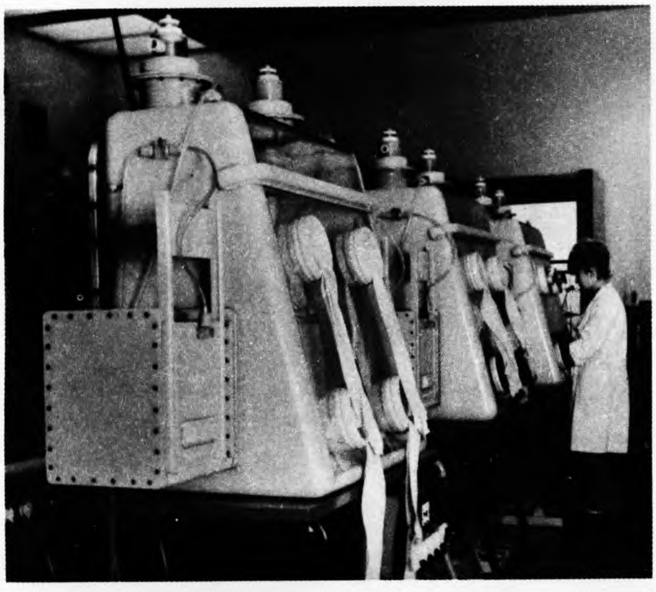
bomba, akcelerator) može se smanjiti primjenom nekih jednostavnih postupaka, npr. posrednim ulaženjem kroz labirint, tj. prilaz unutar zaštitnih zidova u kojemu se nekoliko puta skreće pod pravim kutom. Zaštitni se zidovi na sastavu moraju preklapati da zračenje ne bi prodiralo kroz pukotine. Prozor kroz koji se promatra rad u prostoriji s izvorom zračenja mora biti od olovnog stakla i ne smije biti pod udarom snopa zračenja. U mnogim pogonima danas postoji interna televizija, tako da se bez opasnosti može promatrati sve što se događa i u neposrednom okolišu opasnih izvora zračenja. U prostorijama u kojima je velika ionizacija zraka zrak se prisilno mijenja, filtrira i stalno kontrolira. Slično je s tekućinama, otpadnim vodama i sl.

Kad se radi s otvorenim izvorima zračenja, izvori su smješteni u posebnim kutijama s ugrađenim rukavicama ili umjetnim rukama (sl. 50). Radne površine u laboratoriju moraju biti potpuno glatke, od kemijski inertnih materijala, a prikladno je da se gornji sloj može lako skinuti i tako jednostavno dekontaminirati.



Sl. 50. Kutija s rukavicama za rad s otvorenim izvorima α-zračenja

Prema vrsti i jakosti izvora upotrebljava se zaštitna odjeća koja se sastoji od radnih odijela, pregača, rukavica, gumenih cipela ili čizama. Kad je potrebna dekontaminacija, upotrebljavaju se posebna odijela kojima se pokrivaju svi dijelovi tijela osim šake, stopala, glave i vrata. Glava se pokriva kapuljačom s maskom u kojoj je uređaj za disanje iz rezervoara čistog zraka koji se nosi na leđima. Rukavice i čizme prekrivaju rukave, odnosno hlače. Odijelo je bez džepova i pojasa, sa što manje nabora i šavova u kojim bi se mogao zadržati radioaktivni materijal.

M. Turk

LIT.: *E. Rutherford, J. Chadwick* and *C. D. Ellis,* Radiations from Radioactive Substances. Cambridge Univ. Press, London 1930. — *R. D. Evans,* The Atomic Nucleus. McGraw-Hill, New York 1955. — *E. Segré* (editor), Experimental Nuclear Physics I, II, III. Wiley, New York 1959. — *K. Siegbahn* (editor), Alpha-, Beta- and Gamma-ray Spectroscopy. North Holland, Amsterdam 1965. — *A. J. Tavendale,* Annual Reviews of Nuclear Science **17** (1967) 73—96. — *H. Cember,* Introduction to Health Physics. Pergamon Press, Oxford 1969. — Radiation Protection Procedures. Safety Series No 38. International Atomic Energy Agency, Vienna 1973. — *G. F. Knoll,* Radiation Detection and Measurement. Wiley, New York 1979. — *A. E. Profio,* Radiation Shielding and Dosimetry. John Wiley and Sons, New York 1979. — *V. Valković,* Spektroskopija karakterističnih X-zraka. Školska knjiga, Zagreb 1980. — *Z. Jakobović,* Leksikon mjernih jedinica. Školska knjiga, Zagreb 1981. — *M. Brezinščak,* O definiciji jedinice doznog ekvivalenta sivert. Zbornik radova X jugoslovenskog simpozijuma o mjerenjima i mjernoj opremi, Budva 1982. — *V. Paić, G. Paić,* Osnove radijacione dozimetrije i zaštite od zračenja. Liber, Zagreb 1983.

K. Ilakovac M. Turk

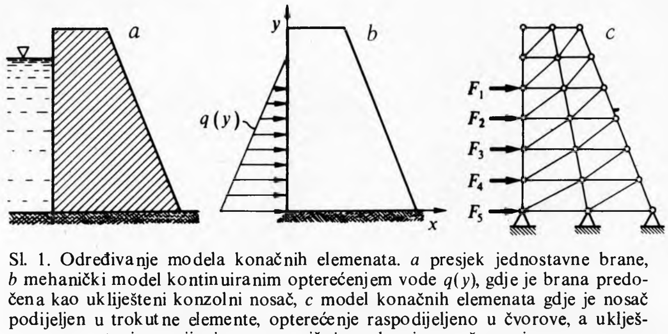
NUMERIČKE METODE U MEHANICI, postupci kojima se jednadžbe nekog zadatka mehanike rješavaju približno kada je egzaktno rješenje, zbog složenosti geometrijskog oblika promatranog tijela i njegova opterećenja, teško ili nemoguće pronaći. Numeričke metode, osim analitičkih, dio su približnih postupaka rješavanja koji se u jednakom ili nešto izmijenjenom obliku primjenjuju u najrazličitijim područjima matematičke fizike. Dok se u analitičkim postupcima uvode matematička pojednostavnjenja, a kao rješenja traže se funkcije koje približno zadovoljavaju osnovne jednadžbe zadatka, numeričke metode daju kao konačni rezultat približne brojčane vrijednosti nepoznatih veličina konkretnog zadatka, a osim matematičkih uvode se i pojednostavnjenja oblika tijela i načina opterećenja. Za pojave kojima su nepoznanice kontinuirane veličine (npr. pomaci, deformacije i naprezanja napregnutog tijela), numeričkim se metodama određuju nepoznate veličine samo u konačnom broju diskretnih točaka promatranog tijela. Svaki numerički postupak ima određenu matematičku formulaciju, a samo numeričko računanje obično se provodi na digitalnim elektroničkim računalima.

Povijesni razvoj usko je vezan uz razvoj numeričke matematike. Uspoređo sa sustavnim razvojem diferencijalnog i integralnog računa javili su se početkom XVIII stoljeća i prvi postupci za numeričko deriviranje i integriranje koji se u mehanici primjenjuju za određivanje brzine i ubrzanja gibanja čestica. Pojavom složenijih zadataka balistike (gibanje projektila u zraku), teorije vibracija i teorije elastičnosti potkraj XVIII i početkom XIX stoljeća rješavaju se diferencijalne jednadžbe primjenom postupka konačnih diferencija, a veliki sustavi algebarskih linearnih jednadžbi pomoću već dobro razvijene Gaussove metode eliminacije. Premda se u XIX i u prvoj polovici XX stoljeća obilno primjenjuje numerička matematika u mehanici, veća primjena te grane matematike počinje pojavom digitalnih računala, koja omogućuju rješavanje i najvećih sustava algebarskih linearnih jednadžbi, primjenu iterativnih postupaka, metoda relaksacije i ostalih vrsta numeričkog računanja, mnogo točnije nego što je potrebno za inženjersku praksu. Pedesetih godina XX stoljeća razvija se u mehanici, iz do tada dobro poznatih postupaka za rješavanje štapnih konstrukcija, *metoda konačnih elemenata* za zadatke vezane uz elastična i plastična tijela, a ubrzo i za probleme mehanike fluida. Ta metoda, za koju se danas smatra da je jedno od najvećih otkrića tog desetljeća u području proračuna inženjerskih konstrukcija, brzo se razvila u mehanici i u drugim područjima matematičke fizike.

U mehanici se danas numeričke metode najviše primjenjuju za rješavanje problema svojstvenih vrijednosti (određivanje vlastitih frekvencija mehaničkih vibracija, problemi stabilnosti konstrukcija), za određivanje naprezanja i deformacija elastičnih, plastičnih, elastoplastičnih i viskoelastičnih stanja, u dinamici složenog gibanja tijela, u nelinearnim problemima velikih deformacija i drugdje. Pri tom se gotovo isključivo upotrebljavaju elektronička računala, za koja se postupak formulira primjenom matričnog računa. Za niz postupaka postoje gotovi programi i potprogrami, koji su sastavni dijelovi programskih biblioteka računarskih središta, čime je numeričko računanje postalo pristupačno i inženjeru manje upućenom u algoritam pojedine metode.

METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata spada među najvažnije numeričke postupke za rješavanje različitih problema tehnike i fizike, u kojima se kao objekt promatranja javlja kontinuum, polje ili mreža, a primjenjuje se kada je analitičko rješavanje egzaktnih jednadžbi problema složeno ili nemoguće. Suština metode sastoji se u tome da se objekt zamisli rastavljen u konačni broj područja (konačni elementi) koja su međusobno vezana samo u određenom konačnom broju točaka (čvorovi) (sl. 1). Raspodjela nepoznate veličine unutar elementa prikazuje se prikladnom matematičkom funkcijom, u kojoj se parametri izražavaju *čvornim vrijednostima* nepoznate veličine. Te čvorne vrijednosti uzimaju se kao osnovne nepoznanice, koje se izračunavaju pomoću sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Tako



Sl. 1. Određivanje modela konačnih elemenata. *a* presjek jednostavne brane, *b* mehanički model kontinuiranim opterećenjem vode $q(y)$, gdje je brana predočena kao uklješteni konzolni nosač, *c* model konačnih elemenata gdje je nosač podijeljen u trokutne elemente, opterećenje raspodijeljeno u čvorove, a uklještenje zamijenjeno nepomičnim osloncima u čvorovima

se npr. raspodjela temperature unutar nekog tijela, kojemu su poznate temperature samo u nekim točkama, može odrediti zamišljenim dijeljenjem tijela u određeni broj konačnih elemenata međusobno povezanih u čvornim točkama. Za svaki element pretpostavi se funkcija raspodjele temperature, npr. u obliku polinoma određenog stupnja kojemu se koeficijenti izraze pomoću temperature u čvorovima. Zadovoljavanjem zakona o vođenju topline dobiva se sustav jednadžbi s temperaturama u čvorovima kao nepoznanicama. Rješavanjem tih jednadžbi dobiju se temperature u čvorovima, kojima je određena i pretpostavljena raspodjela unutar elementa. Budući da se raspodjela nepoznate veličine unutar elementa aproksimira nekom funkcijom (obično polinomima), metoda je približna, a točnost raste s brojem odabranih elemenata i čvorova. U praktičnoj primjeni moraju se obično riješiti sustavi s mnogo jednadžbi, što je moguće samo pomoću digitalnih elektroničkih računala, pa je i matematička formulacija metode konačnih elemenata prilagođena takvu računanju.

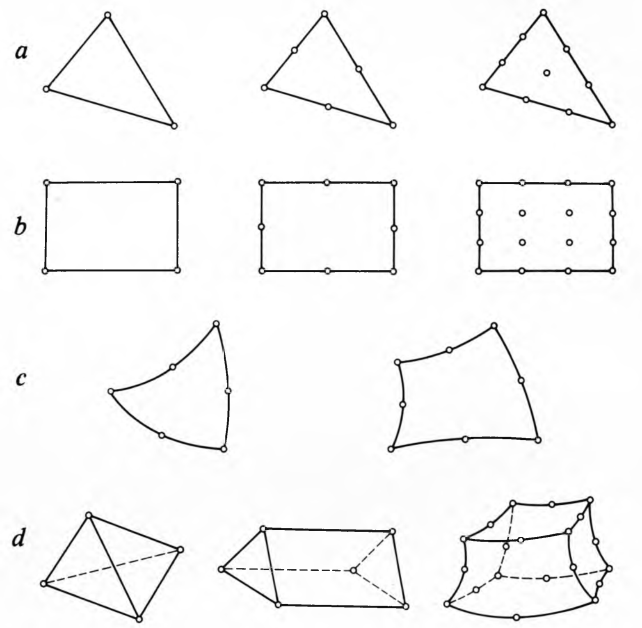
Povijest metode konačnih elemenata vezana je uz razvoj matričnih metoda statike i dinamike štapnih konstrukcija. Prvi začeci metode konačnih elemenata javljaju se u radovima A. Hrennikoffa (1941) i D. Mc Henryja (1943), koji su, rješavajući probleme ravninske teorije elastičnosti, rastavili tijelo u štapne elemente, te primjenom matričnih metoda tražili rješenje. Rastavljanje tijela u trokutne plošne elemente predložio je R. Courant (1943) za rješavanje zadataka mehanike elastičnih tijela, pri čemu je primijenio metodu koja se temelji na varijacijskom principu. Snažniji razvoj metode konačnih elemenata uslijedio je tek nakon razvoja većih elektroničkih računala, sredinom pedesetih godina našeg stoljeća, kada se u radovima M. J. Turnera, W. R. Clougha, J. H. Argyrisa i drugih po prvi put spominje *konačni element.* U to vrijeme upotrebljavaju se trokutni i pravokutni elementi vezani samo preko čvorova u vrhovima elemenata. Kasnije se razvijaju složeniji elementi s više čvorova za ravninske i prostorne zadatke. U strukturu elemenata uvode se superelementi, a konstrukcija se dijeli na područja koja se zasebno rješavaju. Tako se rješavaju potkraj šezdesetih godina problemi čvrstoće složenih konstrukcija kao što su brodovi i zrakoplovi. U početku je metoda primjenjivana intuitivno, kao pomoć inženjerima u proračunima konstrukcija. Tek u kasnijem razvoju formulirana je metoda konačnih elemenata na osnovi energetskih i varijacijskih principa. Danas se smatra da je ta metoda usko vezana s klasičnim analitičkim postupcima lorda Rayleigha, W. Ritza i B. G. Galerkina. Osim najšire primjene u mehanici deformabilnih tijela (čvrstoća elastičnih, plastičnih i viskoelastičnih tijela, vibracije elastičnog kontinuuma, stabilnost), metoda konačnih elemenata upotrebljava se u proračunima elektromagnetskih polja, mehanici fluida, termodinamici, u problemima filtracije i drugdje.

Primjena u mehanici elastičnih tijela. U inženjerskim proračunima konstrukcija i njihovih dijelova prijeko je potrebno odrediti raspodjelu naprezanja i deformacija. Većina proračuna temelji se na pretpostavci da su tijela idealno elastična, za koja se pretpostavlja da i deformacije potpuno nestaju nakon prestanka djelovanja opterećenja. Da bi se proračuni pojednostavnili, pretpostavljaju se u pojedinim slučajevima i posebne raspodjele naprezanja i deformacija, kao što su ravninsko stanje naprezanja, ravninsko stanje deformacija ili osnosimetrična raspodjela naprezanja i deformacija. Posebni elementi konstrukcija u obliku ploča ili ljuski proračunavaju se također na osnovi nekih pretpostavki o raspodjeli naprezanja po debljini ploče ili ljuske. Za svaki od tih slučajeva metoda konačnih elemenata formulira se posebno, premda su osnovni principi za sve slučajeve jednaki.

U proračunima čvrstoće elastičnih tijela, bez obzira na primijenjenu metodu, moraju se zadovoljiti sljedeći uvjeti: *uvjeti ravnoteže*, koji su za elastično tijelo određeni sa tri diferencijalne jednadžbe ravnoteže, *uvjeti kompatibilnosti* ili kontinuiteta deformacija i pomaka (kinematički uvjeti) te *zakon veze između naprezanja i deformacija.* Odaberu li se kao osnovne nepoznanice *pomaci* (metoda pomaka), biraju se za njihovu raspodjelu u metodi konačnih elemenata unutar elementa takve funkcije koje osiguravaju neprekidnost pomaka po cijelom tijelu. Uvjeti su kompatibilnosti time u potpunosti zadovoljeni, dok su uvjeti ravnoteže ispunjeni za cijelo tijelo i za pojedine elemente. Uvjeti ravnoteže za dijelove elemenata ne mogu se takvim pristupom zadovoljiti. Primjenom principa o minimumu potencijalne energije, koja je u metodi konačnih elemenata samo približna, dolazi se do sustava jednadžbi kojima su rješenja nepoznati pomaci. Ako se uzmu kao nepoznanice *naprezanja* (metoda sila), odabiru se za njihovu raspodjelu takve funkcije koje osiguravaju ispunjenje uvjeta ravnoteže u svim dijelovima elemenata i tijela. Uvjeti kompatibilnosti nisu tada ispunjeni u potpunosti, a sustav jednadžbi iz kojih se izračunavaju nepoznata naprezanja postavlja se na osnovi principa o minimumu komplementarne energije. Za *mješovito odabiranje nepoznanica* (hibridna metoda) kao osnova služi poopćenje varijacijskog principa, a uvjeti ravnoteže i kompatibilnosti ispunjeni su djelomično. Radi jednostavnosti pretežno se u metodi konačnih elemenata upotrebljava metoda pomaka koja je do danas najbolje razrađena.

