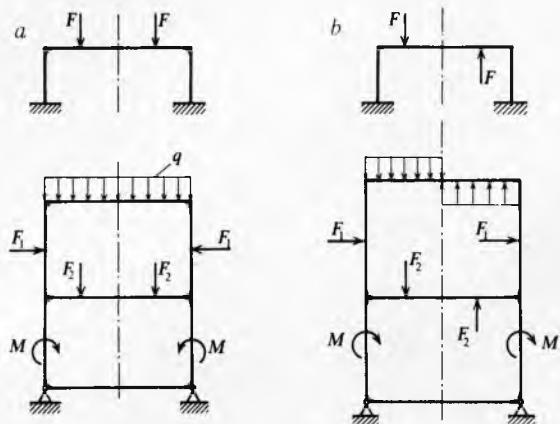
Ako je simetrična konstrukcija opterećena simetrično, antimetrične komponente unutrašnjih sila jednake su nuli. Nasuprot



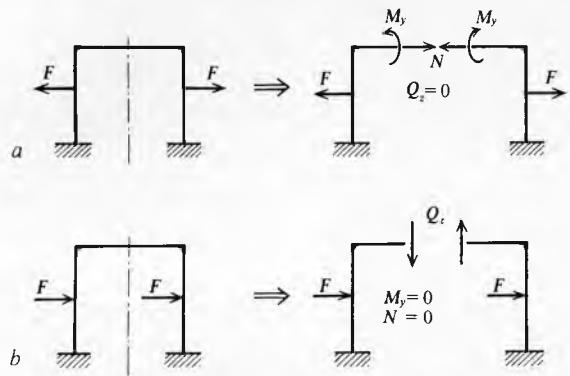
Sl. 144. Unutrašnje sile: a simetrične komponente, b antimetrične komponente

tome, ako je simetrična komponenta opterećena antimetrično, simetrične komponente unutrašnjih sila u presjecima simetrije jednake su nuli (sl. 146).

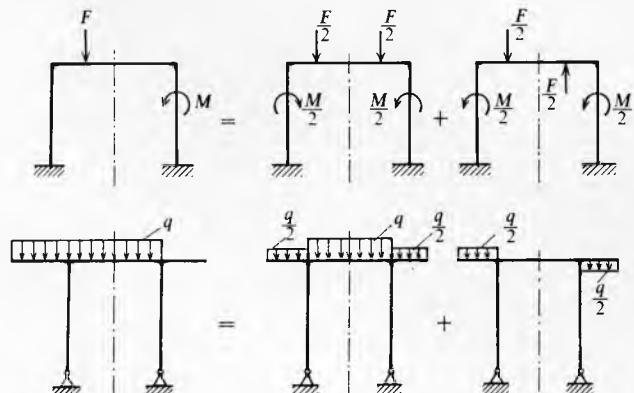
Svako opterećenje simetrične konstrukcije dade se rastaviti na zbroj simetričnog i antimetričnog opterećenja (sl. 147).



Sl. 145. Simetrične konstrukcije: *a* opterećene simetrično, *b* opterećene antimetrično



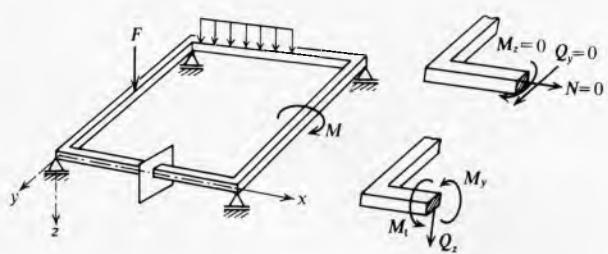
Sl. 146. Simetrična konstrukcija: a opterećena simetrično, $Q_z = 0$; b opterećena antimetrično, $N = 0$, $M_y = 0$



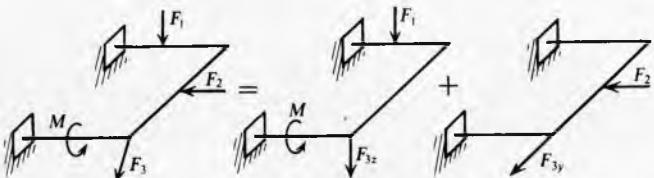
Sl. 147. Svako opterećenje simetrične konstrukcije dade se prikazati kao zbroj simetričnog i antimetričnog

Primjenom svojstava simetrije za konstrukciju koja je n puta statički neodređena, umjesto sustava od n jednadžbi sa n nepoznanica dobivaju se dva sustava: jedan ima p jednadžbi sa p nepoznanica, a drugi q jednadžbi sa q nepoznanica, gdje je $p + q = n$. Očito da je ta dva sustava lakše riješiti nego ishodni sustav sa n nepoznanica.

