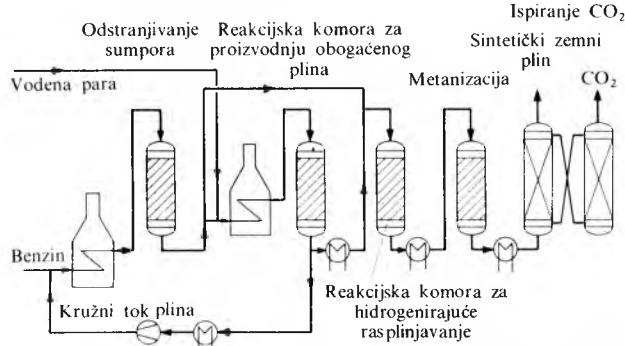


U upotrebi su tri postupka koja se samo u pojedinostima međusobno razlikuju. To su *postupak BASF-Lurgi*, *postupak CRG* (Catalytic Rich Gas) i *postupak MRG* (Methane Rich Gas). Prva postrojenja izgrađena su 1965. godine.

Sintetički zemni plin. Prva postrojenja za proizvodnju sintetičkog zemnog plina u SAD radila su s jednom reakcijskom posudom za proizvodnju obogaćenog plina iza koje su postavljena dva stepena za metanizaciju, uredaj za ispiranje ugljik-dioksida i uredaj za sušenje plina. Maseni omjer vodene pare i benzina iznosio je 2 : 1 ili nešto više. Dodavanjem druge, nakon prve reakcijske posude, postižu se povoljniji odnosi na katalizatoru u drugoj posudi i smanjuje se omjer vodene pare i benzina na 1,1 : 1 do 1,4 : 1. Obično je ulazna temperatura smjese 350...380 °C, a izlazna je temperatura viša za ~100 °C. Zbog toga što se iz prve reakcijske posude dovodi plin bogat vodikom, na katalizatoru druge posude odmah počinje pretežno egzoterna reakcija hidrogeniranja koja sprečava sniženje temperature.

Obogaćeni plin proizведен postupkom s jednom ili sa dvjema reakcijskim komorama najprije se hlađi na ~300 °C, a zatim se odvodi u reakcijsku posudu u kojoj se pod adijabatskim uvjetima metanizira. Upotrebljava se isti katalizator kao za proizvodnju obogaćenog plina. Budući da u plinu ima nerazgrađene vodene pare, govoriti se o vlažnoj metanizaciji. Nakon hlađenja plina i kondenzacije vodene pare može se u drugom stepenu metanizacije (suga metanizacija) još povećati udjel metana. Ta suha metanizacija može se provesti i prije i poslije ispiranja ugljik-dioksida. Postoji više varianata postupka koje se razlikuju prema broju stepena proizvodnje obogaćenog plina i broju stepena metanizacije. Na sl. 28 vidi se shema postrojenja za proizvodnju sintetičkog zemnog plina.



Sl. 28. Shema postrojenja za proizvodnju sintetičkog zemnog plina

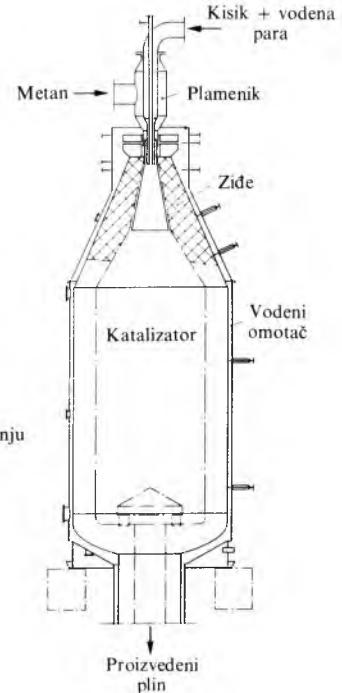
Tipičan je sljedeći volumski sastav proizvedenog plina: 98,5% CH₄, 0,5% CO₂ i 1,0% H₂. Udjel ugljik-monoksida manji je od 0,1%.

Autotermna razgradnja pomoću zraka i kisika. Za autotermnu razgradnju zemnog plina, ukapljenoj plini i benzina potrebne su temperature i tlakovi koji se nalaze između onih potrebnih za razgradnju u cijevnim pećima i za razgradnju djelomičnom oksidacijom. Tipično je područje temperatura za autotermnu razgradnju između 850 i 1000 °C, a tlakova između 2,0 i 4,0 MPa. Autoternom razgradnjom postiže se nešto bolja dje-lovornost procesa (omjer energije u proizvedenom plinu i energije u upotrijebljenom gorivu).

Postoje dva postupka koja se razlikuju prema međusobnom položaju plamenika i katalizatora. U prvoj izvedbi smjesa sirovine, vodene pare i zraka ili kisika iz plamenika dolazi u prazni konični dio reakcijske posude, a samo je donji dio posude ispunjen katalizatorom. U drugoj izvedbi reakcijska smjesa neposredno iz plamenika prodire u katalizator.

Ako smjesa reaktanata odmah prodire u slojeve katalizatora, neće se stvoriti čada i uz nižu temperaturu predgrijanja smjese. Takav postupak omogućuje razgradnju s manje vodene pare i s manjim potroškom kisika, a u proizvedenom je plinu visoki omjer CO/CO₂. Mana je takva postupka veliko termičko i mehaničko naprezanje dijela katalizatora koji je blizu plamenika. Promjene temperature tokom stavljanja u pogon, obustavljanja i promjene opterećenja oštećuju i mrve katalizator, a tome pri-

donosi i velika brzina strujanja plina jer se razgradnjom metana utroštuče volumen plina. Zbog toga treba često dodavati katalizator za vrijeme pogona i skoro svake druge godine prosijati sav katalizator.



Sl. 29. Reakcijska komora za razgradnju zemnog plina

Razgradnja s prethodnim izgaranjem u praznom dijelu reakcijske komore pogodna je kad je u dovedenoj smjesi mali udjel ugljikovodika i veliki udjel vodika, pa nema opasnosti od stvaranja čade. Tada je, međutim, potrošnja kisika veća nego kad smjesa reaktanata odmah prodire u katalizator. Oblik reakcijske komore mora osigurati malu brzinu strujanja plina kroz katalizator (sl. 29). Kao katalizator upotrebljavaju se komadi ili kugle od magnezij-oksida presvučene slojem s velikim udjelom nikla. Udjel nikla preračunat na ukupnu masu katalizatora iznosi 3...6%.

LIT.: Comittee on Chemical Utilization of Coal, Chemistry of Coal Utilization. John Wiley, New York 1950. — W. Gönz, Vergasung fester Brennstoffe, Stoffbilanz und Gleichgewicht. Springer, Berlin 1952. — B. B. Каинорачић, Введение в теорию горения и газификации твердого топлива. Металлургиздат, Москва 1961. — J. Meunier, Vergasung fester Brennstoffe und oxidative Umwandlung von Kohlenwasserstoffen. Verlag Chemie, Weinheim 1962. — J. Schmidt, Technologie der Gaserzeugung. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1964. — H. Witte, Handbuch der Energiewirtschaft, Bd IV. Gasversorgung. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1965. — Академия наук СССР, Институт горючих ископаемых. Химическая преработка топлива. Наука, Москва 1965. — Gasmaking. British Petroleum Co., London 1965. — Catalyst Handbook. Imperial Chemical Industries. Wolseley Scientific Books, London 1970. — J. Schmidt, Technologie der Gaserzeugung. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1974. — J. R. Rostrup-Nielsen, Steam Reforming Catalysts. Teknisk Forlag, København 1975. — J. Falbe, Chemierohstoffe aus Kohle. Thieme, Stuttgart 1976. — K. Kurth-A. Kochs, Grundlagen der Gasanwendung. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1979. — L. Douglas Smoot, D. T. Pratt, Pulverized-Coal Combustion and Gasification. Plenum Press, New York-London 1979. — Advanced Coal Systems. US Department of Energy, 1979.

M. Simonović H. Požar

PLOČE, GRAĐEVINSKE, konstrukcijski elementi koji se često primjenjuju u građevinarstvu za stropne i krovne konstrukcije, u mostogradnji i drugdje.

Ploča je, u geometrijskom smislu, tijelo omeđeno dvjema paralelnim ravninama i cilindričkim plohama kojima su izvodnice okomite na te ravnine. Debljina ploče jednaka je razmaku paralelnih ravnina i ona je malena u usporedbi s dimenzijama osnovice. Ravnina koja raspolaže debljinu ploče naziva se srednjom ravninom ploče.

U teoriji građevinskih konstrukcija pločom se smatra ravninska ploščinska konstrukcija koja ima malu debljinu u usporedbi s dimenzijama osnovice i koja je opterećena okomitno na srednju ravninu. Da bi se pojednostavila analiza, pretpostavlja se da je debljina ploče zanemarljivo malena, ali, zapravo, ploča ne smije biti toliko tanka da ne bi mogla ispunjavati svoju funkciju, odnosno debljina ploče mora ipak biti tolika da su progibi maleni u usporedbi s debljinom.

Ploče od materijala koji u svim točkama i u svim smjerovima ima jednaka mehanička svojstva nazivaju se izotropnima, a kad materijal nema spomenuta svojstva, anizotropnim pločama. Rebraste ploče od dvaju međusobno okomitih nizova rebara nazivaju se ortogonalno-anizotropnima, odnosno ortotropnim pločama kad rebra ili razmaci među njima nisu jednaki.

Ploče su oslonjene površinski, a u graničnim slučajevima točkasto ili linijski. Linijski ležaj može biti jednostran (monolateralan) i dvostran (bilateralan). Jednostrani ležaj ne može preuzimati vlačne ležajne sile, pa je moguće odvajanje ploče od ležaja. Dvostrani linijski ležaj može preuzeti i vlačne i tlačne ležajne sile, pa odvajanje ploče od ležaja nije moguće. Linijski ležaj može biti izведен tako da se u smjeru okomitom na ležaj može zakretati i tako da je zakretanje ležaja moguće. Ležaj koji se može zakretati zove se prosti ležaj, a onaj koji se ne može zakretati upeti ležaj.

Najčešće su ploče od armiranog betona, a mogu biti masivne i rebraste. Od čeliča i drva grade se rešetkaste ploče. Posebna vrsta ploča jesu višeslojne ploče (sendvič-ploče) koje se sastoje od gornje i donje membrane između kojih je jezgra koja ih povezuje.

S obzirom na smjer prijenosa opterećenja ploče mogu biti jednosmjerne i dvosmjerne. Jednosmjerne ploče prenose opterećenje samo u jednom smjeru, i to u smjeru raspona, a dvosmjerne u dva smjera, a tim i u svim smjerovima.

MASIVNE I REBRASTE JEDNOSMJERNE PLOČE

Pravokutna ploča, koja je oslonjena ili upeta uzduž duljih rubova i jednoliko opterećena, savija se cilindrično osim u neposrednoj blizini kraćih rubova. Progibna ploha ima cilindrički oblik s izvodnicama paralelnim s duljim rubovima ploče. Takva ploča prenosi opterećenje samo u smjeru okomitom na poduprte rubove, tj. u smjeru raspona, a naziva se jednopoljnog jednosmjernom pločom.

Ako se takva masivna ploča zamisli rasječena u trake u smjeru raspona, prijenos se opterećenja ne mijenja, jer svaka traka djeluje kao greda i prenosi svoje opterećenje na ležaje. Trake utječu jedna na drugu samo sprečavanjem međusobne dilatacije. Kad bi, naime, trake bile samostalne, odnosno kad ne bi postojalo međusobno djelovanje, one bi se iznad neutralnog sloja bočno proširile zbog djelovanja tlačnih uzdužnih naprezanja, dok bi se ispod neutralnog sloja bočno sruzelje. To se, međutim, ne događa, jer su trake međusobno spojene, pa se bočne dilatacije ne mogu pojaviti. Te dilatacije poništavaju poprečni momenti savijanja koji djeluju u smjeru okomitom na raspon. Poprečni moment savijanja u bilo kojoj točki ploče jednak je umnošku Poissonove značajke materijala (μ) i uzdužnog momenta (za armirani beton $\mu \approx 1/6$).

Osim toga, zamišljene trake masivne ploče i grede imaju različitu fleksijsku krutost. Krutost grede prema savijanju jednak je umnošku modula elastičnosti E i momenta tromosti I , dok je krutost trake određena cilindričkom krutošću koja se dobiva množenjem umnoška EI sa faktorom $1/(1 - \mu^2)$ koji je veći od jedinice.

Pri analizi masivnih jednosmjernih ploča promatra se traka jedinične širine (obično široka 1 m). Tada momenti savijanja imaju dimenziju sile (npr. $kNm/m = kN$), a poprečne sile i reakcije u ležajima dimenzije sile/duljina (npr. kN/m). Poprečni se momenti savijanja ne izračunavaju, a vlačne se sile koje oni uzrokuju preuzimaju razdjelnom armaturom. Izbor poprečnog presjeka i raspodjela razdjelne armature određen su propisima za dimenzioniranje armiranog betona. Razlike su između fleksijske krutosti i cilindričke krutosti neznatne. Zbog toga se pri provjeri progiba ploča računa s fleksijskom umjesto sa cilindričkom krutošću.

Pri analizi rebrastih jednosmjernih ploča promatra se traka širine jednakre razmaku rebara.

Obično se zanemaruje okvirno djelovanje armiranobetonskih ploča sa zidovima i djelomično uklještenje njihovih ležajnih presjeka zbog torzijske krutosti greda.

Najčešće se osni razmak ležaja smatra rasponom jednopolnih i višepolnih jednosmjernih ploča. Pri tom se pretpostavlja da se os vanjskih ležaja nalazi na udaljenosti od unutrašnjeg ruba ležaja koja iznosi 2,5% od svjetlog raspona krajnjih polja.

Sve su jednosmjerne ploče, osim onih koje su na oba kraja oslonjene na proste ležaje (prosta ploča), hiperstatičke, odnosno statički neodređene (v. *Mehanika*, TE 8, str. 3). Ležajni momenti hiperstatičkih ploča određuju se metodama elastostatike ili metodama plastostatike.

Elastostatika se osniva na promatranju ponašanja ploča pri malom opterećenju i zbog toga pri malim deformacijama. Ležajni momenti određuju se metodom sila ili nekom iterativnom metodom. Primjenom elastostatičkih metoda dobivaju se preveliki ležajni momenti i premali poljni momenti.

Plastostatika se osniva na promatranju ponašanja ploča pri velikom, odnosno lomnom opterećenju kad se plastificiraju najnapregnuti presjeci i kad ploča prelazi u stanje mehanizma (v. *Mehanizmi*, TE 8, str. 319). Osnovna je pretpostavka plastostatike da je materijal dovoljno rastezljiv. Plastostatika ima u praksi prednost pred elastostatkicom. Pogodnim armiranjem, naime, može se utjecati na raspodjelu momenata savijanja uzduž raspona ploče, statički je proračun jednostavniji, a postiže se veća sigurnost i ekonomičnost.

Pri proračunu se pretpostavlja da ploča prenosi opterećenje samo savijanjem. Ta pretpostavka odgovara stvarnosti kad su svi ležaji ploče, osim jednoga, pomični u smjeru raspona. Ako su, međutim, ležaji u smjeru raspona nepomični, dio opterećenja ploča prenosi djelovanjem svoda (svodno djelovanje) i pri tom se pojavljuju veliki horizontalni potisci na ležaje. Ti se potisci u unutrašnjim ležajima višepolne ploče poništavaju ako su susjedni rasponi jednakci, pa se može smatrati da se svodno djelovanje pojavljuje i kad su ležaji pomični.

Faze odziva masivnih armiranobetonskih ploča. S porastom opterećenja odziv ploče na opterećenje ima dvije faze. U prvoj fazi, *faza elastičnog odziva ploče*, kad je opterećenje malo, naponi i deformacije proporcionalni su opterećenju. Faza elastičnog odziva završava kad je dostignuto opterećenje (q_{el}) uz koje se plastificira najnapregnuti presjek ploče. Moment savijanja u tom presjeku dostigao je maksimalnu vrijednost koja se naziva plastičnim momentom ploče. U elastostatiku to se opterećenje smatra graničnim, pa se i koeficijent sigurnosti odnosi na to stanje. S porastom opterećenja počinje druga faza, *faza plastičnog odziva ploče*, koja je karakterizirana redistribucijom unutrašnjih sila, čime se ploča adaptira novom stanju. U presjeku koji je plastificiran uz opterećenje q_{el} moment savijanja ostaje konstantan, jer ne može postati veći od momenta koji odgovara plastičnom stanju (plastični moment), dok momenti u drugim presjecima rastu. S porastom opterećenja plastificira se još jedan presjek koji je s obzirom na susjedne najviše napregnut, pa još jedan itd. Plastificiranje presjeka kinematički znači formiranje *plastičnog zglobova*, pa opterećenje može rasti samo dotele dok se ne plastificira toliko presjeka, odnosno dok se ne formira toliko plastičnih zglobova da ploča postane kinematički labilna, što znači da je postala *mehanizam s jednim stupnjem slobode gibanja* (v. *Mehanizmi*, TE 8, str. 319). Opterećenje uz koje je postignuto takvo stanje ploče naziva se *lomnim opterećenjem*.

Formiranjem prvog plastičnog zglobova u prostoj ploči postignuto je lomno opterećenje. Kad je ploča jedanput statički neodređena (jedanput hiperstatička ploča), lomno je opterećenje postignuto formiranjem dvaju plastičnih zglobova. Općenito, dakle, za n puta statički neodređenu ploču pojavit će se $n + 1$ plastični zglob uz lomno opterećenje.

Granično stanje ploče, promatranjem plastičnih pojava, obuhvaća i pojam loma i koeficijente sigurnosti koji se odnose na to stanje. Pri tom razmatranju uzima se u obzir povećana

nosivost koja se postiže redistribucijom sila, što omogućuje adaptaciju ploče. Zbog toga se primjenom plastostatičkih metoda proračuna omogućuje ekonomičnije građenje nego primjeno elastostatičkih metoda.

Prosti i konzolni momenti ploče. Prosti moment nekog polja j kontinuirane ploče sa n polja (sl. 1) jednak je momentu savijanja proste ploče koja je oslonjena i koja ima jednaki raspon i jednako opterećenje kao polje j . Ako je opterećenje jednolik rasподijeljeno uzduž cijelog raspona, prosti moment na udaljenosti c_j od lijevog ležaja iznosi

$$m_{jc}^{\circ} = \frac{1}{2} q_j l_j c_j \left(1 - \frac{c_j}{l_j}\right), \quad (1a)$$

gdje je q_j opterećenje po jedinici duljine, a l_j raspon polja j . Prosti je moment u polovištu raspona ($c_j = l_j/2$)

$$m_j^{\circ} = \frac{1}{8} q_j l_j^2. \quad (1b)$$

Momentna linija je parabola drugog stupnja s tjemennom u polovištu raspona.

Ako ploča na lijevom ili desnom kraju ima prepust (konzolu), moment savijanja nad prvim ležajem iznosi

$$m_1 = -\frac{1}{2} q_{1k} l_{1k}^2, \quad (2a)$$

gdje je q_{1k} opterećenje po jedinici duljine lijeve konzole, a l_{1k} duljina lijeve konzole, dok je moment savijanja nad posljednjim ležajem

$$m_{n+1} = -\frac{1}{2} q_{nk} l_{nk}^2, \quad (2b)$$

gdje je q_{nk} opterećenje po jedinici duljine desne konzole. Momenti m_1 i m_{n+1} nazivaju se konzolnim momentima ploče.

Medusobni odnosi poljnog i susjednih ležajnih momenata te prostog momenta. U stanju ravnoteže polja j ploče (sl. 2a) vrijedi relacija

$$m_{jl} + \left(1 - \frac{c_j}{l_j}\right) |m_j| + \frac{c_j}{l_j} |m_{j+1}| = m_{jc}^{\circ}, \quad (3)$$

gdje je m_{jl} maksimalni moment savijanja u polju j (poljni moment polja j), m_j i m_{j+1} momenti savijanja nad ležajem j i $j+1$ (ležajni momenti ležaja j i $j+1$), c_j udaljenost od lijevog ležaja na kojoj djeluje moment m_{jl} , l_j raspon polja j , a m_{jc}° prosti moment prema izrazu (1a). Udaljenost c_j izračuna se iz izraza

$$c_j = \frac{l_j}{2} + \frac{m_{j+1} - m_j}{q_j l_j}, \quad (4)$$

koji je određen iz uvjeta da je derivacija momenta savijanja po udaljenosti od lijevog ležaja jednaka nuli.

Kad ploča ima jednake ili približno jednake raspone unutrašnjih polja, tj. kad je $1 < j < n$, vrijednosti se ležajnih momenta mnogo ne razlikuju, pa se uz dovoljnu točnost može pretpostaviti da poljni moment (m_{jl}) djeluje u polovištu raspona. Tada je $c_j \approx l_j/2$, pa se iz (3) dobiva

$$m_{jl} + \frac{|m_j| + |m_{j+1}|}{2} = m_{jc}^{\circ}, \quad (5)$$

gdje je m_{jc}° prosti moment u polovištu raspona prema izrazu (1b).

Za prvo polje ($j = 1$, sl. 2b) iz izraza (3) i (4) slijedi

$$m_{1l} + \frac{c_1}{l_1} |m_2| = m_{1c}^{\circ}, \quad (6a)$$

$$c_1 = \frac{l_1}{2} + \frac{m_2}{q_1 l_1}, \quad (6b)$$

jer je $m_1 = 0$. Analogno vrijedi za posljednje polje ($j = n$)

$$m_{nl} + \left(1 - \frac{c_n}{l_n}\right) |m_n| = m_{nc}^{\circ}, \quad (7a)$$

$$c_n = \frac{l_n}{2} - \frac{m_n}{q_n l_n}, \quad (7b)$$

jer je $m_{n+1} = 0$.