Metoda pomaka

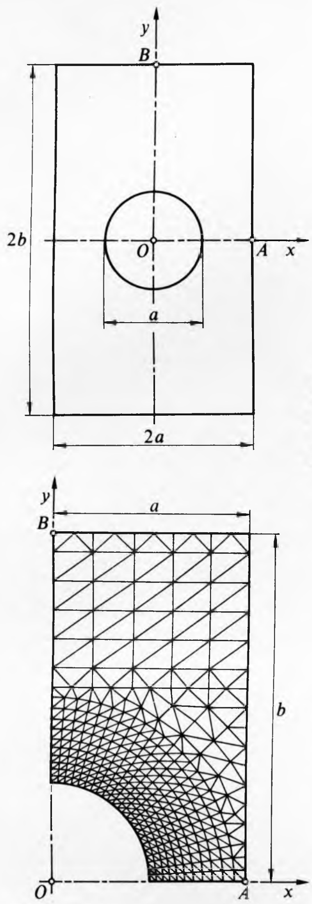
Proračun čvrstoće nekog elastičnog tijela pomoću konačnih elemenata metodom pomaka započinje dijeljenjem tijela u zamišljene konačne elemente, što se provodi na crtežu ručno ili pomoću računala (sl. 2). Pri tom se zamišlja da su elementi međusobno spojeni samo u čvorovima koji leže u vrhovima elementa ili dodatno i na njihovim stranicama ili bridovima.



Sl. 2. Primjeri nekih konačnih elemenata: *a* trokutni element sa čvorovima u vrhovima i s dodatnim čvorovima na stranicama i unutar elementa, *b* pravokutni elementi, *c* krivolinijski elementi, *d* prostorni elementi u obliku tetraedra, prizme i krivolinijski element u prostoru

Pomaci tih čvorova uzimaju se u metodi pomaka kao osnovne nepoznanice. Prema broju čvorova elementa i broju nepoznanica u čvoru pretpostavlja se približna raspodjela pomaka unutar svakog elementa pomoću pogodne matematičke funkcije, koja ujedno na linearan način vezuje pomake unutar elementa s pomacima u čvorovima. Budući da su deformacije i naprezanja vezani s pomacima preko derivacija pomaka, to su i sve komponente deformacija i naprezanja unutar elementa linearno povezane s pomacima u čvorovima. Za svaki element pretpostavljaju se u čvorovima unutrašnje sile koje napregnuti element drže u ravnoteži. Postavljanjem uvjeta ravnoteže za svaki element uspostavlja se između sila i pomaka u čvorovima linearna zavisnost koja se, slično kao i koeficijent linearne zavisnosti za oprugu, zove *krutost elementa.* Kako se u cijelom postupku primjenjuje matrični račun, to su krutosti pojedinih elemenata izražene preko pripadnih matrica krutosti. Pomoću uvjetâ ravnoteže, koji se postavljaju za sve čvorove elastičnog tijela, dolazi se do linearne veze između sila opterećenja i pomaka u čvorovima. Ta veza daje sustav algebarskih jednadžbi u kojima su pomaci čvorova nepoznanice. Uz zadano opterećenje i zadani način oslanjanja tijela na okolinu sustav jednadžbi je rješiv, pa se iz njega mogu izračunati pomaci u čvorovima, a zatim i pomaci, deformacije i naprezanja unutar elemenata.

Tijelo se u elemente dijeli zamišljenim crtama tako da se nastoji elementima što vjernije opisati geometrijski oblik tijela. Najjednostavniji element je trokut, koji se upotrebljava za proračune ravninskih stanja naprezanja i deformacija (sl. 3). Opće pravilo za podjelu tijela u elemente ne postoji. Radi točnosti računanja mreža se elemenata usitnjuje na onim mjestima gdje se očekuju naglije promjene naprezanja, odnosno deformacija ili njihove koncentracije. Spretnom podjelom tijela na elemente i njihovim označivanjem može se uštedjeti u vremenu računanja računala, no, o tome ne ovisi točnost računanja. Podjela na elemente i označivanje izvodi se ručno ili na računalu.



Sl. 3. Mreža trokutnih konačnih elemenata za ploču s otvorom, dobivena automatiziranom podjelom na računalu. Zbog geometrijske simetrije dovoljno je pri simetričnim opterećenjima promatrati samo četvrtinu ploče

Matematička funkcija kojom se opisuju pomaci unutar elementa mora odgovarati određenim uvjetima, koji proizlaze iz osnovnog principa da izračunati pomaci, deformacije i naprezanja to više teže *točnom rješenju* što se tijelo dijeli u sitniju mrežu konačnih elemenata. Ti se uvjeti zovu *uvjetima konvergencije*. Obično se navode tri takva uvjeta: *a*) odabrana funkcija za pomake mora biti takva da se u elementu ne javljaju deformacije ni naprezanja kad element ima pomake kao kruto tijelo; *b*) funkcija pomaka mora sadržati u sebi i linearnu raspodjelu pomaka unutar elementa, odnosno stanje konstantnih deformacija i naprezanja unutar elementa; *c*) funkcije pomaka unutar elementa moraju biti neprekinute, a po rubovima elementa moraju za dva susjedna elementa izražavati jednake pomake. Ti uvjeti, koji su u razvoju metode konačnih elemenata formulirani u konačnom obliku tek potkraj šezdesetih godina našeg stoljeća, dobiveni su posebni matematičkim izučavanjem točnosti i konvergencije metode konačnih elemenata. Do postavljanja uvjeta konvergencije primjenjivala se metoda konačnih elemenata intuitivno, pa se još i danas u nekim proračunima (savijanje ploča) odstupa od tih uvjeta, jer proračuni daju u tehničkom smislu zadovoljavajuću točnost uz jednostavnije računanje.

Komponente pomaka neke točke unutar elementa obično se označuju sa u, v i w, a odgovaraju pomacima neke točke unutar elementa u smjeru koordinatnih osi x, y, z. Općenito, sva su tri pomaka funkcije svih koordinata tako da je

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z), \\ v &= v(x,y,z), \\ w &= w(x,y,z). \end{aligned} \tag{1}$$

Pomaci unutar elementa prikazuju se jednostupačnom matricom (vektorom)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Pomaci čvorova i njihove komponente označeni su pripadnim indeksima, kojima su označeni i čvorovi. Tako je vektor pomaka u čvoru i

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

a vektor pomaka svih n čvorova jednog elementa

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Pod pomacima u nekom čvoru razumiju se i vrijednosti derivacija stvarnih pomaka u pojedinim čvorovima, koje se, već prema problemu koji se razrađuje, ponekad uzimaju također kao osnovne nepoznanice. Broj pomaka u čvoru ili u svim čvorovima nekog elementa odgovara broju stupnjeva slobode čvora, odnosno cijelog elementa.

Linearna veza pomaka unutar elementa s pomacima u čvorovima tog istog elementa izražava se matričnom jednadžbom

$$\{f\} = [N]\,\{\delta\}, \tag{5}$$

gdje je $[N]$ pravokutna matrica s onoliko redaka koliko članova sadrži vektor $\{f\}$ i s brojem stupaca koji odgovara broju članova vektora $\{\delta\}$. Članovi matrice $\{N\}$ u općem su slučaju funkcije od x, y i z, a zovu se *funkcije oblika*. One se za svaki tip elementa posebno odabiru, pa su to funkcije pretpostavljene približne raspodjele pomaka unutar elementa.

Prema vezi poznatoj iz teorije elastičnosti mogu se i deformacije prikazati jednostupačnom matricom. Tada vrijedi da je

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Deriviranjem pomaka u, v i w iz jednadžbe (5) i uvrštenjem u (6) dobije se veza između deformacija i pomaka u čvorovima koja glasi

$$\{\varepsilon\} = [B]\,\{\delta\}. \tag{7}$$

U općem su slučaju članovi matrice $[B]$ funkcije od x, y, z, jer u sebi sadrže derivirane funkcije oblika $[N]$.

Veza između naprezanja i deformacija također se izražava matričnom jednadžbom. Kad je ova veza linearna, za nju vrijedi Hookeov zakon, koji za izotropno elastično tijelo ima sljedeći matrični oblik

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \quad (8)$$

Ta jednadžba, u kojoj je E modul elastičnosti, a ν Poissonov koeficijent, skraćeno napisana glasi:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (9)$$

gdje je $\{\sigma\}$ vektor naprezanja, a $[D]$ matrica elastičnih svojstava tijela koje se proračunava. Tada će naprezanja izražena u ovisnosti o pomacima u čvorovima biti

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}. \quad (10)$$

Između elemenata djeluju u čvorovima unutrašnje sile, koje su posljedica elastičnog deformiranja zamišljene strukture elemenata. Slično kao i za pomak, i te se komponente sila u jednom čvoru označuju pripadnim indeksom čvora. U čvoru i nekog elementa te su komponente U_i, V_i i W_i, tako da je vektor sila $\{F\}$ koje djeluju u čvorovima na jedan element

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} U_1\\ V_1\\ W_1\\ U_2\\ V_2\\ W_2\\ \vdots\\ U_n\\ V_n\\ W_n\end{Bmatrix} \quad (11)$$

Ravnoteža elementa uspostavlja se primjenom principa virtualnih pomaka, u kojemu je virtualni rad sila $\{F\}$ jednak potencijalnoj energiji elastične deformacije elementa pobuđene virtualnim pomacima. Primjenom toga principa dobiva se matrična jednadžba

$$\{F\} = \left(\int_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,\mathrm{d}V\right)\{\delta\} \quad (12)$$

u kojoj gornji indeks T označuje transponiranu matricu. Taj izraz predstavlja osnovnu jednadžbu konačnog elementa. Kada na element djeluju i volumenske sile (npr. vlastita težina), dodaje se prema posebnom postupku njihov određeni dio komponentama čvornih sila $\{F\}$. Integral u okrugloj zagradi (12) zove se matrica krutosti elementa

$$[k] = \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,\mathrm{d}V. \quad (13)$$

To je kvadratna i simetrična matrica. U općem su slučaju elementi matrice $[k]$ funkcije koordinata položaja, a parametri tih funkcija sadrže koordinate položaja čvorova elementa.

