

Kontrola je opasnih tvari u otpadnim vodama koje se do vode akvakulturama posebno važna, jer postoji opasnost za zdravlje ljudi i životinja. Dosadašnja iskustva s uzgojem riba u ribnjacima pokazuju da nema opasnosti za zdravlje ljudi.

**Upotreba muljeva otpadnih voda.** Ostatak koncentrirane otpadne tvari naziva se muljem. U mulju su upravo oni onečišćivači zbog kojih se otpadna voda razlikuje od čistih voda. Svi muljevi sadrže vrlo visok postotak vode (više od 90%) koja povećava obujam mulja, povisuje troškove dalje preradbe i prijevoza do mjesta ispuštanja. Uklanjanje vode iz mulja jedna je od temeljnih operacija obradbe mulja. Ostali postupci obradbe ovise o porijeklu i vrsti mulja te o njegovoj konačnoj namjeni.

Muljevi industrijskih otpadnih voda često sadrže opasne tvari, pa se ne mogu nekontrolirano ispustiti u okoliš. Osim toga, mnoge se tvari mogu daljom preradbom upotrijebiti kao sekundarne sirovine ili iskoristiti kao gorivo. Kad se otpadne tvari iz mulja ne mogu iskoristiti, mulj se kemijski skrućuje. Dodatkom kemijskih reagensa mulj postaje krut i postojan te se može odlagati u lagunuu. Muljevi kućanskih otpadnih voda sadrže visok postotak organske tvari. Dio tih organskih tvari moguće je iskoristiti za proizvodnju plina anaerobnom digestijom.

Mulj komunalnih otpadnih voda može se iskoristiti za poboljšanje neplodnih zemljišta (tabl. 17). Ispušta se u tekućem obliku, nakon cijeđenja sa sadržajem vode do 50% i u obliku suhog granulata (sadržaj vode do 10%). Primjenjuje se i zajednička obradba i ispuštanje mulja komunalnih otpadnih voda i krutog gradskog otpada (smeća), i to najčešće kao kompost.

Tablica 17  
TIPIČNE KOLIČINE HRANJIVIH SOLI U STABILIZIRANOM MULJU KOMUNALNIH OTPADNIH VODA

	Postotak od ukupne suhe tvari
Organske tvari	30--60
Dušik	1,6--6,0
Fosfor	0,65--1,75
Kalij	2,5

Patogeni mikroorganizmi koje sadrži i obrađeni mulj opasni su za zdravlje ljudi i životinja. Često je potrebna prethodna dezinfekcija mulja pasterizacijom i pomoću vapna ili klora. Jedino je sušeni mulj (granulat) potpuno siguran u higijenskom pogledu.

Mulj komunalnih otpadnih voda ponekad sadrži teške metale (tabl. 18) i druge opasne tvari u koncentracijama koje su opasne za biljke, životinje i ljude. To se pojavljuje kad se nedovoljno kontroliraju industrijske otpadne vode koje se dovođe na komunalni uređaj za čišćenje. Sadržaj je teških metala i drugih opasnih tvari u mulju bitan kad se odlučuje o odlaganju i upotrebi mulja.

Tablica 18  
KONCENTRACIJA NEKIH METALA U MULJU KOMUNALNIH OTPADNIH VODA

Metal	Koncentracija, mg/L
Kadmij	do 1100
Kobalt	do 800
Krom	22--30000
Bakar	45--16000
Živa	0,1--89
Mangan	100--8800
Nikal	do 2800
Olovo	80--26000
Cink	51--28360

Upotreba mulja u poljoprivredi ovisi, osim o svojstvima mulja, i o geološkim, pedološkim i klimatskim prilikama te o vrsti biljke koja će se muljem prihranjivati. Kad se mulj upotrebljava za poboljšanje plodnosti zemljišta, dopuštena masa mulja po jedinici površine računa se prema količini dušika što ga biljke mogu potrošiti tijekom godine. Kad postoji višak

dušika, postoji opasnost od procjeđivanja nitrata u podzemnu vodu.

Mulj se može upotrijebiti kao gorivo, o čemu je bilo riječi kad su opisivani toplinski postupci čišćenja voda.

LIT.: N. L. Nemerow, Liquid Waste of Industry, Theories, Practices and Treatment. Addison-Wesley Publishing Company, Ontario 1971. — Lehr- und Handbuch der Abwassertechnik. Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, München, Düsseldorf 1973. — P. A. Vesilind, Treatment and Disposal of Wastewater Sludges. Ann Arbor Science Publishers, Michigan 1974. — H. W. Gehr, J. I. Bregman, Handbook of Water Resources and Pollution Control. Van Nostrand Reinhold Company, New York 1976. — R. L. Culp, G. M. Wesner, G. L. Culp, Handbook of Advanced Wastewater Treatment. Van Nostrand Reinhold Company, New York 1978. — A. James: Mathematical Models in Water Pollution Control. John Wiley and Sons, New York 1978. — R. A. Grace, Marine Outfall Systems. Planning, Design, and Construction. Prentice-Hall, London 1978. — Metcalf and Eddy, Wastewater Engineering: Treatment, Disposal, Reuse. McGraw-Hill, New York 1979. — D. W. Sundstrom, H. E. Klei, Wastewater Treatment. Prentice-Hall, London 1979. — D. Scavia, A. Robertson, Perspectives on Lake Ecosystem Modeling. Ann Arbor Science Publishers, Michigan 1979. — Water Treatment Handbook. Degremont, Rueil-Malmaison 1979. — E. B. Welch, Ecological Effects of Wastewater. Cambridge University Press, Cambridge 1980. — Metcalf and Eddy, Wastewater Engineering: Collection and Pumping of Wastewater. McGraw-Hill, New York 1981. — G. M. Fair, J. C. Geyer, D. A. Okun, Elements of Water Supply and Wastewater Disposal. John Wiley, New York-London 1981.

S. Tedeschi

## OTPORNOST GRAĐEVNIH MATERIJALA,

tehnička disciplina koja proučava ponašanje materijala i od njih načinjenih konstruktivnih elemenata pod djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila. Upotrebljava se i naziv *nauka o čvrstoći* (v. *Nauka o čvrstoći*, TE 9, str. 277). U toj se disciplini proučavaju mehanička svojstva materijala, analiziraju naprezanja i deformacije, sustavno se razvrstavaju idealni i realni materijali, zatim se ispituju takvi materijali i analiziraju konstruktivni elementi.

Jedan je od osnovnih zadataka konstruktora određivanje naprezanja i deformacija u okolišu proizvoljne točke promatranog konstruktivnog sustava ako je poznat oblik sustava, način oslanjanja, vanjsko opterećenje i mehaničke karakteristike materijala, kako bi se moglo prići racionalnom dimenzioniranju, provjeri postojećih dimenzija ili ocjeni stabilnosti. Problem se svodi na određivanje dvaju tenzorskih polja, tenzora deformacije i tenzora naprezanja, te njihovih međusobnih odnosa i utjecaja. Deformacije i naprezanja određeni su geometrijski jednoznačno, bez obzira na strukturu i fizikalna svojstva tijela koje je podvrgnuto deformaciji. Da bi se postavljivi problem riješio u cjelini, potrebno je uspostaviti veze između naprezanja i veličina kojima je opisana deformacija u okolišu promatrane točke tijela. Te veze zavise od mehaničkih karakteristika materijala.

*Reologija* je tehnička disciplina unutar koje se analizira deformacija tijela pod utjecajem vanjskih sila. Naziv reologija potječe od grčkog korijena *ῥέω* r $\acute{e}$ o *teći*, tj. reologija je znanost o tečenju (materijala); točnije, reologija je znanost o mehaničkim svojstvima materijala. Ona se, kao tipična tehnička disciplina, oslanja na nekoliko temeljnih znanstvenih i tehničkih disciplina (mekanika kontinuuma, fizika, kemija, geologija, tehnologija materijala), a u svojoj daljoj razradi usmjerava se na proučavanje svojstava pojedinih karakterističnih materijala, tako da se razvila reologija betona, reologija čelika, reologija polimernih materijala, reologija drva, reologija bitumena i asfalta, reologija tla i dr.

Osnovni je mehanički model u mehanici kontinuiranih ili neprekidnih sredina idealan kontinuum, pa je to osnova i za istraživanje u reologiji, osobito u onom njezinu dijelu koji se naziva *makroreologija*, gdje se svojstva materijala promatraju iz makroaspekta, ne ulazeći dublje u strukturu tvari, ni u njena fizikalno-kemijska svojstva.

U reologiji se istražuje i analizira ponašanje različitih materijala pod opterećenjem, osobito s obzirom na njihovu graničnu otpornost i nosivost.

S obzirom na složenost pojava, pri deformaciji tijela pod opterećenjem idealiziraju se stvarni fizikalni procesi. Tako se, propisujući neke analitičke veze između deformacije i naprezanja, definiraju različiti idealni materijali i različita *idealna tijela* kakvih nema u prirodi, ali kojima svojstva pod određenim uvjetima opterećenja i ostalih vanjskih utjecaja približno odražavaju ponašanje realnih materijala i tijela. To je osnova za proučavanje mehaničkih svojstava materijala i u građevinarstvu, osobito u vezi sa složenijim utjecajima gdje se kao parametri,

osim mehaničkih opterećenja (statičkih i dinamičkih), javljaju još i vrijeme i klima (temperatura, vlaga i dr.).

Klasična mehanika kontinuuma bavila se najprije sa dva takva idealna materijala, *idealno elastičnim* (ili Hookeovim) materijalom i *viskoznom* (ili Newtonovim) fluidom, koji su postali osnova za posebne znanstvene discipline, *teoriju elastičnosti i mehaniku fluida*. Tek kasnije se počeo proučavati i treći osnovni materijal, *idealno plastičan materijal* na kojem se osniva *teorija plastičnosti*. Njegova je idealizacija mnogo složenija jer se radi o više idealnih materijala sličnih svojstava kojima je osnovni predstavnik *idealno plastičan* ili *Saint Venantov materijal*.

Pogodnim kombiniranjem svojstava navedenih idealnih materijala, koji se nazivaju i osnovnim materijalima, dobivaju se različiti oblici idealiziranih složenih materijala koji se pokušavaju što bolje približiti svojstvima stvarnih materijala. Tako se dolazi do pojmova *viskoelastičnog*, *viskoplastičnog*, *elastoplastičnog*, *elastoviskoplastičnog* materijala itd., sa širokim mogućnostima uočavanja različitih karakterističnih fenomena koji su važni u praktičnim tehničkim primjenama.

Potrebe racionalnog utroška materijala u građevinarstvu zahtijevaju veoma precizno poznavanje njegovih svojstava u uvjetima svakodnevnih primjena i u posebnim uvjetima kao što su dinamička opterećenja, termički utjecaji, promjene svojstava tokom vremena i dr., a isto tako i s obzirom na prirodu sredine (homogena ili nehomogena, izotropna ili anizotropna, kontinuirana ili diskontinuirana), kako bi se ispravno ocijenila njihova otpornost u toku eksploatacije konstrukcije. U tom smislu primjenjuju se različite metode ispitivanja materijala (v. *Ispitivanje građevnih materijala i konstrukcija*, TE 6, str. 551), gdje se kao veoma važan podatak traži zavisnost između deformacije i naprezanja na *pokusnim tijelima* koja su podvrgnuta karakterističnim jednostavnim oblicima opterećenja (aksijalno naprezanje prizmatične grede ili kocke, torzija tanke cijevi i dr.). Takva se pokusna tijela ispituju i s obzirom na plastično tečenje ili lom, zamor, oscilatorna opterećenja, stohastički promjenljiva opterećenja, temperaturne utjecaje i slično.

Radi lakšeg razumijevanja pri opisivanju mehaničkih svojstava i otpornosti materijala te metodâ njihovih ispitivanja, u ovom su članku obrađeni samo informativno, bez izvođenja, neki osnovni pojmovi i formule iz analize deformacije i naprezanja, a zatim i veze između deformacije i naprezanja, s iscrpnijom analizom o veličinama koje opisuju takve veze u karakterističnim vrstama osnovnih i složenih materijala. Zatim se govori o analizi nosivosti materijala i konstrukcija u elastičnom i u neelastičnom području.

U članku se upotrebljavaju, gdje god je to pogodno, tenzorske oznake (tj. oznake pomoću indeksa) vezane za kartezijski koordinatni sustav  $Ox_1x_2x_3$ . To je osobito pogodno, jer su deformacija i naprezanje tenzorske veličine opisane simetričnim tenzorima drugog reda, pa se za takvu analizu može direktno upotrijebiti niz poznatih svojstava simetričnih tenzora drugog reda (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 176).

### OSNOVNI POJMOVI ANALIZE DEFORMACIJA I NAPREZANJA

**Analiza deformacije.** Deformirana konfiguracija napregnutog tijela može se odrediti na dva ekvivalentna načina: određivanjem vektora pomaka  $u_i$  svake točke tijela i određivanjem deformacije u svakoj točki napregnutog tijela, tj. određivanjem komponenata tenzora deformacije  $\epsilon_{ij}$ . Te komponente imaju geometrijsko značenje; to su *dilatacije* (specifične promjene dužina u određenim smjerovima) i *klizanja* (promjene prvobitno pravih kutova).

Deformacije se mogu opisivati dvojako, pomoću prostornih i pomoću materijalnih koordinata (koordinata vezanih za točku učvršćenu u prostoru, odnosno koordinata vezanih za deformirano tijelo). Međutim, ako je deformacija *infinitesimalna*, što je u građevnoj praksi najčešće i ostvareno, tada se zanemaruju male veličine drugog i viših redova, pa se gubi razlika između tih dvaju načina opisivanja. Veze između deformacijskih veličina tada su linearizirane, pa se taj postupak zove *geometrijska linear-nost*. Takav postupak zadovoljava većinu praktičnih problema građevinarstva. Izuzetno, za veoma vitke i tanke konstrukcije i u analizi nekih posebnih problema obvezna je primjena teorije *konačnih deformacija*, odnosno primjena nelinearne teorije deformacija.

Stanje deformacije u proizvoljnoj točki tijela potpuno je određeno komponentama tenzora deformacije. *Tenzor deforma-*

*cije* simetričan je tenzor drugog reda kojemu matrice u tenzorskim i tehničkim oznakama imaju oblik

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}; [D] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdje dijagonalni elementi označuju dilatacije, a ostali klizanja.

Glavne dilatacije (tj. ekstremne vrijednosti dilatacija)  $\epsilon_i$  ( $i = 1,2,3$ ) dobivaju se kao rješenje kubne jednadžbe

$$\epsilon^3 - I_1(\epsilon)\epsilon^2 + I_2(\epsilon)\epsilon - I_3(\epsilon) = 0, \quad (2)$$

gdje su koeficijenti  $I_1(\epsilon)$ ,  $I_2(\epsilon)$  i  $I_3(\epsilon)$  glavne invarijante stanja deformacije određene u sustavu glavnih osi izrazima:

$$I_1(\epsilon) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \quad I_2(\epsilon) = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1, \quad (3)$$

$$I_3(\epsilon) = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3.$$

Veličine  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  jesu glavne dilatacije.

Ako je deformacija infinitesimalna, prva invarijanta stanja deformacije jednaka je kubnoj dilataciji, tj. specifičnoj promjeni volumena

$$e = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V} \approx \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \equiv \epsilon_{ii}. \quad (4)$$

Osim glavnih invarijanata često se upotrebljavaju i izvedene invarijante definirane izrazima:

$$\bar{I}_1(\epsilon) = I_1(\epsilon) = \epsilon_{ii} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3,$$

$$\bar{I}_2(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}\epsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2), \quad (5)$$

$$\bar{I}_3(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\epsilon_{ki} = \frac{1}{3}(\epsilon_1^3 + \epsilon_2^3 + \epsilon_3^3)$$

(upotrebljava se Einsteinova konvencija o zbrajanju, tj. da ponovljeni indeks označuje zbrajanje po tri kartezijske koordinate). Te se invarijante nazivaju i momentima tenzora  $\epsilon_{ij}$ .

Invarijante su simetrične funkcije svojih glavnih vrijednosti, pa je ta činjenica važna pri analizi izotropnog kontinuuma, osobito u teoriji plastičnosti.