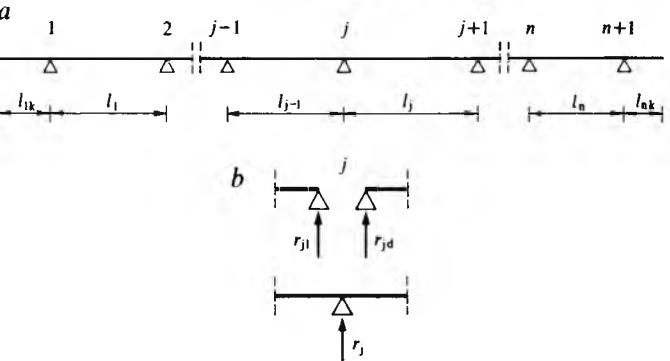
Poljni momenti i reakcije. Nakon što su elastostatičkim ili plastostatičkim metodama određeni ležajni momenti ploče, poljni se momenti mogu izračunati iz relacija (3), (5), (6a) i (7a), pa se dobiva

$$\text{za prvo polje } (j = 1): m_{1l} = m_{1c}^{\circ} + \frac{c_1}{l_1} m_2, \quad (8a)$$

za polja $j = 2, 3, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} m_{jl} &= m_{jc}^{\circ} + \left(1 - \frac{c_j}{l_j}\right) m_j + \frac{c_j}{l_j} m_{j+1} \approx \\ &\approx m_j^{\circ} + \frac{m_j + m_{j+1}}{2}, \end{aligned} \quad (8b)$$

za posljednje polje ($j = n$): $m_{nl} = m_{nc}^{\circ} + \left(1 - \frac{c_n}{l_n}\right) m_n$. (8c)



Sl. 1. Kontinuirana ploča sa n polja i $n+1$ ležaja

Reakcije ležaja sastavljene su od doprinosova susjednih polja. Za ležaj j (sl. 1) doprinos lijevog polja iznosi

$$r_{jl} = \frac{q_{j-1} l_{j-1}}{2} + \frac{m_{j-1} - m_j}{l_{j-1}}, \quad (9a)$$

a doprinos desnog polja

$$r_{jd} = \frac{q_j l_j}{2} + \frac{m_{j+1} - m_j}{l_j}, \quad (9b)$$

pa je reakcija ležaja j

$$\begin{aligned} r_j &= r_{jl} + r_{jd} = \frac{q_{j-1} l_{j-1}}{2} + \frac{q_j l_j}{2} + \frac{m_{j-1}}{l_{j-1}} - \\ &- 2m_j \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j} \right) + \frac{m_{j+1}}{l_{j+1}}. \end{aligned} \quad (9c)$$

Udaljenosti c definirane izrazom (4) mogu se prikazati pomoću reakcija ležaja, pa je

$$c_j = \frac{r_{jd}}{q_j}, \quad (10)$$

što slijedi iz relacije (9b). Također se i poljni moment može prikazati pomoću reakcije ležaja pomoću izraza

$$m_{jl} = \frac{r_{jd}^2}{2q_j} + m_j. \quad (11)$$

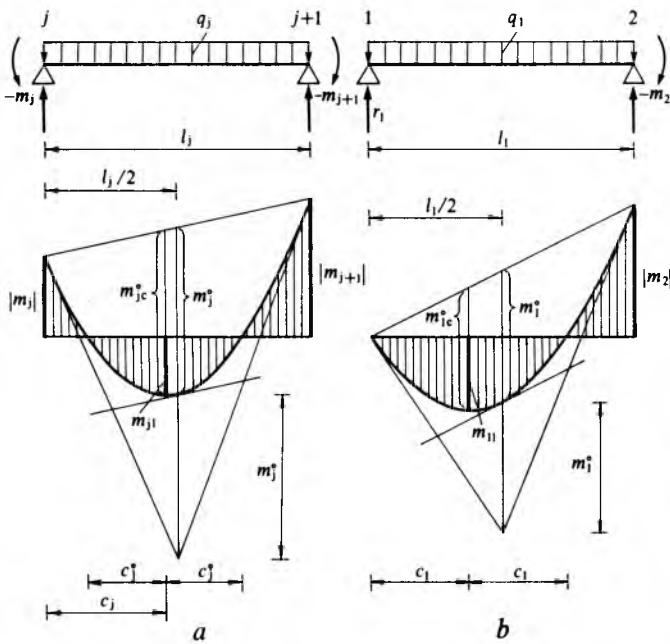
Za detaljiranje armature potrebno je poznavati udaljenost nul-točaka momentne linije od najnapregnutijeg presjeka u polju. Ta je udaljenost za polja $j = 2, 3, \dots, n$ (sl. 2a)

$$c_j^{\circ} = \sqrt{\frac{2m_{jl}}{q_j}}, \quad (12a)$$

a za $j = 1$ (sl. 2b)

$$c_1^{\circ} = c_1 = \frac{r_1}{q_1}, \quad (12b)$$

gdje je r_1 reakcija prvog ležaja.

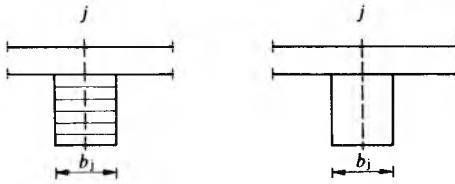


Sl. 2. Ležajni momenti, reakcije i poljni momenti kontinuirane ploče. a unutrašnje polje, b prvo polje ploče

Utjecaj širine ležaja na ležajne momente. Budući da su rasponi definirani osnim razmacima ležaja, izračunati ležajni momenti odnose se na os ležaja. Reakcije ležaja, međutim, nisu koncentrirane u osi ležaja, nego su raspodijeljene po njegovoj širini (\$b_j\$). Zbog toga se ležajni presjeci ploča dimenzioniraju, radi uštete materijala, prema reduciranoj ležajnom momentu koji je određen izrazom

$$m_{j,red} = m_j - \Delta m_j, \quad (13)$$

gdje je \$\Delta m_j\$ reducijski ležajni moment koji ovisi o vezi između ležaja i ploče.



Sl. 3. Redukcija ležajnih momenata zbog širine ležaja. a ploča je oslonjena na zid od opeka ili bloketa, b ploča je monolitno spojena s armiranobetonskom podvlakom ili armiranobetonskim zidom

Ako ploča naliježe na zid od opeka ili bloketa (sl. 3a), ne postoji monolitna veza između ploče i ležaja. Tada se proračunski ležajni presjek nalazi u osi ležaja, a reducijski ležajni moment iznosi

$$\Delta m_j = \frac{1}{8} r_j b_j \quad (14)$$

Ako je ploča monolitno spojena s armiranobetonskom podvlakom ili armiranobetonskim zidom (sl. 3b), proračunski ležajni presjek ploče nalazi se na jednom rubu ležaja, reducijski je moment

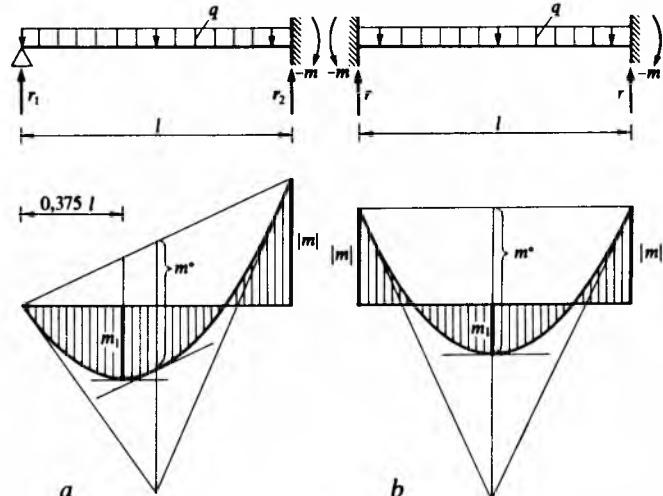
$$\Delta m_j = \frac{1}{2} r'_j b_j \quad (15)$$

gdje je \$r'_j\$ manja od dviju poljnih reakcija \$r_{j,l}\$ i \$r_{j,d}\$, prema izrazima (9a) i (9b). Kad ploča ima jednake ili približno jednake raspone, poljne su reakcije jednake ili približno jednake, pa je \$r'_j \approx \frac{1}{2} r_j\$. Tada je

$$\Delta m_j = \frac{1}{4} r_j b_j. \quad (16)$$

Prema tome, smanjenje je ležajnih momenata zbog širine ležaja kad je ploča monolitno vezana s ležajem dva puta veće nego kad ploča naliježe na ležaj.

Elastostatički proračun. Takvim proračunom određuju se ležajni i poljni momenti, te reakcije.



Sl. 4. Momenți i reakcije jednoliko opterećene grede. a na jednoj strani prosto oslonjena, a na drugoj upeta greda, b obostrano upeta greda

Jednostrano upeta greda (sl. 4a) jedanput je statički neodređena (jedanput hiperstatična, v. *Mehanika*, TE 8, str. 1). Ležajni moment na upetoj strani iznosi

$$m = -\frac{1}{8} q l^2 = -m^*. \quad (17a)$$

i jednak je po apsolutnoj vrijednosti prostom momentu \$m^*\$ u polovištu raspona, dok je poljni moment

$$m_l = \frac{9}{128} q l^2 = \frac{9}{16} m^* = \frac{1}{14} q l^2. \quad (17b)$$

Reakcije su određene izrazima

$$r_1 = \frac{3}{8} q l; \quad r_2 = \frac{5}{8} q l. \quad (17c)$$

Reakcija \$r_1\$ odnosi se na prosti, a \$r_2\$ na upeti ležaj.

Obostrano upeta greda (sl. 4b) zbog simetrije također je jedanput statički neodređena. Ležajni momenti jednak su na obje strane i iznose

$$m = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{2}{3} m^*, \quad (18a)$$

dok je poljni moment

$$m_l = \frac{1}{24} q l^2 = \frac{1}{3} m^*. \quad (18b)$$

I reakcije su ležaja jednake i iznose

$$r = r_1 = r_2 = \frac{1}{2} q l. \quad (18c)$$

Kontinuirana ploča sa \$n\$ polja i \$n+1\$ ležaja (sl. 1) statički je neodredena \$n-1\$ puta. Ležajni momenti mogu se izračunati pomoću Clapeyronovih jednadžbi triju momenata.

Ako ploča ima jednaku debljinu u svim poljima, jednadžbe triju momenata imaju oblik

$$m_{j-1}l_{j-1} + 2m_j(l_{j-1} + l_j) + m_{j+1}l_j = -\frac{1}{4}(q_{j-1}l_{j-1}^3 + q_jl_j^3). \quad (19)$$

Ponekad je ploča deblja u duljim poljima nego u kraćima. Ako su tada kvocijenti raspona i momenti inercije presjeka ploče u svim poljima jednaki, jednadžbe triju momenata glase

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = -\frac{1}{4}(q_{j-1}l_{j-1}^2 + q_jl_j^2). \quad (20)$$

Ako su, međutim, rasponi i momenti inercije presjeka ploče u svim poljima jednaki, jednadžbe triju momenata imaju oblik

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = -\frac{l^2}{4}(q_{j-1} + q_j). \quad (21)$$

Za svaki unutrašnji ležaj ($j = 2, 3, \dots, n$) treba postaviti jednadžbu triju momenata, a za prvi ($j = 1$) i posljednji ($j = n + 1$) po jednu jednadžbu dvaju momenata. Rješenje sustava jednadžbi daje vrijednosti svih ležajnih momenata. Pomoći tih momenata određuju se, na već opisani način, poljni momenti, reakcije ležaja i reduksijski momenti.

Postoji više pomoćnih tablica za jednostavnije određivanje momenata i reakcija za kontinuirane grede i ploče, npr. Winklerove tablice za proračun kontinuiranih ploča konstantne debljine i jednakih raspona, te Zellerove tablice za proračun kontinuiranih ploča konstantne debljine, ali različitih raspona. Osim toga, upotrebljavaju se razne metode izjednačenja momenata (Crossova i Kanijeva metoda).

Plastostatički proračun. Stanje progiba plastificirane ploče, odnosno lomnog mehanizma opisuje se referentnim progibom f , npr. progibom poljnog plastičnog zglobova. Pozitivni plastični moment m i negativni plastični moment m' , koji su potrebni da se postigne ravnoteža, određuju se iz ravnoteže lomnog opterećenja i unutrašnjih sila, tj. plastičnih momenata u plastičnim zglobovima. Ravnotežu je najjednostavnije formulirati *jednadžbom virtualnog reda*. Ta se jednadžba dobiva izjednačenjem rada U_i plastičnih momenata na kutnim pomacima plastičnih zglobova i rada U_a lomnog opterećenja na lomnoj deformaciji ploče,

$$U_i = U_a. \quad (22)$$

Rad plastičnih momenata jednak je zbroju doprinosa svih plastičnih zglobova,

$$U_i = m \sum_j \beta_j + m' \sum_k \beta_k, \quad (23)$$

gdje su m i m' pozitivni i negativni plastični moment, β_j pozitivni kutni pomak pozitivnoga plastičnog zglobova j , a β_k negativni kutni pomak negativnoga plastičnog zglobova k . Prva suma u izrazu (23) proteže se na sve pozitivne, a druga na sve negativne plastične zglove. Svi su umnošci plastičnog momenta i pripadnoga kutnog pomaka pozitivni.

Ako pozitivni plastični moment m i negativni plastični moment m' nemaju jednaku absolutnu vrijednost, uvodi se m kao referentni moment, dok se za negativni moment postavi da je $m' = \lambda m$. Tada se izraz (23) može napisati u obliku

$$U_i = m \left(\sum_j \beta_j + \lambda \sum_k \beta_k \right), \quad (23a)$$

u kojem se pojavljuje samo referentni plastični moment.

Rad lomnog opterećenja jednak je umnošku lomnog opterećenja (q) po jedinici duljine ploče i površine (V) presjeka lomnog tijela, pa je

$$U_a = qV. \quad (24)$$

Nakon izjednačenja U_i i U_a može se odrediti referentni plastični moment m , čime su potrebni plastični momenti ploče koji su u ravnoteži s lomnim opterećenjem jednoznačno određeni.

Točna rješenja za jednopoljne i kontinuirane ploče. U prostorijama ploči nema redistribucije unutrašnjih sila, pa je potrebni plastični moment jednak prostom momentu u polovištu raspona prema izrazu (1b).

Jednostrano opterećeno ploča (sl. 5). Lom jednostrano opterećeno nastupa kad se, nakon što je plastificiran opteti ležajni presjek, plastificira još jedan poljni presjek. Udaljenost x plastificiranog poljnog presjeka od lijevog ležaja nepoznati je parametar lomnog mehanizma. Ako se kao referentni progib f lomnog mehanizma prihvati progib plastificiranog poljnog presjeka (sl. 5b), rad lomnog opterećenja pri deformaciji ploče iznosi

$$U_a = \frac{1}{2}fq. \quad (25)$$

Ako se prepostavi da su pozitivni i negativni plastični momenti jednaki, rad je plastičnih momenata pri kutnim pomacima plastičnih zglobova

$$U_i = m \left(\frac{f}{x} + 2 \frac{f}{l-x} \right). \quad (26)$$

Izjednačenjem U_a i U_i dobiva se

$$m(x) = \frac{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)}{2 \left(1 + \frac{x}{l} \right)} ql^2. \quad (27)$$

Vrijednost x/l za koju je $m(x)$ najveće određuje se kvadratnom jednadžbom

$$\left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \frac{x}{l} - 1 = 0, \quad (28)$$

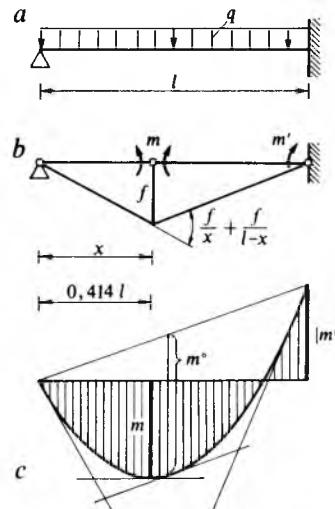
kojoj je rješenje

$$x = (\sqrt{2} - 1)l = 0,414l. \quad (29)$$

Prema tome, potrebni pozitivni i negativni plastični momenti iznose

$$m = m' = \frac{ql^2}{11,7} = 0,686m^\circ, \quad (30)$$

gdje je m° prosti moment u polovištu raspona.



Sl. 5. Jednostrano opterećeno ploča. a) opterećenje ploče, b) lomi mehanizam, c) momentni dijagram za $m = m'$

Momentni dijagram ploče (sl. 5c) određen plastostatičkim postupkom povoljniji je s gledišta konstrukcije i potrebe armature nego momentni dijagram koji se dobiva elastostatičkim postupkom (sl. 4a). To se može konstatirati ako se odredi dodatno opterećenje koje ploča može preuzeti zbog svoje adaptacije. U trenutku plastifikacije ležajnog presjeka ploča nosi opterećenje $q_{el} = 8m/l^2$, a u trenutku loma opterećenje $q = 11,7m/l^2$. Lomno je opterećenje za 46% veće od opterećenja koje bi ploča nosila kad se ne bi adaptirala, jer je $(q - q_{el})/q_{el} = 0,46$.

Ako pozitivni i negativni plastični momenti nisu jednaki ($m = \lambda m'$), analognim se postupkom dobiva da je

$$m = \frac{\lambda - 2\sqrt{1 + \lambda} + 2}{2\lambda^2} q l^2. \quad (31)$$

Ako je $\lambda = 0$, radi se o prostojoj gredi, jer je $m' = 0$. Za $\lambda = 1$ dobiva se rješenje koje odgovara izrazu (30), dok za $\lambda = 1,79$ rješenje je jednako onom prema elastostatičkom postupku.

Uz $\lambda = 1$ dobiva se najekonomičnija konstrukcija. Ako se, međutim, žele spriječiti naprsline u području ležaja već pri malim opterećenjima, odabrat će se neka vrijednost koeficijenta λ veća od jedinice (npr. $\lambda = 1,50$).

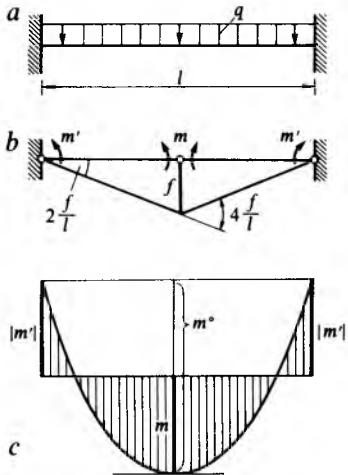
Obostrano upeta ploča (sl. 6). Lom nastupa kad se, uz oba ležajna presjeka, plastificira i presjek u polovištu raspona. Lomni mehanizam je simetričan, a potrebeni plastični momenti iznose

$$m = \frac{1}{1 + \lambda} m^\circ; \quad m' = \lambda m. \quad (32)$$

Najekonomičnija se konstrukcija dobiva kad je $\lambda = 1$, pa je tada

$$m = m' = \frac{1}{2} m^\circ = \frac{q l^2}{16}. \quad (33)$$

Za $\lambda = 2$ dobivaju se momenti koji odgovaraju elastostatičkom postupku, odnosno izrazima (18b) i (18a). Da bi se spriječile naprsline u području ležaja već pri malim opterećenjima, odabire se vrijednost koeficijenta $\lambda > 1$, ali, dakako, $\lambda < 2$.



Sl. 6. Obostrano upeta ploča. a opterećenje ploče, b lomni mehanizam, c momentni dijagram za $m = m'$

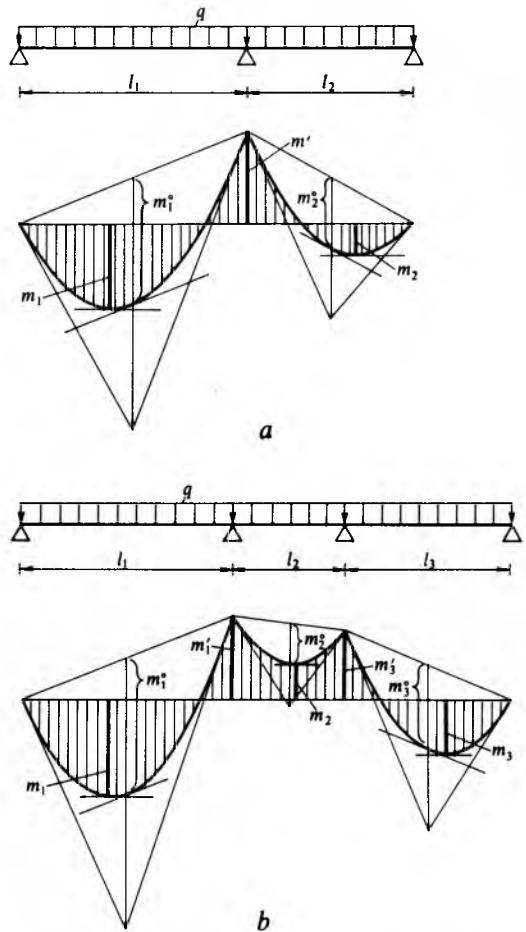
Kontinuirana dvopoljna ploča (sl. 7a). Lom nastaje kad se plastični zglobovi formiraju nad unutrašnjim ležajem i u jednom od presjeka duljeg polja. Prema izrazu (30) dobiva se da je $m_1 = m' = 0,686m_1$, dok se moment m_2 određuje iz uvjeta ravnoteže. Ako su rasponi obaju polja jednaki, tada je $m_1 = m' = m_2$.

Kontinuirana tropoljna ploča. Ako je unutrašnje polje kraće od vanjskih (sl. 7b), lom nastaje plastifikacijom jednog od presjeka lijevog ili desnog vanjskog polja i susjednog ležajnog presjeka. Tada je $m_1 = m'_1 = 0,686m_1$ i $m_3 = m'_3 = 0,686m_3$, a m_2 se određuje iz uvjeta ravnoteže. Ako je, međutim, unutrašnje polje dulje od vanjskih, plastificiraju se oba unutrašnja ležajna presjeka i jedan od presjeka u unutrašnjem polju.

Kontinuirana mnogopoljna ploča. Za unutrašnja polja kontinuirane ploče s mnogo polja vrijede relacije (32) i (33) kao za obostrano upetu ploču.

Približne metode. Nacionalni i međunarodni propisi dopuštaju upotrebu približnih metoda.

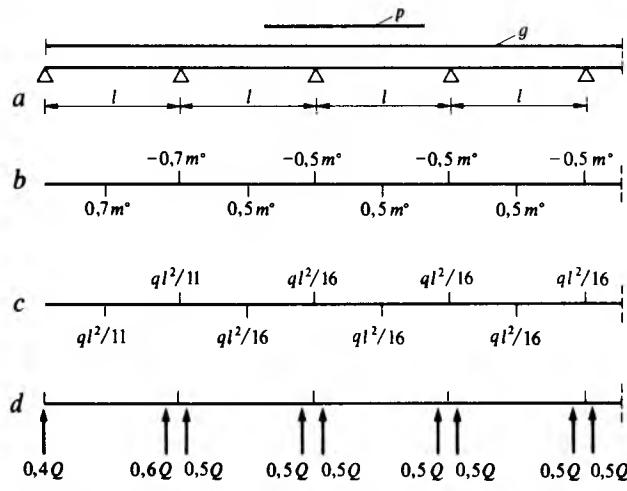
Prema propisima SSSR upotrebljava se približna Muraševljeva metoda za proračun kontinuiranih ploča s jednakim rasponima (sl. 8). Prema toj metodi potrebni plastični momenti vanjskih polja iznose $0,7m^\circ$ (zaokružena vrijednost od $0,686m^\circ$), a ležajni momenti ležaja uz vanjsko polje $-0,7m^\circ$. Za ostala polja i ostale ležaje potrebni plastični momenti iznose $0,5m^\circ$,



Sl. 7. Kontinuirana jednoliko opterećena ploča. a dvopoljna, b tropoljna kontinuirana ploča

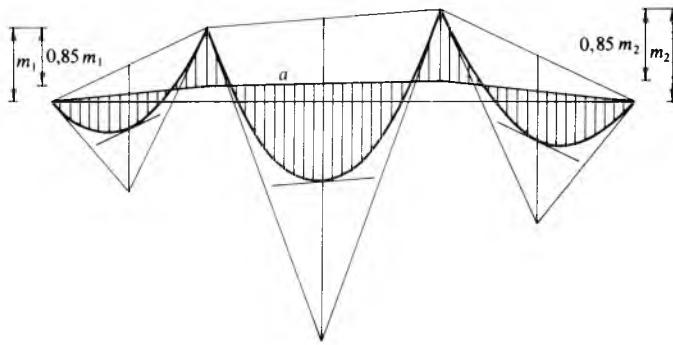
odnosno $-0,5m^\circ$ (sl. 8b). Izrazi li se m° pomoću ukupnog opterećenja $q = g + p$, gdje je g stalno, a p pokretno opterećenje po jedinici duljine, potrebni plastični momenti ploče iznose $q l^2 / 11$ i $q l^2 / 16$ (sl. 8c). Reakcije su također određene zaokruženim vrijednostima (sl. 8d) gdje je $Q = ql$. Metoda daje rezultate prihvatljive točnosti i kad su rasponi samo približno jednaki (dopušteno su razlike raspona do 20%).