Opterećenje tijela pri postavljanju mreže konačnih elemenata zamišlja se da djeluje samo u pojedinim čvorovima mreže, slično kao i u proračunu rešetkastih nosača u statici krutih tijela. Komponente tih sila u pravcima x, y i z za neki čvor i mogu se napisati u obliku jednostupačne matrice, pa je

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} R_{ix}\\ R_{iy}\\ R_{iz}\end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Osim vanjskih sila, na čvorove djeluju i unutrašnje sile od elemenata. Tako npr., ako u čvoru i djeluju na element p sile U_i, V_i i W_i, njihovo je djelovanje na čvor istog intenziteta, ali suprotnog smjera, pa je za sile na čvor i od elementa p pripadni vektor sila

$$-\{F_i\}_p = -\begin{Bmatrix} U_i\\ V_i\\ W_i\end{Bmatrix}_p. \quad (15)$$

Za svaki čvor moraju biti ispunjeni uvjeti ravnoteže, što znači da zbroj komponenata svih sila koje djeluju na čvor mora biti jednak nuli. Za čvor i taj uvjet glasi

$$\{R_i\} + \sum_p(-\{F_i\}_p) = 0, \quad (16)$$

pri čemu se zbrajanje u drugom članu odnosi na sve elemente koji se sastaju u čvoru i. Kako su u tom članu sile $\{F_i\}_p$ određene onim recima u matričnoj jednadžbi (12) koji pripadaju čvoru i, taj će član biti sastavljen od dijelova matrica krutosti elemenata koji se sastaju u tom čvoru množenih s vektorom pomaka $\{\delta\}$ elementa. Tako se uspostavlja linearna zavisnost između vanjskih sila i komponenata pomaka čvorova, koja pisana za sve čvorove postavljene mreže elemenata daje jednadžbu

$$\{R\} = [K]\{d\}. \quad (17)$$

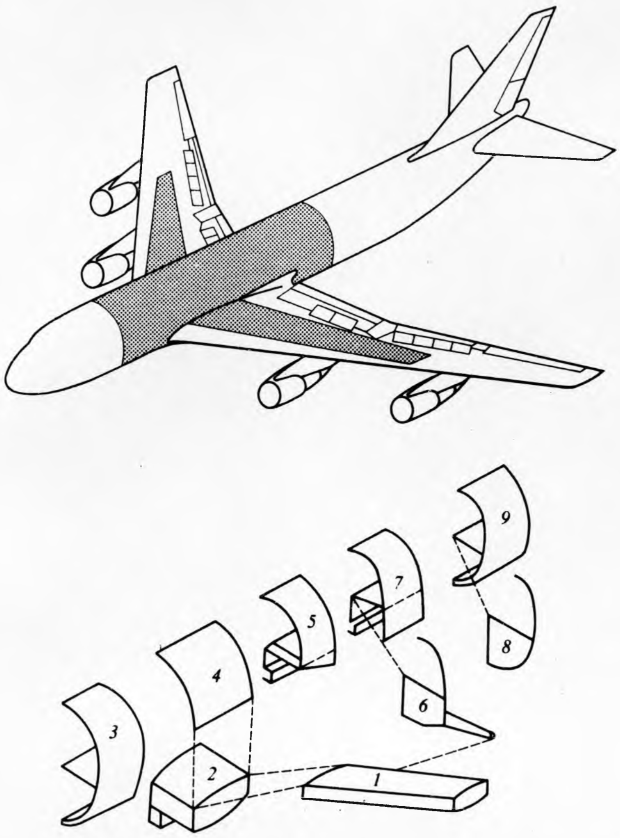
U vektorima $\{R\}$ i $\{d\}$ nose komponente indekse čvorova mreže, tako da je za mrežu elemenata s ukupno n čvorova vektor vanjskih sila

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{1x}\\ R_{1y}\\ R_{1z}\\ R_{2x}\\ R_{2y}\\ R_{2z}\\ \vdots\\ R_{nx}\\ R_{ny}\\ R_{nz}\end{Bmatrix} \quad (18)$$

a vektor pomaka čvorova

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ w_1\\ u_2\\ v_2\\ w_2\\ \vdots\\ u_n\\ v_n\\ w_n\end{Bmatrix} \quad (19)$$

Matrica $[K]$ je matrica krutosti cijelog tijela. Njezini članovi slijede iz članova matrica krutosti $[k]$ pojedinih elemenata. Matrica $[K]$ je pojasna i simetrična. Ona je singularna, njezina determinanta članova jednaka je nuli, tako da ne postoji opće rješenje jednadžbi (17). Uz zadane rubne uvjete sustav jednadžbi postaje rješiv, pa se primjenom metoda za rješavanje linearnih algebarskih jednadžbi dolazi do rješenja. Kada su jednom pomaci u svim čvorovima poznati, računaju se naprezanja, deformacije ili pomaci u elementu prema jednadžbama (10), (7), odnosno (5). Da bi se uštedjelo u vremenu računanja, numeriraju se čvorovi cijele mreže prema posebnim pravilima, tako da pojas matrice $[K]$ bude što uži. Proračuni srednje veličine zahtijevaju rješavanje nekoliko stotina jednadžbi s isto toliko nepoznanica, dok za veće proračune broj konačnih jednadžbi iznosi i nekoliko tisuća. Za proračune velikih konstrukcija (zrakoplovi, brodovi) dijeli se konstrukcija na dijelove (superelementi) koji se najprije proračunavaju, a zatim se svaki dio za sebe proračunava daljom podjelom na mrežu elemenata (sl. 4). Tako se mogu proračunati i takve konstrukcije za koje bi konačni broj jednadžbi iznosio i nekoliko desetaka tisuća.

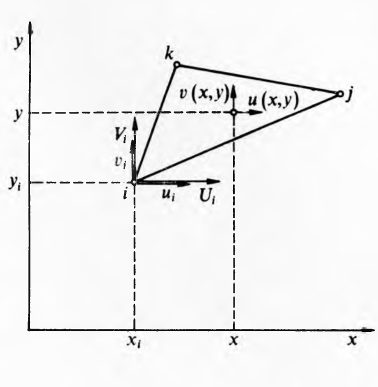


Sl. 4. Zrakoplov Boeing 747 rastavljen na superelemente. Dio konstrukcije koji je proračunavan (osjenčana ploha) rastavljen je na 9 superelemenata. Svaki od superelemenata proračunat je s mrežom elemenata kojoj je opseg računanja bio ~800 jednadžbi. Za istu točnost, bez primjene superelemenata, bilo je potrebno istodobno riješiti sustav s više od 7000 jednadžbi

Trokutni element sa dva stupnja slobode u čvoru (sl. 5) najjednostavniji je element koji se ujedno i najčešće upotrebljava u metodi konačnih elemenata. Uz pomak u u pravcu osi x i uz pomak v u pravcu osi y taj je element predviđen za proračune ravninskih stanja. Pomaci unutar elementa izražavaju se polinomom prvog stupnja, tako da je

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \qquad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \tag{20}$$

U čvorovima te funkcije imaju vrijednost pomaka čvora. Tako uz $x = x_i$ i $y = y_i$ bit će pomaci $u = u_i$ i $v = v_i$. Za sva tri čvora daje izraz (20) šest jednadžbi, iz kojih se dobiju koeficijenti α_r izraženi pomoću koordinata i pomaka čvorova. Takvi se pomaci unutar elementa izražavaju preko pomaka čvorova,



Sl. 5. Trokutni element sa dva stupnja slobode u čvoru najjednostavniji je ravninski element u metodi konačnih elemenata. Pomak svake točke određen je sa dvije komponente u i v, a u svakom čvoru djeluju na element komponente sila U i V

a kao veza javljaju se linearne funkcije N_i, N_j i N_k, pa je

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k, \qquad v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k. \tag{21}$$

Funkcije N_i, N_j i N_k jesu funkcije oblika trokutnog elementa, a glase:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y, \\ N_j &= \frac{1}{2A}(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y, \\ N_k &= \frac{1}{2A}(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y, \end{aligned} \tag{22}$$

gdje je A površina trokutnog elementa. Matrična jednadžba $\{f\} = [N]\{\delta\}$ za pomake unutar elementa bit će prema (21)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & O & N_j & O & N_k & O \\ O & N_i & O & N_j & O & N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}. \tag{23}$$

Takav element ima, prema tome, linearnu raspodjelu pomaka unutar elementa (sl. 6), tako da su funkcije oblika linearne funkcije od x i y. Uz takvu raspodjelu pomaka, deformacije su i naprezanja unutar elementa konstantni, jer su pomaci vezani s deformacijama preko prve derivacije.