Ravninsko-prostorne konstrukcije. U ravninsko-prostornim konstrukcijama unutrašnje sile koje leže u ravnini konstrukcije jednake su nuli u svim presjecima konstrukcije. Prema sl. 148 to su M_y , Q_z i N .



Sl. 148. Kod ravninsko-prostornih konstrukcija komponente unutrašnjih sila koje leže u ravnini konstrukcije jednake su nuli

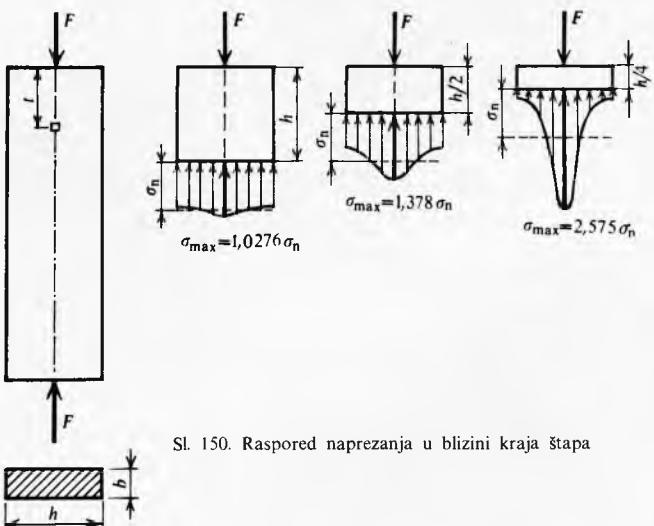


Sl. 149. Ravninska konstrukcija koja je proizvoljno opterećena može se prikazati kao superpozicija ravninske i ravninsko-prostorne konstrukcije

Ako je ravninska konstrukcija opterećena po volji, dade se prikazati kao zbroj ravninske i ravninsko-prostorne konstrukcije (sl. 149).

SAIN T VENANTOV PRINCIP I KONCENTRACIJA NAPREZANJA

Saint Venantov princip. Jednoliki raspored naprezanja po poprečnom presjeku štapa ostvarit će se samo ako je presjek dovoljno udaljen od djelovanja koncentrirane sile i ako u blizini nema nagle promjene poprečnog presjeka. U blizini otvora, naglih prijelaza ili na mjestu djelovanja koncentriranih sila raspored naprezanja nije ni približno jednolik. Maksimalno naprezanje može biti mnoga puta veće od prosječnog (nazivnog ili nominalnoga) naprezanja. Ta se pojавa zove *koncentracija naprezanja*. Analitičko određivanje naprezanja u blizini otvora vrlo je složeno i ne može se izvršiti metodama nauke o čvrstoći. Niz jednostavnijih i za praksu važnih problema riješen je metodama teorije elastičnosti. Danas se za rješavanje problema koncentracije naprezanja primjenjuju pretežno eksperimentalne metode, u prvom redu fotoelasticimetrija, a i numeričke metode. Na sl. 150 prikazan je štap presjeka $b \cdot h$ koji



Sl. 150. Raspored naprezanja u blizini kraja štapa

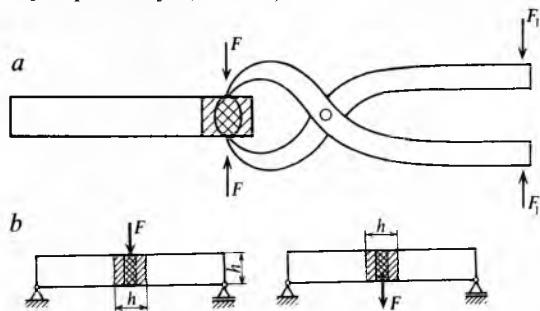
je opterećen dvjema koncentričnim silama F . Rasporedi naprezanja u presjecima koji su od kraja štapa udaljeni $h/4$, $h/2$ i h prikazani su na istoj slici. Vidi se da je u presjecima bliskim kraju štapa raspored neprezanja vrlo nejednolik. Tako je na udaljenosti $h/4$ od kraja maksimalno naprezanje 2,575 puta veće

od prosječnog naprezanja koje se dobije kad se sila podijeli ploštinom, tj.