Približna metoda prema propisima za armiranobetonske i prednapregnute konstrukcije Evropskog komiteta za beton (CEB), Internacionale federacije za prednapregnuti beton (FIP) i prema njemačkim propisima (DIN) primjenjiva je i na ploče različitih raspona. Prema toj metodi najprije se elastostatičkim postupkom odrede ležajni momenti za lomno opterećenje, koje



Sl. 8. Kontinuirana ploča jednakih raspona. a opterećenje ploča (g stalno, p pokretno opterećenje), b i c potrebni plastični momenti, d reakcije

je određeno umnoškom dopuštenog opterećenja i koeficijenta sigurnosti. Zatim se, da bi se uzela u obzir redistribucija unutrašnjih sila, dakle adaptacija ploče, ležajni momenti smanje množenjem s reduksijskim faktorom φ ($0,85 \leq \varphi < 1$), prema ocjeni konstruktora. Poljni momenti računaju se prema relacijama (8). Taj se postupak može prikazati grafički (sl. 9) tako da se momentnom dijagramu određenom elastostatičkim postupkom superponira momentni dijagram adaptacije. Momenti savijanja određuju se tada od prelomljene zaključne linije (a na sl. 9) koja odgovara adaptacijskim momentima.



Sl. 9. Prikaz približne plastostatičke metode. a zaključna linija koja odgovara adaptacijskim momentima

Prema približnoj metodi predviđenoj francuskim propisima (CCBA), koja je primjenljiva i za ploče različitih raspona, odabrani ležajni momenti za dvopoljnju ploču moraju zadovoljavati uvjet

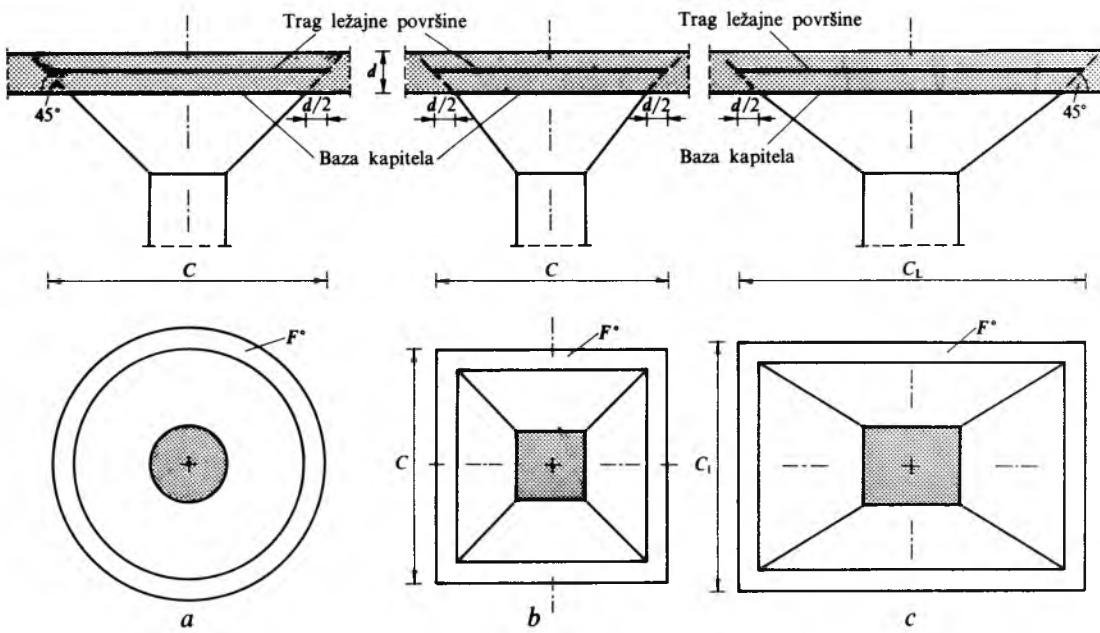
$$|m_2| \geq \begin{cases} 0,6m_1^{\circ}, \\ 0,6m_2^{\circ}, \end{cases} \quad (34)$$

a za tropoljnju i višepoljnju ploču uvjete

$$|m_2| \geq \begin{cases} 0,5m_1^{\circ}, \\ 0,5m_2^{\circ}, \end{cases} \quad (35)$$

$$|m_3| \geq \begin{cases} 0,4m_2^{\circ}, \\ 0,4m_3^{\circ}, \dots \end{cases} \quad |m_j| \geq \begin{cases} 0,4m_{j-1}^{\circ}, \\ 0,4m_j^{\circ}, \dots \end{cases}$$

Uz tako odabранe ležajne momente određe se udaljenosti c_j iz (4) najnapregnutijih poljnih presjeka od lijevog ležaja, a zatim poljni momenti pomoću izraza



Sl. 11. Oblici kapitela gljivastih stropova. a kapitel u obliku krnjeg stoča, b kapitel u obliku krnje piramide, c kapitel u obliku obeliska

$$m_{jl} = 1,15 m_{jc}^{\circ} + \left(1 - \frac{c_j}{l_j}\right) m_j + \frac{c_j}{l_j} m_{j+1}. \quad (36)$$

Za unutrašnja polja vrijedi približno:

$$c_j = \frac{l_j}{2}; \quad m_{jl} = 1,15 m_j^{\circ} + \frac{m_j + m_{j+1}}{2}. \quad (37)$$

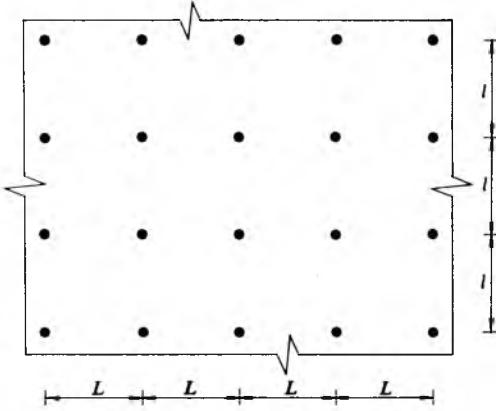
Momenti vanjskih polja ne smiju biti manji od 60%, a unutrašnjih polja manji od 50% prostog momenta u polovištu raspona pripadnog polja.

Upotreba približnih metoda opravdava se činjenicom da elastostatičke metode daju rezultate problematičke točnosti, te da je opravdano primjenjivati jednostavnije metode koje su provjene u praksi.

Navedene približne metode dopušteno je primjenjivati kad pokretno opterećenje p nije veće od dvostrukoga stalnog opterećenja g i kad napravne ne ugrožavaju stabilnost ploče (ploče stambenih, uredskih, školskih, hotelskih, zdravstvenih i sličnih građevina). Kad je potrebno, mogu se utjecaji stalnog i pokretnog opterećenja promatrati odvojeno i tako odrediti linije ekstremnih vrijednosti momenata savijanja.

MASIVNE I REBRASTE DVOSMJEARNE PLOČE

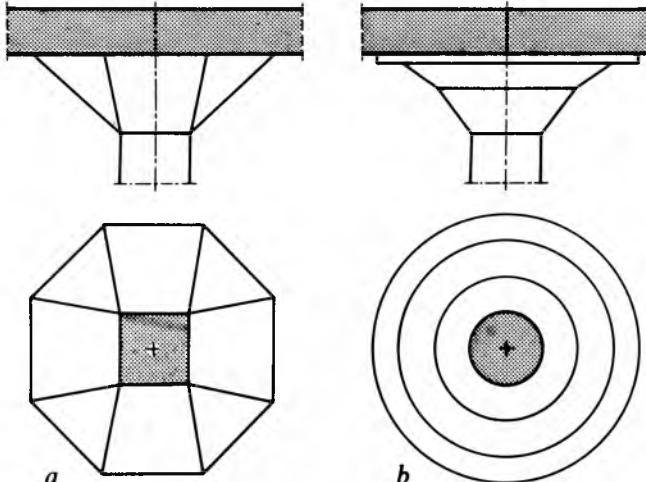
Kontinuirana površinski oslonjena ploča, često se upotrebljava u zgradarstvu i naziva se gljivasti, odnosno plosnati strop. Ti stropovi su armiranobetonske ploče neposredno oslonjene na stupove (sl. 10), pa se zbog toga jer nemaju grede nazivaju i



Sl. 10. Armiranobetonski strop oslonjen na stupove

bezgrednim stropovima. Gornji dio stupova gljivastih stropova proširen je u kapitel, u tzv. gljivu, a stupovi plosnatih stropova nemaju takva proširenja, pa im je presjek konstantan uzduž cijele visine.

Svrha je kapitela da se poveća dodirna površina između stropne ploče i stupa i da se tako smanje naprezanja u ležajnim područjima ploče. Kapiteli kružnih stupova imaju oblik krunjih stožaca (sl. 11a), a kapiteli stupova kojima je presjek pravilni višekut imaju oblik krunje piramide (sl. 11b). Pravokutni stupovi imaju kapitel u obliku obeliska (sl. 11c). Izvode se kapiteli i složenijih poliedarskih oblika (sl. 12a), a okrugli stupovi mogu završavati niskim valjkom i krunjim stošcima (sl. 12b).



Sl. 12. Složeniji oblici kapitela gljivastih stropova. a) kapitel s osmerokutnom osnovicom, b) kapitel od dvaju krunjih stožaca i niskog valjka

Promjer baze kapitela treba da iznosi $\sim 0,4\sqrt{Ll}$, što znači da promjer treba da bude približno jednak 40% od geometrijske srednje vrijednosti obaju rasponâ ploče.

Ukupno opterećenje polja stropa određeno je izrazom

$$Q = qLl, \quad (38)$$

gdje je q opterećenje stropa po jedinici površine, a L i l širina i duljina polja. Opterećenje na ležajnim površinama prenosi se neposredno na stupove, pa ono ne djeluje na ploču. Prema tome, opterećenje je ploče manje od ukupnog opterećenja polja, pa opterećenje ploče iznosi

$$Q' = Q - qF^\circ, \quad (39)$$

gdje je F° površina ležaja.

Za dimenzioniranje ploče treba analizirati savijanje ploče i smicanje ploče po obodu ležajnih površina. Kad se analizira savijanje, pretpostavlja se da je stropna ploča oslonjena uzduž oboda ležajnih površina i da su reakcije jednolikoraspodijeljene uzduž tih oboda.

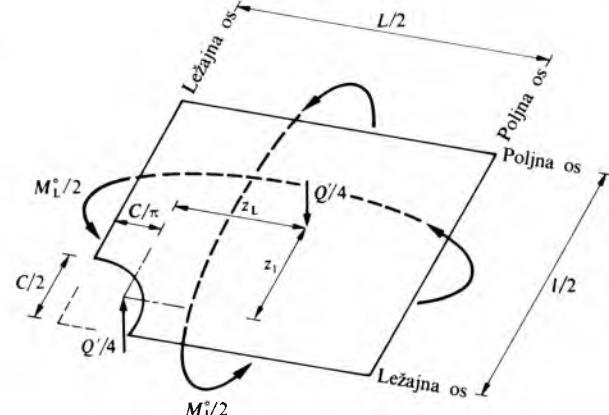
Prosti momenti gljivastog stropa s kružnim ležajnim površinama. Kao promjer C ležajne površine uzima se promjer osnovice kapitela uvećan za debjinu ploče, pa je površina ležaja $\pi C^2/4$. Opterećenje ploče u polju iznosi

$$Q' = Q - q \frac{\pi C^2}{4}. \quad (40)$$

Radi uvida u mehanizam prijenosa opterećenja analizira se ravnoteža četvrtine unutrašnjeg stropnog polja (sl. 13). Taj je isječak pravokutnik sa stranicama $L/2$ i $l/2$, a oslabljen je za kvadrant ležajne površine. Rezultanta opterećenja isječka $Q'/4$ prolazi njegovim težištem, dok reakcija ležaja koja je po apsolutnoj vrijednosti jednak rezultanti opterećenja i koja je suprotno orientirana, prolazi težištem kružnog luka koji odgovara rubu ležaja. Projekcije udaljenosti rezultante opterećenja i reakcije ležaja na smjerove L i l označene su z_L i z_l . Rezultantno opterećenje i reakcija čine par sila koji djeluje u vertikalnoj ravnini koja prolazi dijagonalom isječka. Komponente mo-

menta tog para sila u smjerovima L i l , koje iznose $Q'z_L/4$ i $Q'z_l/4$, jesu vanjski ili napadni momenti isječka.

S navedenim vanjskim momentima u ravnoteži su unutrašnje sile ploče koje djeluju uzduž rubova isječka. Budući da se rubovi isječka poklapaju s ležajnim rubom i poljnim osima ploče, momenti koji djeluju uzduž rubova isječka ujedno su i ekstremni momenti savijanja ploče. Momenti uzduž rubova nejednoliko su raspodijeljeni, dok su na sl. 13 prikazani rezultantnim momentima. Zbroj obaju rezultantnih momenata koji na isječak polja djeluju u smjeru L označen je sa $M_L^\circ/2$, zbroj obaju rezultantnih momenata koji djeluju u smjeru l sa $M_l^\circ/2$. Uzduž rubova isječka koji se poklapaju sa poljnim osima ploče nema poprečnih sila.



Sl. 13. Isječak unutrašnjeg polja stropa s vanjskim i unutrašnjim silama i momentima

Unutrašnji i vanjski momenti isječka u smjerovima L i l moraju biti u ravnoteži, pa vrijede izrazi

$$\frac{M_L^\circ}{2} = \frac{Q'z_L}{4}; \quad \frac{M_l^\circ}{2} = \frac{Q'z_l}{4}. \quad (41)$$

Ako se opterećenje Q' izrazi pomoću ukupnog opterećenja polja Q , te ako se uvedu bezdimenzijski reduksijski faktori

$$k_L = \left(1 - \frac{2C}{3L}\right)^2; \quad k_l = \left(1 - \frac{2C}{3l}\right)^2, \quad (42)$$

mogu se momenti M_L° i M_l° prikazati izrazima

$$M_L^\circ = k_L \frac{QL}{8}; \quad M_l^\circ = k_l \frac{Ql}{8}. \quad (43)$$

Momenti M_L° i M_l° nazivaju se prostim momentima polja ploče u smjerovima L i l . Pomoću faktora k_L i k_l uzete su u obzir dimenzije i oblik ležajne površine. Izrazi (42) daju približne, ali dovoljno točne vrijednosti faktora k_L i k_l , jer je zanemaren po jedan član koji ima samo mali utjecaj.

Prosti momenti gljivastog stropa s kvadratnim ležajnim površinama. Kao stranica C ležajne površine uzima se stranica osnovice kapitela uvećana za debjinu ploče. Površina ležaja iznosi C^2 , pa je opterećenje ploče u polju

$$Q' = Q - qC^2. \quad (44)$$

Analizom analognom onoj za strop s kružnim ležajnim površinama dobiva se bezdimenzijski reduksijski faktor

$$k_l = \left(1 - \frac{3C}{4l}\right)^2 \quad (45a)$$

i prosti moment pomoću izraza

$$M_l^\circ = k_l \frac{Ql}{8}. \quad (45b)$$

Prosti momenti gljivastog stropa s pravokutnim ležajnim površinama. Analognom analizom dobivaju se bezdimenzijski korakcijski faktori

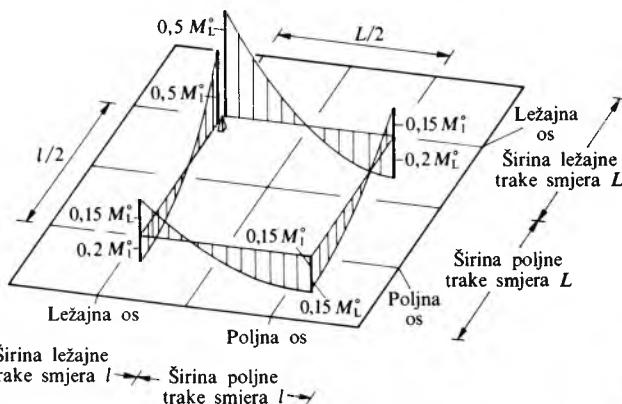
$$k_L = \left(1 - \frac{3C_L}{4L}\right)^2; \quad k_l = \left(1 - \frac{3C_l}{4l}\right)^2, \quad (46)$$

dok se prosti momenti određuju pomoću relacije (45b).

Prosti momenti plosnatog stropa. Ležajne površine plosnog stropa vrlo su malene u usporedbi s površinom polja, pa se može smatrati da je ploča točkasto oslonjena i da su reakcije ležaja u osima stupova. Zbog toga se može računati da je promjer ležajne površine $C = 0$, pa su tada, prema izrazima (42), $k_L = k_l = 1$. Prosti momenti zbog toga u smjerovima L i l iznose

$$M_L^o = \frac{QL}{8}; \quad M_l^o = \frac{Ql}{8}. \quad (47)$$

Raspodjela prostih momenata gljivastih i plosnatih stropova. Podaci o raspodjeli prostih momenata dobiveni su analitički i eksperimentalno. Za praktičnu primjenu dovoljno je točno kad se raspodjela odredi pomoću raspodjeljnih koeficijenata. U tu svrhu treba ploču podijeliti u ležajne i poljne trake. Ležajne su trake iznad ležaja ploče, a poljne trake između njih. Prosti moment M_L^o smjera L raspodijeli se na ležajne i poljne presjeke ležajnih i poljnih traka smjera L , a prosti moment M_l^o na ležajne i poljne presjeke ležajnih i poljnih traka smjera l . Ležajni presjek ležajne trake tako preuzima 50%, poljni presjek ležajne trake 20%, a ležajni i poljni presjeci poljne trake po 15% prostog momenta (sl. 14).



Sl. 14. Ležajni momenti ležajnih i poljnih traka ploče

Vanjska polja analiziraju se analogno, a za raspodjelu momenata služe posebni raspodjeljni koeficijenti za vanjska polja.

Prema izloženom mehaničko se ponašanje gljivastog i plosnatog stropa može simulirati ponašanjem dviju ukrštenih kontinuiranih jednosmjernih ploča. Veći dio opterećenja prenosi se u smjeru duljeg, a manji dio u smjeru kraćeg raspona.

Debljina ploče. Za određivanje debljine stropne ploče mjerodavan je po apsolutnoj vrijednosti najveći moment savijanja ploče. To je ležajni moment ležajne trake duljeg raspona L , koji po jedinici širine iznosi

$$\text{za gljivasti strop } m = -k_L \frac{qL^2}{8}, \quad (48a)$$

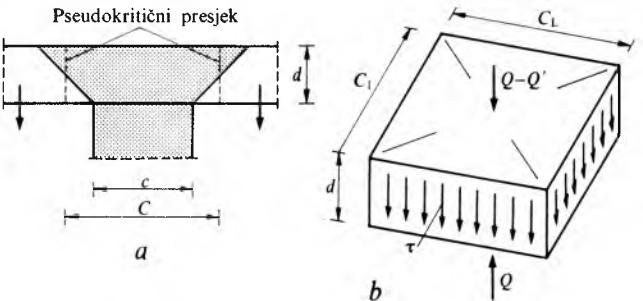
$$\text{za plosnati strop } m = -\frac{qL^2}{8}. \quad (48b)$$

Smicanje ploče. Ponekad se debljina ploča mora odrediti s obzirom na opasnost od probora oko stupa. Probom ploče oko stupa smatra se odvajanje dijela ploče po plohi plašta krnjeg stoča, odnosno obeliska iznad stupa ili kapitela. Pri tom treba provjeriti tangencijalno naprezanje u pseudokritičnom presjeku ploče (sl. 15a). Pseudokritični presjek ploče jest plašt cilindra, odnosno plašt prizme kojoj je osnovica ležajna ploha, a visina statička debljina ploče. Površina pseudokritičnog presjeka jednaka je umnošku opsega ležajne plohe i statičke debljine ploče, pa je

$$\text{za kružni ležaj } F' = \pi C d, \quad (49a)$$

$$\text{za pravokutni ležaj } F' = 2(C_L + C_l)d, \quad (49b)$$

gdje je d statička debljina ploče. Za plosnati je strop s kružnim stupovima $C = c + d$, a za plosnati strop s pravokutnim stupovima $C_L = c_L + d$ i $C_l = c_l + d$, gdje su c , c_L i c_l dimenzije stupa.



Sl. 15. Proboj ploče. a) pseudokritični presjek, b) tangencijalna naprezanja u pseudokritičnom presjeku

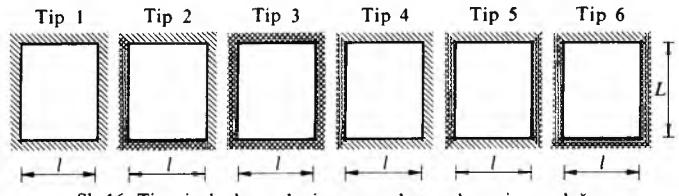
Da ne nastupi probor ploče, ne smije tangencijalno naprezanje u pseudokritičnom presjeku biti veće od dopuštenoga, što znači da mora biti ispunjen uvjet

$$\tau = \frac{Q'}{F'} \leq \tau_{\text{dop}} \quad (50)$$

gdje je Q' opterećenje ploče određeno izrazom (39). Za plosnati strop može se zanemariti površina stupa, jer je ležajna površina ploče vrlo mala, pa se u (50) može uvrstiti vrijednost Q (38) umjesto Q' .

Elastostatika masivnih i rebrastih dvosmjernih ploča

Obodno oslonjena pravokutna dvosmjerna ploča. Obodno oslonjena pravokutna dvosmjerna ploča pravokutna je ploča poduprta uzduž cijelog oboda kojom omjer dulje i kraće stranice nije veći od 2. Kad je taj omjer veći, praktički se cijelo opterećenje prenosi u smjeru kraćeg raspona, pa se ploča može razmatrati kao jednosmjerna. Sa statičkog je gledišta poželjno da omjer stranica bude što bliže jedinicama.