Svaki simetrični tenzor, pa tako i tenzor deformacije, može se razložiti u svoj *sferni* i *devijatorski* dio:

$$\text{sferni dio } \epsilon_{ij}^{sf} = \frac{1}{3} I_1(\epsilon)\delta_{ij}, \quad (6)$$

$$\text{devijatorski dio } \epsilon_{ij}^{dev} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\epsilon)\delta_{ij},$$

gdje je  $\delta_{ij}$  Kroneckerov simbol definiran izrazom

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \quad \text{tj. } [\delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sferni dio tenzora deformacije odnosi se na dio deformacije kad postoji samo promjena volumena bez promjene oblika, a devijatorski na deformaciju kad postoji samo promjena oblika bez promjene volumena. To je razlaganje važno pri analizi mehaničkih svojstava materijala.

Često se upotrebljava pojam intenziteta devijatora deformacije. To je veličina definirana formulom

$$(\bar{\epsilon})^2 = \frac{4}{3} \bar{I}_2(\epsilon), \quad (7a)$$

gdje je  $\bar{I}_2(\epsilon)$  druga izvedena invarijanta devijatorskog dijela tenzora deformacije. Tada slijedi da je iznos intenziteta devijatora deformacije

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7b)$$

Za neke probleme mehanike neprekidnih sredina uvodi se i tenzor brzine deformacije  $d_{ij}$  definiran izrazom

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (8)$$

gdje je  $v_i$  vektor brzine točke, a zarezom se u indeksu označuje derivacija po koordinati. I taj je tenzor simetrični tenzor drugog reda. Kad je deformacija infinitezimalna, može se tenzor brzine deformacije aproksimirati tenzorom brzina komponentnih deformacija  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ , tj.

$$d_{ij} \approx \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (9)$$

**Naprezanje.** Ako je u promatranom dijelu tijela, podvrgnutom djelovanju vanjskih sila, proizvoljno područje ograničeno zamišljenom zatvorenom površinom  $S$ , tada se pretpostavlja da u svakoj točki površine  $S$ , kojoj je  $n_i$  vanjska normala, postoji konačan vektor naprezanja  $t_{(m)i}$ . Područje tijela pod utjecajem vanjskih i unutrašnjih sila  $t_{(m)i} dA_{(m)}$  nalazi se u ravnoteži.  $dA_{(m)}$  elementarni je djelić površine  $S$  u promatranoj točki. Za tako definirano vektorsko polje  $t_{(m)i}$  pretpostavlja se da je zadano neprekidnom funkcijom koordinata. Naprezanja se obično definiraju s obzirom na nedeformiranu konfiguraciju tijela.

U proizvoljnoj točki napregnutog tijela za svaku zamišljenu presječnu ravninu postoji, dakle, pripadni vektor naprezanja, tako da je u svakoj točki tijela pridružen skup od beskonačno mnogo vektora naprezanja kojima je definirano stanje naprezanja u toj točki. Ono je određeno vektorima naprezanja za tri presječne ravnine kroz točku. Slijedi da je i stanje naprezanja tenzorska veličina definirana simetričnim tenzorom drugog reda. Matrice tog tenzora, pisane u tenzorskim i tehničkim oznakama, glase

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Dijagonalni članovi predstavljaju normalna, a izvandijagonalni tangencijalna naprezanja.

Zbog simetrije matrice tenzora naprezanja slijedi da su naprezanja i deformacija određeni sa šest međusobno nezavisnih skalarnih podataka.

Glavna naprezanja  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), tj. ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja, dobivaju se slično, kao i glavne dilatacije, iz jednadžbe

$$\sigma^3 - I_1(\sigma)\sigma^2 + I_2(\sigma)\sigma - I_3(\sigma) = 0, \quad (11)$$

gdje su  $I_1(\sigma)$ ,  $I_2(\sigma)$  i  $I_3(\sigma)$  tri invarijante naprezanja definirane slično kao i invarijante deformacije.

Tenzor naprezanja može se također razložiti u svoj *sferni* i *devijatorski* dio, pa je

$$\sigma_{ij}^{sf} = \frac{1}{3} I_1(\sigma) \delta_{ij}; \quad \sigma_{ij}^{dev} = \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) \delta_{ij}, \quad (12)$$

Razlaganje tenzora deformacije i naprezanja u sferne i devijatorske dijelove primjenjuje se pri ispitivanju reoloških svojstava materijala.

Intenzitet tenzora naprezanja određen je izrazom

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Kad je deformacija infinitezimalna, uvode se i komponente tenzora  $\dot{\sigma}_{ij}$ , čime su naznačene brzine prirasta komponenata naprezanja.

Za određivanje naprezanja i deformacije u nekoj točki tijela potrebno je promatrati i veze između tih dvaju tenzorskih polja, tj. promatrati ponašanje materijala pod opterećenjem.

## VEZE IZMEĐU DEFORMACIJE I NAPREZANJA

Ponašanje konstruktivnih sustava pod opterećenjem zavisi od mehaničkih karakteristika materijala, koje ovise o strukturi i sastavu materijala. Moguća su i različita razvrstavanja materijala. Prema strukturi, oni se mogu razvrstati na amorfne, kristalne i kristalaste materijale. *Amorfni materijali* (guma, staklo, smola i dr.) pokazuju u svim pravcima ista mehanička svojstva, tj. oni se pod opterećenjem u svim pravcima jednako ponašaju. To njihovo svojstvo zove se *izotropija*. Za razliku od toga kristali imaju, zbog svoje specifične molekularne strukture, u različitim pravcima različita mehanička svojstva; oni su *anizotropni*. Poseban oblik anizotropije pokazuju neki organski materijali (drvo, koža) kojima su molekule orijentirane u pravilno raspoređenim vlaknima, zbog čega se različito ponašaju u smjeru vlakana i okomito na njih. *Kristalasti materijali*, iako građeni od veoma sitnih kristala, ponašaju se, gledano iz makroaspekta, kao izotropni. Primjer je za takve materijale čelik.

Prema homogenosti materijali se mogu razvrstati na *homogene* i *nehomogene*. Homogeni materijali imaju u svim svojim točkama ista mehanička svojstva (npr. čelik, drvo), a nehomogeni to nemaju (npr. beton, spregnute konstrukcije i dr.).

Treća je mogućnost razvrstavanje materijala na *žilave* i *krhke*. *Žilavi* su materijali (npr. guma) oni kojima su potrebne velike deformacije prije nego što se slome. *Krhki* materijali (staklo, opeka) lome se naglo, bez znatnije prethodne deformacije.

Većina navedenih svojstava može se analizirati na pokusnim tijelima koja se podvrgavaju karakterističnim oblicima opterećenja u uređajima za ispitivanje materijala. Ta ispitivanja mogu biti kratkotrajna ili dugotrajna, statička ili dinamička. Neki materijali mijenjaju svoja mehanička svojstva s vremenom; u tu grupu spadaju viskoelastični materijali. Osim toga i temperaturne promjene utječu na ponašanje materijala pod opterećenjem. Svi ti fenomeni ispituju se na pokusnim tijelima, služeći se pri tom često i metodama statističke analize.

Većina metoda za ispitivanje mehaničkih svojstava materijala provodi se pri jednoosnom stanju naprezanja (vlak ili tlak), tražeći pri tom vezu između naprezanja i dilatacije (*radni dijagram materijala*) pri promjeni intenziteta opterećenja sve do loma. Ta veza je osnovni podatak za razvrstavanje materijala u različite kategorije idealnih materijala tako zamišljenih da dovoljno točno odražavaju ponašanje stvarnih materijala, a da im je matematička obradba dovoljno jednostavna. Tako se ispituju statička i dinamička opterećenja, pa se tada stvara osnova za ocjenu otpornosti, odnosno granične nosivosti građevnih materijala.

Prije prijelaza na definiciju veza između deformacije i naprezanja potrebno je napomenuti neka osnovna reološka svojstva građevnih materijala.

*Elastičnost* je svojstvo onih materijala koji poslije prestanka djelovanja vanjskih sila zauzmu u potpunosti svoj prvobitni oblik. Za opisivanje tog svojstva upotrebljava se tenzor deformacije  $\varepsilon_{ij}$  koji daje mjeru deformacije od nekog početnog stanja, nezavisno od puta i brzine deformacije.

*Viskoznost* je svojstvo onih materijala koji mogu pretrpjeti proizvoljnu trajnu deformaciju pod uvjetom da je ona dovoljno spora. U obzir dolazi tenzor brzine deformacije  $d_{ij} \approx \dot{\varepsilon}_{ij}$  koji zavisi samo od trenutnog stanja, a ne zavisi i od nekog prethodnog stanja.

*Plastičnost* je svojstvo onih materijala koji u određenim uvjetima dobivaju trajnu deformaciju. Takva istaknuta stanja naprezanja karakteriziraju se uvjetom plastičnosti koji je vrlo važan pri opisivanju svojstva plastičnosti.

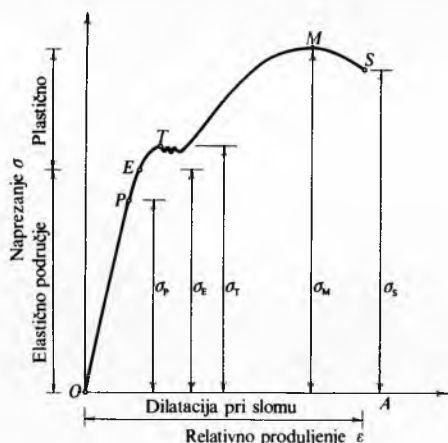
*Realni materijali* posjeduju više ili manje sva ta svojstva, pa su u tom smislu realni materijali složeni. Osnovni idealni materijali jesu oni koji posjeduju samo jedno od navedenih svojstava.

Reološka svojstva materijala mogu se ispitivati promatrajući veze između tenzora brzine deformacije, tenzora deformacije, tenzora brzine prirasta naprezanja i tenzora naprezanja, i to posebno za sferne, a posebno za devijatorske dijelove tih ten-

zora. Veza između sfernih dijelova tih tenzora zove se *volu-metrijska jednadžba* (jer daje vezu između srednjega normalnog naprezanja i volumenske dilatacije), a veza između devijatorskih dijelova *distorzijska jednadžba*, jer se odnosi na promjenu oblika bez promjene volumena.

U daljim razmatranjima, ako nije ništa posebno naglašeno, pretpostavljat će se da je materijal homogen i izotropan, te da su veze između deformacije i naprezanja linearne (pretpostavka *fizikalne linearosti*). Isto tako bit će pretpostavljeno da postoji i geometrijska linearost.

**Eksperimentalni podaci o vezi između dilatacije i naprezanja.** Veze između opterećenja i duljinske deformacije (produljenja) ispituju se na ravnom štapu standardnog oblika koji je podvrgnut aksijalnom naprezanju (vlakom ili tlakom). Da bi se dobili uopćeni rezultati, nezavisni od površine poprečnog presjeka pokusnog štapa, računa se s reduciranim bezdimenzijskim veličinama: umjesto sile  $P$  uvodi se naprezanje  $\sigma = P/F_0$ , a umjesto produljenja  $\Delta l_0$  relativno produljenje ili dilatacija  $\varepsilon = \Delta l_0/l_0$ . Kad je štap zategnut, dilatacija je pozitivna, kad je pritisnut, ona je negativna. Na sl. 1 prikazan je tipičan dijagram naprezanje—dilatacija koji odgovara, npr., čeliku.



Sl. 1. Dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije.  $\sigma_P$  granica proporcionalnosti,  $\sigma_E$  granica elastičnosti,  $\sigma_T$  granica tečenja,  $\sigma_M$  čvrstoća materijala,  $\sigma_S$  naprezanje pri lomu

Točka  $P$  je granica do koje je dilatacija proporcionalna naprezanju (fizikalna linearost), a točka  $E$  je granica elastičnosti. Između točaka  $P$  i  $E$  materijal je nelinearno elastičan. Kod naprezanja  $\sigma_T$  započinje plastično tečenje materijala. Točka  $M$  predstavlja čvrstoću materijala, a točka  $S$  lom. Dio krivulje od  $T$  do  $M$  predstavlja fazu tzv. *očvršćenja* materijala. Iza točke  $P$  dilatacije rastu brže nego naprezanja. Linija  $\varepsilon-\sigma$  polako se savija, a pri rasterećenju se pojavljuju dosta velike, mjerljive trajne (plastične) deformacije.

Nakon dostizanja granice  $\sigma_T$  dilatacije rastu veoma brzo bez povećanja naprezanja. Kad je naprezanje vlačno, to se naprezanje naziva granicom velikih izduženja, a kad je naprezanje tlačno, granicom gnječenja. Za čelik Č.0361 iznosi  $\sigma_T = 240$  MPa, a za čelik Č. 0561 iznosi  $\sigma_T = 360$  MPa. Deformacije koje se pri tom javljaju jesu trajne, a štap je deformiran plastično. Kako takve deformacije npr. čeličnih konstrukcija nisu dopuštene, procjenjuje se pouzdanost čelične konstrukcije prema granici tečenja, a ne prema lomu. Plastična deformacija čelika je ograničena, dok je betona neograničena.

*Čvrstoća materijala*  $\beta = \sigma_M$  najveće je naprezanje koje se pri eksperimentu s pokusnim štapom uopće može pojaviti. Lom štapa nastupa pri nešto nižem naprezanju  $\sigma_S$ . Čvrstoća materijala određuje se prema najvećem opterećenju  $P_{max}$

$$\beta = \frac{P_{max}}{F_0} \quad (14)$$

*Dilatacija pri lomu*  $\delta$  bitno zavisi od površine poprečnog presjeka štapa prema mjernoj duljini štapa. Kratki, standardni,

okrugli čelični štapovi imaju mjernu duljinu  $l = 5d_0$ , a dugački štapovi  $l = 10d_0$ . Suglasno s tim dilatacije se loma označuju sa  $\delta_5$  i  $\delta_{10}$ . Građevni čelik Č.0361 treba, npr., imati minimalnu dilataciju loma  $\delta = 0,25$ . Dilatacija loma visokovrijednih čelika je manja.

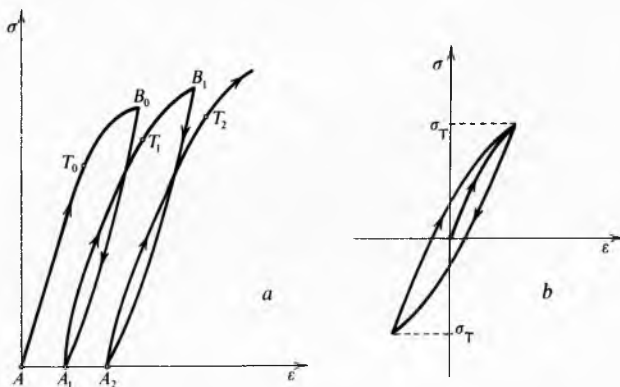
Kad se materijal ispituje na tlak, pokusni se štap tlači i na kraju zgnječi, pa se stoga govori o granici gnječenja.

Ako se površina *OETMSA* dijagrama na sl. 1 pomnoži sa  $F l_0$ , dobiva se produkt sile i puta, pa je to mjera za rad koji karakterizira sposobnost materijala za rad tokom deformacije, a može se tretirati i kao mjera za žilavost materijala. Ako je ta površina veća, materijal je bolji, a veća je i njegova otpornost prema udarnim opterećenjima.

Materijal koji prije loma ima veliku deformaciju naziva se *žilavim*. Ako lom nastane iznenada kad su dilatacije veoma malene, materijal je *krhak*. On je osjetljiv prema udaru i prema oscilatornim opterećenjima (npr. lijevano željezo, beton, kamen). Krhki materijali nemaju izraženu ni granicu velikih izduženja ni granicu gnječenja, a isto tako imaju i vrlo mali rad tokom deformacije do loma.

Krhkost nastupa i u čelika ako se on u hladnom stanju podvrgne naprezanju iznad granice kidanja ili gnječenja.

Štap se može slomiti i ponavljanim opterećivanjem preko granice velikih izduženja. Ako se štap optereti iznad granice velikih izduženja  $T_0$  do  $B_0$  (sl. 2a), zatim rastereti ( $A_1$ ) i opet optereti, tada će ponovljena vrijednost granice velikih izduženja  $T_1$  biti viša od  $T_0$ . Ta pojava i još neke pojave vezane s tim nazivaju se *Bauschingerovim efektom*. Tada se pojavljuje utjecaj prethodne deformacije. Kada je jednom materijal plastično deformiran, njegovo dalje ponašanje ne može se predvidjeti ako se ne zna prethodna njegova deformacija. U novom je ciklusu  $T_2$  opet više od  $T_1$ . S takvim povišivanjem granice velikih izduženja često se pojavljuje i nepoželjno smanjivanje dilatacije pri kidanju, tj. materijal postaje krhkiji. Krivulja koja se stvara uzastopnim opterećivanjem i rasterećivanjem do  $\pm\sigma_T$  zove se *histereza elastičnosti* (sl. 2b). Ona nastaje zbog zaostajanja dilatacije za naprezanjem, pa površina koju ona omeđuje mjera je za onaj dio mehaničke energije koji se u jednom ciklusu pretvara zbog unutrašnjeg trenja u toplinu.



