rečima, suštinski je problem u obuzdavanju i kontrolisanju haotičnih procesa nuklearnog tipa i u njima stvorene haotične energije u dirigovanu energiju mlaza fotona. To je problem fotonskih propulzora sa sopstvenom produkcijom fotona iz mase.

U drugoj varijanti fotonskih sistema, kao što je *Sunčevo fotonsko jedro*, fotoni se ne proizvode na letelici, već se prikupljaju iz okolne sredine (Sunčevi fotoni), da bi se njihova energija iskoristila ili direktno za propulziju akcionim dejstvom fotona na jedro, ili bi se najpre pretvarala u toplotnu energiju i druge vrste energije za propulziju, i to na toplotnom ili električnom principu ubrzavanja propulzivne materije. Dok varijanta sa sopstvenom proizvodnjom fotona ima najveći jedinični impuls među kosmičkim propulzorima koji nose sa sobom propulzivnu materiju (do 10^7 sekundi), dotle sunčana varijanta ima beskonačno velik jedinični impuls, jer ne razmenjuje masu s okolinom.

Primena kosmičkih propulzora

Najveće teškoće za primenu kosmičkih propulzivnih sistema potiču od vrlo malih potisaka od svega nekoliko delova njutna, a vrlo dugog vremena dejstva merenog danima, mesecima, pa čak i godinama. Zato je ubrzavanje letelice vrlo sporo i zahteva veoma dugo vremena rada propulzora da bi se postigla potrebna brzina za obavljanje kosmičke misije. Prema mogućnostima ubrzavanja letelice kosmički sistemi mogu da budu: *a*) za poletanje i sletanje, *b*) za međuorbitalne letove do Meseca i Sunca, *c*) za brze letove izvan Sunčeva sistema. Pri tome je važna specifična težina propulzivnog sistema, tj. odnos težine celog sistema (izvora osnovne energije, pretvarača, ubrzača, rasipača) prema razvijenom potisku. Toplotni hemijski propulzori imaju najmanju specifičnu težinu, ali i najmanji jedinični impuls, dakle i najkraće vreme rada, te su pogodni samo za lansiranje s planeta i za kratkotrajne letove. Električni propulzori imaju mnogo veće jedinične impulse, ali i veću specifičnu težinu, te su nesposobni za lansiranje, ali su pogodni za duge kosmičke letove; potrebno im je najmanje dve godine da ubrzaju letelicu do željenih velikih brzina potrebnih u kosmosu.

Neki od kosmičkih propulzivnih sistema već su ušli u fazu praktičnog eksperimentisanja (jonski, nuklearni, termički), dok su neki još u fazi teorijskih analiza, a pojedini (fotonski) još su daleko i od teorijskih razmatranja.

M. Vujić

LIT.: *K. D. Wood,* Technical Aerodynamics. McGraw-Hill Book Company, London ²1947. — *C. D. Perkins, R. E. Hage,* Airplane Performance Stability and Control. John Wiley and Sons, New York 1960. — *M. Vujić,* Osnovi turbomlaznih motora. Naučna knjiga, Beograd 1960. — *M. Vujić,* Avionski motori II. Građevinska knjiga, Beograd 1961. — *M. Vujić,* Avionski motori I. Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd 1962. — *M. Vujić,* Principi proračuna i konstrukcije mlaznih motora. Građevinska knjiga, Beograd 1965. — *L. George, J. F. Vernet, J. C. Wanner,* La mécanique du vol — Performances des avions et des engins. Dunod, Paris ²1969. — *M. Nenadović,* Osnovi aerodinamičkih konstrukcija — Elise. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1976.

S. Bernfest *D. Gajić* *B. Rašuo* *M. Vujić*
Redakcija

POGREŠKE MJERENJA S RAČUNOM IZJEDNAČENJA,

POGREŠKE MJERENJA S RAČUNOM IZJEDNAČENJA, postupak za određivanje najvjerojatnije vrijednosti mjerene veličine. U svakom mjerenju, naime, pojavljuje se veća ili manja mjerna pogreška kojoj vrijednost ovisi o mjernom aparatu ili uređaju, o mjernom postupku, o mjeritelju (opažaču) i o nizu drugih okolnosti. Zbog toga se mjerenja ponavljaju, pa se na temelju niza mjerenja pomoću računa izjednačenja određuje ona vrijednost mjerene veličine koja najbolje odgovara stvarnoj vrijednosti.

POGREŠKE MJERENJA

Pogreške mjerenja mogu se svrstati u grube, sistematske i slučajne pogreške (v. *Mjerna nesigurnost*, TE 8, str. 604).