Sl. 16. Tipovi obodno oslonjene pravokutne dvosmjerne ploče

Točna elastostatička teorija vrlo je složena, pa se u praksi primjenjuje približna Marcusova teorija ploče. S obzirom na to da rubovi ploče mogu biti oslonjeni ili upeti, postoji šest tipova ploče (sl. 16). Ploča, naime, može biti oslonjena uzduž cijelog oboda (tip 1), ploča može biti oslonjena uzduž dvaju susjednih, a upeta uzduž ostalih dvaju rubova (tip 2), ploča može biti upeta uzduž cijelog oboda (tip 3), ploča može biti oslonjena uzduž triju rubova a upeta uzduž četvrtog ruba (tip 4), ploča može biti oslonjena uzduž dvaju nasuprotnih rubova a upeta uzduž ostalih (tip 5) i, konačno, ploča može biti oslonjena uzduž jednog od rubova a upeta uzduž ostalih triju (tip 6). Omjer duljina stranica označuje se sa β , pa je

$$\beta = \frac{L}{l}. \quad (51)$$

Ploča se rastavi u dva niza traka jedinične širine koje se ukrštavaju. Opterećenje ploče q po jedinici površine raspodijeli se na opterećenje q_L koje preuzimaju trake u smjeru L i na opterećenje q_l koje preuzimaju trake u smjeru l . Opterećenja su konstantna po cijeloj površini ploče. Promatra se par traka, jedna u smjeru L , a druga u smjeru l , koje prolaze središtem ploče. Iz statičke ekvivalentnosti raspodijeljenih opterećenja i ukupnog opterećenja slijedi jednadžba

$$q_L + q_l = q, \quad (52)$$

a iz jednakosti progiba tih dviju traka jednadžba

$$\varphi_L q_L L^4 = \varphi_l q_l l^4. \quad (53)$$

Bezdimenzijski koeficijenti progiba φ_L i φ_l ovise samo o ležajnim uvjetima trake, odnosno o tipu ploče i iznose za traku prosto oslonjenu na oba kraja $\varphi = 5/384$, za traku koja je na jednom kraju prosto oslonjena a na drugom upeta $\varphi = 2/384$, te za traku koja je upeta na oba kraja $\varphi = 1/384$.

Iz jednadžbi (52) i (53) mogu se odrediti nepoznanice q_L i q_l

$$q_L = \frac{1}{1 + \frac{\varphi_L}{\varphi_l} \beta^4} q; \quad q_l = \frac{1}{1 + \frac{\varphi_l}{\varphi_L} \cdot \frac{1}{\beta^4}} q. \quad (54)$$

Bezdimenzijski multiplikatori uz q ovise o tipu ploče i omjeru duljina stranica β .

Zbog opterećenja trake se savijaju, pa maksimalni poljni momenti traka iznose

$$m_L = \psi_L q_L L^2; \quad m_l = \psi_l q_l l^2, \quad (55a)$$

dok su minimalni ležajni momenti traka

$$m'_L = -\psi'_L q_L L^2; \quad m'_l = -\psi'_l q_l l^2. \quad (55b)$$

Bezdimenzijski koeficijenti ψ i ψ' ovise samo o tipu ploče, odnosno o ležajnim uvjetima. Za traku prosto oslonjenu na oba kraja vrijednost je koeficijenata $\psi = 1/8$ i $\psi' = 0$, za traku koja je na jednom kraju prosto oslonjena a na drugom upeta koeficijenti iznose $\psi = 9/128$ i $\psi' = 1/8$, a za obostrano upetu traku $\psi = 1/24$ i $\psi' = 1/12$. Ako je ukupno opterećenje ploče

$$Q = q L l, \quad (56)$$

te ako se u (55) uvrste vrijednosti koeficijenata ψ i ψ' i izrazi (54) za q_L i q_l , dobivaju se izrazi za maksimalne poljne momente ploče

$$m_L = \frac{Q}{k_L^\circ}; \quad m_l = \frac{Q}{k_l^\circ}, \quad (57)$$

i za minimalne ležajne momente ploče

$$m'_L = -\frac{Q}{k'_L}; \quad m'_l = -\frac{Q}{k'_l}. \quad (58)$$

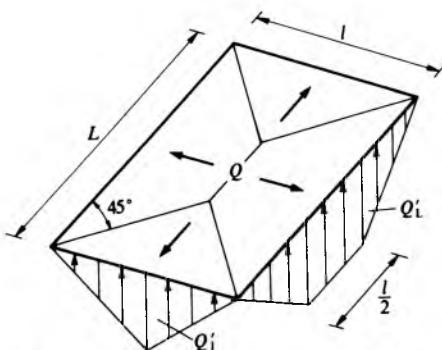
Koeficijentima k° i k' obuhvaćeni su koeficijenti φ , ψ i ψ' , te omjer β , pa poljni i ležajni momenti ovise o tipu ploče i omjeru β . Vrijednosti koeficijenata k_L° , k_L° , k_l° i k'_L nalaze se u tabl. 1 za sve tipove ploča i za niz vrijednosti omjera β .

Navedeni izrazi ne obuhvaćaju utjecaj torzije. Prema tome oni vrijede za rebraste ploče, koje se sastoje od dva niza međusobno okomitih rebara i pokrovne ploče položene preko njih, u kojih je utjecaj torziske krutosti zanemarljivo malen.

Torziska krutost masivnih ploča, međutim, ne smije se zanemariti. Djelovanjem torzije, naime, osjetno se smanjuju poljni momenti ploče. To se uzima u obzir korekcijskim faktorima koji

iznose $1 - \frac{20}{3} \cdot \frac{\beta}{k_L^\circ}$, odnosno $1 - \frac{20}{3\beta k_L^\circ}$. Za kvadratnu ploču

($\beta = 1$) kad je prosto oslonjena reduksijski faktor iznosi 0,583, a kad je upeta uzduž cijelog oboda 0,861. Budući da reduksijski



Sl. 17. Reakcije obodno oslonjene pravokutne dvosmjerna ploča

faktor ovisi samo o tipu ploče i omjeru β , mogu se odrediti novi koeficijenti k_L i k_l koji obuhvaćaju koeficijente k_L° i k_l° iz izraza (57) i spomenute korekcijske koeficijente, pa se za poljne momente masivnih ploča dobivaju izrazi

$$m_L = \frac{Q}{k_L}; \quad m_l = \frac{Q}{k_l}. \quad (59)$$

Vrijednosti koeficijenata k_L i k_l također se nalaze u tabl. 1.

Reakcije obodno oslonjene pravokutne ploče raspodijeljene su krivolinijski uzduž rubova, a u vrhovima osnovice djeluju još i koncentrirane sile. U praktičnim proračunima pretpostavlja se, međutim, da su reakcije uzduž kraćih stranica raspodijeljene po trokutu, a uzduž duljih stranica po istokračnom trapezu (sl. 17). Reakcije uzduž duljih rubova ploče iznose

$$Q'_L = \frac{2 - \gamma}{4} Q, \quad (60)$$

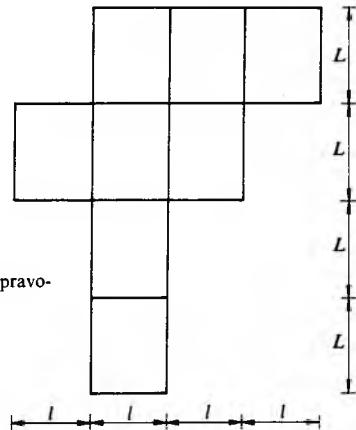
a reakcije uzduž kraćih rubova

$$Q'_l = \frac{\gamma}{4} Q, \quad (61)$$

gdje je γ recipročna vrijednost od β (51).

Da bi se odredile redukcije ležajnih momenata zbog širine ležaja, računa se da su poljne reakcije po jedinici duljine ruba jednake njihovoj srednjoj vrijednosti, pa iznose Q'_L/L , odnosno Q'_l/l .

Višepoljna kontinuirana obodno oslonjena pravokutna dvosmjerna ploča. Višepoljno obodno oslonjena pravokutna ploča sastoji se od dviju ili više jednopoljnih obodno oslonjenih pravokutnih dvosmjernih ploča nanizanih u jednom ili u dva smjera. Za stropne konstrukcije upotrebljavaju se ponekad pret-fabricirane ploče, pa se tada svako polje promatra posebno. Češće se, međutim, ploča betonira na gradilištu tako da sva polja čine monolitnu cjelinu. Tada se višepoljna ploča naziva kontinuiranom pločom. Ako su svi rasponi u jednom smjeru (L) i svi rasponi u drugom smjeru (l) međusobno jednaki (sl. 18), unutarnje se sile mogu utvrditi pomoću već opisane približne Marcusove teorije ploče i pomoću izraza za jednopoljnu ploču.



Sl. 18. Višepoljna obodno oslonjena pravokutna dvosmjerna ploča

Prema rezultatima elastostatičkog postupka za jednosmjernu ploču može se zaključiti da će ležajni momenti imati najveće apsolutne vrijednosti kad su sva polja potpuno opterećena stalnim (g) i pomicnim (p) opterećenjem. Tada su tangencijalne ravnine progibne plohe gotovo horizontalne, pa se sva polja mogu smatrati upetima uzduž unutrašnjih ležaja. Ležajni momenti određuju se pomoću izraza (58) i tabl. 1. Kako su na unutrašnje ležaje spojena dva polja, koja mogu biti i različita, dobit će se dvije vrijednosti za ležajni moment. Kao mjerodavna vrijednost prihvata se tada srednja vrijednost tih dvaju momenata.

Ležajni momenti uvijek su po apsolutnim vrijednostima veći od poljnih momenata, pa se debljina ploče određuje prema ležajnim momentima. Utjecaj širine ležaja uzima se u obzir kao jednosmjernu ploču.

Tablica 1
KOEFICIJENTI MOMENATA SAVIJANJA PERIMETRALNO OSLONJENIH PRAVOKUTNIH PLOČA

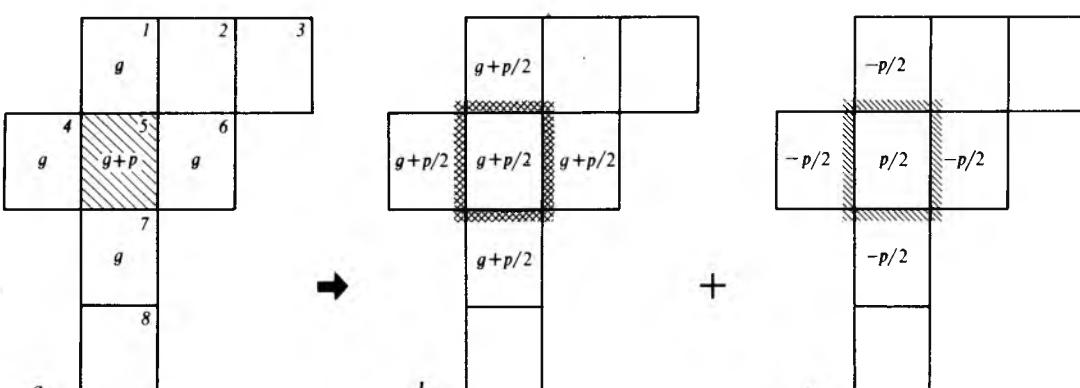
β	Tip 1				Tip 2					Tip 3						
	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i'	k_L'	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i'	k_L'
1,0	16,0	16,0	27,4	27,4	28,4	28,4	37,2	37,2	16,0	16,0	48,0	48,0	55,7	55,7	24,0	24,0
1,1	14,8	17,9	25,1	30,3	26,3	31,9	34,2	41,4	14,8	17,9	44,4	53,8	51,4	62,3	22,2	26,9
1,2	14,2	20,5	23,3	33,6	25,3	36,4	32,4	46,7	14,2	20,5	42,7	61,5	49,1	70,7	21,3	30,7
1,3	14,0	23,7	22,1	37,4	25,0	42,2	31,4	53,1	14,0	23,7	42,1	71,2	48,0	81,1	21,1	35,6
1,4	14,1	27,7	21,3	41,8	25,1	49,2	31,0	60,7	14,1	27,7	42,3	83,0	47,7	93,5	21,2	41,5
1,5	14,4	32,3	20,8	46,8	25,5	57,5	30,9	69,6	14,4	32,3	43,1	97,0	48,1	108	21,6	48,5
1,6	14,8	37,8	20,6	52,6	26,2	67,1	31,2	79,8	14,8	37,8	44,3	113	48,9	125	22,1	56,7
1,7	15,2	44,0	20,5	59,3	27,1	78,2	31,7	91,5	15,2	44,0	45,7	132	50,0	144	22,8	66,0
1,8	15,8	51,1	20,6	66,8	28,0	90,8	32,3	105	15,8	51,1	47,3	153	51,3	166	23,7	76,7
1,9	16,4	59,1	20,8	75,2	29,1	105	33,1	119	16,4	59,1	49,1	177	52,9	191	24,6	88,6
2,0	17,0	68,0	21,1	84,6	30,2	121	34,0	136	17,0	68,0	51,0	204	54,6	218	25,5	102
β	Tip 4				Tip 5					Tip 6						
	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i'	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i'	k_i^o	k_L^o	k_i	k_L	k_i'	k_L'
0,5	52,6	18,5	70,5	22,6	29,6	50,4	21,0	68,5	25,0	25,2	108	32,0	123	35,7	54,0	18,0
0,55	42,0	17,9	59,1	22,5	23,6	42,1	21,2	59,1	25,6	21,0	85,3	30,6	99,5	34,8	42,7	17,2
0,6	34,9	17,7	51,2	22,8	19,6	36,6	22,0	52,6	26,9	18,3	70,0	29,8	83,2	34,5	35,0	16,8
0,65	30,0	17,8	45,6	23,5	16,9	33,1	23,3	47,9	28,6	16,5	59,3	29,7	71,7	34,8	29,6	16,7
0,7	26,5	18,3	41,4	24,6	14,9	30,8	25,1	44,6	30,9	15,4	51,8	30,1	63,5	35,6	25,9	16,9
0,75	24,2	19,1	38,2	25,9	13,6	29,4	27,5	42,1	33,7	14,7	46,4	31,0	57,4	36,9	23,2	17,4
0,8	22,5	20,2	35,7	27,5	12,7	28,6	30,5	40,3	36,9	14,3	42,6	32,3	53,0	38,7	21,3	18,2
0,85	21,4	21,7	33,7	29,4	12,0	28,2	34,0	39,1	40,8	14,1	39,9	34,2	49,7	41,0	20,0	19,2
0,9	20,6	23,5	32,2	31,5	11,6	28,2	38,0	38,2	45,2	14,1	38,1	36,5	47,3	43,7	19,0	20,6
0,95	20,1	25,6	30,9	34,0	11,3	28,4	42,7	37,7	50,2	14,2	36,8	39,4	45,5	46,9	18,4	22,1
1,0	19,9	28,0	29,9	36,7	11,2	28,8	48,0	37,5	55,7	14,4	36,0	42,7	44,2	50,6	18,0	24,0
1,1	19,9	33,9	28,6	43,3	11,2	30,0	60,5	37,6	68,9	15,0	35,4	50,8	42,7	59,4	17,7	28,6
1,2	20,4	41,2	28,0	51,2	11,5	31,6	75,8	38,3	84,7	15,8	35,7	61,0	42,3	70,2	17,9	34,3
1,3	21,1	50,1	27,9	60,6	11,9	33,4	94,0	39,4	104	16,7	36,7	73,4	42,6	83,3	18,3	41,3
1,4	22,0	60,6	28,1	71,6	12,4	35,3	115	40,9	126	17,7	38,0	88,2	43,4	98,6	19,0	49,6
1,5	23,0	72,8	28,5	84,4	13,0	37,4	140	42,5	151	18,7	39,6	105	44,6	117	19,8	59,3
1,6	24,1	86,9	29,2	99,1	13,6	39,6	169	44,2	180	19,8	41,3	125	46,0	137	20,7	70,5
1,7	25,3	103	30,0	116	14,3	41,8	201	46,1	213	20,9	43,2	148	47,6	160	21,6	83,3
1,8	26,6	121	30,9	134	14,9	44,0	238	48,1	250	22,0	45,3	174	49,3	187	22,6	97,8
1,9	27,9	141	31,9	155	15,7	46,3	279	50,1	292	23,1	47,3	203	51,1	216	23,7	114
2,0	29,2	164	32,9	179	16,4	48,6	324	52,2	338	24,3	49,5	235	53,1	249	24,7	132

Poljni momenti poprimaju maksimalne vrijednosti kad na promatrano polje djeluje ukupno opterećenje $q = g + p$, a na susjedna polja samo stalno opterećenje g (sl. 19a, promatra se polje 5). Rezultat se dobiva superpozicijom rezultata dvaju rasporeda opterećenja. Za prvi se raspored pretpostavi da opterećenje $g + p/2$ djeluje na promatrano i na sva susjedna polja (sl. 19b). Tada se promatrano polje može smatrati upetim uzduž sastava sa susjednim poljima, pa se poljni momenti mogu odrediti pomoću izraza (57), odnosno izraza (59) i tabl. 1. Za drugi se raspored pretpostavi da na promatrano polje djeluje opterećenje $p/2$, a na susjedna polja opterećenje $-p/2$ (sl. 19c).

izraza (57) ili (59) uzeti u obzir tip ploče (za prvi raspored tip 3, a za drugi tip 1). Superpozicijom doprinosa dvaju rasporeda opterećenja dobiva se traženi maksimalni poljni moment uslijed ukupnog opterećenja.

Podvlake ispod obodno oslonjene pravokutne dvosmjerne ploče. Elastostatička analiza podvlaka, ili nadvlaka, koje nose ploče provodi se analogno analizi jednosmjerneih ploča.

Za podvlake kraćih raspona vrijedi trokutna raspodjela opterećenja (sl. 20a). Opterećenje Q_l određeno je izrazom (61) ako se ploča nalazi samo s jedne strane podvlake, a dva puta je veće kad je ploča s objaju strana podvlake. Vlastita težina pod-

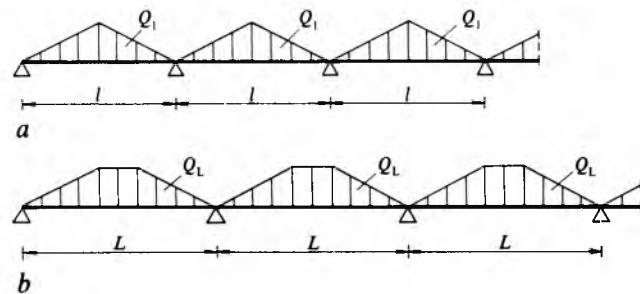


Sl. 19. Određivanje maksimalnih momenata u polju 5 kontinuirane dvosmjerne ploče. a raspodjela opterećenja po pločama, b raspodjela opterećenja za prvi korak proračuna, c raspodjela opterećenja za drugi korak proračuna

Promatrano polje progiba se prema dolje, a susjedna polja prema gore, pa ne utječu jedna na druga. Ležajni su momenti uzduž sastava jednaki nuli, pa se zbog toga može smatrati da je promatrano polje prosto oslonjeno uzduž sastava sa susjednim poljima. Poljni momenti određuju se također pomoću izraza (57), odnosno izraza (59) i tabl. 1. Dakako, treba pri upotrebi

vlake pribraja se, radi pojednostavljenja, težini ploče. Prosti moment podvlake u polovištu raspona jednak je u svim poljima i iznosi

$$M^\circ = \frac{1}{6} Q_l l. \quad (62)$$



Sl. 20. Raspodjela opterećenja podvlaka. a kraća, b dulja podvlaka

Kad je podvlaka kraćeg raspona na jednoj strani prosto oslonjena a na drugoj upeta, ležajni moment iznosi

$$M = -\frac{5}{32} Q_L l, \quad (63a)$$

a kad je na obje strane upeta, ležajni je moment

$$M = -\frac{5}{48} Q_L l. \quad (63b)$$

Za podvlake duljih raspona vrijedi trapezna raspodjela opterećenja (sl. 20b). Opterećenje Q_L određeno je izrazom (60) ako se ploča nalazi samo s jedne strane podvlake, a dvostruko je veće kad se ploča nalazi s obje strane podvlake. Vlastita težina podvlake pribraja se težini ploče. Prosti moment podvlake u polovištu raspona u svim je poljima jednak i iznosi

$$M^o = \frac{3 - \gamma^2}{2 - \gamma} \cdot \frac{Q_L L}{12}. \quad (64)$$

Ležajni moment jednopoljne podvlake duljeg raspona koja je na jednoj strani prosto oslonjena a na drugoj upeta iznosi

$$M = -\frac{8 - 4\gamma^2 + \gamma^3}{2 - \gamma} \cdot \frac{Q_L L}{32}, \quad (65a)$$

dok je ležajni moment jednake podvlake koja je obostrano upeta

$$M = -\frac{8 - 4\gamma^2 + \gamma^3}{2 - \gamma} \cdot \frac{Q_L L}{48}, \quad (65b)$$

gdje je γ recipročna vrijednost od β (51).

Kad je ploča kvadratna ($\gamma = 1$), izrazi (65a) i (65b) prelaze u izraze (63a) i (63b), a za $\gamma = 0$ izrazi (64) i (65) daju podatke za jednoliko raspodijeljeno opterećenje.

Unutrašnje sile i reakcije podvlaka najjednostavnije je odrediti već opisanom približnom Muraševljevom metodom (sl. 8 b i d).

Plastostatika masivnih dvosmjerne ploče

Faze odziva masivne dvosmjerne ploče. Porastom opterećenja do lomne vrijednosti odziv ploče karakteriziraju: faza elastičnog odziva, faza pojave naprslina, faza plastifikacije i faza loma.

Faza elastičnog odziva. Karakteristika je te faze proporcionalnost unutrašnjih sila i progiba s opterećenjem.

Faza pojave naprslina. Porastom opterećenja beton popuca u zategnutu zoni najnapregnutijih područja, pa se smanjuje kruštost u tim područjima. Zbog toga nastaje redistribucija momenata savijanja u ploči. S daljim porastom opterećenja momenti brže rastu u područjima bez naprslina, a polaganje tamo gdje su se pojavile naprsline. Sve dok naprezanje armature nije dostiglo granicu velikih izduženja (granicu popuštanja), nastale naprsline nisu široke.

Faza plastifikacije. Daljim porastom opterećenja naprezanje armature doseže granicu velikih izduženja, pa se armatura produljuje i bez povećanja naprezanja. Plastifikacija se postepeno širi uzduž uskih traka ploče gdje su naprsline najšire, a kad te trake dosegnu rubove ploče, ploča praktički nosi maksimalno opterećenje. Plastificirane trake ploče približno su pravolinjske i djeluju kao plastični zglobovi u kojima djeluju plastični

momenti. Nastankom plastičnih zglobova ploča postaje mehanizam s jednim stupnjem slobode i nalazi se u nestabilnoj ravnoteži.

Faza loma. Neznantnim daljim porastom opterećenja povećavaju se deformacije i beton se počinje mrviti u tlačnoj zoni na najnapregnutijem mjestu. Mrvljenje se postepeno širi uzduž plastičnih zglobova, pa konačno sustav plastificiranih traka postaje sustav traka drobljenja. Takav lom armiranobetonskih ploča naziva se plastičkim lomom.