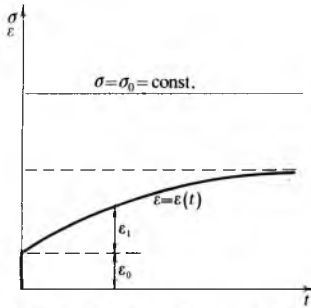
Sl. 2. Dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije pri ponovljenom opterećivanju. a postupno dovođenje do loma, b histereza elastičnosti

Ako se čelik koji je bio opterećen iznad granice velikih izduženja, a zatim duže vremena držan na miru, opet opterećuje, tada je granica velikih izduženja  $T_1$  bitno viša, a dilatacija loma postaje manja. Ta se pojava zove *starenje* čelika.

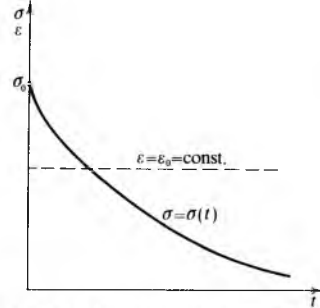
U nekim materijalima javljaju se i neki drugi efekti zavisni od vremena. To su *zaostala* (ili *naknadna*) *elastičnost* i *relaksacija naprezanja*. Zaostala se elastičnost pojavljuje kad se djelovanjem opterećenja ili rasterećenja odmah ne pojavljuje konačna dilatacija. Uz konstantno naprezanje dilatacija se povećava kontinuirano i asimptotski teži nekoj graničnoj vrijednosti (sl. 3). Taj se fenomen naziva i *puzanjem*. U nekim se materijalima, međutim, uz konstantnu dilataciju postepeno smanjuje naprezanje. Tada od početne vrijednosti  $\sigma_0$  naprezanje pada asimptotski prema vrijednosti nula; ta se pojava zove *relaksacija na-*

prezanja (sl. 4). Pojave naknadne elastičnosti i relaksacije napreznja karakteristična su svojstva viskoelastičnih materijala.

Većina građevnih materijala nema pri običnim temperaturama tako veliku naknadnu dilataciju da bi, kad je eksperiment kratkotrajan, nastupio lom pri napreznju koje je bitno manje od vrijednosti napreznja koje odgovara lomu. Napreznje koje odgovara naknadnoj dilataciji bez loma, kad  $t \rightarrow \infty$ , zove se *trajna čvrstoća materijala*, i ona se ne može dobiti jednim pokusom kao napreznje koje odgovara lomu, već serijom pokusa s istim materijalom.



Sl. 3. Uz konstantno napreznje relativna dilatacija s vremenom poprima neku konačnu vrijednost



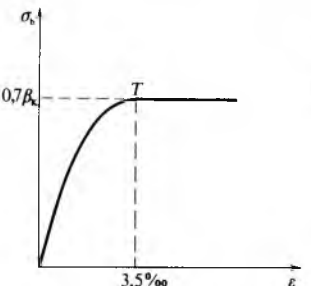
Sl. 4. Uz konstantnu relativnu dilataciju u nekim materijalima s vremenom opada napreznje

Puzanje se u statičkom proračunu za beton, osobito za prednapregnuti, mora uzimati u obzir, za čelik rjeđe. Kad su računi točniji, mora se isto tako razlikovati nelinearno elastična dilatacija od tečenja; na krivulji  $\epsilon-\sigma$  (sl. 1) to je dio PE.

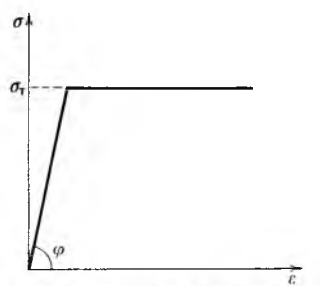
Zavisnost između dilatacije i napreznja armiranog betona. Za armirani beton moraju se veze između napreznja i dilatacije odrediti posebno za beton, a posebno za čelik. Krivulja  $\epsilon-\sigma$  (radni dijagram) za beton zavisi od mnogih utjecaja, no prema suvremenim propisima u uvjetima graničnog opterećenja mjerodavan je *parabolično-pravokutni dijagram* (sl. 5). Ordinata tjemena T parabole ima vrijednosti  $0,7\beta_K$  (70% čvrstoće pokusne kocke od betona, tj. 70% od marke betona), a apscisa  $\epsilon = 3,5\text{‰}$ . U toj fazi beton teče neograničeno. Oblik stvarnog radnog dijagrama za beton zavisi i od trajanja opterećenja. Prema takvu dijagramu beton je elastoplastično tijelo, s nespriječenim deformacijama u plastičnom području. Dijagrami  $\epsilon-\sigma$  slični su za sve marke betona, a jedan iz drugog proizlaze promjenom mjerila za ordinate  $\sigma_y$ .

Deformacijsko ponašanje čelika kad se dimenzioniraju armiranobetonske konstrukcije prikazuje se *bilinearnim dijagramom dilatacija—napreznje* (sl. 6). Prvi dio dijagrama odgovara idealno elastičnom tijelu s modulom elastičnosti  $\tan \varphi = E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa od  $\sigma = 0$  do  $\sigma = \sigma_T$ , a zatim se nastavlja kao za idealno plastično tijelo (paralela s apscisnom osi), od  $\epsilon_T = \sigma_T/E$  do  $\epsilon = 5\text{‰}$ . Dilatacija veća od  $5\text{‰}$  ( $= 5\text{ mm/m}$ ) ne smije se pri izračunavanju veličina za tečenje uzimati u obzir. Pretpostavlja se da tada počinje otkazivanje konstrukcije, iako bi pri lomu u slabo armiranim elementima mogle nastupiti i bitno veće dilatacije.

Prema usvojenim idealizacijama (sl. 5 i 6) beton i čelik su elastoplastični materijali. Stvarno je ponašanje betona, međutim, elastoviskoplastično, tj. zavisno i od vremena.

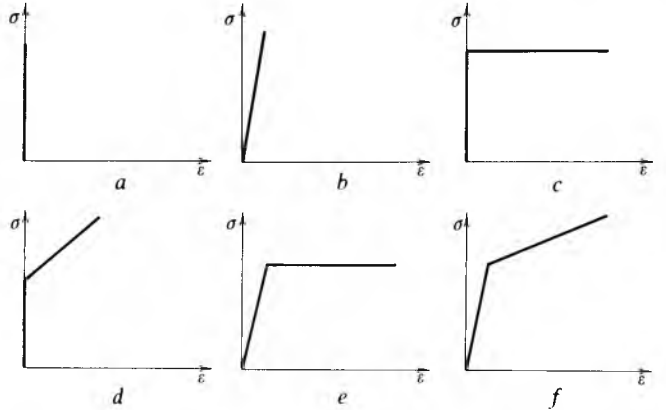


Sl. 5. Dijagram zavisnosti napreznja i relativne dilatacije armiranog betona



Sl. 6. Dijagram zavisnosti napreznja i relativne dilatacije čelika u armiranom betonu

Dijagram  $\epsilon-\sigma$  za jednoosno stanje napreznja omogućuje predodžbu o idealizacijama koje se uvode kao pogodne za diskusiju o osnovnim mehaničkim svojstvima materijala. Na sl. 7 prikazani su takvi dijagrami za nekoliko idealizacija.



Sl. 7. Dijagrami zavisnosti napreznja i relativne deformacije za idealizirane materijale: a krut materijal, b idealno elastičan, c krut-idealno plastičan, d krut-idealno plastičan s očvršćenjem, e linearno elastičan-idealno plastičan, f linearno elastičan-idealno plastičan s očvršćenjem

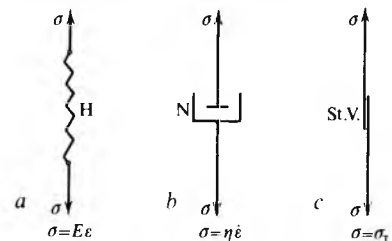
Veze između dilatacije i napreznja zavise isto tako i od *temperaturnih promjena*. Povišena temperatura olakšava plastične deformacije (snižava granicu elastičnosti i tečenja te pojačava puzanje), a može isto tako djelovati i na promjenu unutrašnje strukture materijala (npr. kaljenje čelika, lijevanje željeza i sl.).

U granicama temperaturnih promjena, kakve se obično pojavljuju u građevinarstvu, može se pretpostaviti kad se deformacije ne sprečavaju da je dilatacija zbog temperaturne promjene proporcionalna toj promjeni, tj. da je

$$\epsilon_t = \alpha \Delta t, \tag{15}$$

gdje je  $\alpha$  koeficijent linearne dilatacije zbog temperaturne promjene. Dilatacije nastale zbog temperaturnih promjena obično se superponiraju dilatacijama nastalim zbog napreznja.

**Veze između napreznja i deformacije u nekim karakterističnim vrstama materijala.** U analizi mehaničkih svojstava materijala pogodna je primjena *reoloških modela* koji su formirani tako da se odnose na veze između devijatorskih dijelova tenzora deformacije i napreznja pri jednoosnom stanju napreznja. Za osnovne materijale reološki modeli sastoje se samo od jednog elementa, dok se za složene materijale sastoje od više elemenata koji se međusobno spajaju paralelno ili serijski, već prema svojstvima promatranog materijala.



Sl. 8. Reološki modeli triju osnovnih materijala: a idealno elastičnog materijala, b viskoznog fluida, c idealno plastičnog materijala

Na sl. 8 vide se reološki modeli za tri osnovna materijala s osnovnim jednadžbama koje karakteriziraju ponašanje tih materijala.

a) *Idealno elastičan (Hookeov) materijal*, oznaka H. Za njega vrijedi:  $\sigma = E\epsilon$ , tj.  $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$ , gdje je E modul elastičnosti. Reološki model je elastična opruga (sl. 8a).

b) *Viskozni fluid (Newtonov materijal)*, oznaka N. Za njega vrijedi:  $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ , gdje je  $\eta$  koeficijent viskoznosti. Reološki model je klip koji se giba u otpornoj sredini (sl. 8b).

c) *Idealno plastičan (Saint Venantov) materijal*, oznaka St. V. Za njega vrijedi:  $\sigma = \sigma_T$ , gdje je  $\sigma_T$  naprezanje na granici tečenja. Reološki model čine dvije ploče među kojima postoji Coulombovo (suho) trenje (sl. 8c).

Kombinacijama tih modela mogu se približno modelirati mehanička svojstva stvarnih materijala.

Ako se pretpostavi da je deformacija infinitezimalna, može se postaviti da je  $d_{ij} \approx \dot{\epsilon}_{ij}$ , tj. da se tenzor brzine deformacije zamijeni tenzorom brzina komponenata deformacije.

**Idealno elastičan (Hookeov) materijal.** Kad je naprezanje jednoosno, taj se materijal ponaša prema Hookeovu zakonu

$$\sigma = E\epsilon, \quad \epsilon_p = -\nu\epsilon. \quad (16)$$

Koeficijent  $E$  koji ima dimenziju naprezanja, jest *modul elastičnosti* ili *Youngov modul*, a  $\nu$  je bezdimenzijska veličina koja se zove *Poissonov koeficijent* ili *omjer* i mjera je za poprečnu deformaciju štapa.

Za homogeni, izotropni, idealno elastični materijal postoje dvije međusobno nezavisne konstante materijala kojima se opisuju različite veze koje postoje između naprezanja i deformacije.

Kad je naprezanje prostorno, veze između komponenata naprezanja i deformacije imaju oblik (u tenzorskim oznakama)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu}\delta_{ij}\epsilon_{kk}, \quad (17)$$

odnosno inverzno

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}, \quad (18)$$

gdje su  $\mu$  i  $\lambda$  *Laméove konstante* definirane izrazima:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{modul klizanja}), \quad (19a)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}. \quad (19b)$$

Jednadžba (17) može se pisati i alternativno, posebno za sferne, a posebno za devijatorske dijelove tenzora deformacije i naprezanja:

$$\epsilon_{jj} = \frac{1}{3K}\sigma_{jj} \quad \text{i} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{\sigma}_{ij}, \quad (20)$$

gdje je  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  *modul stlačivosti* ili *stišljivosti* ili *kompresibilnosti*, tj. koeficijent koji daje zavisnost između volumenske dilatacije  $e = \epsilon_{jj}$  i srednjega normalnog naprezanja  $\sigma_{sr} = (1/3)\sigma_{jj}$ :

$$e = \frac{1}{K}\sigma_{sr} \quad \text{ili} \quad \epsilon_{jj} = \frac{1}{3K}\sigma_{jj}. \quad (21)$$

Ako je idealno elastično tijelo anizotropno, veze između deformacije i naprezanja mogu se prikazati kao najopćenitija linearna relacija između svih komponenata deformacije sa svim komponentama naprezanja, pa se to svodi na sustav od šest linearnih jednadžbi, koje se mogu pisati u matičnom obliku

$$\{\epsilon\} = [c]\{\sigma\}, \quad (22)$$

gdje su  $\{\epsilon\}$  i  $\{\sigma\}$  šesteročlani vektori-stupci komponenata deformacije i naprezanja, a  $[c]$  je simetrična matrica reda  $6 \times 6$ . Elementi te matrice su konstante elastičnosti materijala, tj. određene kombinacije modula elastičnosti, Poissonovih omjera (koeficijenata) i modula klizanja. U općenitom slučaju anizotropije postoji 21 nezavisna materijalna konstanta, a za posebne slučajeve, kad je struktura materijala na neki način simetrična, ima manje nezavisnih konstanta. Koeficijenti elastičnosti  $E$  i  $\nu$  određuju se u konkretnim slučajevima eksperimentalno, najčešće pomoću aksijalno napregnutog štapa. Ponekad je pogodnije dinamičko ispitivanje s oscilatorno promjenljivim opterećenjem.

**Viskozni fluid (Newtonov materijal).** Veze između naprezanja i deformacije, pisane posebno za sferne i devijatorske dijelove tenzora, glase

$$\dot{\epsilon}_{jj} = \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_{jj}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta}\dot{\sigma}_{ij}, \quad (23)$$

gdje je  $K$  modul kompresije, dok je  $\eta$  *Newtonov koeficijent viskoznosti*. Prva se jednadžba odnosi na elastičnu promjenu volumena fluida pri hidrostatičkom tlaku. Ako je fluid tekućina, tada se pretpostavlja da je on nestlačiv, tj. da je  $K = \infty$ .

Iz reoloških modela prikazanih na sl. 8 može se analizirati ponašanje linearno elastičnog tijela s poznatim modulom  $E$  i viskozne tvari s poznatim koeficijentom viskoznosti  $\eta$ .

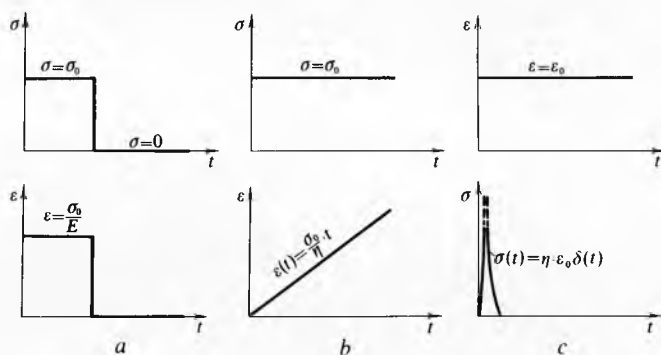
Za elastičnu je oprugu  $\sigma = E\epsilon$ , pa slijedi da takvo tijelo pokazuje svojstvo trenutne elastičnosti i trenutne povratne deformacije. To je prikazano na sl. 9a. Tada je tijelo podvrgnuto konstantnom naprezanju  $\sigma = \sigma_0$  koje je počelo trenutno djelovati i zatim ostalo stalno, a prikazano je izrazom

$$\sigma = \sigma_0 H(t), \quad (24)$$

gdje je  $H(t)$  *Heavisideova funkcija* definirana

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t \leq 0 \\ 1 & \text{za } t > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Ako se u nekom trenutku tijelo naglo rastereti, dilatacija  $e$  trenutno prati tu promjenu.