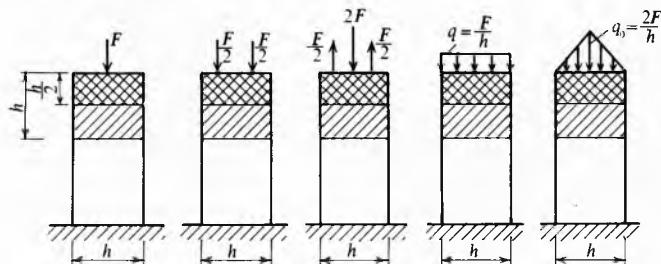
$$\sigma_{\max} = 2,575 \sigma_n = 2,575 \frac{F}{bh}. \quad (372)$$

Ako je presjek za jednu širinu štapa udaljen od kraja, maksimalno naprezanje je gotovo jednako prosječnom; razlikuje se od njega samo za 2,7%.

Saint Venantov princip glasi: Ako na malom dijelu tijela djeluje međusobno uravnoteženo opterećenje, ono uzrokuje samo lokalno naprezanje u neposrednoj blizini djelovanja opterećenja. Ta naprezanja naglo opadaju s udaljenosću od mesta djelovanja opterećenja (sl. 151a).



Sl. 151. Ilustracija Saint Venantova principa. a) naprezanje u dvostruko iscrtanom dijelu je veliko, u jednostruko iscrtanom dijelu maleno, a u neiscrstanom dijelu zanemarljivo, b) dvije jednake grede opterećene staticki ekvivalentnim opterećenjem. Razlika naprezanja u dvostruko iscrtanom području je velika (veća od 50%), u jednostruko iscrtanom području je razlika manja (do 50%), a u neiscrstanom području posve malena



Sl. 152. Štapovi opterećeni različitim, ali staticki ekvivalentnim opterećenjima. U dvostruko iscrtanom području naprezanja se u različitim štapovima mnogo razlikuju. U jednostruko iscrtanom području razlika naprezanja je manja (do 50%). U neiscrstanom području raspored naprezanja u različitim štapovima malo se razlikuje

Saint Venantov princip može se izraziti i na drugi način: U točkama tijela koje su dovoljno udaljene od mjesta opterećenja naprezanje će se zanemarivo malo promijeniti ako se jedno opterećenje zamjeni drugim, njemu staticki ekvivalentnim opterećenjem (sl. 151b, 152).

Saint Venantov princip ne može se uvijek primijeniti na tankostjene konstrukcije.

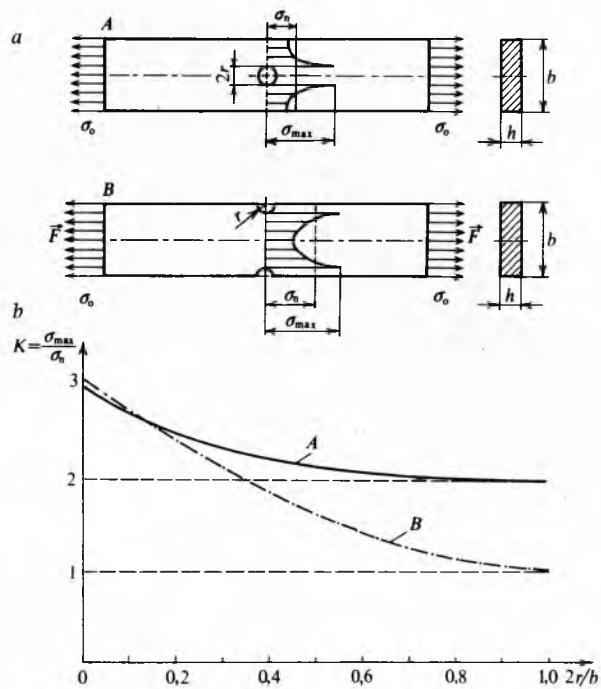
Koncentracija naprezanja. U blizini nagle promjene presjeka pojavljuje se koncentracija naprezanja. Faktor koncentracije naprezanja K_n definiran je izrazom

$$K_n = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad (373)$$

gdje je σ_{\max} maksimalno naprezanje na presjeku, a σ_n prosječno (nazivno, nominalno) naprezanje u presjeku. Za štapove je prema slici 153a

$$\sigma_n = \frac{F}{A} = \frac{F}{(b-2r)h} = \sigma_0 \frac{b}{b-2r}. \quad (374)$$