Lomni mehanizam. Neposredno prije loma ploča postaje mehanizam, koji se naziva lomnim mehanizmom. Tijelo omeđeno srednjom ravnninom nedeformirane ploče i lomnim mehanizmom naziva se lomnim tijelom.

Teorija lomnog mehanizma osniva se na dvije pretpostavke. Prema prvoj pretpostavci materijal je ploče krutoplastičan, a ovisnost je naprezanja i deformacije materijala prikazana od sječkom vertikalnog i horizontalnog pravca (v. *Ispitivanje građevnih materijala i konstrukcija*, TE 6, str. 551). Tom je pretpostavkom osigurano da su u graničnom stanju ploče elastične deformacije zanemarljive u usporedbi s plastičima, i osigurana je rastezljivost koja omogućuje zakretanje segmenta ploče u plastičnim zglobovima, što omogućuje redistribuciju momenata savijanja. Iako armirani beton nije potpuno krutoplastičan, teorija lomnog mehanizma može se s dovoljnom točnošću primijeniti na armiranobetonske ploče, ako je udio armature manji od izbalansiranog udjela. Izbalansirani udio armature jest udio uz koji bi se ploča slomila istodobno i zbog tečenja (popuštanja) armature i zbog mrvljenja betona u pritisnutoj zoni. Tom je uvjetu gotovo uvijek udovoljeno, jer se nastoji da progibi ne budu preveliki i da se uštedi armatura. Zbog toga su ploče dovoljno debele, pa je udio armature dosta manji od izbalansiranoga.

Prema drugoj pretpostavci tangencijalna su naprezanja male, a zbog toga i glavna vlačna naprezanja, pa ploča gubi svoju nosivost zbog plastičkog loma, a ne zbog posmičnog loma. I toj je pretpostavci u praksi udovoljeno, jer su tangencijalna naprezanja male zbog relativno velike debljine ploče.

Ploče se armiraju nizom šipki ili, najčešće, mrežom od šipaka koja je sastavljena od niza međusobno okomitih šipki uz donji zategnuti rub ploče. Udio svakog niza šipki je konstantan, tako da su udjeli uzdužnih i poprečnih šipki jednaki. Armatura uz donji rub ploče naziva se pozitivnom, jer preuzima vlačna naprezanja zbog pozitivnih momenata savijanja, a armatura uz gornji rub, ako postoji, negativnom armaturom, jer preuzima vlačna naprezanja zbog negativnih momenata savijanja. Šipke pozitivne i negativne armature međusobno su usporedne, odnosno okomite. Armatura je ortotropna kad su udjeli obaju nizova šipki različiti, a izotropna kad su udjeli jednaki. Naziv ploča odgovara nazivu armature.

Plastični zglobovi mogu biti pozitivni i negativni, već prema predznaku plastičnih momenata koji djeluju uzduž zglobova.

Poučci i metode plastostatike. Tri su osnovna poučka plastostatike: kinematički poučak, statički poučak i poučak jedinstvenosti.

Prema kinematičkom poučku lomno opterećenje najmanja je vrijednost od svih opterećenja koja odgovaraju različitim mehanički mogućim lomnim mehanizmima, a lomni mehanizam kinematički je moguć ako je u skladu s ležajnim uvjetima ploče.

Prema statičkom poučku lomno opterećenje ploče najveća je vrijednost od svih opterećenja koja odgovaraju različitim statički mogućim stanjima momenata savijanja, a statički su moguća ona stanja momenata savijanja ploče kad su momenti savijanja u ravnoteži s opterećenjem ploče i kad ni na jednom mjestu nisu veći od plastičnih momenata.

Prema poučku jedinstvenosti lomno je opterećenje ploče ono opterećenje uz koje je istodobno i lomni mehanizam kinematički moguć i stanje momenata savijanja statički moguće.

Plastostatističke metode koje se osnivaju na lomnom mehanizmu daju točan rezultat samo kad je pretpostavljen pravi lomni mehanizam. Ako to nije postignuto, dobiva se prevelika vrijednost lomnog opterećenja i premala vrijednost potrebnoga plastičnog momenta ploče.

Također plastostatičke metode, kojima je osnova statički moguće stanje momenata savijanja, daju točan rezultat ako je pretpostavljeno pravo stanje momenata savijanja. Ako takva pretpostavka nije ispunjena, dobiva se premašna vrijednost lomnog opterećenja i prevelika vrijednost potrebnoga plastičnog momenta ploče.

Da se ne bi dobila nesigurna konstrukcija, treba ploču ispitati na osnovi nekoliko lomnih mehanizama, a da se ne bi dobila neekonomična konstrukcija, ploča se ispituje na osnovi nekoliko statički mogućih stanja momenata savijanja.

Metoda lomnog mehanizma sastoji se u određivanju ravnoteže ploče neposredno pred lomom. Ona se može upotrijebiti za ploče bilo kakva oblika i bilo kakvih rubnih uvjeta i opterećenja, te za ploče s otvorima. Metoda lomnog mehanizma, međutim, ne daje podatke o stanju momenata savijanja, o optimalnom rasporedu armature ni o progibu pri upotrebnom opterećenju.

Metoda stanja momenata savijanja sastoji se u određivanju ravnoteže segmenata ploče omeđenih njenim rubovima i plastičnim zglobovima, uzimajući u obzir čvorne sile u vrhovima mehanizma koje nastaju djelovanjem torzijskih momenata uzduž plastičnih zglobova.

Plastostatička metoda lomnog mehanizma u praksi je najčešće jednostavnija nego metoda stanja momenata savijanja, a pogotovo jednostavnija od elastostatičke metode.

Plastični momenti. Plastični moment ploče od homogenog izotropnog materijala moment je savijanja po jedinici duljine presjeka kad su normalna naprezanja iznad i ispod neutralne osi po iznosu jednakog (σ_{vi}), ali suprotnog predznaka. Tada se dijagram normalnog naprezanja sastoji od dvaju pravokutnika. Pozitivni i negativni plastični momenti imaju jednaku apsolutnu vrijednost koja iznosi

$$m = \frac{d^2}{4} \sigma_{vp} \quad (66)$$

gdje je d debljina ploče. Plastični moment ima za 50% veću vrijednost od momenta koji odgovara trokutnoj raspodjeli normalnih naprezanja u trenutku kad rubna naprezanja dosegnu naprezanje σ_{vi} .

Plastični moment armiranobetonske ploče u nekom smjeru moment je savijanja ploče po jedinici duljine presjeka u istom smjeru kad je naprezanje armature u tom smjeru jednako granici velikih izduženja. Pozitivni plastični momenti ploče u smjerovima x i y iznose

$$m_x = f_{ax} z_x \sigma_{vp}, \quad m_y = f_{ay} z_y \sigma_{vp} \quad (67)$$

gdje su f_{ax} i f_{ay} površine presjeka pozitivne armature u smjerovima x i y po jedinici duljine presjeka, a z_x i z_y pripadni krakovi unutrašnjih sila u trenutku plastifikacije. Ako postoji negativna armatura s površinom presjeka f'_{ax} i f'_{ay} i s krakovima unutrašnjih sila z'_x i z'_y , negativni su plastični momenti u smjerovima x i y

$$m'_x = f'_{ax} z'_x \sigma_{vi}, \quad m'_y = f'_{ay} z'_y \sigma_{vi} \quad (68)$$

Može se pokazati da su m_x i m_y glavni plastični momenti ploče.

Ako je armiranobetonska ploča izotropna, plastični su momenti u smjerovima x i y međusobno jednaki, pa je $m_x = m_y = m$ i $m'_x = m'_y = m'$.

Plastični momenti u smjerovima koji se razlikuju od smjerova x i y određuju se pomoću izraza:

$$m_j = m_x \cos^2 \beta_j + m_y \sin^2 \beta_j, \quad (69a)$$

$$m'_k = m'_x \cos^2 \beta_k + m'_y \sin^2 \beta_k, \quad (69b)$$

gdje je m_j pozitivni plastični moment u smjeru j koji zatvara kut β_j s osi x , a m'_k negativni plastični moment u smjeru k koji s osi x zatvara kut β_k .

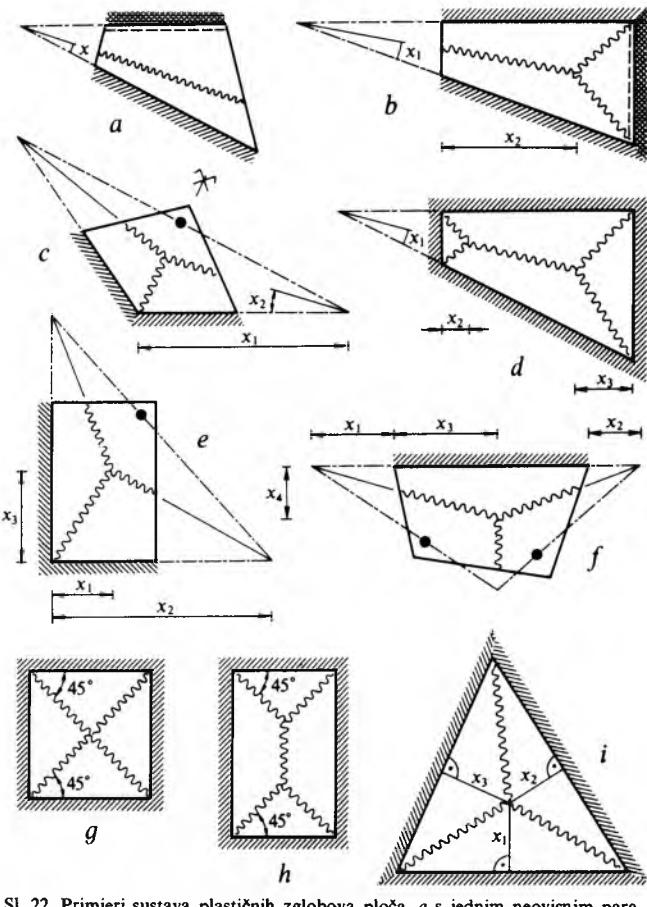
Češće se pozitivni plastični moment ploče u smjeru x (m_x) smatra referentnim plastičnim momentom m , pa je $m = m_x$. Tada je pozitivni plastični moment u smjeru y jednak xm ($x = m_y/m$), negativni plastični moment u smjeru x jednak λm ($\lambda = m'_x/m$), a negativni plastični moment u smjeru y jednak $\kappa \lambda m$. Za izotropnu je ploču $\kappa = 1$.

Oblik lomnog mehanizma. Plastifikacijom ploče nastaje lomni mehanizam u obliku otvorenog poliedra. Bridovi poliedra su plastični zglobovi, a pobočke poliedra segmenti ploče između njegovih rubova i plastičnih zglobova. Oblik lomnog mehanizma određen je, dakle, sustavom plastičnih zglobova. Pri tečenju armature osi zakretanja segmenata ploče poklapaju se s njenim ležajima, a pravci plastičnih zglobova prolaze sjecištem osi zakretanja segmenata priključenih na pripadni plastični zglob.

a ●	Točkast ležaj	e ~~~~~	Pozitivan plastičan zglob
b —————	Prosto oslonjen rub ploče	f -----	Negativan plastičan zglob
c —————	Upet rub ploče	g - - - -	Osi zakretanja segmenata ploče
d ———	Slobodan rub ploče		

Sl. 21. Uobičajeno označavanje ležaja i rubova ploče, plastičnih zglobova i osi zakretanja segmenata ploče

Za analizu metodom lomnog mehanizma pretpostavlja se sustav plastičnih zglobova. Bilo bi korisno lomni mehanizam prikazati aksonometrijskim crtežom, ali se radi jednostavnosti prikazuje samo na tlocrtu ploče. Pri tom se treba pridržavati uobičajenog označivanja ležaja, rubova ploče, plastičnih zglobova i osi zakreta segmenata ploče (sl. 21). Pretpostavljeni sustav plastičnih zglobova može sadržati jedan geometrijski parametar x koji treba odrediti (sl. 22a), dva takva parametra x_1 i x_2 (sl. 22b i c), te tri i više parametara x_1, x_2, \dots (sl. 22d do f). Ako su ploča i opterećenje simetrični, pretpostavljeni sustav ne sadrži geometrijske parametre koje treba odrediti (sl. 22g). Često se radi pojednostavljenja analize pretpostavljeni sustav jednoznačno definira, iako bi morao sadržati jedan ili više parametara. Tako se npr. pretpostavlja da se pozitivni plastični zglobovi poklapaju sa simetralama kutova koje



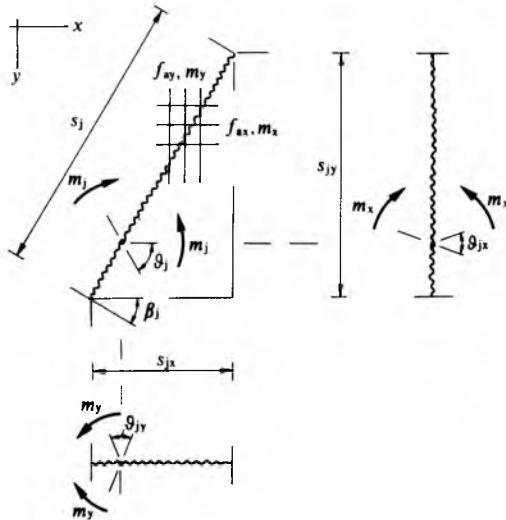
Sl. 22. Primjeri sustava plastičnih zglobova ploča. a s jednim neovisnim parametrom, b i c sa dva neovisna parametra, d i e sa tri neovisna parametra, f sa četiri neovisna parametra, g i h bez parametara, i sa tri međusobno ovisna parametra

zatvaraju osi zakretanja pripadnih segmenata (sl. 22a). Pokazuje se, naime, da je pogreška uz takvu pretpostavku zanemarljiva. Koji put je, radi pojednostavljenja analize, pogodno da broj parametara bude veći od broja potrebnih neovisnih parametara (sl. 22i).

Geometrijski parametri međusobno su vezani relacijom $\varphi(x_1, x_2, \dots)$ ili s više relacija $\varphi_1(x_1, x_2, \dots), \varphi_2(x_1, x_2, \dots), \dots$

Progibi plastificirane ploče, kad je ona horizontalna, mijere se u vertikalnom smjeru, i to od srednje ravnine nedeformirane ploče. Progibno stanje jednoznačno je određeno jednim referentnim progibom (npr. progibom središta ploče), jer lomni mehanizam ima samo jedan stupanj slobode gibanja.

Primjena principa virtualnog rada. Međusobna ovisnost potrebnih plastičnih momenata ploče i njena lomnog opterećenja utvrđuje se jednadžbom ravnoteže ploče. Ta se jednadžba najjednostavnije formulira primjenom principa virtualnog rada. Prema tom principu rad unutrašnjih sila, tj. plastičnih momenata uzduž plastičnih zglobova, mora biti jednak radu vanjskih sila, tj. radu opterećenja na virtualnoj deformaciji ploče. U toj jednadžbi ne pojavljuju se reaktivne sile, jer se pretpostavlja da su ležaji nepomični u smjeru okomitom na ploču.



Sl. 23. Određivanje rada plastičnih momenata uzduž pozitivnoga plastičnog zglobova j

Rad plastičnih momenata jednak je zbroju doprinosa svih pozitivnih i negativnih plastičnih zglobova prema izrazu

$$U_i = \sum_j m_j s_j \vartheta_j + \sum_k m'_k s_k \vartheta_k, \quad (70a)$$

gdje je j broj pozitivnih, a k negativnih plastičnih zglobova, m plastični moment okomit na pripadni zglob, s duljina zglobova, a ϑ kutni pomak okomit na pripadni zglob (sl. 23). Rad plastičnih momenata može se izraziti i pomoću plastičnih momenata u smjerovima x i y prema izrazima (67) i (68), pa je

$$U_i = m_x \sum_j s_{jy} \vartheta_{jx} + m_y \sum_j s_{jx} \vartheta_{jy} + m'_x \sum_k s_{ky} \vartheta_{kx} + m'_y \sum_k s_{kx} \vartheta_{ky}. \quad (70b)$$

Ako se moment m_x označi kao referentni moment m , te ako se uvedu već spomenuti omjeri κ i λ , rad je plastičnih momenata

$$U_i = m \left(\sum_j s_{jy} \vartheta_{jx} + \kappa \sum_j s_{jx} \vartheta_{jy} + \lambda \sum_k s_{ky} \vartheta_{kx} + \kappa \lambda \sum_k s_{kx} \vartheta_{ky} \right). \quad (70c)$$

Ako je ploča izotropna, izrazi (70) imaju oblik

$$U_i = m \sum_j s_j \vartheta_j + m' \sum_k s_k \vartheta_k, \quad (71a)$$

$$U_i = m \sum_j (s_{jy} \vartheta_{jx} + s_{jx} \vartheta_{jy}) + m' \sum_k (s_{ky} \vartheta_{kx} + s_{kx} \vartheta_{ky}), \quad (71b)$$

$$U_i = m \left[\sum_j (s_{jy} \vartheta_{jx} + s_{jx} \vartheta_{jy}) + \lambda \sum_k (s_{ky} \vartheta_{kx} + s_{kx} \vartheta_{ky}) \right]. \quad (71c)$$

Sve kutne pomake treba izraziti pomoću referentnog progiba f lomnog mehanizma.

Rad je torzijskih momenata koji djeluju uzduž plastičnih zglobova zanemarljivo malen, pa u izrazima (70) i (71) nije ni uzet u obzir. Kad je ploča izotropna, rad je torzijskih momenata jednak nuli.

Rad opterećenja određen je izrazom

$$U_a = \int_F q w dF, \quad (72)$$

gdje je q lomno opterećenje po jedinici površine osnovice ploče, w progib, a F površina osnovice ploče. Najčešće je opterećenje konstantno po cijeloj osnovici ploče, a umnožak je progiba i površine volumena V lomnog tijela, pa se za rad opterećenja dobiva

$$U_a = q V. \quad (73)$$

Kad je lomno tijelo piramida ili stožac, njegov je volumen

$$V = \frac{1}{3} F f, \quad (74)$$

gdje je f visina piramide ili stožca. Budući da je ukupno opterećenje ploče $Q = qF$, rad je opterećenja

$$U_a = \frac{1}{3} Q f. \quad (75)$$

Rješenje jednadžbe virtualnog rada. Izjednačenjem rada unutrašnjih sila i rada vanjskih sila dobiva se jednadžba virtualnog rada

$$U_i = U_a \quad (76)$$

koja je osnova za proračun. Referentni progib nalazi se na objema stranama jednadžbe (76), pa se može skratiti. Zbog toga se i ne pojavljuje u rješenju, pa se njegova vrijednost može po volji pretpostaviti.

Analiza unutarnjih sila ploče provodi se jednim od dvaju postupaka.

Prema prvom postupku pretpostavi se debljina ploče, marka betona i vrsta čelika, pa se kao suma umnožaka normnih opterećenja i pripadnih koeficijenata sigurnosti odredi lomno opterećenje q . Zatim se pomoću jednadžbe virtualnog rada izračuna potrebni referentni plastični moment m ploče, pa se konačno provjeri rubno naprezanje betona. Ako je rubno naprezanje nešto manje ili najviše jednak prizmnoj čvrstoći betona, učinjene pretpostavke daju zadovoljavajući rezultat, pa se mogu odrediti potrebni presjeci armature. Ako je, međutim, rubno naprezanje mnogo veće ili mnogo manje od prizmene čvrstoće betona, račun treba ponoviti s korigiranim pretpostavkama.

Prema drugom postupku pretpostavi se debljina ploče, presjeci armature, marka betona i vrste čelika, pa se odrede vrijednosti plastičnih momenata. Iz jednadžbe virtualnog rada izračuna se lomno opterećenje. Ako je to lomno opterećenje jednak ili neznatno veće od lomnog opterećenja koje je određeno umnoškom normnog opterećenja i koeficijenta sigurnosti, učinjene pretpostavke bile su dobro odabранe. Ako taj uvjet nije ispunjen, račun treba ponoviti s korigiranim pretpostavkama.

Rješenje je jednadžbe virtualnog rada kojim se dobiva vrijednost referentnog plastičnog momenta ili lomnog opterećenja elementarno ako je pretpostavljeni sustav plastičnih zglobova jednoznačno definiran (npr. kao na sl. 22g i h). Ako, međutim, pretpostavljeni sustav plastičnih zglobova sadrži geometrijske parametre koje tek treba odrediti, rješenje ovisi o tim nepoznatim veličinama, jer je

$$m = m(x_1, x_2, \dots); \quad q = q(x_1, x_2, \dots). \quad (77)$$

Ako su geometrijski parametri međusobno neovisni, maksimalna vrijednost plastičnog momenta određuje se iz uvjeta za ekstrem

$$\frac{\partial m}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial m}{\partial x_2} = 0; \dots, \quad (78a)$$

a minimalna vrijednost lomnog opterećenja iz uvjeta

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0; \dots \quad (78b)$$

Ako su, međutim, geometrijski parametri međusobno ovisni (npr. sl. 22i), za određivanje plastičnog momenta treba postaviti pomoćnu funkciju

$$m^* = m(x_1, x_2, \dots) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \dots), \quad (79)$$

a za određivanje minimalne vrijednosti lomnog opterećenja pomoćnu funkciju

$$q^* = q(x_1, x_2, \dots) + \lambda \varphi(x_1, x_2, \dots), \quad (80)$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator, a φ funkcija koja povezuje parametre, pa je $\varphi(x_1, x_2, \dots) = 0$. Vrijednosti nepoznanica x_1, x_2, \dots dobivaju se iz uvjeta za ekstrem

$$\frac{\partial m^*}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial m^*}{\partial x_2} = 0; \dots, \quad (81)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial q^*}{\partial x_2} = 0; \dots \quad (82)$$

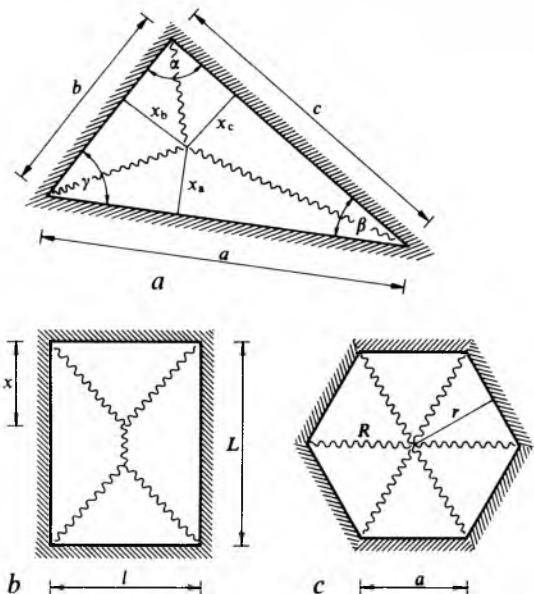
Princip superpozicije djelovanja daju ili više opterećenja, koji se primjenjuje u elastostatiku, ne vrijedi u plastostatiku. Međutim, superpozicija se primjenjuje i u plastostatiku, jer daje rezultate koji vode povećanju sigurnosti, a pogreška je u prihvataljivim granicama. Ako su m_1 i m_2 referentni plastični momenti ploče potrebeni za preuzimanje lomnih opterećenja q_1 i q_2 kad ona djeluju odvojeno, potrebeni referentni plastični moment m koji je potreban da preuzme opterećenje $q_1 + q_2$ iznosi

$$m \leq m_1 + m_2, \quad (83)$$

što znači da je moment m jednak ili manji od zbroja momenata m_1 i m_2 . Znak jednakosti u izrazu (83) vrijedi kad su jednaki lomni mehanizmi uz opterećenje q_1 i q_2 .