Sl. 9. Dijagrami vremenskih promjena naprezanja i relativnih dilatacija: a idealno elastičnog materijala, b viskozni fluid pri konstantnom naprezanju i c pri nagloj dilataciji

Za viskozni fluid prikazan modelom klipa u otpornoj sredini (sl. 8b) vrijedi da je  $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ , tj. naprezanje je proporcionalno prirastu (brzini) deformacije. Iz toga slijedi da će pri konstantnom naprezanju  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  dilatacija konstantno rasti (sl. 9b). Međutim, ako se naglo pojavi dilatacija koja zatim ostaje konstantna, tj.  $e(t) = e_0 H(t)$ , dijagram naprezanja ima izgled impulsa (sl. 9c), pa je  $\sigma(t) = \eta\dot{e}(t)$ , gdje je  $\delta(t)$  *Diracova* ili *delta-funkcija* definirana sa  $\delta(t) = 0$  za  $t \neq 0$ ;  $\delta(t) = \infty$  za  $t = 0$ . Tako bi se, prema tome, ostvarilo beskonačno veliko naprezanje. To je fizikalno nemoguće, pa slijedi da nije moguća trenutna konačna deformacija viskoznog fluida. Ta se činjenica odražava i pri analizi svojstava viskoelastičnih tijela.

Ponašanje elastične opruge i viskoznog klipa služi kao osnova za analizu ponašanja viskoelastičnih materijala. Eksperimenti sa  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  i  $e(t) = e_0 H(t)$  osnovni su metodološki pristupi analizi svojstava viskoelastičnih materijala.

**Viskoelastičan materijal.** Kombinacijom svojstava elastičnog i viskoznog tijela mogu se prikazati različiti viskoelastični materijali prema kojima se u određenim uvjetima mogu aproksimirati ponašanja nekih stvarnih materijala.

Viskoelastični materijali pokazuju neka specifična svojstva. To su: trenutna elastičnost, puzanje pri konstantnom naprezanju, relaksacija napona pri konstantnoj dilataciji, trenutna povratna dilatacija, zaostala elastičnost i trajna deformacija.

Od stvarnih građevnih materijala viskoelastično ponašanje pokazuje beton, metali na višim temperaturama, bitumen, asfalt i dr. Mnoge moderne teorije o betonu, asfaltu i bitumenu zasnovane su na njihovim viskoelastičnim odnosno elastovisko-plastičnim svojstvima.

Kelvinov (ili Voigtov) materijal prikazan je reološkim modelom kao paralelni spoj elastične opruge i viskoznog klipa (sl. 10a). Veza naprezanja i dilatacije pri jednoosnom stanju naprezanja može se prikazati jednadžbom

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{\eta} \sigma, \quad (26)$$

dok se za prostorno stanje naprezanja mogu veze naprezanja i deformacije napisati u obliku

$$\dot{\varepsilon}_{jj} = \frac{1}{3K} \sigma_{jj}; \quad \frac{\eta}{G} \dot{\varepsilon}'_{ij} + \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij}. \quad (27)$$

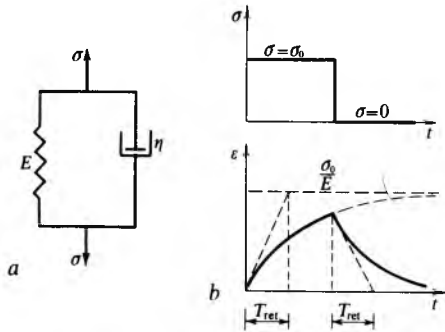
Ako se takav materijal optereti sa  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , tada iz (26), ako je za  $t = 0$  dilatacija  $\varepsilon = 0$ , slijedi

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{ret}}\right) \right]. \quad (28)$$

Ako u trenutku  $t = 0$  u tijelu već postoji zatečena dilatacija  $\varepsilon_0$ , tada je

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) + \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right]. \quad (29)$$

Kelvinovo tijelo kvantitativno prikazuje ponašanje betona u fazi opterećenja, ali ne i u fazi rasterećenja (jer su mu deformacije povratne). Takvim tijelom, osim toga, ne može se prikazati ni utjecaj starosti betona na deformaciju.



Sl. 10. Kelvinov ili Voigtov materijal: a reološki model, b dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije tokom vremena

Iz jednadžbe (28) dobiva se tok dilatacije uz konstantno naprezanje u fazi opterećenja i rasterećenja (sl. 10b). Vidi se da dilatacija zaostaje za naprezanjem; to je svojstvo *zaostale elastičnosti*. Taj se fenomen naziva i *puzanjem*. Veličina  $T_{ret} = \eta/E$  karakterizira zaostajanje dilatacije, pa se zove *vrijeme retardacije*. Ono se može tretirati i kao mjera za vrijednost unutrašnjeg trenja u materijalu. Kad  $t \rightarrow \infty$ , dilatacija asimptotski teži prema vrijednosti  $\varepsilon_{\infty} = \sigma_0/E$ . Kelvinov model prikazuje čvrsto tijelo, jer viskozni klip nije slobodan, već je paralelno spojen s oprugom.

*Maxwellov elastoviskozni fluid*. Model takva fluida jest serijski spoj elastične opruge i viskoznog klipa (sl. 11a). Taj je materijal tekućina. Za jednoosno naprezanje veza je između naprezanja i dilatacije

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (30)$$

Ako se takvu materijalu nametne naprezanje  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , iz (30) slijedi da je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t. \quad (31)$$

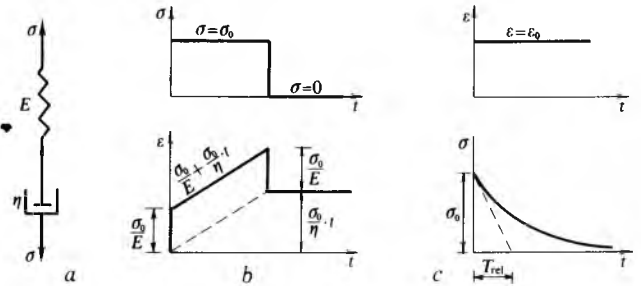
Dilatacija trenutno postigne vrijednost  $\sigma_0/E$ , a zatim raste linearno. Pri rasterećenju dilatacija se smanjuje skokovito, a zatim ostaje konstantna (sl. 11b).

Ako se Maxwellov materijal trenutno produlji (sl. 11c), naprezanje se mijenja prema izrazu

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) = E \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) = E \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{T_{rel}}\right). \quad (32)$$

To smanjivanje naprezanja pri konstantnoj dilataciji naziva se *relaksacijom naprezanja*, a vrijednost  $T_{rel} = \eta/E$  zove se *vrijeme relaksacije* koje karakterizira brzinu smanjivanja naprezanja.

Međutim, ni Kelvinov ni Maxwellov materijal ne mogu pouzdano opisati ponašanje stvarnih viskoelastičnih materijala, jer nemaju sva karakteristična svojstva. Kelvinov materijal nema, kad se opterećuje, trenutne elastične deformacije, a niti trajne deformacije kad se rasterećuje, dok se Maxwellovim materijalom ne može prikazati smanjivanje prirasta dilatacije, što je karakteristika puzanja u primarnoj fazi za mnoge stvarne materijale. Stoga se u praksi komponiraju i modeli s više elemenata (opruga i klipova), kojima se pokušava postići bolje oponašanje svojstva stvarnih materijala.



Sl. 11. Maxwellov elastoviskozan fluid. a reološki model, b dijagrami zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije tokom vremena pri naglom rasterećenju i c pri nagloj dilataciji

*Elastično produljen Kelvinov (standardan) materijal*. Model je tog materijala serijski spoj elastične opruge i Kelvinova tijela (sl. 12a). Taj materijal, nazvan i standardnim materijalom, ima svojstvo trenutne elastičnosti i povratne deformacije. Pri opterećenju  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  pokazuje svojstvo puzanja. Tada se vremenska zavisnost dilatacije može prikazati izrazom

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \exp\left(-\frac{p}{r q} t\right) + \frac{1}{p} \right], \quad (33)$$

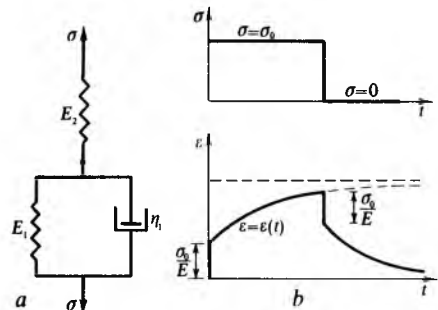
u koji su uvedene oznake

$$r = E_2, \quad p = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad q = \frac{\eta}{E_1 + E_2}. \quad (33a)$$

Na sl. 12b prikazan je tok funkcija  $\sigma(t)$  i  $\varepsilon(t)$  u fazi opterećenja i rasterećenja.

I taj materijal u fazi opterećenja dobro aproksimira ponašanje betona, a pogodnim izborom konstanta  $E_1$  i  $E_2$  može se prilagoditi stvarnom materijalu.

Postoje i modeli sa četiri elementa. To je, npr., *Burgersov materijal* koji je modelom prikazan kao serijski spoj Maxwellova i Kelvinova tijela; on ima svojstvo trenutne elastičnosti i viskoz-



Sl. 12. Elastično produljen Kelvinov materijal. a reološki model, b dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije

nog tečenja, na koje je superponirano puzanje Kelvinova tijela. Taj je materijal tekućina, pa ne može vjerno aproksimirati ponašanje čvrstih materijala (npr. betona).

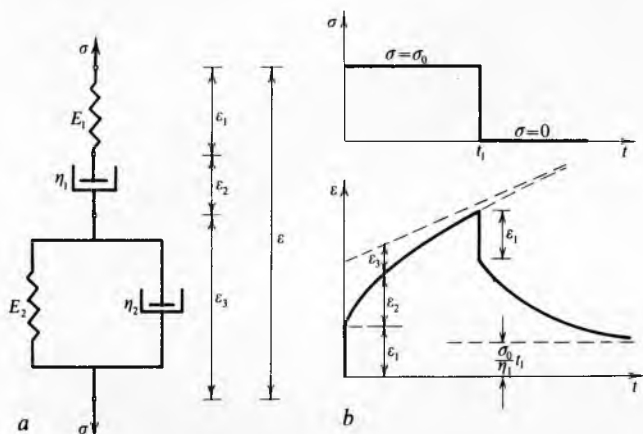
Za jednoosno naprezanje veza naprezanja i dilatacije prikazana je izrazom

$$\sigma + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\epsilon}. \quad (34)$$

Na sl. 13 vidi se reološki model Burgersova materijala i zavisnost dilatacije od vremena pri opterećenju  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , u fazi opterećenja i rasterećenja. Vremenska je zavisnost dilatacije tada

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_1} t + \frac{\sigma_0}{E_2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} t\right) \right]. \quad (35)$$

Prvi član prikazuje trenutnu elastičnost, drugi viskozno tečenje, a treći zaostalu elastičnost.



Sl. 13. Burgersov materijal. a reološki model, b dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije

U praksi se upotrebljava niz modela sa tri, četiri, pa i više elemenata. Tada se pogodnim izborom konstanta  $E_i$  i  $\eta_i$  pokušava što bolje aproksimirati ponašanje stvarnih materijala. Pri tom se javlja još jedna teškoća, naime, konstante se nekih građevnih materijala mijenjaju s vremenom (beton, neke plastične mase); ta se pojava naziva *starenjem materijala*. Isto se tako stvarni materijali zbog svoje kompleksne strukture ponašaju kao da imaju više vremenâ relaksacije. Stoga se bolja aproksimacija traži pomoću generaliziranih Maxwellovih i Kelvinovih modela, formiranih kao više Maxwellovih, odnosno Kelvinovih modela spojenih serijski ili paralelno.

**Diferencijalni i integralni oblici veza između naprezanja i deformacije u viskoelastičnim tijelima.** U dosadašnjim razmatranjima bile su veze između devijatorskih dijelova tenzora naprezanja i deformacije prikazane u diferencijalnom obliku. Tada rang diferencijalnih operatora zavisi od broja Newtonovih elemenata. Na primjer, u Burgersovu tijelu javljaju se diferencijalni operatori drugog reda, npr. jednađžba (34). Kad postoji proizvoljan broj Kelvinovih i Maxwellovih elemenata, može se zavisnost napisati u općenitom obliku

$$2GQ\epsilon'_{ij} = P\sigma'_{ij}, \quad (36)$$

gdje su  $P$  i  $Q$  diferencijalni operatori proizvoljnih redova  $n$  i  $m$ :

$$P = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} + \dots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad (37)$$

$$Q = b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} + \dots + b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}.$$

Koeficijenti  $a_i$  i  $b_i$  zavise od konstanta elastičnosti i viskoznosti osnovnih elemenata, a određuju se eksperimentalno u laboratorijskim uvjetima, obično eksperimentima puzanja i relaksacije.

Iako se spajanje reoloških modela često upotrebljava, pokazuje se da ni vrlo složeni modeli ne mogu dovoljno točno prikazati ponašanje stvarnih materijala. Stoga se traži alternativni put, ograničen također na linearne veze, koji je zasnovan na primjeni principa superpozicije, a predložio ga je Boltzmann (1874). Veze se dobivaju u integralnom obliku.

Neka je u trenutku  $\tau$  materijal u kratkom vremenskom intervalu  $d\tau$  podvrgnut naprezanju  $\sigma(\tau)$ . Za neelastičnu deformaciju koja se tada pojavljuje pretpostavlja se da opada s vremenom tako da je u vremenu  $t > \tau$  preostali dio te deformacije  $\varphi(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau$ , gdje je  $\varphi(t - \tau)$  neka funkcija karakteristična za materijal. Ta funkcija monotono opada i zove se *nasljedna funkcija* ili *funkcija pamćenja*.

Ako se doda trenutna elastična deformacija i ako se naprezanje mijenja neprekidno s vremenom u vremenskom intervalu od 0 do  $t$ , dobiva se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \varphi(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau. \quad (38)$$

Ako je poznata deformacija  $\epsilon(t)$  i traži se  $\sigma(t)$ , onda je izraz (36) linearna integralna jednađžba Volterrina tipa druge vrste s jezgrom  $\varphi(t - \tau)$ , a rješenje joj ima oblik

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) - \int_0^t \psi(t - \tau)\epsilon(\tau)d\tau, \quad (39)$$

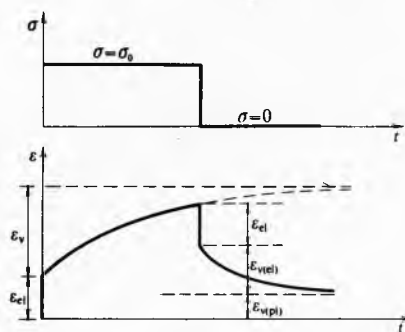
gdje je  $\psi(t - \tau)$  rezolventa jezgre  $\varphi(t - \tau)$ . Za stvarne materijale problem je kako naći funkciju  $\varphi(t)$ .

**Osvrt na neke suvremene teorije o vezama između naprezanja i deformacije u betonu.** Kombinacijama Hookeovih i Newtonovih materijala mogu se dobiti viskoelastične karakteristike materijala, ali ne i njegova plastična svojstva (tj. ireverzibilna deformacija tokom rasterećenja).

Kad se promatraju naprezanja u realnim uvjetima, pretpostavlja se da vrijedi linearna zavisnost između naprezanja i deformacije, iako bi za beton bila adekvatnija kombinacija nelinearne elastičnosti i plastičnosti.

Dijagram  $\epsilon = \epsilon(t)$  ima za beton pri opterećenju  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  i rasterećenju na  $\sigma = 0$  oblik prema sl. 14. Vidi se da pri rasterećenju postoji elastična, viskoelastična i plastična dilatacija.

U linearnoj teoriji tečenja zanemaruju se plastične deformacije.



Sl. 14. Dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije betona tokom vremena

*Specifična deformacija betona* (tj. deformacija djelovanjem jediničnog naprezanja) funkcija je vremena  $t$  i starosti  $\tau$  betona prema izrazu

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \quad (40)$$

Na desnoj je strani prvi član specifična elastična, a drugi specifična viskozna deformacija (ili mjera puzanja). Starost betona  $\tau$  vrijeme je od stvrdnjavanja betona do trenutka kad počinje djelovati opterećenje. Betonima različite starosti imaju i različite deformacije. Općenito vrijedi da je  $\epsilon = \epsilon(t, \tau)$ . Naprezanje u be-



tonu zavisno je od vremena, a zavisnost dilatacije od napreznja može se napisati u obliku

$$\varepsilon(t, \tau) = \sigma_b(t) \delta(t, \tau) = \sigma_b(t) \left[ \frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau) \right]. \quad (41)$$

Primjenom principa superpozicije može se ta veza nakon određenih transformacija svesti na oblik

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} - \int \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (42)$$

To je integralna jednadžba Volterrina tipa druge vrste, a njezina je jezgra zapravo karakteristika materijala.