Deriviranjem pomaka (21) na način koji određuju jednadžbe (6) matrična jednadžba $\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}$ ima sljedeći oblik

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_j & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}. \tag{24}$$

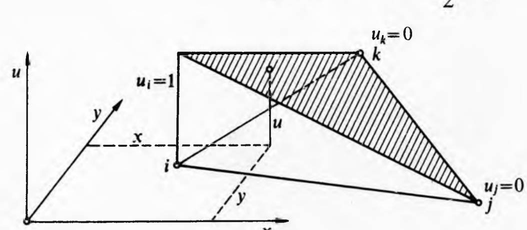
Pravokutna matrica na desnoj strani te jednadžbe sa 3 retka i 6 stupaca te koeficijentom $1/2A$ predstavlja matricu $[B]$.

Elementi matrice $[D]$ u Hookeovu zakonu (9) ovise o pretpostavljenom stanju u kojemu se napregnuti element nalazi. Za izotropno linearnoelastično tijelo, uz pretpostavku ravninskog stanja naprezanja ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), ta matrica glasi

$$[D]_{RN} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Pri ravninskoj deformaciji ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) za matricu $[D]$ vrijedi izraz

$$[D]_{RD} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{26}$$



Sl. 6. Raspodjela pomaka u unutar elementa. Zbog jednostavnosti uzeto je da su pomaci u_j i u_k jednaki nuli, a $u_i = 1$. Osjenčana ravnina pokazuje promjenu pomaka u

Svi su članovi matrice $[B]$ tog elementa konstante, pa to isto vrijedi i za njezinu transponiranu matricu $[B]^{\mathrm{T}}$. Kako su za linearnoelastično tijelo i članovi matrice $[D]$ konstante, to se integral u izrazu (13) za matricu krutosti odnosi samo na diferencijal volumena. Uz debljinu h elementa volumen iznosi $V = hA$, pa je

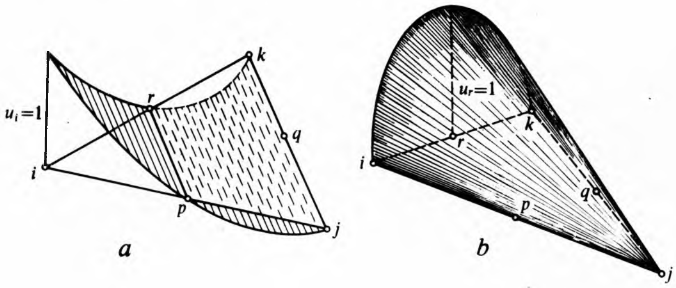
$$[k] = hA[B]^{\mathrm{T}}[D][B]. \qquad (27)$$

Za svaki element izračunava se elektroničkim računalom pripadna matrica krutosti na osnovi poznatih koordinata položaja čvorova i zadanih konstanti materijala E i ν. Dalji postupak određivanja matrice krutosti $[K]$ cijelog tijela i rješavanje pripadnog sustava jednadžbi ne razlikuje se za trokutni element od općeg postupka koji vrijedi za bilo kakav element.

Dodavanjem čvorova na stranicama trokuta te dopunskim čvorovima u unutrašnjosti mogu se za pomake upotrijebiti i polinomi višeg stupnja (sl. 7). Trokutni element npr. sa tri čvora u vrhovima i s dopunskim čvorom na polovici svake stranice omogućuje upotrebu polinoma drugog stupnja za pomake, tako da je za takav element

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2, \\ v &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} xy + \alpha_{11} x^2 + \alpha_{12} y^2. \end{aligned} \qquad (28)$$

Takav element ima 12 stupnjeva slobode, a raspodjela pomaka po elementu određena je plohom drugog reda. Kao moguće povećanje broja stupnjeva slobode elementa primjenjuju se u metodi konačnih elemenata derivacije pomaka u čvoru. Tako, osim pomaka u i v, mogu se uzeti još i njihove prve derivacije po x i y, što daje 4 stupnja slobode u čvoru, ili za trokut sa tri čvora 12 stupnjeva slobode.

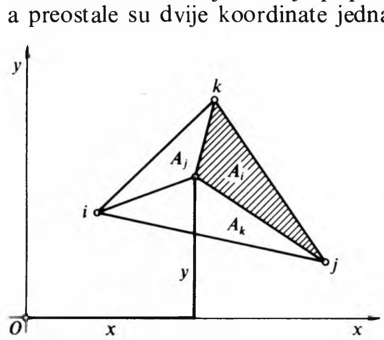


Sl. 7. Trokutni element sa 6 čvorova i 12 stupnjeva slobode. Raspodjela pomaka unutar elementa određena je plohom drugog reda. *a* oblik plohe kada je pomak $u_i = 1$, a ostali su pomaci u čvorovima jednaki nuli, *b* oblik plohe kada je pomak $u_r = 1$, a ostali su pomaci u čvorovima jednaki nuli

Umjesto Descartesovih koordinata x i y upotrebljavaju se za trokutni element i površinske koordinate. Svaka točka unutar elementa dijeli površinu trokuta u tri dijela A_i, A_j i A_k (sl. 8), pa je položaj točke moguće definirati sa tri koordinate

$$\xi_i = \frac{A_i}{A}, \quad \xi_j = \frac{A_j}{A}, \quad \xi_k = \frac{A_k}{A}. \qquad (29)$$

Za čvorove tada vrijedi da je pripadna koordinata jednaka 1, a preostale su dvije koordinate jednake nuli. Tako su npr. za

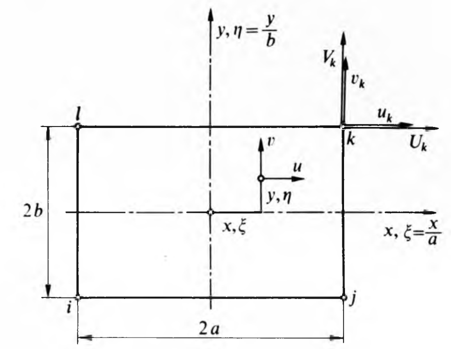


Sl. 8. Površinske koordinate trokutnog elementa. Umjesto koordinatama x i y položaj točke opisuje se pomoću dijelova površine trokuta A_i, A_j i A_k. Površina osjenčanog trokuta A_i podijeljena s površinom cijelog trokuta A daje površinsku koordinatu ξ_i

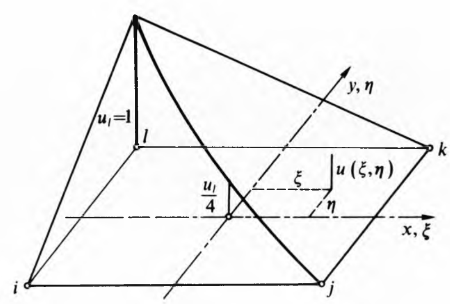
čvor i pripadne koordinate $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0$, $\xi_k = 0$. Te tri koordinate nisu nezavisne jer je $\xi_i + \xi_j + \xi_k = 1$.

Površinske koordinate za trokutni element sa tri čvora i dva stupnja slobode u čvoru odgovaraju funkcijama oblika, tako da je za takav element $\xi_i = N_i$, $\xi_j = N_j$, $\xi_k = N_k$. Prednost primjene površinskih koordinata, međutim, više je izražena za trokutne elemente s više stupnjeva slobode.

Pravokutni element u najjednostavnijem obliku ima četiri čvora u vrhovima (sl. 9). Za proračune su ravninskih stanja komponente pomaka u i v u pravcima osi x i y, a na svaki



Sl. 9. Pravokutni element sa četiri čvora za proračune ravninskih zadataka. U i V su komponente sila u čvorovima, a u svakoj točki elementa predviđeni su pomaci u i v u pravcima koordinatnih osi. Umjesto koordinata x i y obično se za takav element upotrebljavaju bezdimenzijske koordinate ξ i η



Sl. 10. Raspodjela pomaka u unutar pravokutnog elementa sa 4 čvora i 8 stupnjeva slobode. Zbog jednostavnosti pretpostavljeno je da je $u_l = 1$ i $u_i = u_j = u_k = 0$

čvor djeluju po dvije komponente sila U i V. Umjesto koordinata x i y upotrebljavaju se za takav element bezdimenzijske koordinate $\xi = \frac{x}{a}$ i $\eta = \frac{y}{b}$, pri čemu su $2a$ i $2b$ stranice elementa. Taj element ima 8 stupnjeva slobode, a za pomake (sl. 10) uzima se nepotpuni polinom drugog stupnja s članovima

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 a + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \end{aligned} \qquad (30)$$