Primjena plastostatike na masivne dvosmjerne ploče

Trokutna ploča oslonjena uzduž cijelog oboda (sl. 24a). Lomno je tijelo takve ploče trostrana piramida. Tlocrtni položaj vrha piramide (sjecište plastičnih zglobova) jednoznačno je određen dvjema koordinatama, ali ga je prikladnije definirati pomoću



Sl. 24. Višekutne ploče oslonjene uzduž cijelog oboda s naznakom položaja plastičnih zglobova i parametara. a) trokutna ploča, b) pravokutna ploča, c) šesterokutna pravilna ploča

tri dužine x_a , x_b i x_c okomite na stranice a , b i c . Te su dužine međusobno povezane relacijom

$$\varphi(x_a, x_b, x_c) = ax_a + bx_b + cx_c - 2F = 0, \quad (84)$$

gdje je F površina trokuta određena izrazom

$$F = \frac{1}{4}(a+b+c)^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}, \quad (85)$$

gdje su α , β i γ kutovi među stranicama trokuta. Izraz (84) vrijedi, jer su umnošci stranica i pripadnih dužina x jednaki dvostrukoj površini trokutā koje čine stranice i plastični zglobovi.

Rad plastičnih momenata iznosi

$$U_i = mf \left(\frac{a}{x_a} + \frac{b}{x_b} + \frac{c}{x_c} \right), \quad (86)$$

a rad je vanjskih sila određen izrazom (75), pa se nakon izjednačenja prema izrazu (76) dobiva

$$m(x_a, x_b, x_c) = \frac{1}{\frac{a}{x_a} + \frac{b}{x_b} + \frac{c}{x_c}} \cdot \frac{Q}{3}. \quad (87)$$

Pomoću izraza (79) i (81) dobiva se da su parametri x_a , x_b i x_c jednaki polumjeru kružnice upisane u trokut. Plastični zglobovi tada se poklapaju sa simetralama kutova α , β i γ , a vrh piramide nalazi se na vertikali kroz središte upisane kružnice. Potrebni referentni plastični moment ploče iznosi

$$m = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{3(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} Q. \quad (88)$$

Kad ploča ima oblik istostraničnog trokuta, referentni je plastični moment

$$m = \frac{Q}{31,2}, \quad (89)$$

gdje je $Q = qF$.

Pozitivni i negativni plastični momenti trokutne ploče upete uzduž cijelog oboda dobivaju se množenjem plastičnog momenta prosto oslonjene ploče (88) faktorom $1/(1+\lambda)$, odnosno faktorom $\lambda/(1+\lambda)$. Kad su udjeli negativne i pozitivne armature jednaki ($\lambda = 1$), plastični momenti ploče iznose samo 50% od vrijednosti plastičnih momenata prosto oslonjene ploče.

Pravokutna ploča oslonjena uzduž cijelog ruba (sl. 24b). Lomno je tijelo klin, a njegov je volumen

$$V = (3L - 2x) \frac{l f}{6}, \quad (90)$$

pa je rad vanjskih sila, prema (73),

$$U_a = (3L - 2x) \frac{l f q}{6}, \quad (91)$$

gdje je L dulja, a l kraća stranica pravokutnika. Kad je ploča uzduž cijelog oboda prosto oslonjena, rad je plastičnih momenata

$$U_i = 4 \left(\frac{l}{2x} + \frac{2x}{l} + \frac{L-2x}{L} \right) mf. \quad (92)$$

Izjednačenjem $U_i = U_a$ dobiva se

$$m(x) = \frac{x(3L-2x)}{l^2 + 2Lx} \cdot \frac{q l^2}{12}. \quad (93)$$

Maksimalna vrijednost momenta određuje se iz uvjeta $\partial m/\partial x = 0$. Iz tog uvjeta dobiva se

$$x = (\sqrt{3 + \gamma^2} - \gamma) \frac{l}{2}, \quad (94)$$

pa je maksimalna vrijednost plastičnog momenta

$$m = (\sqrt{3 + \gamma^2} - \gamma)^2 \frac{q l^2}{24}, \quad (95)$$

gdje je $\gamma = l/L$.

Kad je ploča kvadratnog oblika ($\gamma = 1$), izraz (95) prelazi u oblik

$$m = \frac{q l^2}{24}. \quad (96)$$

Kad je pravokutna ploča uzduž cijelog oboda upeta, pozitivni i negativni plastični moment određuje se kao za trokutnu ploču množenjem plastičnog momenata pripadne prosto oslonjene ploče faktorima $1/(1 + \lambda)$ odnosno $\lambda/(1 + \lambda)$.

Višekutna pravilna ploča oslonjena uzduž cijelog oboda (sl. 24c). Lomno je tijelo pravilna piramida, a plastični zglobovi prolaze kroz vrhove i središte ploče. Polumjer je upisane kružnice

$$r = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n}, \quad (97)$$

a površina ploče

$$F = \frac{1}{2} n a r, \quad (98)$$

gdje je a stranica višekuta, a n broj stranica višekuta.

Ako je ploča uzduž cijelog oboda prosto oslonjena, referentni je plastični moment

$$m = \frac{q r^2}{6} = \frac{Q}{6n} \cot \frac{\pi}{n}. \quad (99)$$

Recipročna vrijednost multiplikatora u Q za trokutnu ploču iznosi 31,2, što je u skladu s izrazom (89), za četverokutnu 24, što je u skladu s izrazom (96), za peterokutnu 21,8, za šesteročutnu 20,8, za sedmerokutnu 20,3, a za osmerokutnu ploču 19,9.

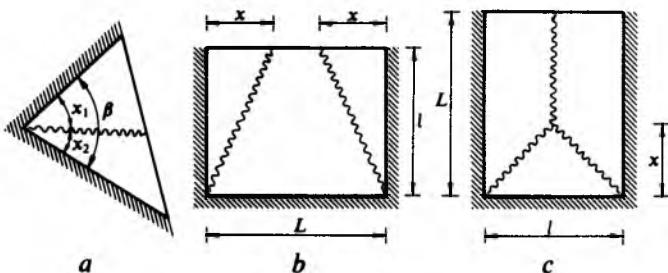
Ako je višekutna pravilna ploča opterećena koncentriranom silom Q' koja djeluje u središtu, plastični moment iznosi

$$m = \frac{Q'}{2n} \cot \frac{\pi}{n}. \quad (100)$$

Recipročna vrijednost multiplikatora uz Q' jednaka je trećini recipročne vrijednosti multiplikatora uz Q u izrazu (99).

Lomni mehanizam jednak je i za jednoliko i za koncentrirano opterećenje, pa za utjecaje obaju opterećenja točno vrijedi zakon superpozicije.

Trokutna ploča sa dva ruba prosto oslonjena i s jednim slobodnim rubom (sl. 25a). Lomno je tijelo piramide s vrhom na okomici kroz sjecište plastičnog zglobova i slobodnog ruba. Zbroj



Sl. 25. Višekutne ploče oslonjene uzduž dijela oboda s naznakom položaja plastičnih zglobova i parametara. a) trokutna ploča s jednim slobodnim rubom, b) pravokutna ploča sa slobodnim duljim rubom, c) pravokutna ploča sa slobodnim kraćim rubom

kutova x_1 i x_2 koje plastični zglob zatvara s oslonjenim rubovima ploče jednak je kutu β među oslonjenim rubovima, pa su nepoznati parametri x_1 i x_2 vezani jednadžbom

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \beta = 0. \quad (101)$$

Rad vanjskih sila U_a određen je izrazom (75), a rad plastičnih momenata iznosi

$$U_i = (\cot x_1 + \cot x_2) m f. \quad (102)$$

Izjednačenjem U_a i U_i dobiva se

$$m(x_1, x_2) = \frac{1}{\cot x_1 + \cot x_2} \cdot \frac{Q}{3}. \quad (103)$$

Pomoću izraza (79) i (81) dobiva se da je $x_1 = x_2$, što znači da plastični zglob raspolaže kut β , pa je potrebnii plastični moment, prema izrazu (103),

$$m = \frac{Q}{6} \tan \frac{\beta}{2}. \quad (104)$$

Ako je β pravi kut, potrebnii je plastični moment $m = Q/6$.

Pravokutna ploča prosto oslonjena uzduž triju rubova, a slobodna uzduž četvrtoga. Sustav plastičnih zglobova sadrži jedan nepoznati geometrijski parametar. Plastični moment kad je slobodna dulja stranica (sl. 25b) iznosi

$$m = \frac{Q}{8 + 6\gamma}, \quad (105a)$$

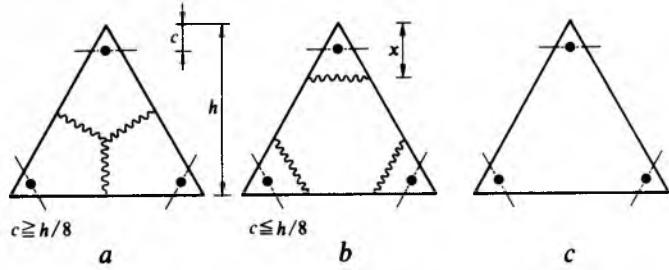
a kad je slobodna kraća stranica (sl. 25c),

$$m = \frac{Q}{4 + 2\gamma + 8/\gamma}, \quad (105b)$$

gdje je $\gamma = l/L$.

Kad je ploča kvadratna ($\gamma = 1$), plastični je moment $m = Q/14$.

Točkasto oslonjena istostranično-trokutna ploča. Točkasti ležaji nalaze se u vrhovima sličnog istostraničnog trokuta, a njihova udaljenost od vrhova ploče iznosi c . Za takvu ploču moguća su tri lomna mehanizma.



Sl. 26. Točkasto oslonjena istostranično-trokutna ploča. a) plastični zglobovi kad je $c \geq h/8$, b) plastični zglobovi kad je $c \leq h/8$, c) negativni plastični zglobovi

Ako je $c \geq h/8$, gdje je h visina trokuta, plastični zglobovi imaju smjer okomit na stranice trokuta i sijeku se u središtu (sl. 26a). Pozitivni plastični moment iznosi

$$m = \left(\frac{7}{18} - \frac{c}{h} \right) \frac{Q}{\sqrt{3}}. \quad (106a)$$

Ako je, međutim, $c \leq h/8$, pozitivni su plastični zglobovi usporedni s nasuprotnim stranicama (sl. 26b), a pozitivni je plastični moment

$$m = \left[1 - 3 \sqrt[3]{\left(\frac{c}{2h} \right)^2} \right] \frac{Q}{2\sqrt{3}}. \quad (106b)$$

Za $c = h/8$ obje formule (106) daju jednak rezultat.

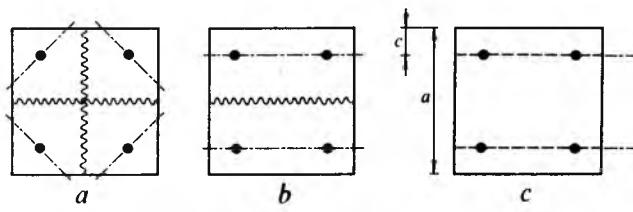
Negativni plastični zglobovi prolaze ležajima i usporedni su s nasuprotnim stranicama (sl. 26c), a negativni plastični moment iznosi

$$m' = \frac{q c^2}{6}. \quad (107)$$

Ako su vrijednosti a i c te presjeci armatura tako odabrani da se neposredno prije loma formiraju i pozitivni i negativni plastični zglobovi, oblik je ploče izbalansiran.

Točkasto oslonjena kvadratna ploča. Ploča je oslonjena na točkastim ležajima koji se nalaze u vrhovima sličnog kvadrata. Dvama lomnim mehanizmima (sl. 27a i b) odgovara jednakii pozitivni plastični moment koji iznosi

$$m = \left(1 - 4 \frac{c}{a} \right) \frac{Q}{8}, \quad (108a)$$



Sl. 27. Točkasto oslonjena kvadratna ploča. a i b dva moguća lomna mehanizma s naznakom pozitivnih i negativnih plastičnih zglobova, c negativni plastični zglobovi

a trećem lomnom mehanizmu (sl. 27c) negativni plastični moment

$$m' = \frac{qc^2}{2}. \quad (108b)$$

U izrazima (108) c je udaljenost ležaja od ruba ploče, a a duljina ruba ploče.

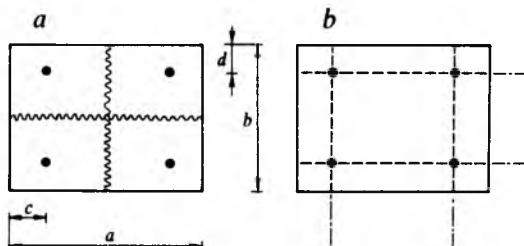
Točkasto oslonjena pravokutna ploča. Ploča je oslonjena na točkastim ležajima koji se nalaze u vrhovima sličnog pravokutnika. Pozitivni plastični momenti u smjeru stranica a i b (sl. 28a) iznose:

$$m_a = \left(1 - 4 \frac{c}{a}\right) \frac{qa^2}{8}; \quad m_b = \left(1 - 4 \frac{d}{b}\right) \frac{qb^2}{8}, \quad (109a)$$

a negativni plastični momenti (sl. 28b):

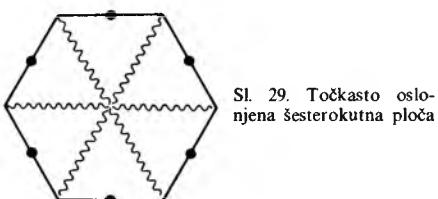
$$m'_a = \frac{qc^2}{2}; \quad m'_b = \frac{qd^2}{2}. \quad (109b)$$

Ploča je izbalansirana ako su dimenzije ploče i udjeli armatura tako odabrani da pri lomu nastaju i pozitivni i negativni plastični zglobovi.



Sl. 28. Točkasto oslonjena pravokutna ploča. a pozitivni, b negativni plastični zglobovi

Točkasto oslonjena pravilna višekutna ploča. Ako su ležaji u polovištima stranica (sl. 29), plastični moment jednak je plastičnom momentu jednake ploče prosto oslonjene uzduž cijelog oboda za koje vrijedi izraz (99).



Sl. 29. Točkasto oslonjena šesterokutna ploča

Kružna ploča može se smatrati pravilnovišekutnom pločom s beskonačno mnogo stranica. Kad se pojavi lom, formira se beskonačno mnogo radikalnih pozitivnih plastičnih zglobova, pa je lomno tijelo stožac. U skladu s izrazom (99), koji vrijedi za pravilnu višekutnu ploču, plastični moment kružne ploče polujmara r , koja je prosto oslonjena uzduž cijelog oboda, iznosi

$$m = \frac{qr^2}{6} = \frac{Q}{18,8}, \quad (110)$$

jer je $q = Q/r^2$.

Ako je ploča uzduž cijelog ruba upeta, pozitivni plastični moment dobiva se množenjem momenta prema izrazu (110)

faktorom $1/(1 + \lambda)$, a negativni plastični moment množenjem faktorom $\lambda/(1 + \lambda)$. Kad su udjeli pozitivne i negativne armature jednaki ($\lambda = 1$), plastični su momenti upete ploče za 50% manji od plastičnog momenta prosto oslonjene kružne ploče.

Prstenasta ploča oslonjena uzduž unutrašnjeg ruba (sl. 30a). U takvoj ploči pojavljuje se beskonačno mnogo radikalnih negativnih plastičnih zglobova. Lomni je mehanizam plaš rotacijskog tijela. Volumen lomnog tijela određuje se pomoću drugog Pappus-Guldinova pravila (v. *Mehanika, Statika, TE 8, str. 22*). Rad opterećenja iznosi

$$U_a = (2R + r)(R - r) \frac{\pi f q}{3}, \quad (111)$$

a rad plastičnih momenata

$$U_i = 2\pi f m', \quad (112)$$

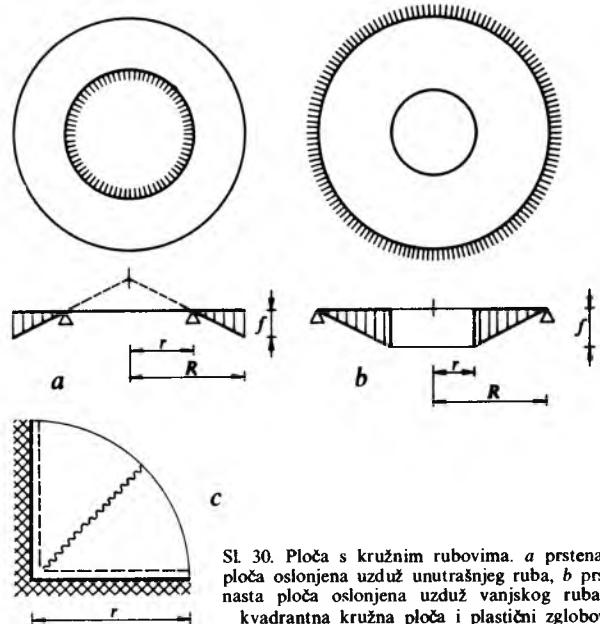
pa je negativni plastični moment

$$m' = (2R + r)(R - r) \frac{q}{6}. \quad (113)$$

Ako je ploča upeta uzduž unutrašnjeg ruba, osim radikalnih negativnih plastičnih zglobova nastaje i kružni negativni plastični zglob uzduž upetog ruba. Tada potrebnii negativni plastični moment iznosi

$$m' = \left(2 + \frac{r}{R}\right)(R - r)^2 \frac{q}{6}, \quad (114)$$

koji je manji od momenta prema izrazu (113).



Sl. 30. Ploča s kružnim rubovima. a prstenasta ploča oslonjena uzduž unutrašnjeg ruba, b prstenasta ploča oslonjena uzduž vanjskog ruba, c kvadrantna kružna ploča i plastični zglobovi

Kad je kružna ploča uzduž slobodnog ruba opterećena linjskim opterećenjem q' , negativni plastični moment prosto oslonjene ploče uzduž unutrašnjeg ruba iznosi

$$m' = R q', \quad (115a)$$

a negativni plastični moment upete ploče

$$m' = (R - r) q'. \quad (115b)$$

Lomni mehanizam za linjsko opterećenje jednak je kao za jednoliko raspodijeljeno opterećenje, pa se utjecaji tih dvaju opterećenja mogu superponirati.

Prstenasta ploča oslonjena uzduž vanjskog ruba (sl. 30b) može se promatrati kao kružna ploča s koncentričnim kružnim otvorom. Nekosredno prije loma nastaje beskonačno mnogo pozitivnih plastičnih zglobova. Volumen lomnog tijela određuje se kao za prstenastu ploču oslonjenu uzduž unutrašnjeg ruba, pa se za rad opterećenja dobije izraz (111). Rad plastičnih momenata odgovara izrazu (112), pa se referentni pozitivni moment određuje iz izraza (113).

Ako je ploča upeta uzduž vanjskog ruba, osim radikalnih pozitivnih plastičnih zglobova formira se i kružni negativni zglob uzduž upetog ruba ploče. Potrebni pozitivni i negativni plastični momenti tada iznose

$$m = \frac{(R+2r)(R-r)^2}{(1+\lambda)R-r} \cdot \frac{q}{6}; \quad m' = \lambda m. \quad (116)$$

Kad je ploča uzduž slobodnog ruba opterećena linijskim opterećenjem q' , pozitivni plastični moment prosto oslonjene ploče iznosi

$$m = r q', \quad (117)$$

a pozitivni i negativni plastični momenti upete ploče

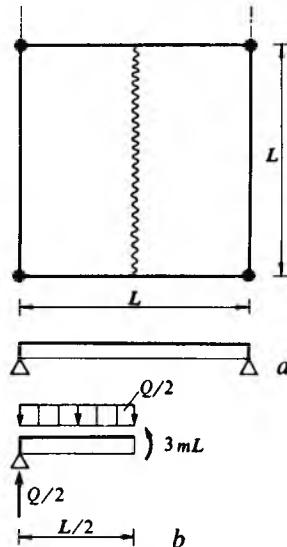
$$m = \frac{r(R-r)}{(1+\lambda)R-r} q'; \quad m' = \lambda m. \quad (118)$$

Zbog jednakosti lomnih mehanizama za jednoliko raspodijeljeno i za linijsko opterećenje točno vrijedi zakon superpozicije.

Kvadrantna ploča (sl. 30c). Za ploču od četvrtine kruga upetu na ravnim rubovima a slobodnu na obodu kruga plastični momenti iznose

$$m = \frac{r^2}{1 + \lambda \sqrt{2}} \cdot \frac{q}{7,24}; \quad m' = \lambda m. \quad (119)$$

Integralno izbalansirano oblikovanje sustava ploča i greda. Postoje dvije mogućnosti loma sustava sastavljenog od kvadratne ploče i četiriju greda točkasto oslonjenih u vrhovima tlocrta (sl. 31a). Prva je mogućnost kad su grede relativno jake s obzirom na ploču. Tada se lomi ploča, a grede ostaju neoštećene. Druga se mogućnost pojavljuje kad se uz konstantni plastični moment ploče postepeno smanjuje plastični moment grede sve dotle dok se ne postigne istodobnost loma ploče i greda. Istodobni lom nastupa stvaranjem plastičnog zgloba uzduž simetrala sustava (sl. 31a). Takav sustav naziva se integralno izbalansiranim.



Sl. 31. Sustav kvadratne ploče i četiri rubne greda. a) položaj pozitivnoga plastičnog zgloba, b) ravnoteže polovice sustava

Ako se sa m označi plastični moment ploče i ako se za plastični moment grede odabere vrijednost $M = mL$, iz uvjeta se ravnoteže polovice sustava (sl. 31b) dobiva

$$m = \frac{Q}{24}. \quad (120)$$

Plastični moment ploče uz koji se potpuno lomi sustav sastavljen od ploče i greda jednak je potrebnom plastičnom momentu kvadratne ploče prosto oslonjene uzduž cijelog oboda iz (96).