Ako se funkciji specifične viskoznosti  $C(t, \tau)$  pridaju posebni oblici, dobivaju se različite teorije betona.

*Nasljedna teorija starenja.* Specifična viskoznost  $C(t, \tau)$  može se izraziti u obliku

$$C(t, \tau) = \left( C_0 + \frac{A_1}{\tau} \right) \{ 1 - \exp[-\gamma(t - \tau)] \}, \quad (43)$$

gdje su veličine  $C_0$ ,  $A_1$  i  $\gamma$  konstante koje se određuju eksperimentalno.

Funkcija se  $C(t, \tau)$  zbog lakše primjene može i pojednostavniti ako se pretpostavi da je beton dovoljno star, pa njegovo dalje starenje ne utječe na puzanje. Deformacija betona sastoji se tada od trenutne i od nasljedne deformacije, pri čemu nasljedna deformacija zavisi samo od trajanja deformacije, pa je mjera puzanja određena izrazom

$$C(t, \tau) = C f(t - \tau). \quad (44)$$

To je osnova *nasljedne teorije*, bez uvođenja starosti betona. U *teoriji starenja*, međutim, uzima se mjera puzanja u obliku

$$C(t, \tau) = C(t) - C(\tau). \quad (45)$$

Prema nasljednoj teoriji deformacija je betona pri rasterećenju potpuno povratna, dok prema teoriji starenja deformacija betona, dostignuta u fazi opterećivanja, ostaje nepromijenjena i poslije rasterećenja. Stvarno ponašanje betona pokazuje da se postignuta deformacija vraća samo djelomično, tj. najbolje se približava nasljednoj teoriji starenja.

Sve navedene teorije betona vrijede u takvu obliku za jednoosno napreznje. Međutim, moguća je njihova generalizacija pa se može primijeniti i na proizvoljno prostorno napreznje.

**Dinamičko ispitivanje viskoelastičnih materijala.** Osnova statičkog ispitivanja svojstava viskoelastičnih materijala jesu eksperimenti puzanjem i relaksacijom napreznja. Kad je napreznje trenutno nametnuto koje zatim ostaje konstantno,  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , prati se promjena dilatacije s vremenom (puzanje), a kad je dilatacija  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ , prati se smanjivanje napreznja s vremenom (relaksacija napreznja).

Postoje, međutim, mogućnosti da se mehanička svojstva viskoelastičnih materijala ispituju i dinamički, primjenom *harmonijski promjenljivoga* vanjskog opterećenja. Takvo se ispitivanje često primjenjuje u analizi svojstava *asfaltnih* i *bitumenskih mješavina*, na pogodno izrađenim pokusnim gredicama. Te mješavine pokazuju viskoelastična svojstva, te se mogu i modelirati grupama Kelvinovih i Maxwellovih elemenata.

Ako se pokusnoj gredici od takva materijala nametne oscilatorno promjenljiva dilatacija

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (46)$$

tada će se i napreznje mijenjati harmonijski s istom kružnom frekvencijom  $\omega$ , ali s faznim pomakom  $\delta$ , pa je

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}, \quad (47a)$$

što se može napisati i u obliku

$$\sigma(t) = \sigma^* e^{i\omega t}, \quad (47b)$$

gdje je  $\sigma^*$  kompleksna amplituda napreznja

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\delta} = \sigma_0 (\cos\delta + i\sin\delta). \quad (48)$$

Tada se količnik

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon_0} = E^*(\omega) \quad (49)$$

naziva *kompleksnim modulom*. Funkcija  $E^*(\omega)$  kompleksna je funkcija kružne frekvencije  $\omega$ . Ako se izraz (48) uvrsti u (49), dobiva se

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos\delta + i\sin\delta) = E_1 + iE_2. \quad (50)$$

Prvi je član  $E_1$  u fazi s dilatacijom; to je realni dio kompleksnog modula, a često se naziva i *povratnim modulom*

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos\delta. \quad (51)$$

Drugi je član  $E_2$  imaginarni dio kompleksnog modula, a naziva se i *izgubljenim modulom*

$$E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin\delta. \quad (52)$$

Primjenom kompleksnog modula može se veza između napreznja i dilatacije napisati u obliku

$$\sigma = (E_1 + iE_2)\varepsilon. \quad (53)$$

Iz prethodnih izraza slijedi također da je

$$\tan\delta = \frac{E_2}{E_1}. \quad (54)$$

Taj se izraz zove *mehanički gubitak*.

Navedenim izrazima karakterizira se sposobnost materijala za očuvanje mehaničke energije pri deformaciji. Povratnim modulom  $E_1$  (engl. storage modulus) uzima se u obzir skupljanje i oslobađanje mehaničke energije u toku harmonijski promjenljive dilatacije, a izgubljenim modulom  $E_2$  (engl. lost modulus) disipacija energije, odnosno njeno pretvaranje u toplinu zbog unutrašnjeg trenja u materijalu u toku oscilacija. Omjer  $E_2/E_1$  mjera je za sposobnost prigušenja u niskoelastičnim materijalima. Može se pokazati da je energija prigušenja (tj. omjer energije  $\Delta W$  disipirane u jednom ciklusu oscilacije i maksimalne energije  $W$  koju sustav može sačuvati uz određenu amplitudu) jednaka

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\pi \sin\delta. \quad (55)$$

Prema tome, sposobnost viskoelastičnog materijala za apsorpciju mehaničke energije (prigušenje) zavisi samo od faznog kuta  $\delta$  koji je funkcija kružne frekvencije  $\omega$ , pa je ta sposobnost mehanička karakteristika materijala, nezavisna od amplitude napreznja i dilatacije.

Omjer amplitude napreznja i dilatacije  $\sigma_0/\varepsilon_0$  naziva se često *modulom krutosti* promatranog materijala, npr. neke asfaltnje mješavine.

Pokusne gredice za ispitivanje takvih materijala obično su konzole kojima je slobodan kraj podvrgnut harmonijski promjenljivom vanjskom utjecaju. Takvim ispitivanjem dobiva se kompleksni modul  $E^*$ , pomoću kojeg se onda mogu odrediti i druge mehaničke karakteristike materijala, osobito njegova krutost, koja na neki način karakterizira i otpornost materijala pri eksploataciji.

Viskoelastična, točnije elastoviskoplastična svojstva pokazuju i zemljište, za koje postoje razrađene metode ispitivanja i određivanja granične nosivosti (v. *Mehanika tla*, TE 8, str. 235).

**Plastičan materijal.** Idealan materijal kojemu se pripisuje svojstvo plastičnosti mora biti kruto plastičan. Takav se materijal trajno deformira samo kad je zadovoljen uvjet plastičnosti  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Pod tim uvjetom razumijeva se takva veza između komponenata tenzora napreznja  $\sigma_{ij}$ , ili između glavnih napreznja  $\sigma_i$ , da u promatranjoj točki tijela počinju plastične deformacije koje zatim ubrzo dovode do loma.

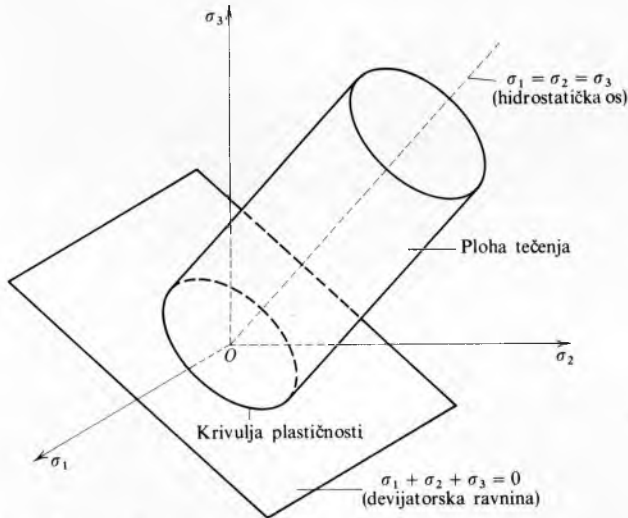
Plastičan materijal može biti idealno plastičan ili plastičan s očvršćenjem. Osim toga, prema prihvaćenoj idealizaciji može biti kruto plastičan ili linearno elastičan-plastičan (sl. 7).

**Savršeno plastičan materijal.** To je materijal koji ne pruža otpor plastičnoj deformaciji, tako da je prirast naprezanja nemoguć. To je, dakle, materijal za koji, osim  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , vrijedi da je  $i \text{ d}f(\sigma_{ij}) = 0$ . Kad je takav materijal rasterećen,  $\text{d}f(\sigma_{ij}) < 0$ , ponaša se kao krut materijal.

Zbog izotropije mora  $f(\sigma_{ij})$  biti simetrična funkcija glavnih naprezanja, pa se uvjet plastičnosti može napisati prema invarijantama naprezanja u obliku  $f[I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)] = 0$ . Kako se iz iskustva zna da se plastičnom deformacijom volumen tijela mijenja zanemarljivo malo, tj. da plastična deformacija ne zavisi od  $I_3(\sigma)$ , može se uvjet plastičnosti napisati u obliku

$$f[\bar{I}_2(\sigma), \bar{I}_3(\sigma)] = 0. \quad (56)$$

Ako se tenzor naprezanja rastavi u sferni i devijatorski dio, može se vektor položaja promatrane točke u prostoru naprezanja (tj. u koordinatnom sustavu  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ) prikazati kao zbroj vektora intenziteta  $I_1(\sigma)/3$  na hidrostatičkoj osi (to je pravac koji zatvara jednake kutove s koordinatnim osima) i devijatorske komponente koja leži u devijatorskoj ravnini  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  (sl. 15). Odatle se vidi da jednadžba (56) prikazuje u prostoru naprezanja valjak kojemu su izvodnice paralelne s hidrostatičkom osi. Presjek tog valjka s devijatorskom ravninom zove se *krivulja plastičnosti*, i ona daje potpun geometrijski prikaz uvjeta plastičnosti oblika (56). Krivulja plastičnosti je zatvorena, sektorski simetrična krivulja. Uvjeti plastičnosti mogu se dovesti u vezu s određenim fizikalnim fenomenima.



Sl. 15. Razlaganje tenzora naprezanja u sferni i devijatorski dio

**Tresca-Saint Venantov uvjet plastičnosti.** Plastično tečenje nastupa kada najveće tangencijalno naprezanje  $\tau_{\max}$  dostigne neku kritičnu vrijednost. Tada je

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= 2k = \sigma_T, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= 2k = \sigma_T, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= 2k = \sigma_T, \end{aligned} \quad (57a)$$

ili

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] = 0. \quad (57b)$$

Prema tome uvjetu krivulja plastičnosti je šesterokut.

**Huber-Hencky-Misesov uvjet plastičnosti.** Plastično tečenje započinje kada deformacijski rad utrošen na promjenu oblika (bez promjene volumena) dostigne neki kritičan iznos. Tada je

$$f(\sigma_{ij}) \equiv \bar{I}_2(\sigma') - k^2 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 - k^2 = 0, \quad (58)$$

ili izraženo pomoću glavnih naprezanja

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2. \quad (59)$$

Krivulja plastičnosti ima tada oblik kružnice.

Ispitivanja na stvarnim materijalima pokazuju najčešće veoma dobro slaganje s tim dvama uvjetima plastičnosti.

**Coulombov uvjet plastičnosti** polazi od pretpostavke da plastična deformacija nastaje tako što u kritičnim ravninama nastupa relativno klizanje materijala. Te ravnine mijenjaju od točke do točke svoj položaj, pa se radi o plohama klizanja. Kritično tangencijalno naprezanje  $\tau_n$  u ravnini klizanja proporcionalno je normalnom naprezanju  $\sigma_n$  na toj ravnini, a njihova međusobna zavisnost prikazana je jednadžbom

$$\tau_n = \sigma_n \tan \varphi + c, \quad (60)$$

gdje je  $c$  koeficijent kohezije materijala, a  $\varphi$  kut unutrašnjeg trenja. Veličine  $c$  i  $\varphi$  karakteristike su materijala. Taj se uvjet odnosi na sipke materijale, a služi najviše u mehanici tla. Coulombov uvjet tečenja nije pogodan jer je teško odrediti ravnine za koje je ispunjen uvjet (60). Za rješavanje je pogodan grafički postupak, uz primjenu Mohrovih kružnica.

**Plastičan materijal s očvršćenjem.** To je materijal za koji je potreban prirast naprezanja da bi se poslije dostizanja uvjeta plastičnosti pojavila dalja deformacija. Takvo je stanje posljedica strukturnih promjena u materijalu nakon porasta opterećenja. Za jednoosno naprezanje to je zona očvršćenja u dijagramu  $\varepsilon - \sigma$ , dok se za prostorno naprezanje takva pojava karakterizira pomoću energije potrebne za plastičnu deformaciju, ili se pretpostavlja da očvršćenje zavisi od intenziteta deformacije. Na primjer, za Huber-Hencky-Misesov uvjet plastičnosti ta se pretpostavka može prikazati izrazom

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \equiv 6k^2 = 2\bar{\sigma}^2 = 2H(\bar{\varepsilon}), \quad (61)$$

gdje je  $\bar{\sigma}$  intenzitet devijatora naprezanja,  $\bar{\varepsilon}$  intenzitet devijatora deformacije, a  $H$  je funkcija očvršćenja pri deformaciji koja se za svaki slučaj mora posebno odrediti.

**Veza između naprezanja i deformacije.** Određivanje veza između naprezanja i deformacije u plastičnim materijalima veoma je složen zadatak, jer polju naprezanja ne odgovara jedno polje deformacije. Pri određivanju deformacija koje odgovaraju nekom polju naprezanja potrebno je znati i prethodnu deformaciju.

**Idealno plastičan materijal.** Za Saint Venantov materijal vrijedi da se do dostizanja uvjeta plastičnosti tijelo ponaša kao potpuno kruto, pa je

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad \text{za} \quad \bar{\sigma}^2 < 3k^2. \quad (62a)$$

Pretpostavlja se da je materijal nestlačiv (tj.  $e = \varepsilon_{kk} = 0$ , pa je  $\dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ , tj. tenzor se deformacije svodi na devijator) i da su komponente tenzora brzine deformacije proporcionalne pripadnim komponentama devijatora naprezanja. Tada je

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = 0; \quad \dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\lambda} \sigma'_{ij} \quad \text{za} \quad \bar{\sigma}^2 = 3k^2, \quad (62b)$$

gdje  $1/(2\lambda)$  nije konstanta, već je to funkcija koja se mijenja od točke do točke, a zavisi od stanja deformacije u promatranoj točki. Saint Venantov materijal je plastičan analogon idealnom fluidu, pa se svodi na njega za  $\sigma = 0$ , tj. za  $k = 0$ . Može se pokazati da za idealno plastični materijal vrijeme nije bitan parametar. Relacije (62b) mogu se svesti na oblik

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2k} d\bar{\varepsilon} \sigma'_{ij}. \quad (63)$$

Kako postoje prirasti deformacija, potrebno je znati prethodno naprezanje, tj. brzinu opterećivanja. Ako se zna samo polje naprezanja, a ne i prethodno naprezanje, onda se dobiva samo tendencija deformacije, a ne i deformacija. Vrijednost deformacije ostaje neodređena ako nije na neki način propisana rubnim uvjetima.

Henckyjev materijal mnogo se primjenjuje u teoriji plastičnosti, a definiran je tako da postoji proporcionalnost između  $\sigma$  i  $\varepsilon$ , a ne samo između  $\sigma$  i  $\dot{\varepsilon}$ . Ako vrijedi Huber-Hencky-Misesov uvjet plastičnosti, tj. da za  $\bar{\sigma}^2 < 3k^2$  vrijedi da je  $\varepsilon_{ij} = 0$  (dok još uvjet plastičnosti nije dostignut, materijal se ponaša kao krut). Dakle vrijedi

$$\varepsilon_{kk} = 0; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\varphi} \sigma'_{ij} \quad \text{za} \quad \bar{\sigma}^2 = 3k^2, \quad (64)$$

što se može svesti i na oblik

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2k} \bar{\varepsilon} \sigma'_{ij}. \quad (65)$$

Uvjet je plastičnosti sadržan implicitno, no ta jednadžba ne pokazuje adekvatno plastično ponašanje materijala, jer nije uključena i prethodna veza između naprezanja i deformacije. Henckyjev materijal mogao bi se shvatiti kao plastičan analogon Hookeovu elastičnom materijalu. On je kao idealizacija upotrebljiv ako je opterećenje takvo da se svako novo opterećenje nanosi na isti način i ako se u plastičnoj oblasti pretpostavlja da su deformacije infinitezimalne.