Pomaci izraženi pomoću bezdimenzijskih koordinata glase

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + a\alpha_2 \xi + b\alpha_3 \eta + ab\alpha_4 \xi\eta, \\ v &= \alpha_5 + a\alpha_6 \xi + b\alpha_7 \eta + ab\alpha_8 \xi\eta. \end{aligned} \qquad (31)$$

Funkcije su oblika također polinomi drugog stupnja, tako da je

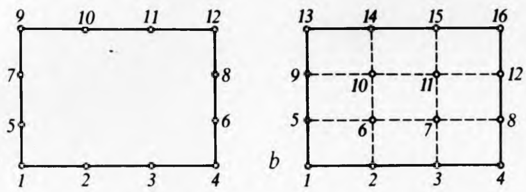
$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta), \\ N_j &= \frac{1}{4}(1 + \xi - \eta - \xi\eta), \\ N_k &= \frac{1}{4}(1 + \xi + \eta + \xi\eta), \\ N_l &= \frac{1}{4}(1 - \xi + \eta - \xi\eta). \end{aligned} \qquad (32)$$

Matrica $[B]$ određuje se deriviranjem pomaka slično kao i za trokutni element, dok je matrica $[D]$ za sve ravninske elemente jednaka. Elementi matrice krutosti $[k]$, koja ima 8 redaka i 8 stupaca, određuju se integriranjem prema izrazu (13). Tako se za prvi element u prvom retku k_{11}, nakon što se provede matrično množenje $[B]^{\mathrm{T}}[D][B]$ te uz $\mathrm{d}V = abh\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$, dobije u ravninskom stanju naprezanja da je

$$k_{11} = \frac{3}{4}ab\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\left(\frac{1-\eta}{a}\right)^2 + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1+\xi}{b}\right)^2\right]\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{4b}{a} + 2(1-\nu)\frac{a}{b}. \tag{33}$$

Za složenije elemente takvo jednostavno integriranje nije moguće, pa se tada primjenjuju posebni postupci integriranja.



Sl. 11. Pravokutni element, *a* proširen s čvorovima na stranicama, *b* proširen tako da čvorovi tvore pravokutnu mrežu

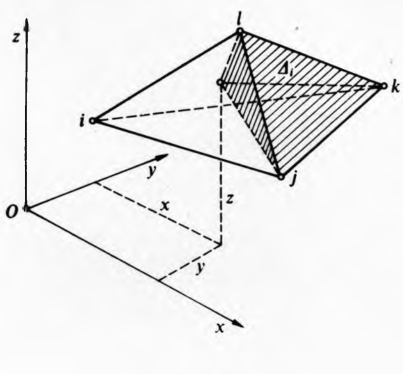
Pravokutni element proširuje se dodavanjem čvorova na stranicama elementa (sl. 11). Pri tom se funkcije za pomake u obliku polinoma odabiru prema ukupnom broju stupnjeva slobode, a da bi te funkcije odgovarale određenim uvjetima simetrije s obzirom na koordinatne osi, potrebno je ponekad uvoditi i unutrašnje čvorove. Za takve čvorove postavljaju se posebni uvjeti kako bi se dobile dopunske jednadžbe za izračunavanje koeficijenata polinoma. Često se jednostavnije proširuje element dodavanjem vanjskih i unutrašnjih čvorova, tako da čvorovi tvore pravilnu mrežu. Tada za određivanje polinoma za pomake služi Lagrangeova interpolacija. Ako u čvorovima osim pomaka dolaze kao nepoznanice i njihove derivacije, primjenjuje se za tako proširene pravokutne elemente Hermiteova interpolacija. Pri takvim interpolacijama u metodi konačnih elemenata polinomi su uz čvorne vrijednosti tražene funkcije upravo funkcije oblika.

Tetraedar je osnovni element za proračune u prostoru (sl. 12). Najjednostavniji element u obliku tatraedra ima čvorove u vrhovima, a u svakom čvoru 3 moguća pomaka.

Tada postoji 12 stupnjeva slobode elementa, a za pomake se uzimaju polinomi s linearnim članovima, tako da je

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \tag{34}$$

Deriviranjem pomaka dobiju se deformacije koje su, jednako kao i naprezanja, konstantne unutar jednog elementa. Osim koordinata x, y, z, upotrebljavaju se za takve elemente i volumenske koordinate. Svaka točka unutar elementa dijeli njegov volumen V s obzirom na vrhove u četiri dijela Δ_i, Δ_j, Δ_k, Δ_l.



Sl. 12. Prostorni element u obliku tetraedra sa 4 čvora u vrhovima. Svaka točka unutar tetraedra dijeli njegov volumen u četiri dijela, pa se umjesto koordinata x, y, z mogu uvesti 4 volumenske koordinate. Osjenčan volumen Δ_i podijeljen s volumenom tetraedra V daje volumensku koordinatu ξ_i

Volumenske koordinate glase tada

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{\Delta_i}{V}, \\ \xi_j &= \frac{\Delta_j}{V}, \\ \xi_k &= \frac{\Delta_k}{V}, \\ \xi_l &= \frac{\Delta_l}{V}. \end{aligned} \tag{35}$$

Za te koordinate vrijedi da je $\xi_i + \xi_j + \xi_k + \xi_l = 1$.

Kao i za ravninske elemente, tako se i za tetraedar element proširuje dodavanjem čvorova po bridovima ili u unutrašnjosti.

Prizmatični element sa 8 čvorova i 3 stupnja slobode u čvoru ima linearnu raspodjelu pomaka unutar elementa u presjecima paralelnima s bilo kojom koordinatnom osi (sl. 13). Funkcije pomaka su nepotpuni polinomi trećeg stupnja, tako da je

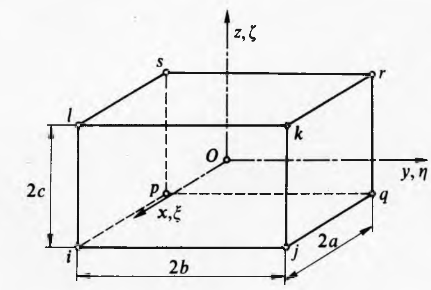
$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz, \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} zx + \alpha_{16} xyz, \\ w &= \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} yz + \alpha_{23} zx + \alpha_{24} xyz. \end{aligned} \tag{36}$$

Kao i za pravokutni element, uvode se bezdimenzijske koordinate $\xi = \dfrac{x}{a}$, $\eta = \dfrac{y}{b}$ i $\zeta = \dfrac{z}{c}$. Funkcije oblika mogu se za takav element napisati u općem obliku koji glasi

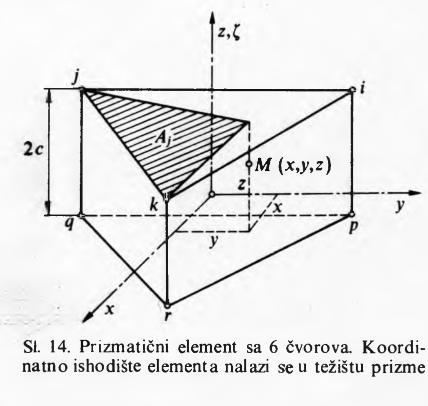
$$N_\alpha = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_\alpha)(1 + \eta\eta_\alpha)(1 + \zeta\zeta_\alpha), \tag{37}$$

gdje je $\alpha = i, j, k, l, p, q, r, s$. Takav prizmatični element ima ograničene mogućnosti primjene, jer se njime teško opisuju složenije konture tijela.

Šire se primjenjuje prizmatični element sa 6 čvorova i 3 stupnja slobode u čvoru (sl. 14). Pomaci su za takav element



Sl. 13. Prizmatični element sa 8 čvorova. Koordinatni sustav x, y, z s ishodištem u težištu elementa i bezdimenzijske koordinate $\xi = \dfrac{x}{a}$, $\eta = \dfrac{y}{b}$ i $\zeta = \dfrac{z}{c}$



Sl. 14. Prizmatični element sa 6 čvorova. Koordinatno ishodište elementa nalazi se u težištu prizme

polinomi

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz,$$
$$v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} z + \alpha_{11} xz + \alpha_{12} yz, \qquad (38)$$
$$w = \alpha_{13} + \alpha_{14} x + \alpha_{15} y + \alpha_{16} z + \alpha_{17} xz + \alpha_{18} yz.$$

Bezdimenzijske su koordinate takva elementa tri površinske i jedna u pravcu osi z: $\xi_i = \frac{A_i}{A}$, $\xi_j = \frac{A_j}{A}$, $\xi_k = \frac{A_k}{A}$, $\zeta = \frac{z}{c}$. Površinske koordinate jednake su onima za trokutni element, a opća funkcija oblika glasi

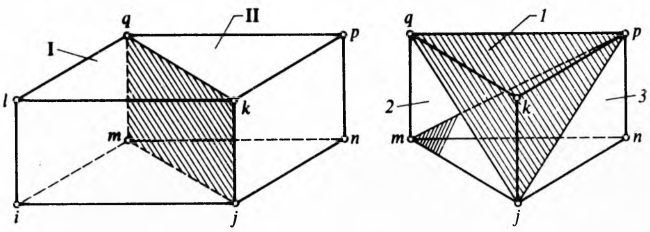
$$N_\alpha = \frac{1}{2} \xi_\alpha (1 + \zeta) \qquad (39)$$

za $\alpha = i, j, k$, odnosno

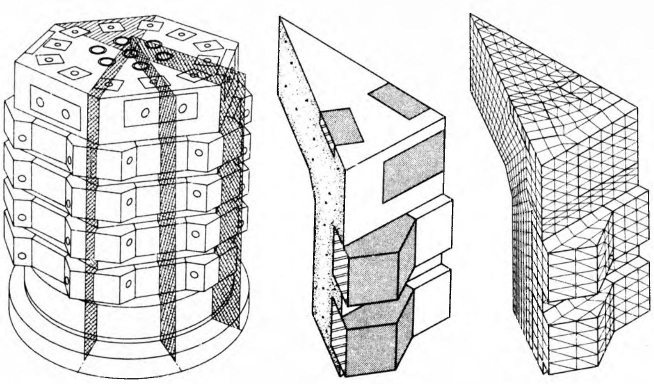
$$N_\beta = \frac{1}{2} \xi_\alpha (1 - \zeta), \qquad (40)$$

gdje β i α dolaze u parovima p, i; q, j; r, k.