Granično stanje masivnih dvostravnih ploča

Prema Hillerborgovoj teoriji graničnog stanja dvostravnih ploča nema torzijskih elemenata u plastificiranim pločama. Jed-

nadžba ravnoteže ploče glasi

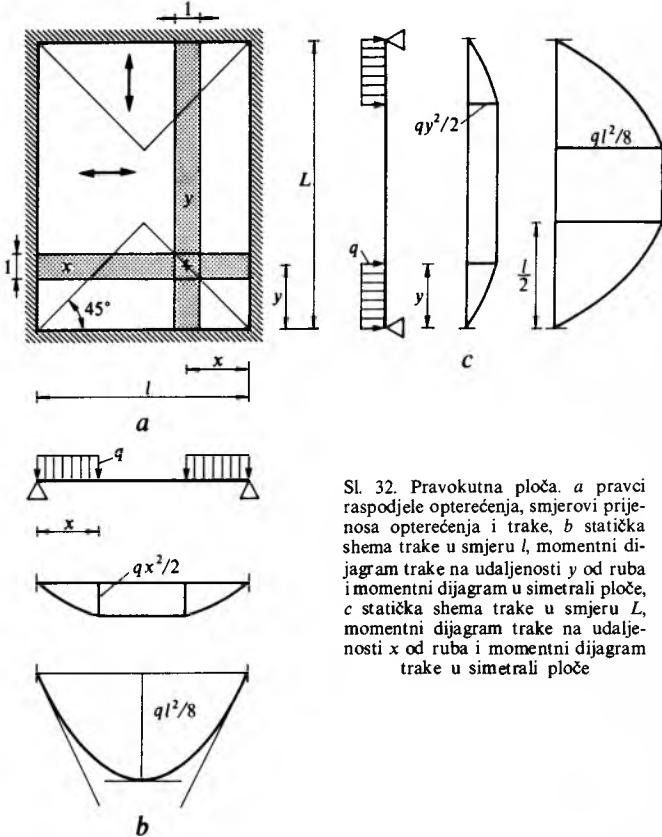
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q, \quad (121)$$

gdje su m_x i m_y plastični momenti u smjerovima x i y , a q lomno opterećenje po jedinici površine. Prema spomenutoj teoriji, koja se naziva i teorijom traka, ploča se zamjeni dvama nizovima traka jedinične širine koje se ukrštaju, a koje opterećenje uzduž svojih raspona prenose jednosmjernim savijanjem. Osnovica se ploče i njeno opterećenje raspodijele u segmente, pa se opterećenje svakog segmenta jednim nizom traka, pa prema tome i u jednom smjeru, prenosi na ležaje. Zbog toga se jednadžba ravnoteže ploče (121) može razdvojiti u jednadžbe ravnoteže traka

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q; \quad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q. \quad (122)$$

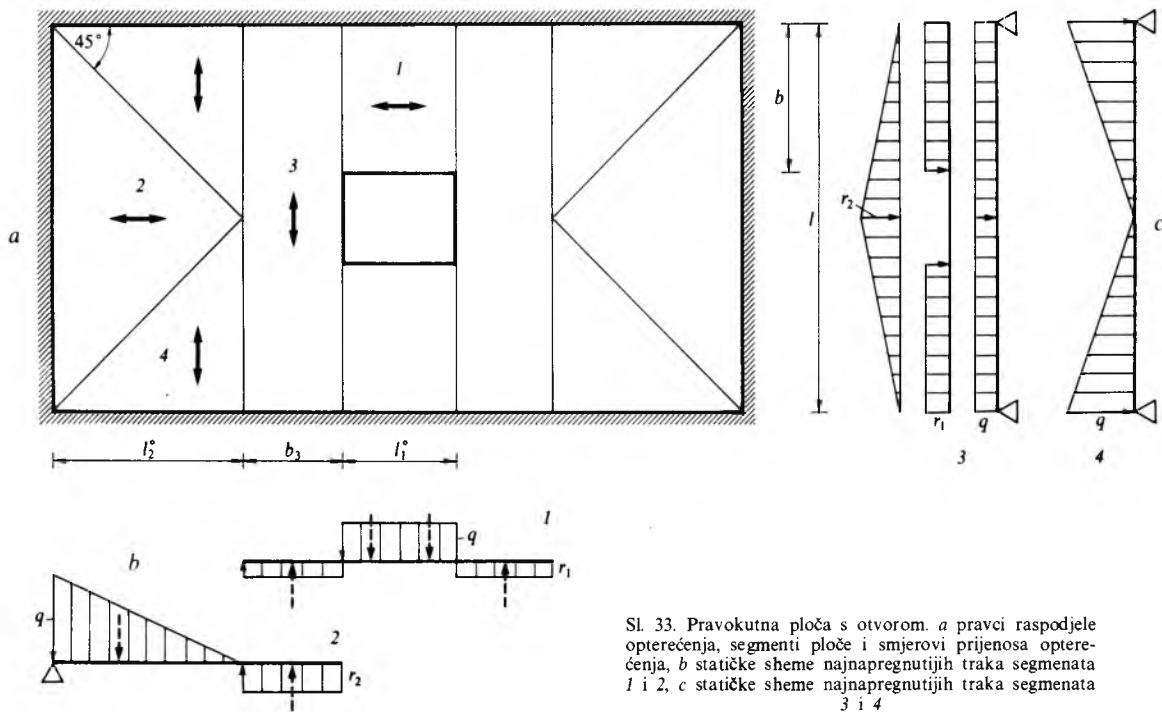
Pravci raspodjele opterećenja istodobno su i pravci diskontinuiteta unutrašnjih sila i progiba. Teorija traka daje podatke potrebne za raspodjelu armature u ploči, a pogodna je i za oblikovanje ploče. Vrijednost plastičnih momenata nije konstantna, kao što je to kad se prilike u ploči promatraju pomoću lomnog mehanizma, već ovisi o mjestu na ploči. Teorija traka može se primijeniti na ploče različitih, posebno nepravilnih, oblika, te na ploče s otvorima.

Pravokutna ploča prosto oslonjena uzduž oboda (sl. 32). Pretpostavlja se da su pravci raspodjele opterećenja uzduž simetrala kutova ploče, pa je opterećenje podijeljeno u tri segmenta. Trake ploče u smjeru l opterećene su na duljini x od ležaja (sl. 32b), a trake u smjeru L na duljini y od ležaja (sl. 32c). Najnapregnuti su, dakako, trake u simetralama ploče. Presjeci armature određuju se dimenzioniranjem najnapregnutijih traka, dok se prema krajevima ploče presjeci armature mogu smanjiti.



Sl. 32. Pravokutna ploča. a) pravci raspodjele opterećenja, smjerovi prijenosa opterećenja i trake, b) statička shema trake u smjeru l , momentni dijagram trake na udaljenosti y od ruba i momentni dijagram u simetrali ploče, c) statička shema trake u smjeru L , momentni dijagram trake na udaljenosti x od ruba i momentni dijagram trake u simetrali ploče

Pravokutna ploča s otvorom prosto oslonjena uzduž oboda (sl. 33). Pretpostavlja se da su pravci raspodjele opterećenja uzduž simetrala kutova ploče, i to za područje do sjecišta simetrala, dok se za unutrašnja područja ploče pretpostavlja da su pravci raspodjele opterećenja usporedni s kraćim stranicama.



Sl. 33. Pravokutna ploča s otvorenjem. a pravci raspodjele opterećenja, segmenti ploče i smjerovi prijenosa opterećenja, b statičke sheme najnapregnutijih traka segmenata 1 i 2, c statičke sheme najnapregnutijih traka segmenata 3 i 4

Prema takvoj raspodjeli opterećenja postoje četiri tipa traka (1...4 na sl. 33).

Trake tipa 1 nose opterećenje segmenta 1 i raspodjeljuju ga na trake tipa 3. Na osnovi uvjeta ravnoteže dobiva se da reakcija i maksimalni moment savijanja u simetričnoj traci (plastični moment) iznose

$$r_1 = \frac{q l_1^2}{2 b_3}, \quad (123a)$$

$$m_1 = \frac{q l_1^2}{4} \left(\frac{l_1^2}{2} + b_3 \right). \quad (123b)$$

Trake tipa 2 nose opterećenje segmenta 2 i raspodjeljuju ga na susjedni ležaj ploče i na trake tipa 3. Najnapregnutija traka tipa 2 nalazi se u simetričnoj ploče, pa reakcija i maksimalni moment savijanja iznose

$$r_2 = \frac{(3-k)k}{6} q l_2, \quad (124a)$$

$$m_2 = \left(1 - k + \frac{2k}{3} \sqrt{\frac{k}{3}} \right) \frac{k^2}{6} q l_2^2, \quad (124b)$$

gdje je $l_2 = l_2^2 + b_3/2$, a $k = l_2^2/l_2$.

Trake tipa 3 nose opterećenje segmenta 3 te akcije r_1 (123a) i r_2 (124a), pa je maksimalni moment savijanja

$$m_3 = \frac{q l^2}{8} + \frac{r_1 b_3^2}{2} + \frac{r_2 l_2^2}{12}. \quad (125)$$

Najnapregnutija traka tipa 4 nalazi se na granici sa segmentom 3. Njezino je opterećenje raspodijeljeno u obliku trokuta, pa maksimalni moment savijanja iznosi

$$m_4 = \frac{q l^2}{24}. \quad (126)$$

Dimenzioniranje armiranobetonskih presjeka

Nakon što se određe unutrašnje sile ploče i greda, dobivaju se podaci za njihovo dimenzioniranje. Primjenjuju se dvije metode dimenzioniranja: metoda upotrebnog stanja i metoda lomnog stanja.

Metoda upotrebnog stanja osniva se na ponašanju konstrukcijskog elementa pri malim opterećenjima i malim, elastičnim deformacijama. U toj metodi pojavljuju se sljedeće veličine: upotrebljena unutrašnja sila (unutrašnja sila koja se pojavljuje pri

upotrebnom, tzv. normnom opterećenju), upotrebljena naprezanja (naprezanja pri upotrebnom opterećenju) i dopuštena naprezanja. Upotrebljene unutrašnje sile određuju se nekom od elasto-statičkih metoda. Dopuštena naprezanja definirana su propisima za armiran beton, a određuju se dijeljenjem graničnih naprezanja (granica velikih izduženja čelika i prizmena čvrstoće betona) s koeficijentom sigurnosti. Pri dimenzioniranju armiranobetonskih presjeka metodom upotrebnog stanja treba dokazati da upotrebljena naprezanja nisu nigdje veća od dopuštenih naprezanja.

Prema suvremenom shvaćanju metoda upotrebnog stanja ima dva nedostatka. Prvi je nedostatak da se stanje naprezanja konstrukcijskog elementa pri upotrebnom opterećenju ne može nikada pouzdano odrediti. Naime, pretpostavka da je materijal homogen i izotropan nije realna, jer se vlastita stanja naprezanja (tzv. parazitska naprezanja) ne uzimaju dovoljno u obzir i jer je mehanička shema konstrukcijske cjeline obično tako komplikirana da je nemoguće uzeti u obzir sve utjecaje. Drugi je nedostatak da nije sigurno, iako to proračun pokazuje, da upotrebljena naprezanja nisu nigdje veća od dopuštenih, jer su ona ponegdje zbog skupljanja i puštanja betona ne samo veća od dopuštenih nego premašuju i granicu elastičnosti.

Metoda lomnog stanja osniva se na ponašanju konstrukcijskog elementa pri velikom lomnom opterećenju i velikim plastičnim deformacijama. U toj metodi pojavljuju se sljedeće veličine: normno opterećenje, koeficijent sigurnosti i granično naprezanje. Lomno opterećenje jednako je umnošku normnog opterećenja i koeficijenta sigurnosti. Vrijednosti potrebnih lomnih sile određuju se nekom od plastostatičkih metoda. Pri dimenzioniranju armiranobetonskih presjeka treba dokazati da lomne unutrašnje sile koje odgovaraju odabranim dimenzijama betona i armature nisu manje od potrebnih unutrašnjih sila.

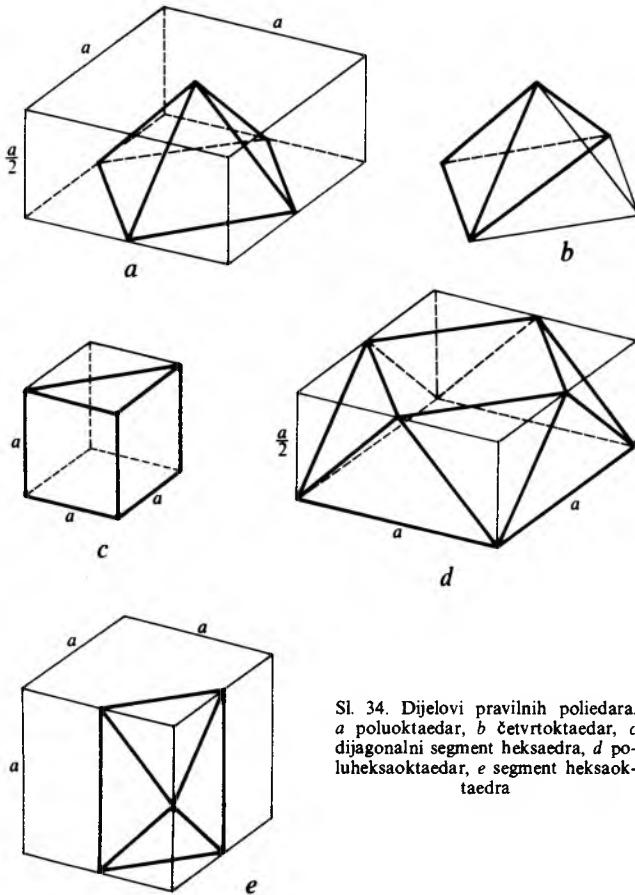
Ako su unutrašnje sile određene nekom elasto-statičkom metodom, logično je dimenzionirati beton i armaturu metodom upotrebnog stanja. Ako su, međutim, unutrašnje sile određene nekom plastostatičkom metodom, treba dimenzioniranje provesti metodom lomnog stanja. U praksi se ipak koji put kombinira elasto-statička metoda s metodom lomnog stanja, odnosno plastostatička metoda s metodom upotrebnog stanja.

REŠETKASTE PLOČE

Rešetkaste ploče su prostorne rešetke koje se sastoje od dviju ravninskih štapnih mreža (gornja i donja mreža) i štapova ispunе koji povezuju ravninske mreže. Rešetkaste ploče naj-

česće su od čelika, a rjeđe od aluminija. Čelik je čvršći i jestiniji, ali je teži od aluminija. Čelik treba zaštititi od korozije, a aluminij ne treba takvu zaštitu. Štapovi su profiliranog presjeka. Upotreba cijevi kao štapova vrlo je povoljna zbog jednakih krutosti u svim smjerovima. Postoje posebne izvedbe čvorova s priključcima štapova. U sustavu MERO čvorovi su kugle na koje se vijčano može spojiti 18 štapova. U sustavu UNISTRUT čvorovi su naborani limovi na koje se štapovi spajaju vijcima. Štapovi koji su u jednom pravcu obično imaju jednak presjek. Tada materijal nije posvuda potpuno iskoriten, ali je obično ušteda zbog jednostavnijih detalja čvorova i izvedbe veća od povećanja troškova za materijal. Naprezanje je rešetkastih ploča povoljno, jer su svi štapovi napregnuti samo aksijalno. One su vrlo krute, jer je materijal koncentriran na gornjem odnosno donjem kraju. Ako se ploča oslanja na malo stupova, može se ploča uz stupove raščlaniti da bi se reakcije ploče raspodijelile na tri ili četiri čvora.

Geometrijski oblik rešetkastih ploča određen je oblikom osnove i njezinom debljinom, te rasporedom štapova. Prostorne su jedinice rešetkaste ploče prizme i piramide, a najčešće pravilni poliedri (heksaedar, tetraedar, oktaedar i heksaoktaedar). Često se upotrebljavaju i dijelovi poliedara (poluoktaedar, četvrtoktaedar, dijagonalni segment heksaedra, poluheksaktaedar i segment heksaoktaedra, sl. 34).



Sl. 34. Dijelovi pravilnih poliedara.
a) poluoktaedar, b) četvrtoktaedar, c)
dijagonalni segment heksaedra, d) poluheksaktaedar, e) segment heksaoktaedra

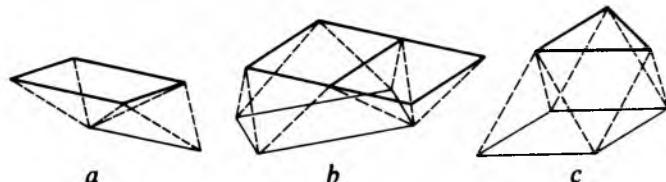
Ploča se sastavlja dvodimenzionalnim nizanjem istovrsnih prostornih jedinica (npr. heksaoktaedra) ili dvaju tipova prostornih jedinica (npr. poluoktaedra i tetraedra, poluheksaktaedra i poluoktaedra ili oktaedra i tetraedra), pa tada obje prostorne jedinice čine složenu prostornu jedinicu (sl. 35).

S geometrijskog gledišta rešetkaste ploče klasificiraju se prema prostornim jedinicama od kojih su sastavljene. S mehaničkog gledišta razlikuju se ploče koje se mogu zamisliti da su sastavljene od ravničarskih rešetaka i ploče koje tako ne izgledaju. Ploče prve vrste obično je teže izvesti, ali su mehanički povoljnije, a nazivaju se pravim prostornim rešetkastim pločama.

Ako je prostorna jedinica ili složena prostorna jedinica kinematički stabilna, ploča je hiperkinematička, a hiperstatička

kad je izvedena kao dvodimenzionalni niz tih jedinica. Obično ima više od šest ležajnih štapova ploče, pa je tada stupanj hiperkinematičnosti, odnosno stupanj hiperstatičnosti ploče vrlo velik. Taj se stupanj može smanjiti ako se izostave prekobrojni štapovi.

Rešetkaste ploče sve se češće primjenjuju. Pogodne su za stvaranje velikih natkritih slobodnih površina. Ekonomične su kao krovne konstrukcije velikih raspona, a ponekad su povoljnije nego uobičajene armiranobetonske ploče manjih raspona (npr. kao stropne konstrukcije rešetkastih zgrada). Bez teškoća može se ploča osnovice 30×30 m osloniti na četiri stupa u vrhovima osnovice ili ploča osnovice 50×50 m na osam stupova raspoređenih uzduž oboda osnovice. Osim toga, često su ostvarene rešetkaste ploče raspona ~ 80 m. Debljina rešetkastih ploča iznosi $1/20 \dots 1/25$ raspona.



Sl. 35. Složene prostorne jedinice. a) prostorna jedinica od poluoktaedra i tetraedra, b) prostorna jedinica od poluheksaktaedra i poluoktaedra, c) prostorna jedinica od oktaedra i tetraedra

Rešetkaste ploče su pogodne za gradnju od prefabriciranih elemenata, jer ih se može sastavljati od jednostavnih standardiziranih elemenata. Tako se, npr., ploče sustava UNIBAT sastavljaju od piramidnih jedinica. Neke ploče od oktaedarskih i tetraedarskih prostornih jedinica imaju sve štapove jednake duljine. Za mnoge ploče potrebni su štapovi samo dviju ili triju duljina. Ploče sastavljene od prefabriciranih ravničarskih rešetaka. Nekada se cijela ploča sastavi na tlu, pa se gotova podigne na već izgrađene stupove. Dopuštena je tolerancija duljine štapova malena, pa to često otežava montažu. Rešetkasta ploča može se lako demontirati i postaviti na drugo mjesto.

Kinematička stabilnost. Nužan ali nedovoljan uvjet kinematičke stabilnosti rešetaka, za koje se zamisla da su odvojene od ležaja, određen je Föpplovom formulom koja glasi

$$\text{za dvodimenzionalnu rešetku } S = 2C - (1 + 2) = 2C - 3, \quad (127a)$$

$$\text{za trodimenzionalnu rešetku } S = 3C - (1 + 2 + 3) = 3C - 6. \quad (127b)$$

Föpplova formula ne daje dovoljan uvjet kinematičke stabilnosti, jer se nepogodnom kompozicijom rešetke može dogoditi da u jednom području ima previše, a u drugome premalo štapova.

Trotut je kao dvodimenzionalna jedinica kinematički stabilan, uz $C = 3$ i $S = 3$, pa je zadovoljena relacija (127a). Neke prostorne jedinice (npr. tetraedar, oktaedar) također su kinematički stabilne. Heksaedar, međutim, nije kinematički stabilan, jer prema (127b) treba da ima $3 \cdot 8 - 6 = 18$ štapova, pa bi uz postojećih 12 štapova trebalo dodati još 6 štapova (npr. po jedan dijagonalni štap u svakoj pobočki). Složena prostorna jedinica od poluoktaedra i tetraedra kinematički je nestabilna, jer prema (127b) mora imati $3 \cdot 6 - 6 = 12$ štapova, pa je uz 11 bridnih štapova potreban još dodatni štap, npr. dijagonalni štap u osnovici poluoktaedra.

Ako je mreža štapova neadekvatno izabrana, rešetka može biti infinitezimalno kinematički pomična, iako je prema formulama (127) kinematički stabilna. Tada su moguće velike deformacije rešetke već i uz mala produljenja nekih štapova. Rešetke koje će se dalje razmatrati nisu infinitezimalno kinematički pomične.

Poliedarske formule. Eulerova formula koja povezuje broj pobočaka P , broj bridova B i broj vrhova V glasi

$$P - B + V = 2. \quad (128)$$

Prijedje li se na štapnu strukturu poliedra kad bridovi odgovaraju štapovima, a vrhovi čvorovima, Eulerova formula glasi

$$P - S + C = 2. \quad (129)$$

Eulerovu formulu treba shvatiti kao pravilo za sastavljanje štapova u trodimenzijskom prostoru. Ako su sve pobočke zatvorenog poliedra, bez ležajnih štapova, trokuti ili ako su pobočke štapovima podijeljene u trokute, svaka je pobočka omeđena trima štapovima, a svaki štap pripada dvjema pobočkama, pa je $S = 3P/2$. Ako se ta vrijednost uvrsti u Eulerovu formulu (129), dobiva se Föpplova formula (127b).

Za dvodimenzijušku šapnu strukturu Eulerova formula glasi

$$P - S + C = 1. \quad (130)$$

Elementi homogenih poliedara zadovoljavaju strukturu formulu

$$Pp = Bb = Vv, \quad (131)$$

gdje je p broj vrhova i, ujedno, broj bridova priključenih na jednu pobočku, b broj vrhova i, ujedno, broj pobočki priključenih na jedan brid ($b = 2$), a v broj bridova i, ujedno, broj pobočki priključenih na jedan vrh. Za heksaedar struktura formula daje $6 \cdot 4 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3$, a za oktaedar $8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$.

Kriterij izostatičnosti. Potreban uvjet da rešetka bude izostatična (statički određena) jest da broj jednadžbi ravnoteže ($3C$) bude jednak broju nepoznanica, tj. zbroju sila u štapovima S i reakcija R , dakle da je

$$S + R = 3C. \quad (132)$$

Ako je kinematički stabilna rešetka oslonjena na šest štapova ($R = 6$), ona je izostatična, jer je, prema (127b), $S = 3C - 6$. Ako je, međutim, oslonjena na više od šest štapova, višak štapova treba ukloniti ako se želi da rešetka postane izostatična. Tako je, npr., tropojasni nosač s trokutnom ispunom u tri pojasmama ravninama interna izostatičan, a ako je oslonjen na šest stupova, on je i eksterno izostatičan.