Faktor koncentracije naprezanja ovisi o obliku i veličini geometrijskog diskontinuiteta (otvora, utora i slično). Ovisnost faktora koncentracije naprezanja o veličini $2r/b$ za štap sa središnjim kružnim otvorom i štap sa dva polukružna utora prikazan je dijagramom na sl. 153.



Sl. 153. Ilustracija koncentracije naprezanja: a) raspored naprezanja po presjeku osno opterećenog štapa s kružnim otvorom, odnosno sa dva polukružna otvora, b) ovisnost faktora koncentracije naprezanja o omjeru $2r/b$

Vrlo iscrpni podaci o faktorima koncentracije naprezanja mogu se naći u djelu R. E. Petersona navedenu u popisu literature ovog članka. Ilustracija koncentracije naprezanja na osno opterećenu štalu s eliptičkim otvorom prikazana je na fotografiji u slikovnom prilogu, TE 5 iza str. 528.

LIT.: J. P. Den Hartog, Strength of Materials. McGraw-Hill, New York 1949. — J. P. Den Hartog, Advanced Strength of Materials. McGraw-Hill, New York 1952. — S. Timoshenko, History of Strength of Materials. McGraw-Hill, New York 1953. — A. J. Durelli, E. A. Phillips, C. H. Tsao, Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain. McGraw-Hill, New York 1958. — S. Timoshenko, Otpornost materijala I. Građevinska knjiga, Beograd 1966. — W. Flügge, Festigkeitslehre. Springer-Verlag, Berlin 1967. — D. C. Drucker, Introduction to Mechanics of Deformable Solids. McGraw-Hill, New York 1967. — E. P. Popov, Introduction to Mechanics of Solids. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1968. — K. A. Reckling, Mechanik II, Festigkeitslehre. Vieweg Verlag, Braunschweig 1969. — S. Timošenko, Otpornost materijala II. Građevinska knjiga, Beograd 1972. — D. Bazjanac, Nauka o čvrstoći. Tehnička knjiga, Zagreb 1973. — C. B. Bojaršinov, Osnovy strojotekhnicheskoy mehaniki mashin. MASHINOSTROENIE, Moskva 1973. — G. C. Piscareno, Сопротивление материалов. Вища школа, Київ 1973. — R. E. Peterson, Stress Concentration Factors. John Wiley & Sons, New York 1974. — T. R. Tauchert, Energy Principles in Structural Mechanics. McGraw-Hill, Kogakusha, Tokio 1974. — I. Alfrević, Viša nauka o čvrstoći. Liber, Zagreb 1975. — R. J. Roark, W. C. Young, Formulas for Stress and Strain. McGraw-Hill, Kogakusha, Tokio 1975. — I. Alfrević, Nauka o čvrstoći I. Liber, Zagreb 1978. — A. П. Филин, Прикладная механика твердого деформируемого тела II. Наука, Москва 1978. — В. И. Феодосьев, Сопротивление материалов, Наука, Москва 1979.

I. Alfrević

NEUTRONIKA, neutronska fizika, grana fizike koja proučava svojstva i ponašanje neutrona. U prirodi se neutron prvenstveno nalazi kao sastavni deo atomskih jezgara. Sa te strane posmatrano, neutronika je odjeljak fizike atomskog jezgra, odnosno nuklearne fizike. Međutim, slobodni neutron, tj. neutron izdvojen iz atomskog jezgra, projekt je specifičnih svojstava, zbog kojih je postao izvanredno oruđe za ispitivanje ne samo atomskih jezgara već i drugih struktura i pojava. Pored toga, mnogi procesi pobudeni neutronima imaju praktičnu primenu; zapravo, skoro sve primene nuklearnih procesa u raznim oblastima nauke i tehnike neposredno ili posredno su vezane