*Idealno plastičan materijal s očvršćenjem.* Oblik veza između naprezanja i deformacije sličan je kao i za idealno plastični materijal, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= 0 & \text{za} & \quad f(\sigma_{ij}) < 0 & \quad \text{i za} & \quad df(\sigma_{ij}) < 0 \\ \dot{\varepsilon}_{kk} &= 0 & \quad \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\psi} \sigma'_{ij} & \quad \text{za} & \quad f(\sigma_{ij}) > 0, \end{aligned} \quad (66)$$

a to se može svesti i na oblik

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}. \quad (67)$$

Kad se razmatraju praktični problemi plastičnosti, često se uvodi elastoplastičan materijal koji je, zapravo, složeni materijal (Prandtl-Reussov materijal). Ispod granice plastičnosti taj se materijal ponaša prema Hookeovu zakonu. Na granici tečenja (koja se ne može prekoračiti, jer to nije materijal s očvršćenjem) ponaša se za elastične deformacije prema Hookeovu zakonu, a za plastične kao Saint Venantov materijal.

Ispod granice tečenja (za  $\bar{\sigma}^2 < 3k^2$ ) vrijedi (kao i za elastično tijelo)

$$\varepsilon_{jj} = \frac{1}{3K} \sigma_{jj}; \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij}. \quad (68a)$$

Za granicu tečenja vrijedi

$$\dot{\varepsilon}_{jj} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{jj}, \quad (68b)$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{2k} \dot{\bar{\varepsilon}} \sigma'_{ij}.$$

Prvi član na desnoj strani opisuje elastični, a drugi plastični dio deformacije. Ti se izrazi zovu Prandtl-Reussove jednadžbe, a one se mogu napisati i pomoću prirasta deformacije i naprezanja

$$d\varepsilon_{jj} = \frac{1}{3K} d\sigma_{jj}; \quad d\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{2k} d\bar{\varepsilon} \sigma'_{ij}. \quad (68c)$$

Linearno elastično-idealno plastično tijelo osnova je za elastoplastičnu analizu nosača pri različitim oblicima naprezanja.



Sl. 16. Reološki model linearno elastično-idealno plastičnog materijala

Veza između naprezanja i dilatacije za linearno stanje naprezanja ima oblik prema sl. 7e, a njegov reološki model prikazan je na sl. 16.

**Svojstva realnih materijala.** Takav postupak omogućuje postavljanje elastoplastične teorije konstruktivnih sustava i razvoj suvremenih metoda za ocjenu konačne nosivosti nekog sustava. To omogućuje dimenzioniranje prema teoriji granične ravnoteže ili prema teoriji loma.

Kao što se iz dosadašnjih razmatranja vidi, u analizi različitih predloženih varijanata plastičnih tijela javlja se u izotropnim tijelima kao bitna konstanta materijala naprezanje na granici tečenja  $\sigma_T$ , koje se određuje eksperimentalno pomoću uređaja za vlačno naprezanje. Ta je konstanta karakteristika materijala s obzirom na njegovu otpornost ili nosivost.

Plastično tečenje betona zbiva se neograničeno bez prirasta naprezanja, tj. beton se tretira kao idealno plastičan materijal. Beton ima jednaku granicu tečenja i granicu loma. Kad se naprezanje  $\sigma$  približi vrijednosti  $\beta_1$ , koje znači naprezanje pri izraženoj plastičnoj deformaciji, počinje rasti Poissonov omjer (koeficijent)  $\nu$ , pa on dostigne i vrijednosti veće od 1/2. To znači da u fazi neograničenih plastičnih deformacija raste i volumen betona, tj. volumenska je dilatacija  $e > 0$ . Prema tome, djelovanjem deformacije mijenja se i volumen i oblik. Stoga se uvjet plastičnog tečenja betona može napisati u obliku  $f[I_1(\sigma), I_2(\sigma')] = 0$ , tj. uzima se u obzir promjena oblika i volumena, ali je uvjet tečenja nezavisan od  $I_3(\sigma)$ . Geometrijski se uvjet tečenja u betonu može u prostoru naprezanja prikazati rotacijskim paraboloidom.

U čeliku se granica tečenja i granica loma razlikuju, jer je čelik materijal s očvršćenjem. Tečenje čelika zasniva se na teoriji ograničene plastične deformacije. Pri tom se, za razliku od betona, volumen čelika ne mijenja. Plastična je deformacija čelika ograničena.

Tečenje u čeliku nastaje djelovanjem tangencijalnih naprezanja, dok u betonu može nastati lom zbog čistog smicanja, ili zbog dostizanja otpornosti betona prema vlaklu, od čega zavisi i matematički oblik uvjeta plastičnosti.

Pri eksperimentalnom ispitivanju uvjeta plastičnosti može se određivati tlačna čvrstoća  $\beta_1$ , vlačna čvrstoća  $\beta_v$  i posmična čvrstoća  $\beta_s$ , pa se prema tome i podešava oblik standardnog pokusnog tijela (kocka, prizma, valjak).

## DEFINICIJA I ODREĐIVANJE OTPORNOSTI (ČVRSTOĆE) GRAĐEVNIH MATERIJALA

Važan je podatak za ocjenu otpornosti nekog materijala njegovo ponašanje pri jednoosnom naprezanju, definirano dijagramom  $\varepsilon-\sigma$ . Na njemu se zapažaju granica tečenja, čvrstoća materijala i naprezanje koje odgovara lomu. Time je definiran i postupak dimenzioniranja. Situacija je, međutim, za prostorna naprezanja mnogo složenija.

Otpornost je materijala svojstvo kojim se on odupire bilo lomu bilo velikim plastičnim deformacijama koje na kraju opet dovode do loma. Kad je tijelo napregnuto iznad granice svoje otpornosti, ono se lomi i raspada. Da bi se takvo kritično stanje spriječilo, potrebno je naći kvantitativnu mjeru otpornosti.

Konstruktivni elementi dimenzioniraju se obično tako da u normalnim uvjetima eksploatacije nosivost konstrukcije bude stabilna, tj. da se ni u jednoj točki elementa ne pojavi lom ili izražena plastična deformacija. Odgovor na pitanje koja su to kritična stanja kad nastupa lom ili plastična deformacija ne može se za prostorno naprezanje odrediti nekim općenitim teorijskim razmatranjem, pa se treba pouzdati u rezultate eksperimenata i u neke hipoteze o lomu kojima se donekle poopćuju eksperimentalni podaci, prema kojima se ocjenjuje kada treba očekivati rušenje ili lom konstrukcije.

Prema tim hipotezama rušenje će na nekom mjestu nastupiti ako bude prekoračena neka dogovorom utvrđena granica za neku od sljedećih veličina: a) najveće normalno naprezanje, b) najveća dilatacija, c) najveće tangencijalno naprezanje, d) najveći deformacijski rad na promjeni oblika.

Ako se usporede te vrijednosti izračunate za promatrano naprezanje s istovrsnim vrijednostima pri jednoosnom naprezanju

kad je stvarno naprezanje dostiglo vrijednost kritičnog naprezanja, dobivaju se tzv. *usporedna naprezanja*, za koja se traži da budu manja od dopuštenih naprezanja. Usporedna naprezanja za četiri navedena slučaja jesu:

$$\begin{aligned} a) \sigma_{usp1} &= \sigma_1, \\ b) \sigma_{usp2} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3), \\ c) \sigma_{usp3} &= \sigma_1 - \sigma_3, \\ d) \sigma_{usp4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (69a)$$

Općenito mora biti

$$\sigma_{uspi} \leq \sigma_{dop}. \quad (69b)$$

Hipoteza najvećeg tangencijalnog naprezanja zapravo je Tresca-Saint Venantov uvjet plastičnog tečenja, a hipoteza o najvećem deformacijskom radu na promjeni oblika (distorzijskom radu) odgovara Huber-Hencky-Misesevu uvjetu plastičnog tečenja. Od svih je hipoteza o lomu hipoteza o najvećem distorzijskom radu najadekvatnija za praktične primjene.

Ako se tenzori naprezanja i deformacije rastave u sferne i devijatorske dijelove, tada se i elementarni deformacijski rad može rastaviti u volumetrijski i distorzijski dio, pa je

$$dA_v = \sigma_s de; \quad dA_F = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (70)$$

Huber i Hencky pretpostavljaju da hidrostatički tlak  $\sigma_s$  ne može porasti iznad svake granice bez loma i da izotropni (hidrostatički) vlak ne utječe na plastično tečenje, ali može izazvati lom prekoračenjem molekularne kohezije materijala. Ako to nije prekoračeno, materijal će se slomiti zbog toga što deformacijski rad na promjeni oblika prekoračuje neki maksimalan iznos.

Zajedničko je za sve hipoteze o lomu da se u njima ne javlja brzina deformacije; to su potpuno statički slučajevi. Međutim, pokusi s veoma brzim uređajima za ispitivanje materijala pokazali su da brzina deformacije ima, npr. u čelika, velik utjecaj. Zbog toga su M. Reiner i K. Weissenberg predložili *termodinamičku teoriju otpornosti materijala* koja obuhvaća Huber-Hencky-Misesevu hipotezu kao poseban slučaj.

Promatrajući prvi zakon termodinamike oni su izveli zaključak da lom zavisi od maksimalne vrijednosti slobodne unutrašnje energije  $\Phi_T$ . Prema toj teoriji lom nastupa kada je

$$\Phi_T = \int_0^T (\dot{W} - \dot{D}) dt > R, \quad (71)$$

gdje je  $W$  deformacijski rad,  $D$  disipirana energija,  $T$  apsolutna temperatura, a  $R$  konstanta materijala koja se može nazvati *modulom otpornosti*. Točkicama su naznačene derivacije po vremenu. Ta je teorija verificirana na primjerima elastičnog tijela, viskozno fluida, Kelvinova i Maxwellova tijela.

Nosivost konstruktivnog sustava danas se promatra također i *analizom graničnih stanja*. Smatra se da prekoračenjem tih stanja sustav postaje nepodoban za primjenu.

Granična se stanja razvrstavaju u tri kategorije:

1. *Stanje granične ravnoteže* koje odgovara maksimalnoj nosivosti konstrukcije može biti dostignuto: a) gubitkom ravnoteže jednog dijela ili cijele konstrukcije tretirane kao kruto tijelo; b) lomom ili prekomjernim plastičificiranjem kritičnih presjeka konstrukcije zbog prekoračenja otpornosti materijala; c) pretvaranjem konstrukcije u kinematički labilan mehanizam; d) izvijanjem u elastičnom ili plastičnom području; e) dinamičkom nestabilnošću.

2. *Uvjetna granična stanja* razvrstavaju se u dvije grupe: a) stanja granične ravnoteže uvjetovana slučajnim djelovanjem (eksplozija, udar od vozila, nestandardni uvjeti i dr.); b) stanja granične ravnoteže uvjetovana požarom.

3. *Stanja granične upotrebljivosti* nastaju: a) zbog prekomjerno velikih pomaka koji utječu na izgled ili funkcionalnost konstrukcije; b) zbog lokalnih oštećenja, pa su zbog toga potrebni posebni radovi za održavanje konstrukcije; c) zbog izraženih vibracija koje uzrokuju nesigurnost ili neugodnost.

**Statička i dinamička čvrstoća, zamor materijala.** Ispitivanjem standardnih pokusnih tijela (zategnuta gređica, kocka ispitivana na udar, valjak ispitivan na tlak, tanka cijev ispitivana na torziju i dr.) utvrđuje se statička i dinamička čvrstoća materijala.

*Statička čvrstoća* materijala odgovara maksimalnom naprezanju koje se može postići opterećivanjem pokusne gređice u uređaju za ispitivanje materijala (vlak, tlak, posmik, torzija). Ako se u takvu uređaju povećava naprezanje uzorka jednoliko od nule do loma (npr. za betonske kocke u svakoj seriji za  $\Delta\sigma = 5$  MPa), dobiva se statička čvrstoća ispitivanog materijala. Statičke čvrstoće nisu različite samo za različite materijale, već i za isti materijal, ali za različite vrste naprezanja i u različitim uvjetima. Tako, npr., beton ima vlačnu čvrstoću  $\beta_v$  bitno manju od tlačne čvrstoće  $\beta_t$ . Na rezultate pokusa isto tako utječe veličina i oblik pokusnog tijela. Na primjer, manje kocke betona imaju veću tlačnu čvrstoću nego veće, a vitke prizme manju nego kocke. Osim toga, i trajanje pokusa isto tako utječe na rezultate: čvrstoća pri kratkotrajnim pokusima veća je nego pri dugotrajnima.

Statička čvrstoća je ponekad oznaka za tzv. dobrotu građevnog materijala. Na primjer, beton MB 30 ima minimalnu čvrstoću  $\beta_{KN} = 3 \text{ kN/cm}^2 = 30 \text{ MPa}$ ; čelik Č.0361 ima minimalnu vlačnu čvrstoću od  $37 \text{ kN/cm}^2 = 370 \text{ MPa}$ , itd.

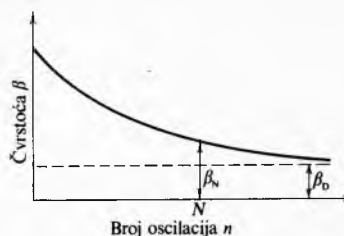
U tabl. 1 nalaze se podaci o statičkoj čvrstoći nekih građevnih materijala za karakteristične vrste naprezanja.

Tablica 1  
STATIČKE ČVRSTOĆE NEKIH MATERIJALA

Materijal	Statičke čvrstoće za neka naprezanja, MPa			
	Vlak ( $\beta_v$ )	Tlak ( $\beta_t$ )	Savijanje	Posmik
Građevni čelik Č.0361	370...450	$\geq 240$	370...450	300...360
Građevni čelik Č.0561	520...620	$\geq 360$	520...640	400...500
Ljevano željezo	110...180	$\sim 750$	$\sim 2\beta_v$	240...250
Crnogorično drvo, paralelno s vlaknima	60	$\sim 30$	$\sim 45$	$\sim 4,5$
Crnogorično drvo okomito na vlakna		80		20
Granitni kamen		110...200		
Pješčani kamen	$\sim \frac{1}{25}\beta_t$	60...110	$\sim \frac{1}{6}\beta_t$	
Puna opeka M15		$\geq 15$		$\sim \frac{1}{13}\beta_t$
M 5 u vapnenoj žbuci		$\sim 3$		
M 5 u cementnoj žbuci		$\sim 4$		
Beton za temelje		5...20	$\sim \frac{1}{5}\beta_t$	$\sim \frac{1}{8}\beta_t$
Armirani beton		20...60		

*Dinamička čvrstoća.* Ako je neka konstrukcija podvrgnuta vremenski promjenljivom (dinamičkom) opterećenju (npr. most, kranska staza i dr.), potrebno je poznavati osim statičke i dinamičku čvrstoću. Pri dimenzioniranju to se obično uzima u obzir uvođenjem *dinamičkih koeficijenata*.

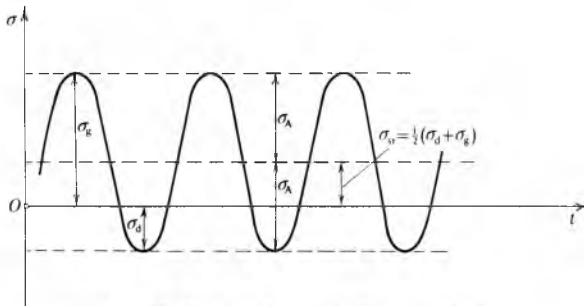
Dinamička čvrstoća nekog materijala dobiva se eksperimentom pomoću oscilatornog opterećenja, kojim se određuje zavisnost između čvrstoće i broja oscilacija. Tako dobiven dijagram zove se *Wöhlerova krivulja* koja daje graničnu vrijednost čvrstoće (*dinamička čvrstoća  $\beta_D$* ) nakon beskonačno mnogo oscilacija (sl. 17). U praksi obično zadovoljava podatak za određeni konačni broj oscilacija, npr. za čelik  $n = 2 \cdot 10^6$ .