Rešetka koja nije izostatična naziva se hiperstatičnom (statički neodređenom) rešetkom. Ako se za hiperstatičnu rešetku sile u svim štapovima mogu odrediti kao funkcije vanjskih sile i reakcija, ona je interna izostatična, a eksterno hiperstatična. Ako se, međutim, za hiperstatičnu rešetku mogu pomoći ravnotežnih uvjeta odrediti sve reakcije, a da se ne određuju sile u štapovima, ona je eksterno izostatična, a interna hiperstatična. Najčešće je rešetka i eksterno i interna hiperstatična.

Stupanj hiperstatičnosti iznosi

$$N = S' + R' = (S + R) - 3C, \quad (133)$$

gdje je S' broj prekobrojnih štapova rešetke, a R' broj prekobrojnih ležajnih štapova. Izraz (133) slijedi iz uvjeta izostatičnosti (132).

Formiranje prostih rešetki. Ravninske rešetke najjednostavnije se formiraju polazeći od trokutne jedinice tako da se svaki dodatni čvor spoji na dva već postojeća čvora. Tada se ravninska rešetka sastoji od trokutnih jedinica.

Za formiranje prostorne rešetke postoje dvije jednostavne mogućnosti. Prema prvoj, polazi se od tetraedra, a svaki se dodatni čvor spaja s po jednim štapom na tri postojeća čvora. Prema drugoj, prvi se čvor od tri štapa koja nisu u istoj ravnini osloni na podlogu ili ležajnu konstrukciju, a svi dodatni čvorovi spajaju se svaki s po tri štapa na već postojeće čvorove ili na podlogu.

Tako formirane rešetke nazivaju se prostim rešetkama.

Upotrebljavaju se i složenije rešetkaste ploče, i to od pravokutnih prizama, od trokutnih prizama, od polouktaedara i tetraedara, od poluheksaktaedara i polouktaedara, te od oktaedara i tetraedara. Obično se na crtežima štapovi gornje mreže prikazuju debelim crtama, štapovi donje mreže tankim crtama, a štapovi ispune isprekidanim crtama.

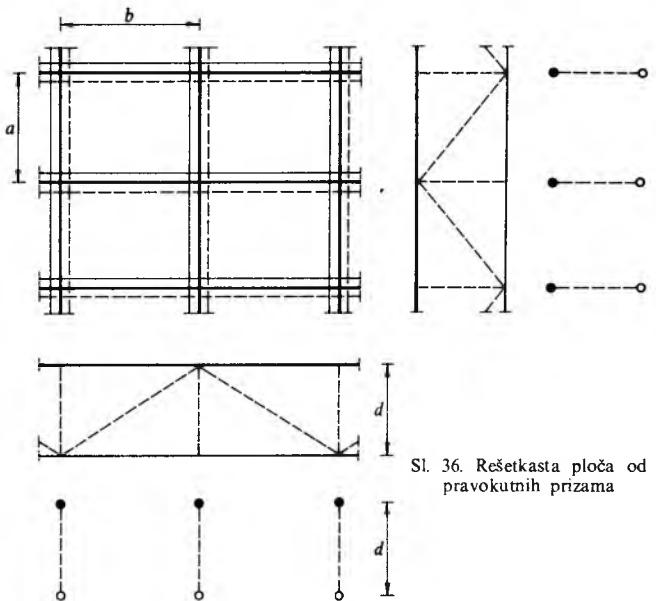
Ploče od pravokutnih prizama (sl. 36). Prostorna je jedinica okomita pravokutna prizma stabilizirana dijagonalama u okomitim pobočkama. Kad su stranice a i b osnovice i visina d jednakne ($a = b = d$), prizma postaje pravilni heksaedar.

Štapovi gornje i donje mreže paralelni su s rubovima ploče ili s njima čine kut od 45° . Štapovi ispune su u vertikalnim ravninama.

Ploča nije bočno stabilna, pa je treba stabilizirati horizontalnim pridržavanjem njenih rubova ili dijagonalama u gornjoj i donjoj mreži štapova.

Ploča se može zamisliti sastavljenom od dvaju nizova okomitih ravninskih rešetaka koje se sijeku pod pravim kutom. Takve su ravninske rešetke usporedne s rubovima ploče ili s njima čine kutove od 45° .

Umjesto pravokutne prizme prostorna jedinica može biti prizma s rombom kao osnovicom.



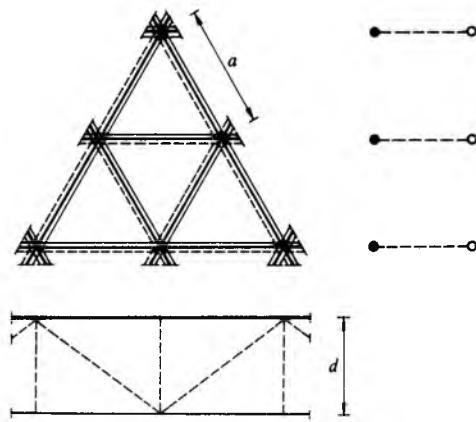
Sl. 36. Rešetkasta ploča od pravokutnih prizama

Ploča od trokutnih prizama s okomitom osi (sl. 37). Prostorna je jedinica okomita prizma s istostraničnim trokutom kao osnovicom koja je stabilizirana dijagonalama u okomitim pobočkama.

Gornju i donju mrežu čine po tri niza štapova koji se sijeku pod kutom od 60° . Štapovi ispune u vertikalnim su ravninama. Takav je sustav pogodan ne samo za ploče s trokutnom nego i za ploče s pravokutnom osnovicom.

Ploča je bočno stabilna.

Ploča se može zamisliti sastavljenom od triju nizova okomitih rešetaka koje se sijeku pod kutom od 60° . Štapovi ispune su okomice i dijagonale.



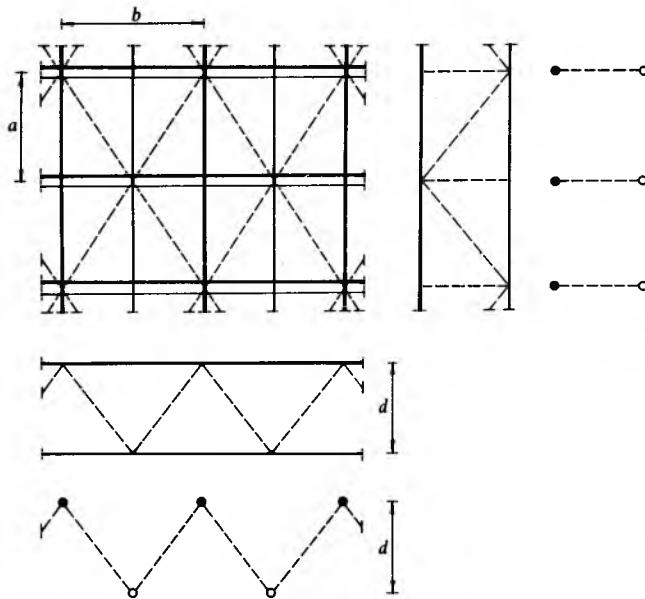
Sl. 37. Rešetkasta ploča od trokutnih prizama s okomitom osi

Ploča od trokutnih prizama s vodoravnim osi (sl. 38). Prostorna je jedinica položena prizma s istokračnim trokutom kao osnovicom koja je stabilizirana dijagonalama u pravokutnim pobočkama. Kad je, prema sl. 38, $b = a\sqrt{2}$ i $d = a\sqrt{2}/2$, prizma postaje dijagonalni segment pravilnog heksaedra. Prostorne jedinice su raspoređene tako da uz niz prizama koje leže na po-

bočki kojih je širina jednaka osnovici istokračnog trokuta dolazi na položen na brid koji je nasuprot spomenutoj pobočki.

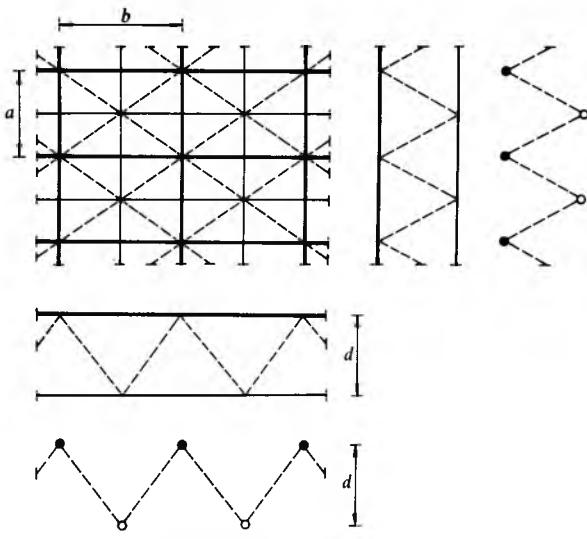
Ploča je bočno stabilna.

Ploča se može zamisliti kao niz okomitih ravninskih rešetaka koje su po dvije povezane kosim dijagonalama i koje imaju štapne ispune (vertikale i dijagonale) u kosim ravninama.



Sl. 38. Rešetkasta ploča od trokutnih prizama s vodoravnom osi

Ploča od poluoktaedara i tetraedara (sl. 39). Prostorne su jedinice međusobno prilagođeni poluoktaedri i tetraedri (tip 1). Kad je $b = a\sqrt{2}$ i $d = a/2$, poluoktaedar postaje segmentom heksaoktaedra, a tetraedar četvrtoktaedrom (tip 2). Kad je $b = a$ i $d = a\sqrt{2}/2$, omjer duljina dijagonalnih i pojasnih štapova iznosi $\sqrt{3}/2$ (tip 3), a kad je $b = a$ i $d = a/\sqrt{2}$, poluoktaedar i tetraedar postaju pravilni (tip 4).



Sl. 39. Rešetkasta ploča od poluoktaedara i tetraedara

Poluoktaedri koji su smješteni na svom šiljku i tetraedri koji leže na bridu raspoređeni su prema shemi šahovskog polja.

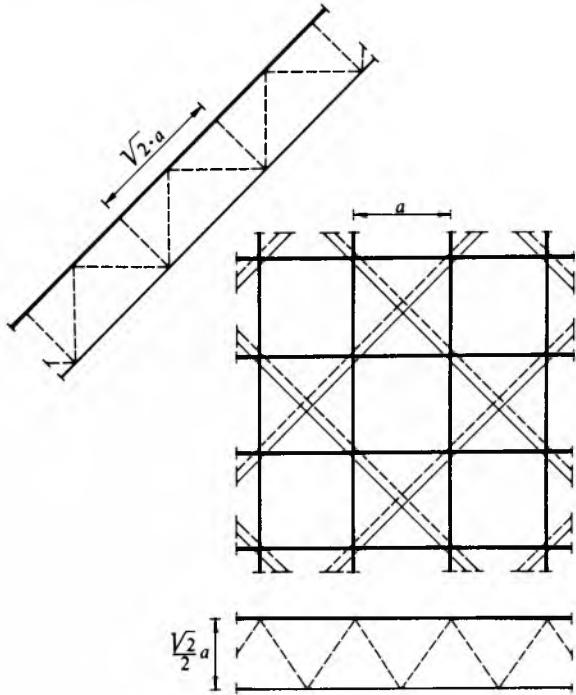
Štapovi gornje i donje mreže međusobno su usporedni. Oni su usporedni s rubovima ploče ili s njima čine kut od 45° . Za ploču tipa 1 potrebni su štapovi četiri različitih duljina, za ploču tipa 2 triju različitih duljina, za ploču tipa 3 dviju različitih duljina, a za ploču tipa 4 svi su štapovi jednake duljine.

Ploča je bočno stabilna.

Ploča se može shvatiti kao prodor dvaju cikcak nabora kojima su ispune dijagonale u kosim ravninama.

Ploča od poluheksaoktaedara i poluoktaedara (sl. 40). Poluheksaoktaedri koji leže na osnovici i poluoktaedri koji stoje na šiljku raspoređeni su prema shemi šahovskog polja.

Po dva niza međusobno okomitih štapova ima i gornja i donja ploča. Štapovi gornje ploče zakrenuti su prema štapovima donje ploče za 45° . Štapovi gornje ploče usporedni su s rubovima ploče ili s njima čine kut od 45° .



Sl. 40. Rešetkasta ploča od poluheksaoktaedara i poluoktaedara

Ako su štapovi gornje ploče usporedni s rubovima, ploča je infinitesimalno kinematički pomicna, jer se poluoktaedri mogu zakrenuti oko svojih okomitih osi. Ploča se mora stabilizirati dijagonalama u nekim poljima gornje mreže ili horizontalnim pridržavanjem rubova. Ako su, međutim, štapovi donje mreže usporedni s rubovima, ploča je bočno stabilna.

Može se smatrati da je ploča sastavljena od ravninskih rešetaka, pa spada u grupu pravih prostornih rešetkastih ploča.

Gornja mreža štapova gušća je od donje, a to je povoljno za jednopoljnje ploče, jer su tada štapovi gornje mreže pritisnuti, a štapovi donje mreže zategnuti.

Ploča od oktaedara i tetraedara. Prostorne su jedinice ploče pravilni oktaedri i tetraedri ili nepravilni oktaedri i tetraedri visine $a\sqrt{6}/6$, gdje je a duljina stranice u osnovici.

Prostorne jedinice smještaju se tako da se na oktaedar koji leži na jednoj od pobočaka prikljuće tri tetraedra, svaki s jednom pobočkom, a zatim se na svaki tetraedar prikljuće dva oktaedra itd.

Gornja i donja mreža sastoje se od triju nizova štapova koji formiraju istostranične trokute. Središta gornjih i donjih trokuta nalaze se na istoj okomici. Ako su oktaedri i tetraedri pravilni, debljina je ploče $a\sqrt{3}/6$, a svi su štapovi jednake duljine. Ako su, međutim, oktaedri i tetraedri nepravilni, debljina ploče iznosi $a\sqrt{6}/6$, a ploča se sastoji od štapova dviju duljina. Takve ploče su pogodne za trokutne, peterokutne i pravokutne osnovice. Budući da ploča ima mnogo prekobrojnih štapova, mogući su otvor u pločama i različita oslabljenja.

Ploča je bočno stabilna, a spada u grupu pravih prostornih rešetkastih ploča.

Statička analiza rešetkastih ploča. Postoje uglavnom tri grupe metoda za statičku analizu rešetkastih ploča: diskretne metode, metode ekvivalentnog kontinuma i eksperimentalne metode.

Zbog mnogobrojnih štapova i visokog stupnja hiperkinematicnosti i hiperstatičnosti diskretne metode su vrlo dugotrajne

i potrebna je upotreba elektroničkih računala. Metoda rastavljanja ploče u ravninske rešetke jedna je od diskretnih metoda. Kako ravninska rešetka djeluje samo u svojoj ravnini, ona je u ravnoteži pod utjecajem vanjskih sila, reakcija i interakcijskih sila kojima ostale ravninske rešetke djeluju na promatranu rešetu.

Međusobni razmak štapova u rešetkastim pločama u usporedbi s rasponom ploče toliko je malen da se unutrašnje sile mogu smatrati kontinuirano rasporedenima uzduž presjeka ploče. Takva pretpostavka daje dovoljno točne rezultate za preliminarne, a često i za izvedbene analize. Ploča se zamjenjuje ekvivalentnim kontinuumom, odnosno masivnom troslojnom pločom (sendvič-pločom) odgovarajuće krutosti, ili se primjenjuju metode koje vrijede za masivne i rebraste ploče uz zanemarenje deformacije jezgre i njene ortotropije koje daju približna rješenja.

Sile u štapovima gornje i donje mreže određuju se dijeljenjem pripadnih momenata savijanja s debljinom ploče, pa se tako momenti rastave u parove sile. Sile u štapovima ispunе dobivaju se pomoću poprečnih sila ploče. Krutosti ploče i njeni progibi određuju se pomoću ekvivalentnog momenta inercije koji u smjeru promatralih štapova iznosi

$$I = d^2 \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right)^{-1}, \quad (134)$$

gdje je d debljina ploče koja je jednaka osnovom razmaku gornje i donje mreže, F_0 površina gornje, a F_u površina donjeg pojasa po jedinici širine presjeka. Kad su površine gornjeg i donjeg pojasa jednake ($F_0 = F_u = F$), ekvivalentni je moment inercije

$$I = \frac{1}{2} d^2 F. \quad (135)$$

Ploče s relativno slabim štapovima ispunе imaju manju krutost i veći progib nego što se dobivaju pomoću izraza (134) i (135).

Osim unutrašnjih sila u gotovoj ploči, treba ispitati unutrašnje sile i stabilnost ploče tokom montaže.

Eksperimentalne metode. Opravdanost pretpostavki analitičkih metoda proračuna armiranobetonских ploča dokazana je eksperimentalnim istraživanjem odaziva modela pri porastu opterećenja sve do sloma ploča. Pred lom pojavile su se linije odnosno trake tečenja u skladu s pretpostavkama teorije lomnog mehanizma.

LIT.: S. Timošenko, S. Vojnovski-Kriger, Teorija ploča i ljuški. Građevinska knjiga, Beograd 1962. — K. Girkman, Površinski sistemi nosača. Građevinska knjiga, Beograd 1965. — R. Park, W. L. Gamble, Reinforced Concrete Slabs. J. Wiley & Sons, New York 1980.

R. Rosman

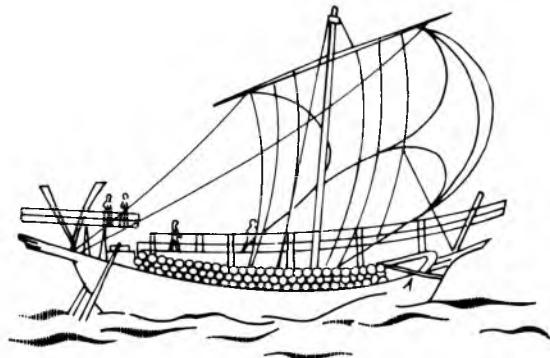
PLOVNI PUTOVI, vodene površine po kojima se roba i putnici prevoze plovilima. Razlikuju se dva sustava plovnih putova: *unutrašnji plovni putovi* na rijekama, jezerima i kanalima, te *morski plovni putovi* na morima i oceanima. Morski i unutrašnji plovni putovi umnogome se razlikuju. Te se razlike očitaju u veličini plovila (morska su plovila obično mnogo veća), u dinamici plovidbe (plovidba po stajaćoj i plovidba po tekućoj vodi, plovidba po valovitom moru i plovidba po mirnoj rijeci ili kanalu), u navigaciji (plovidba po moru kad se ne vidi obala i plovidba po relativno uskoj rijeci ili kanalu) i dr. Na ušćima rijeka te se dvije vrste plovnih putova dodiruju, a granica među njima najčešće se podudara s granicom utjecaja plime i oseke. Najčešće se tamo prometni proces prekida radi prekrcaja s jedne na drugu vrstu plovila. Da bi se izbjeglo prekrcavanje, razvijen je specijalan tip teretnog broda prilagođen plovidbi i rijekom i morem, tzv. riječno-morski brod.

UNUTRAŠNJI PLOVNI PUTOVI

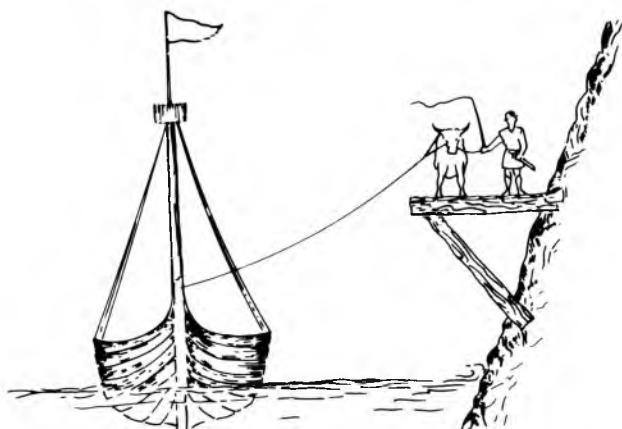
U pradavno doba nije bilo putova, pa su rijeke bile prirodni udobni putovi. Riječna se plovidba najprije razvila na donjim tokovima rijeka na kojima se moglo ploviti i uzvodno i nizvodno. Uz tokove velikih rijeka (Nil, Eufrat

Tigris, Yangce, Žuta rijeka i dr.) i uz obale toplih mora razvile su se prve kulture. Već je oko ←3000. godine bila dobro razvijena plovidba na Nilu, oko ←2200. godine postojalo je brodarstvo po kineskim rijekama, a oko ←2000. godine plovili su Babilonci i Asirci po Eufratu i Tigrisu. U Egiptu je već u ←XIV st. prokopan kanal koji je spajao Nil s Crvenim morem, a u ←VI. st. reguliran je tok Eufrata i Tigrisa.

Razvitak plovidbe rijekama dobro se može pratiti na primjeru Dunava jer o tome postoji dosta podataka. Prvi su povijesni podaci o Dunavu iz ←VII st. U to su doba Grci doplovili iz Argosa i Miletia do Đerdapa. Grci su Dunav nazivali Istrosom prema njihovoj koloniji koju su, prvu, osnovali na desnoj obali Dunava oko ←650. godine, a zatim i druge kolonije na desnoj obali Dunava. Herodot je u ←V. st. bio na Dunavu i spominje ga kao najveću poznatu rijeku svijeta. Dunavom su plovili grčki morski brodovi na vesla s pomoćnim jedrom (sl. 1). Rimljani su prvi plovili kroz Đerdap početkom ←I st. Tada je Dunav bio granica Rimskog Carstva. Rimljani su u Đerdapu nizvodno od Sipa sagradili i kanal da bi olakšali plovidbu. U to doba Dunavom najviše plove vojnički brodovi, koji se uzvodno kreću tegljenjem (kopitarenjem,

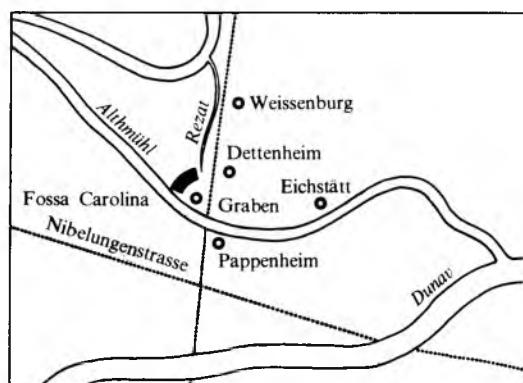


Sl. 1. Antički grčki brod na Dunavu



Sl. 2. Prolaz broda kroz Đerdap u doba Rimljana

sl. 2), a nizvodno ih nosi struja rijeke. U vrijeme seobe naroda plovidba Dunavom postaje nesigurna, a ponovno ozivljava u IX st. Tada mnogi gradovi na gornjem i srednjem dijelu Dunava postaju središta trgovine. Naročito se razvio Regensburg preko kojega su se održavale veze između Bizanta i zapadno-evropskih zemalja. Za križarskih ratova (XII i XIII st.) Dunav je vrlo važan prometni put. S dolaskom Turaka na Balkan promet se na donjem Dunavu smanjuje. Takvo stanje ostaje na Dunavu sve do XIX st., kad se na rijekama zapadne Evrope pojavljuju prvi parobrodi. Na tim rijekama prvi je parobrod



Sl. 3. Plovni kanal Fossa Carolina, kraj VIII st.