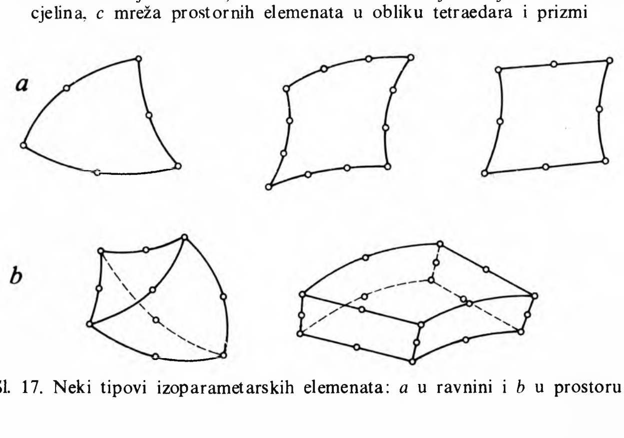
Prizmatični elementi proširuju se dodavanjem čvorova po bridovima i u unutrašnjosti elementa. Često se u metodi konačnih elemenata prizmatični elementi zamišljaju sastavljeni od drugih prostornih elemenata (sl. 15). Na primjer, pravokutni prizmatični element može se zamisliti da je sastavljen od dva prizmatična elementa s trokutnim presjekom, ili od pet, odnosno šest elemenata u obliku tetraedra. Takvo rastavljanje može poboljšati točnost računanja. Na sl. 16 prikazana je jedna složenija konstrukcija rastavljena na prizmatične elemente.



Sl. 15. Rastavljanje pravokutnog prizmatičnog elementa na dva prizmatična elementa I i II s trokutnim presjekom, od kojih se svaki može dalje rastaviti na tri tetraedra $1(pqj,k)$, $2(pqj,m)$ i $3(pmj,n)$

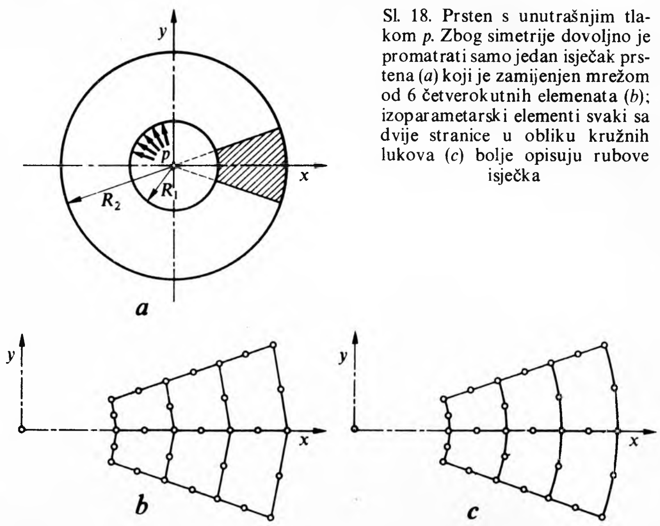


Sl. 16. Proračun nuklearnog reaktora pomoću metode konačnih elemenata. *a* skica konstrukcije reaktora, *b* dvanaestina konstrukcije kao jedna simetrična cjelina, *c* mreža prostornih elemenata u obliku tetraedara i prizmi



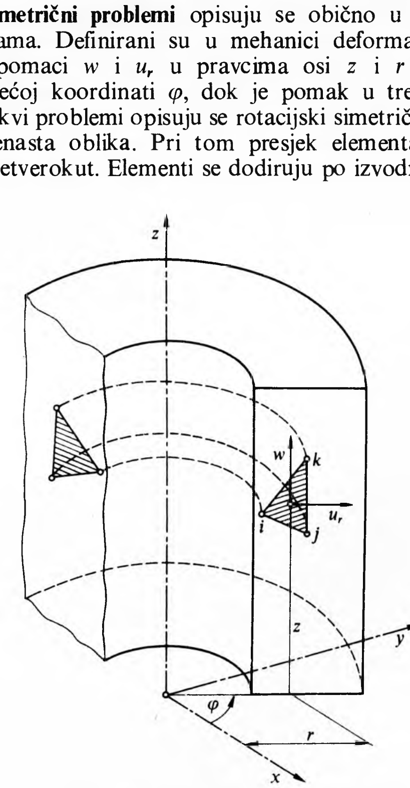
Sl. 17. Neki tipovi izoparametarskih elemenata: *a* u ravnini i *b* u prostoru

Izoparametarski elementi imaju stranice u obliku takvih krivulja koje u matematičkom smislu odgovaraju funkcijama raspodjele pomaka unutar elementa (sl. 17). Tako npr. nekom ravninskom elementu s kvadratnom raspodjelom pomaka unutar elementa odgovara izoparametarski element kojemu su stranice krivulje drugog reda. Takvim elementima, posebno u prostoru, mogu se bolje opisati rubovi tijela koje se proračunava, pa se tako može mnogo smanjiti opseg računanja (sl. 18). Ponekad se stupanj funkcije koja opisuje stranice elementa uzima različit od stupnja polinoma pomaka. To može biti veći (superparametarski elementi) ili manji (subparametarski elementi) stupanj.



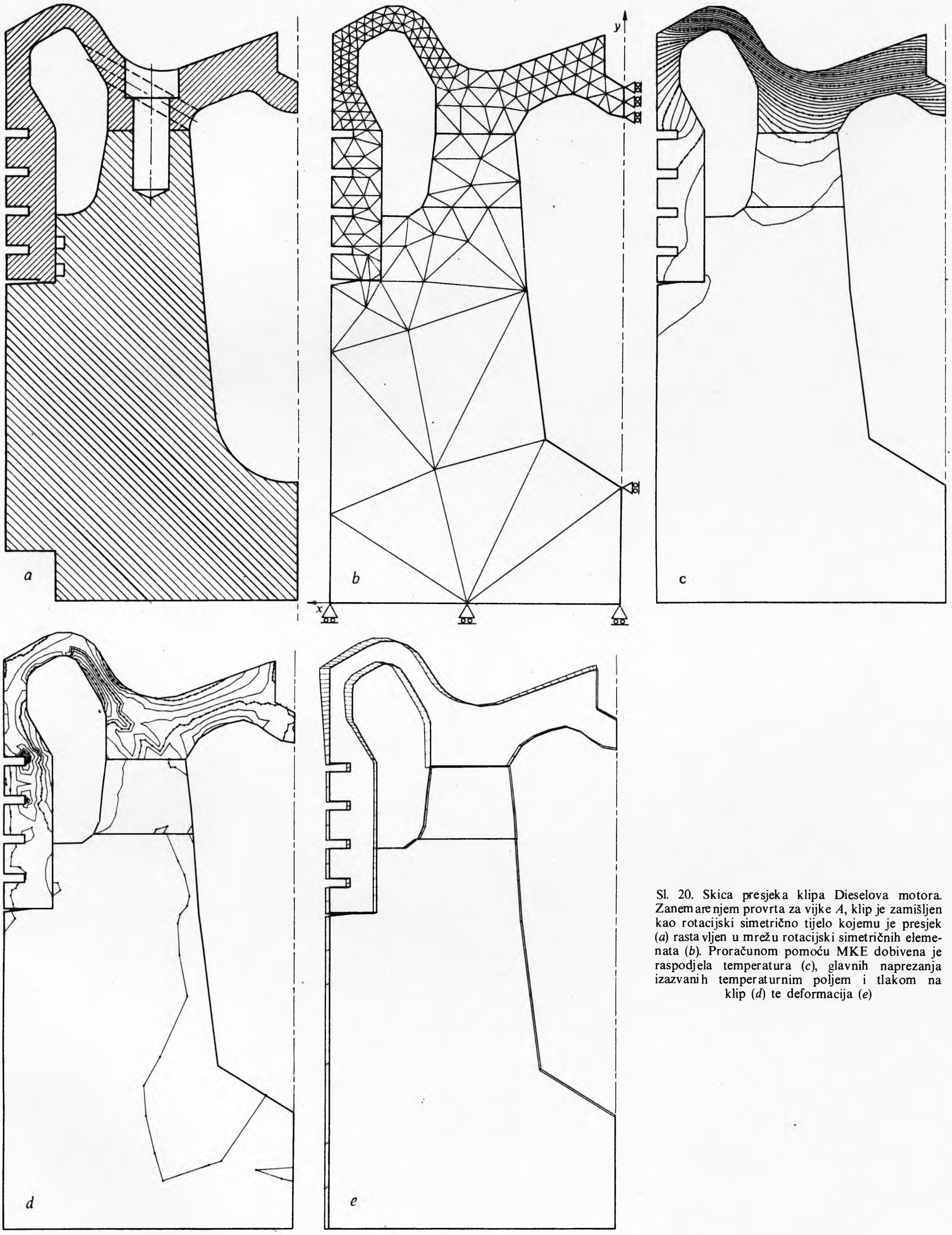
Sl. 18. Prsten s unutrašnjim tlakom *p*. Zbog simetrije dovoljno je promatrati samo jedan isječak prstena (*a*) koji je zamijenjen mrežom od 6 četverokutnih elemenata (*b*); izoparametarski elementi svaki sa dvije stranice u obliku kružnih lukova (*c*) bolje opisuju rubove isječka