Sl. 17. Zavisnost čvrstoće materijala i broja oscilacija pri promjenljivom opterećenju

Kad se ispituje dinamička čvrstoća, razlikuju se neki karakteristični slučajevi harmonijski promjenljivih opterećenja:

a) Čvrstoća pri proizvoljnom harmonijskom opterećenju (sl. 18). To je najveće naprezanje koje pokusni uzorak izdrži bez loma ako se opterećuje s beskonačno mnogo ciklusa pri proizvoljnom srednjem naprezanju  $\sigma_{sr}$  i proizvoljnim amplitudama  $\sigma_A$ .



Sl. 18. Harmonijski promjenljivo opterećenje

Ta je čvrstoća određena izrazom

$$\beta = \sigma_{sr} \pm \sigma_A \quad (72)$$

b) Čvrstoća pri oscilatornom opterećenju kada je  $\sigma_{sr} = 0$ . Tada se čvrstoća dobiva iz izraza

$$\beta = \pm \sigma_A \quad (73)$$

c) Čvrstoća pri osnovnom harmonijski promjenljivom opterećenju kada je  $\sigma_d = 0$ , pa je tada

$$\beta = 2\sigma_A \quad (74)$$

Zamor materijala fenomen je zavisan od vremena, a odnosi se na ponašanje materijala koji je podvrgnut oscilatornom opterećenju duže vremena. Zbog takva opterećenja može nastupiti lom, iako je maksimalno naprezanje niže od granične otpornosti materijala. U točkama s visokim naprezanjima može se formirati prslina (to može biti na nekoj površinskoj ogrebotini ili zbog defekta u materijalu). Kad se ponavlja opterećenje, prslina se povećava sve dok se ne iscrpi nosivost materijala. Fenomen zamora osobito je izražen ako zbog geometrijskog oblika tijela postoje na nekim mjestima koncentracije naprezanja (npr. zarezi, otvori, nagle promjene oblika i dr.). Pojava zamora tumači se promjenama u mikrostrukturi materijala zbog dugotrajnih oscilatornih opterećenja.

**Sigurnost, dopušteno naprezanje, koeficijent sigurnosti.** Stvarna naprezanja materijala izgrađenih građevina moraju biti niža od čvrstoće (otpornosti) materijala, odnosno od naprezanja materijala koje odgovara lomu. Između stvarnog naprezanja i naprezanja koje odgovara lomu mora postojati područje sigurnosti. To je potrebno jer se može pojaviti niz nepredvidljivih okolnosti koje mogu ugroziti konstrukciju. To su pretpostavke o opterećenju koje su ponekad veoma grube, pretpostavke pri izboru statičkog sustava i nedovoljno točni podaci o kvalitetama materijala. Zbog toga se mogu izračunate sile znatno razlikovati od stvarnih sila. Osim toga, građevina nema nikad nosivost kolika je izračunata, jer materijali nemaju točno jednake karakteristike, a često mogu imati i defektna mjesta, na kraju i tehnološki postupak primijenjen pri građenju može imati neželjenih posljedica.

Iz svih tih razloga dopušta se da se u građevinama iskoristi samo dio stvarne čvrstoće, to je tzv. *dopušteno naprezanje*, koje se dobiva dijeljenjem statičke čvrstoće nekim koeficijentom većim od jedan (tzv. *koeficijentom sigurnosti*). Za žilave je materijale dopušteno naprezanje

$$\sigma_{dop} = \frac{1}{v_\beta} \beta, \quad (75)$$

a dopušteno naprezanje može se definirati i prema naprezanju koje odgovara lomu  $\sigma_s$ , pa je tada za krhke materijale

$$\sigma_{dop} = \frac{1}{v_s} \sigma_s, \quad (76)$$

gdje su  $v_\beta$ , odnosno  $v_s$ , koeficijenti sigurnosti prema čvrstoći materijala, odnosno prema lomu. To su brojevi koji su uvijek veći od jedan, a redovito manji od deset.

Za određivanje koeficijenta sigurnosti ne postoji neka određena teorijska podloga. Vrijednost koeficijenta sigurnosti određena je tehničkim propisima za različite konkretne slučajeve (prema vrsti materijala i vrsti naprezanja). Ako je statički proračun neke konstrukcije točniji, a karakteristike su materijala pouzdanije, opravdano je odabrati manji koeficijent sigurnosti.

Ako se koeficijent sigurnosti određuje s obzirom na statičku čvrstoću dobivenu ispitivanjem pokusnih uzoraka, mora se paziti i na neke druge činjenice. U prvom redu čvrstoća uzorka nije jednaka čvrstoći konstruktivnog elementa. Razlika zavisi od oblika uzorka: npr. tlačna se čvrstoća betona određuje tlačnjem kocaka, a konstruktivni elementi mogu biti vitke prizme, pa im se čvrstoća razlikuje. Važna je i veličina uzorka. Osim toga, statička se čvrstoća uglavnom određuje kratkotrajnim pokusom. Međutim, građevine su predviđene da traju mnogo godina. Zbog toga treba računati s nešto većim koeficijentom sigurnosti. Uz to treba uzeti u obzir i moguće dinamičko opterećenje, pa ako nije primijenjen i dinamički koeficijent ili koeficijent udara, treba i to uklopiti u koeficijent sigurnosti.

Uzorci se u uređajima za ispitivanje ispituju često jednoosnim naprezanjem. Međutim, u građevinama postoje ne samo jednoosno već i ravninsko i prostorno naprezanje, pa pojam dopuštenog naprezanja nije a priori određen, nego su neki drugi fenomeni mjerodavni za ocjenu sigurnosti konstruktivnog elementa. To su već spomenute hipoteze o lomu.

Određivanje dopuštenog naprezanja pomoću statičke čvrstoće zahtijeva za neke materijale, kao npr. za čelik, još jednu dopunu. Za čelične ili armiranobetonske konstrukcije ne mora se dopušteno naprezanje određivati lomom čeličnog nosača ili kidanjem armature: zbog žilavosti čelika mogu nastupiti tako velike trajne (plastične) deformacije da građevina zbog toga postaje neupotrebljiva. Tada se definira dopušteno naprezanje kao omjer granice razvlačenja  $\sigma_T$  i pripadnog koeficijenta sigurnosti, pa se ne govori o sigurnosti prema lomu konstrukcije, već o sigurnosti prema njejoj neupotrebljivosti zbog tečenja.

*Primjeri koeficijenata sigurnosti nekih najčešće upotrebljavanih građevnih materijala:*

**Čelik Č.0361.** Za taj čelik računa se s vlačnom čvrstoćom  $\beta_v = 370$  MPa i granicom tečenja  $\sigma_T = 240$  MPa. Za aksijalni tlak usvaja se  $\sigma_{dop} = 140$  MPa. Tada je koeficijent sigurnosti prema lomu  $v = 370/140 = 2,643$ , a prema plastičnom tečenju  $v = 240/140 = 1,714$ . Za vlak se usvaja  $\sigma_{dop} = 160$  MPa, pa je koeficijent sigurnosti prema lomu  $v = 370/160 = 2,313$ , a prema plastičnom tečenju  $v = 240/160 = 1,500$ .

**Drvo.** Tlačna je čvrstoća za smjer paralelan s vlaknima  $\beta = 25$  MPa, a dopušteno naprezanje  $\sigma_{dop} = 8,5$  MPa, pa je koeficijent sigurnosti prema tlaku  $v = 2,94$ . Isti koeficijent sigurnosti vrijedi i za vlačnu čvrstoću, dok je za savijanje  $\beta_{sav} = 40$  MPa,  $\sigma_{dop} = 10,0$  MPa, tj.  $v = 4,00$ .

**Armirani beton.** Prema propisima koeficijent sigurnosti za plastičan lom, tj. očekivano otkazivanje presjeka, iznosi  $v = 1,75$ , a za krhki lom, tj. neočekivano otkazivanje presjeka,  $v = 2,10$ . Obje te vrijednosti vrijede za presječne sile koje potječu od opterećenja. Za dodatne presječne sile koje nastaju od skupljanja betona, nejednolikog zagrijavanja, popuštanja oslonaca i sl. računa se s koeficijentom sigurnosti  $v = 1,00$ . Kad se određuje koeficijent sigurnosti, treba uzeti u obzir da su presječne sile u trenutku otkazivanja betona određene pomoću računске vrijednosti tlačne čvrstoće betona  $\beta_{rac}$ . Ta vrijednost iznosi oko 70% nominalne čvrstoće betona  $\beta_{K,nom}$ . Nominalna je vrijednost najmanja vrijednost za tlačnu čvrstoću  $\beta_{K,28}$  (čvrstoća betonske kocke nakon 28 dana). Faktorom  $\beta_{rac}/\beta_{K,nom} = 0,70$  uzeta su u obzir dva utjecaja: a) pokusna tijela su kocke, no radna građevna čvrstoća bliža je čvrstoći dobivenoj ispitivanjem prizme, pa je  $\beta_{pr} \approx 0,85\beta_K$ ; b) pokusna tijela su izložena kratkotrajnom opterećenju, dok je na konstrukciji beton trajno podvrgnut visokim naprezanjima, pa se stoga čvrstoća loma smanjuje za 20%.

Za nearmirani beton koeficijent je sigurnosti  $v = 2,5 \dots 3,0$ .

Za armirani i prednapregnuti beton najčešće se ne računa s dopuštenim naprezanjima, pa se uvode presječne sile koje se dobivaju kada se potpuno iskorištena nosivost presjeka  $S_U$  podijeli zadanim koeficijentom sigurnosti:  $S_{dop} = S_U/v$ . Takav postupak osigurava željenu sigurnost i onda kada naprezanja nisu proporcionalna s opterećenjima, tj. kad ne postoji linearnost.

U posljednje vrijeme pokušava se kao teorijska osnova za analizu sigurnosti primijeniti račun vjerojatnosti. Tada se moraju za sve faktore koji utječu na nesigurnost proračuna uzeti u obzir njihove krivulje učestalosti (krivulje frekvencije) dobivene iz prakse (krivulje učestalosti čvrstoće dobivaju se promatranjem mnogih sličnih građevina). Tada se utvrđuje rezultirajući raspored otpornosti presjeka  $R$ , tj. presječnih sila koje bi presjek mogao primiti, i rezultirajući raspored presječne sile  $S$  koja djeluje na presjek. Ako je  $R < S$ , konstruktivni element otkazuje. Broj takvih slučajeva u usporedbi s ukupnim brojem konstruktivnih elemenata mora biti dovoljno malen. Ako se razmatra neočekivano otkazivanje (npr. krhki lom zategnutog drveta ili čelika, ili pritisnutog betona, prolom, izvijanja i sl.), tolerira se vjerojatnost otkazivanja  $w = 10^{-6} \dots 10^{-8}$ , tj. od  $10^6 \dots 10^8$  sličnih konstruktivnih elemenata može otkazati najviše jedan. Vjerojatnost otkazivanja zbog velikih plastičnih deformacija ne smije biti veća od  $w = 10^{-5} \dots 10^{-6}$ , a vjerojatnost otkazivanja zbog nezadovoljavajućeg ponašanja pod stvarnim opterećenjem (prsline u armiranom betonu, vibracije, veliki progibi i dr.) ne smije biti veća od  $w = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ .

Koeficijent sigurnosti zadržava svoj smisao i kad se primjenjuje teorija vjerojatnosti. Tada je taj koeficijent definiran kao količnik dviju karakterističnih vrijednosti

$$v = \frac{R_k}{S_k} \tag{77}$$

gdje je  $R_k$  karakteristična otpornost presjeka, a  $S_k$  karakteristična presječna sila koja djeluje na presjek.

Prema međunarodnim propisima za beton (Comité Euro-International du Béton — CEB, 1979) smatra se da kvaliteta materijala mora biti određena prema statistički definiranim karakterističnim vrijednostima jednog ili više svojstava (npr. otpornost, deformabilnost). Pri tom se svojstva materijala određuju ispitivanjem uzoraka za vrijeme proizvodnje materijala ili na gradilištu.

Usvaja se da je dovoljan prikaz karakteristične vrijednosti pomoću izraza

$$X_k = F^{-1}(p_k) = m \pm k\sigma, \tag{78}$$

gdje je  $X_k$  karakteristična vrijednost,  $F^{-1}(p_k)$  inverzija funkcije vjerojatnosti  $F(x)$ ,  $p_k$  vjerojatnost za  $X_k$  da nije dostignut ili prekoračen,  $m$  srednja vrijednost populacije,  $\sigma$  standardna devijacija populacije, a  $k$  standardizirana varijabla za vrijednost  $p_k$  iz  $F$ .

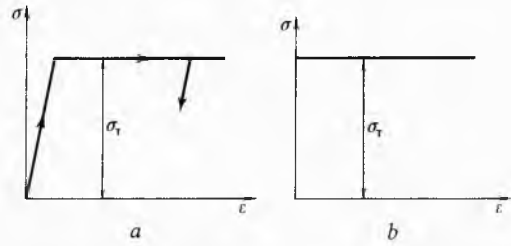
Kao karakterističnu vrijednost otpornosti materijala  $X_k$  treba uzeti onu vrijednost za koju se očekuje da će samo mali postotak svih mogućih vrijednosti otpornosti biti manji od nje.

Teorija vjerojatnosti uvodi se danas sve više u proračun armiranobetonskih i drugih konstrukcija, služeći se pri tom metodama statističke matematike i teorije vjerojatnosti, na osnovi ispitivanja mnogih uzoraka.

**Teorija granične ravnoteže (teorija loma).** Dostizanje naprezanja koje je za promatrani materijal kritično u nekoj točki konstruktivnog elementa ne znači i lom toga elementa; ponekad i pojava znatnijih plastičnih deformacija čitavog konstruktivnog dijela ne mora značiti i lom čitave konstrukcije. Prema tome, sigurnost s obzirom na neko kritično naprezanje nije kriterij za sigurnost čitave konstrukcije. Zbog toga se u posljednje vrijeme za sve materijale i konstrukcije prelazi na dimenzioniranje zasnovano na razmatranju loma konstrukcije. Taj se postupak zove *metoda granične ravnoteže*, zasnovana na procjeni trenutka ili stanja kad statička ravnoteža unutrašnjih i vanjskih sila prestaje biti stabilna, tj. kad se zbog stvaranja plastičnih zglobova nosivi sustav pretvara u kinematički labilan

mehanizam, pa se tada naglo pojavljuju velike deformacije, odnosno lom konstrukcije.

Tada se prelazi u područje plastičnosti, pa kao model materijala služi *linearno elastično-idealno plastično tijelo* (sl. 19a). U fazi rasterećenja usvaja se da je dijagram naprezanje—dilatacija isti kao i za linearno elastično tijelo. Na osnovi takva modela izgrađena je teorija elastoplastičnosti, pogodna za mnoge praktične primjene.



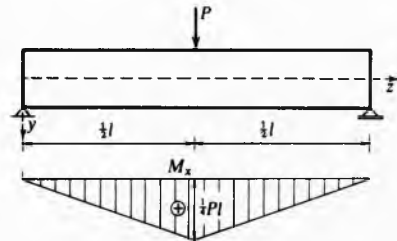
Sl. 19. Dijagram zavisnosti naprezanja i relativne dilatacije. a) linearno elastično-idealno plastično i b) kruto-idealno plastično materijala

Često se kao model materijala u teoriji plastičnosti usvaja *kruto-idealno plastično tijelo*, pa se zanemaruju deformacije od naprezanja koja su manja od granice plastičnog tečenja (sl. 19b).

Kad se dimenzionira prema teoriji granične ravnoteže (ili teoriji loma), potrebno je odrediti granično opterećenje, pri kojemu se nosivi sustav zbog stvaranja plastičnih zglobova pretvara u kinematički labilan mehanizam. Kad je granično opterećenje  $P^*$  poznato, onda se maksimalno dopušteno opterećenje može dobiti dijeljenjem graničnog opterećenja faktorom sigurnosti  $v$ , pa je

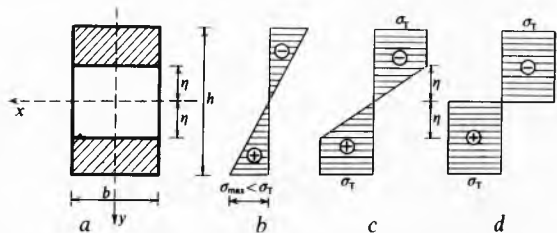
$$P_{dop} = \frac{1}{v} P^* \tag{79}$$

Neka se kao primjer promatra slobodno oslonjena greda pravokutnoga poprečnog presjeka, opterećena u sredini raspona koncentriranom silom  $P$  (sl. 20). Na istoj slici nacrtan je i dijagram momenta savijanja.



Sl. 20. Slobodno oslonjena greda, koncentrirano opterećena, i dijagram momenta savijanja

Dok je sila  $P$  tolika da je rubno naprezanje u presjeku  $z = l/2$ , gdje je moment savijanja najveći, manje od naprezanja  $\sigma_T$  na granici tečenja, dijagram normalnog naprezanja ima po visini poprečnog presjeka nosača oblik prikazan na sl. 21b. Ako se sila  $P$  povećava, presjek prelazi djelomično u plastično područje (sl. 21a), a normalno naprezanje ima dijagram prema slici 21c. Tada još postoji i elastična jezgra visine  $2\eta$  (sl. 21a).



Sl. 21. Greda sa sl. 20 ponaša se po presjeku prema jakosti sile  $P$ . a) presjek s elastičnom jezgrom visine  $2\eta$  koja se ponaša elastično, a ostali dio presjeka ponaša se plastično. Dijagram normalnog naprezanja za različite jakosti sile: b) za silu koja na rubu uzrokuje naprezanje manje od  $\sigma_T$ , c) za veće sile postoji još elastična jezgra, d) za još veće sile cijeli presjek postaje plastičan

S daljim porastom sile  $P$  nestaje elastična jezgra, a dijagram naprezanja ima u neutralnoj osi diskontinuitet (sl. 21 d). Tada je cijeli presjek plastificiran, pa takav presjek ne pruža nikakav otpor deformaciji nosača i ponaša se kao zglobov (plastičan zglobov). Time se statički određen nosač pretvara u kinematički labilan mehanizam. Plastična deformacija nije spriječena, ona se povećava progresivno i neograničeno sve do loma. Sustav više nije sposoban da nosi, pa se već i pri neznatnom povećanju opterećenja nosač lomi. Opterećenje  $P^*$ , koje odgovara pojavi labilnog mehanizma, naziva se *graničnim opterećenjem nosača*.

Statički određeni sustavi nemaju rezervu nosivosti: s dostizanjem prvoga plastičnog zgloba dostignuta je i njihova granična nosivost.

Stanje koje neposredno prethodi pokretanju već ostvarenog mehanizma zove se *stanje granične ravnoteže*. To je stanje osnova za dimenzioniranje: pri dimenzioniranju se traži da stvarno opterećenje bude manje od graničnog opterećenja, pa je dopušteno naprezanje, kako je već napomenuto, određeno izrazom (79). Tada je (za nosač na sl. 20) granični moment

$$M^* = \frac{1}{4} P^* l. \quad (80)$$

Ako se taj moment izjednači s momentom unutrašnjih sila  $M_u$ , kada je dostignuta puna plastifikacija presjeka (sl. 21 d), bit će

$$M^* = M_u = \sigma_T \frac{1}{2} F \frac{h}{2} = \sigma_T b h^2 / 4. \quad (81)$$

Izraz  $b h^2 / 4$  je statički moment cijele površine presjeka s obzirom na plastičnu neutralnu os pri punoj plastifikaciji, koja se označuje sa  $S_{pl}$ , pa vrijedi da je

$$M^* = \sigma_T S_{pl}. \quad (82)$$

Kombinacijom formula (80) do (82) dobiva se granično opterećenje

$$P^* = \frac{b h^2}{l} \sigma_T. \quad (83)$$

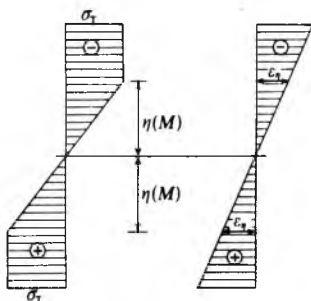
Prema tome, za određivanje graničnog opterećenja  $P^*$  potrebno je, osim geometrijskih podataka  $b$ ,  $h$  i  $l$ , znati još samo vrijednost naprezanja  $\sigma_T$  pri plastičnom tečenju materijala nosača. To je podatak koji se dobiva vlačnim ispitivanjem.

U skladu s jednadžbom (79) dopušteno je opterećenje

$$P_{dop} = \frac{b h^2}{v l} \sigma_T. \quad (84)$$

Granična nosivost ne zavisi od prethodnog opterećivanja, jer se pri punoj plastifikaciji presjeka ne može prekoračiti granični dijagram naprezanja. Diskontinuirani dijagram naprezanja (sl. 21 d) odgovara momentu nosivosti presjeka, a taj moment ne ovisi o prethodnom opterećivanju.

Sve dok postoji elastična jezgra presjeka dijagram je dilatacije linearan (sl. 22), gdje je  $\eta(M)$  veličina elastične jezgre zavisna od momenta  $M$ .



Sl. 22. Dijagram normalnog naprezanja s elastičnom jezgrom visine  $2\eta$ , kad je na rubu jezgre dilatacija  $\epsilon_n$ .

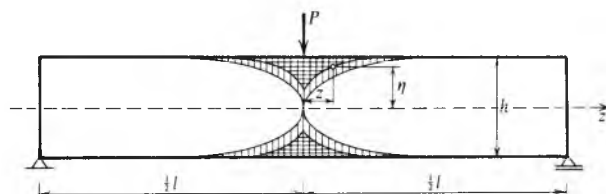
Za promatranu prostu gredu pravokutnoga poprečnog presjeka može se pokazati da vrijednost omjera trenutne vrijednosti momenta savijanja  $M_x(z)$  i graničnog momenta  $M_x^*$  iznosi

$$\frac{M_x(z)}{M_x^*} = 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\eta}{h} \right)^2. \quad (85)$$

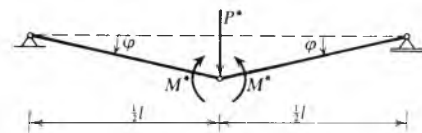
Budući da je  $M_x(z) = \frac{1}{2} P(l-z)$  i  $M_x^* = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_T$ , pa slijedi da je

$$\frac{1}{2} P(l-z) = \left( 1 - \frac{4}{3 h^2} \eta^2 \right) M_x^*. \quad (86)$$

To je jednadžba parabole koja određuje granicu između elastičnog i plastičnog područja po duljini grede (sl. 23). Na istoj je slici nacrtana i parabolična granica između elastične i plastične zone kad se ta granica, za  $P = P^*$ , nalazi u sredini raspona (pojava plastičnog zgloba).



Sl. 23. Elastično i plastično područje po uzdužnom presjeku grede. Kad koordinate točke  $(z, \eta)$  postanu nula, u sredini raspona grede nastaje plastičan zglobov.



Sl. 24. Granično opterećenje za postizanje plastičnog zgloba može se proračunati principom virtualnih radova.

Granično opterećenje može se odrediti i primjenom principa virtualnih radova, kad se rad vanjskih sila uspoređuje s energijom apsorbiranom u plastičnim zglobovima (sl. 24). Tada je

$$P^* \varphi \frac{l}{2} = 2 M^* \varphi, \quad (87a)$$

pa je

$$P^* = \frac{4}{l} M^*. \quad (87b)$$

Vrijednost je  $M^*$  za zadani presjek poznata. Ona npr. za pravokutni presjek iznosi

$$M^* = \frac{\sigma_T b h^2}{4} = \text{const.} \quad (88)$$

*Statički neodređeni sustavi.* Za statički neodređene sustave određivanje graničnog opterećenja mnogo je složenije. Rješenje se dobiva pronalaženjem mehanizma loma, tj. rasporeda plastičnih zglobova po konstrukciji.

U svakom plastičnom zglobovima ima moment savijanja poznatu vrijednost  $M^*$ . Na tom mjestu obrtanje presjeka nije spriječeno, pa stvaranje plastičnog zgloba daje jednu dopunsku elastičnu vezu. U statički neodređenom sustavu to je ekvivalentno zamjeni statički neodređenog momenta  $X$  u tom presjeku poznatim momentom  $M^*$  koji se ne mijenja tako dugo dok ne nastupi rasterećenje. Prema tome, puna plastična nosivost elastoplastične grede postiže se formiranjem toliko plastičnih zglobova koliki je stupanj statičke neodređenosti sustava. Time se dobiva statički određen sustav u kojemu će nosivost biti iscrpljena kada moment u kritičnom presjeku tog sustava dostigne vrijednost graničnog momenta  $M^*$ . Kad je sustav  $n$  puta statički neodređen, nosač se sa  $(n+1)$  plastičnih zglobova pretvara u labilan mehanizam (kinematički lanac) kad u  $(n+1)$  presjeku nisu spriječena okretanja. To je stanje koje odgovara plastičnom lomu konstrukcije, a raspored plastičnih zglobova po konstrukciji zove se *mehanizam loma*.

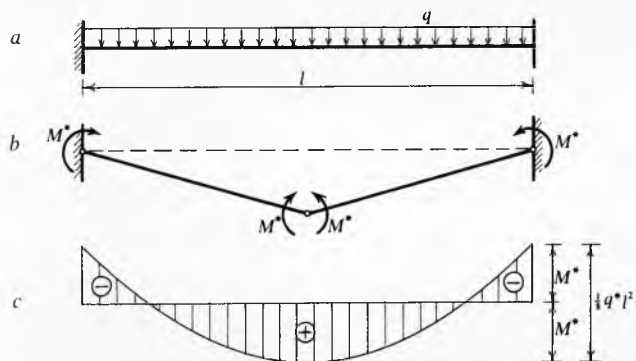
Mehanizam loma može se direktno odrediti samo za jedno-stavnije oblike statički neodređenih sustava. Takav jedan sustav prikazan je na sl. 25 (obostrano upeta greda opterećena jednoliko raspodijeljenim opterećenjem). S porastom opterećenja najprije se stvaraju plastični zglobovi na mjestima uklještenja, čime se dobiva slobodno oslonjena greda. S daljnjim porastom opterećenja stvara se plastičan zglob i u sredini raspona, pa granični moment iznosi

$$2M^* = \frac{1}{8} q^* l^2. \quad (89a)$$

Tada je jednoliko raspodijeljeno kritično opterećenje

$$q^* = \frac{16}{l^2} M^*. \quad (89b)$$

Granično se opterećenje, dakle, određuje iz mehanizma loma. Kad je taj mehanizam poznat, lako se primjenom principa virtualnih radova nalazi kritično opterećenje. Međutim, on redovito nije poznat, pa se problem rješava primjenom dvaju ekstremnih principa, statičkog i kinematičkog.



Sl. 25. Jednoliko opterećena greda, upeta na oba kraja, jest jednostavan, statički neodređen sustav. a skica grede, b raspored za računanje principom virtualnih radova, c dijagram momenata uzduž grede

a) *Statički poučak.* U statički neodređenom sustavu može postojati beskonačno mnogo različitih ravnotežnih stanja. Svako moguće ravnotežno stanje, kad nije prekoračen moment pune plastičnosti, spada u grupu statički mogućih sustava. Statički poučak tada glasi: Ako postoji barem jedna statički moguća raspodjela sila, onda promatrani sustav može prenijeti zadano opterećenje.

Pripadno vanjsko opterećenje  $P_s$  tada nije veće od graničnog opterećenja; od svih mogućih sustava bira se onaj za koji je vanjsko opterećenje  $P_s$  najveće, a to je onda ujedno i sila loma, tj.

$$P^* = \max P_s. \quad (90)$$

b) *Kinematički poučak.* Taj se poučak odnosi na mehanizme loma u koje je moguće pretvoriti nosač.

Mehanizam loma obično nije poznat, ali se može pretpostaviti, pa se za takav pretpostavljeni mehanizam može napisati jednadžba radova, odakle se dobiva neka sila  $P_k$  koja nije i stvarna kritična sila. Kinematički poučak tada glasi: Za zadani sustav i raspored opterećenja vrijednost je opterećenja koje se dobiva iz zadanog mehanizma veća ili jednaka vrijednosti graničnog opterećenja, tj.  $P_k > P^*$ . Tada za sve kinematički moguće mehanizme i za sve moguće nađene sile  $P_k$  vrijedi

$$P^* = \min P_k. \quad (91)$$

Pri tom je kinematički mogući sustav pomaka onaj koji je dozvoljen kinematičkim vezama sustava. Za linijski sustav te su veze zglobovi, pa se dobiva kinematički lanac. Taj mogući sustav pomaka ne smije narušavati rubne uvjete pomaka.

Na temelju obaju poučaka dobiva se

$$P_s \leq P^* \leq P_k. \quad (92)$$

Graničnom opterećenju  $P^*$  odgovara jedan stvarni kinematički mogući sustav pomaka; to je mehanizam koji je kinematički moguć, a osim toga on daje takve unutrašnje sile da ni u jednom presjeku nije poremećen uvjet plastičnosti.

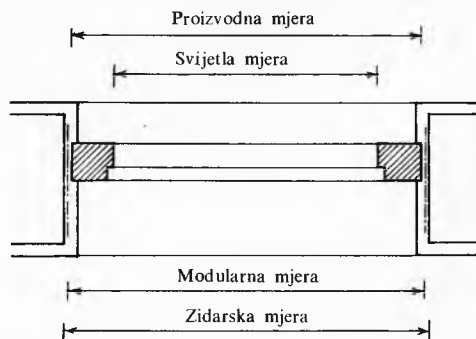
Kad je granično opterećenje poznato, može se odabrati i prikladno dopušteno opterećenje, čime je riješeno i dimenzioniranje nosača. Kao što je već naglašeno, od konstanta materijala potrebno je znati samo naprezanje pri plastičnom tečenju  $\sigma_T$  koje se doznaje eksperimentom, obično pomoću vlačnog ispitivanja pokusne gredice.

Metoda je granične ravnoteže postupak kojim se procjenjuje nosivost čitavog konstruktivnog sustava, bez obzira na lokalno prekoračivanje otpornosti materijala, čime se dobiva logičniji kriterij za dimenzioniranje.

LIT.: A. M. Freudenthal, H. Geiringer, The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Handbuch der Physik, Vol. VI. Springer, Berlin 1958. — M. Réaier, Rheology. Ibid. — B. G. Neal, The Plastic Methods of Structural Analysis. Chapman and Hall, London 1965. — Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций. Наука, Москва 1966. — L. M. Kachanov, Foundations of the Theory of Plasticity. Northholland Publ. Co., Amsterdam-London 1971. — M. Reiner, K. Weissenberg, A Thermodynamic Theory of the Strength of Materials (Sel. Papers on Rheology). Elsevier, Amsterdam 1975. — W. N. Findley, J. S. Lai, K. Onaran, Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. Northholland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford 1976. — W. Wagner, G. Erhlof, Praktische Baustatik, Bd. 2. Teubner, Stuttgart 1977. (Prijevod: Praktična građevinska statika, dio 2. Građevinska knjiga, Beograd 1980). — V. Brčić, Otpornost materijala. Građevinska knjiga, Beograd 1978. — M. J. Marcinkowski, Unified Theory of the Mechanical Behaviour of Water. J. Wiley and Sons, New York 1979.

V. Brčić

**OTVORI,** proboji u stijeni, zidu, ogradi, stropu, podu i krovu, koji mogu biti otvoreni ili zatvoreni s posebnim ugrađenim elementima (prozori, vrata i sl.). Otvor u stijeni i zidu završava s gornje strane ravnim ili lučnim nadvojem koji preuzima opterećenja iznad otvora i prenosi ih na bočna uporišta. Bočno je otvor omeđen špaletama (ostijenjem), na donjoj strani ima parapetni zid koji najčešće nosi naslon i zajedno se naziva parapet, a ako seže do poda, završava pragom. Otvori mogu biti različitih oblika, a najčešće su pačevorinasti. Otvor i elementi koji se u njih ugrađuju označuju se u nacrtima širinom i visinom (u cm), pa se razlikuju sljedeće mjere (sl. 1): *zidarska mjera*, mjera širine i visine zidanog otvora bez žbuke; *proizvodna mjera*, mjera vanjske širine i visine elemenata koji se ugrađuje u otvor; *modularna mjera*, proizvodna mjera povećana za 1 cm; *svijetla mjera*, unutrašnja mjera širine i visine okvira koji je ugrađen u otvor.



Sl. 1. Karakteristične mjere otvora

**PROZORI**

Prozor je drvena, metalna, armiranobetonska, plastična ili kombinirana konstrukcija ugrađena u otvor, s pokretnim ili nepokretnim krilima za osvetljenje i provjetravanje prostorija. On je važan građevni element o kojemu ovisi upotrebljivost zgrade, a njegov oblik, izgled i raspored odlučni su faktori