Osnosimetrični problemi opisuju se obično u cilindričnim koordinatama. Definirani su u mehanici deformabilnih tijela tako da pomaci w i u_r u pravcima osi z i r (sl. 19) ne ovise o trećoj koordinati φ, dok je pomak u trećem pravcu $u_\varphi = 0$. Takvi problemi opisuju se rotacijski simetričnim elementima prstenasta oblika. Pri tom presjek elementa može biti trokut ili četverokut. Elementi se dodiruju po izvodnicama, koje



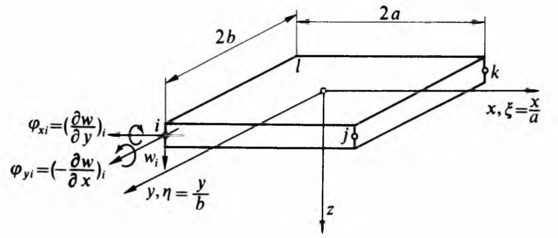
Sl. 19. Rotacijski simetrični element s trokutnim presjekom za osnosimetrične probleme. Pod opterećenjem pomaci su čestica tijela samo u pravcu r i z (pomaci u_r i w)

imaju ulogu čvorova. Kako u cirkularnom smjeru (φ) nema nikakve promjene pomaka, takvi se problemi svode na ravninsku mrežu elemenata u ravnini z, r, koja se u principu rješava na jednak način kao i ravninski problemi (sl. 20).



Sl. 20. Skica presjeka klipa Dieselova motora. Zanemarenjem provrta za vijke A, klip je zamišljen kao rotacijski simetrično tijelo kojemu je presjek (a) rastavljen u mrežu rotacijski simetričnih elemenata (b). Proračunom pomoću MKE dobivena je raspodjela temperatura (c), glavnih naprezanja izazvanih temperaturnim poljem i tlakom na klip (d) te deformacija (e)

Ploče (ravni dijelovi konstrukcija opterećeni silama okomito na ravninu ploče i momentima savijanja) proračunavaju se metodom konačnih elemenata pomoću trokutnih i pravokutnih plošnih elemenata (sl. 21). Osim pomaka w okomito na ravninu ploče, uzimaju se kao nepoznanice u čvorovima još i prve derivacije pomaka $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ (nagibi tangenata na savijenu ploču prema osima x i y). Za pravokutni element sa 4 čvora

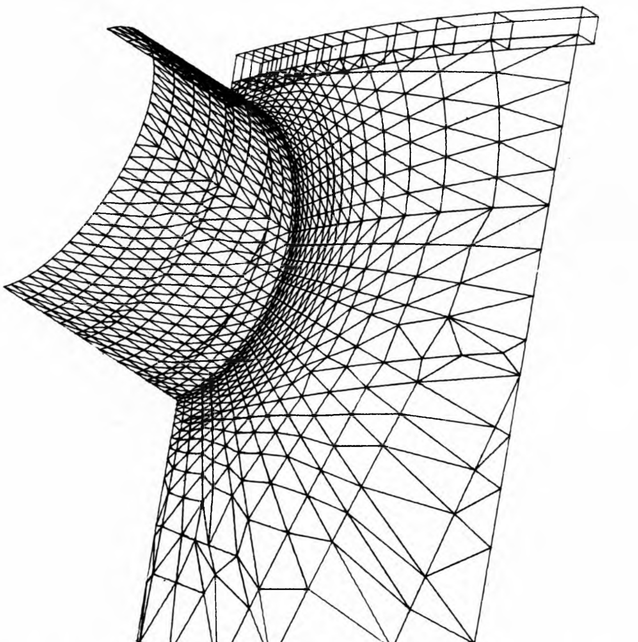


Sl. 21. Pravokutni element za proračun ploča s Descartesovim x, y i bezdimenzijskim koordinatama ξ, η. Komponente vektora δ_i pomaka u čvoru i jesu nagibi tangenata na deformiranu ploču φ_{xi} i φ_{yi} prema osima y i x, te pomak ploče w_i u pravcu osi z

ima 12 stupnjeva slobode elementa, te se za pomak uzima polinom

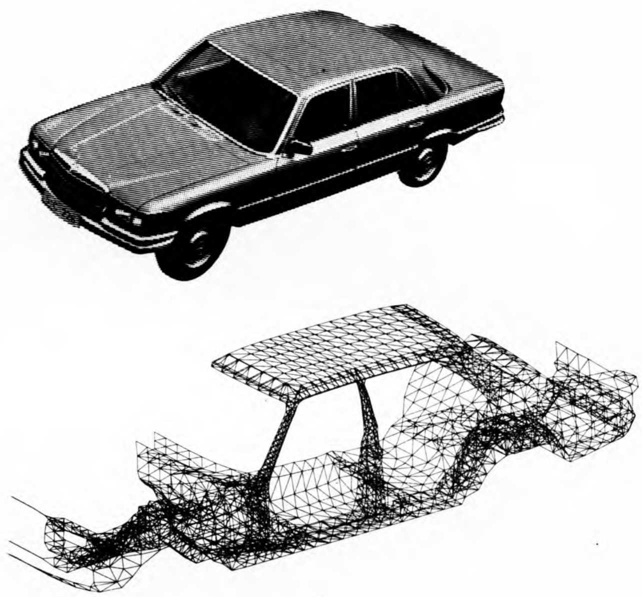
$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (41)$$

Po rubovima elementa pomak w ima kubnu raspodjelu, koja je jednoznačno određena sa dva pomaka u pripadnim čvorovima i sa dva nagiba tangente na funkciju pomaka s obzirom na rub elementa. Prema pomaku takav element je kompatibilan i zadovoljava uvjete konvergencije. Derivacije pomaka $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ imaju po rubovima kvadratnu raspodjelu koja nije jednoznačno određena vrijednostima u dva pripadna čvora. Za dva susjedna elementa po istom rubu može, dakle, raspodjela prvih derivacija pomaka biti različita, te prema tome nema kompatibilnosti među elementima. Većina riješenih problema u praksi pokazuje da unatoč tome takav element daje dovoljno točne rezultate, pa se često upotrebljava u proračunima. Potpuna kompatibilnost elemenata u pločama postiže se uvođenjem dodatne nepoznanice u čvoru $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$, što znatno povećava opseg računanja. Isti problemi kompatibilnosti javljaju se i za druge elemente primijenjene na ploče.



Sl. 22. Prostorni prikaz mreže konačnih elemenata na spoju dviju cilindričnih ljuski

Ljuske (zakrivljeni plošni dijelovi konstrukcija) u općem su slučaju napregnute dvojako: kao ravninski dijelovi konstrukcija (membranska naprezanja) i kao ploče (savijanje) (sl. 22 i 23). Zato se proračun metodom konačnih elemenata može zamisliti kao istodobna primjena ravninskih elemenata i konačnih elemenata koji se upotrebljavaju u proračunima ploča. Nepoznanice su tada tri pomaka u, v i w i derivacije pomaka w po x i y. Spajanjem u jednu cjelinu određuju se matrice pomaka i sila elementa, te se dalje provodi proračun kao i za ostale elemente. Kad se proračunavaju rotacijski simetrične i cilindrične ljuske, opisivanje elemenata je nešto jednostavnije



Sl. 23. Složena mreža konačnih elemenata za proračun karoserije osobnog automobila Mercedes-Benz

LIT.: *G. Strang, G. J. Fix,* An Analisys of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1963. — *O. C. Zienkiewicz,* The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London 1971. — *H. G. Hahn,* Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1975. — *R. H. Gallagher,* Finite-Element-Analysis (prenio iz engleskog K. Hutter). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976. — *L. J. Segerlind,* Applied Finite Element Analysis. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto 1976.

S. Jecić