Grube pogreške nastaju zbog nepažnje i nemarnosti opažača, zbog loših mjernih instrumenata i uređaja, te zbog nedovoljnog stručnog znanja opažača. Najčešće grube pogreške nastaju zbog nedovoljne pažnje pri mjerenju (pogrešno očitanje). Da bi se otklonile eventualne grube pogreške i da bi se dobila sigurnost u provedena mjerenja, mjerenja se ponavljaju. Tako se dobiva ne samo kontrola nego i više rezultata za istu veličinu, čime se, kako će se još vidjeti, povećava točnost mjerenja. Rezultati svih pojedinačnih mjerenja redovito su unutar granica, koje su ovisne o mjernoj metodi i točnosti rada. Ako je, međutim, rezultat mjerenja izvan tih granica, takvo se mjerenje smatra grubo pogrešnim. Takva se mjerenja ne uzimaju u obzir pri analizi rezultata mjerenja.

Sistematske pogreške. Neki uzroci pogrešaka mogu se detaljnim ispitivanjem utvrditi i tako eliminirati pogreške. Takve pogreške nazivaju se sistematskim pogreškama. Ako se, npr., mjeri duljina od ~250 m čeličnom vrpcom dugom 50 m, kojoj je točna duljina 50,010 m, pojavljuje se sistematska pogreška od 5 cm. Budući da se mjerna vrpca može usporediti s drugim točnim mjerilima duljine, može se odrediti njezina točna duljina, pa se prema njoj mogu korigirati rezultati mjerenja. U spomenutom primjeru treba rezultatu mjerenja dodati 5 cm.

Najčešći su uzroci sistematskih pogrešaka netočnost skala na mjernim instrumentima i njihova neispravnost. Netočnost skala treba usporedbom utvrditi, a neispravnosti instrumenta otkloniti. Ipak će, i uz takve predradnje, ostati manje netočnosti zbog nedovoljne osjetljivosti instrumenta i osjetila opažača. Većina se, međutim, takvih pogrešaka može eliminirati pogodnim izborom metode mjerenja. Tako, npr., kad se teodolitom mjere horizontalni kutovi, horizontalna os durbina mora biti točno horizontalna, a vizirna os točno okomita na nju. Iako je teodolit ispitan i rektificiran prije mjerenja, ta dva uvjeta neće praktički nikada biti potpuno ispunjena. Zbog toga se kut mjeri u dva položaja durbina, pa se pogreške eliminiraju.

Da bi se sistematske pogreške poništile, treba pronaći mjerne metode kojima se to postiže. Ipak se mnoge sistematske pogreške ne mogu eliminirati pogodnom mjernom metodom, pa treba utvrditi njihov utjecaj na mjerne rezultate da bi se rezultat mjerenja ispravio (npr. pogreška u duljini mjerne vrpce, pogreška podjele na mjernom instrumentu). Takve pogreške nazivaju se stalnim pogreškama. Mnoge sistematske pogreške, međutim, nisu stalne, kao npr. pogreške duljine vrpce zbog promjene temperature, nevertikalnost teodolita pri mjerenju horizontalnih ili vertikalnih kutova, utjecaj refrakcije i sl.

U sistematske pogreške spada tzv. *osobna pogreška* koja se zapaža u razlikama viziranja ili očitanja dvaju opažača. Osobna pogreška ima uvijek vrlo malu vrijednost. Često se osobna pogreška eliminira metodom rada. Ako, npr., opažač pri mjerenju horizontalnih kutova zbog svoje osobne pogreške vizira svaku točku nešto ulijevo, ta će se pogreška poništiti mjerenjem u dva položaja durbina. Ne bi, međutim, bilo dobro da pri mjerenju kutova jedan pravac vizira jedan opažač, a drugi pravac drugi opažač, jer bi se tada u rezultatu pojavile osobne pogreške obaju opažača. Osobna pogreška može utjecati i na rezultate preciznih mjerenja duljine (npr. mjerenje duljine bazne letve vrpcom ili žicom). Ako jedan opažač očitava na jednom, a drugi na drugom kraju mjerne vrpce, razlika očitanja daje izmjerenu duljinu u kojoj je sadržana ukupna osobna pogreška obaju opažača. Zamjenom mjesta opažača može se odrediti ukupna osobna pogreška obaju opažača, dok aritmetska sredina tih dvaju mjerenja neće sadržavati osobnih pogrešaka.

Slučajne pogreške. Kad su iz mjernih rezultata eliminirane grube pogreške i kad su rezultati ispravljeni za sistematske pogreške, preostat će još mnogo izvora pogrešaka koji se nisu mogli utvrditi. Tako, npr., oko vidi kao jednu točku dvije točke koje su pod kutom od 1′, pa je moguća pogreška od $-30''$ do $+30''$. Upotrebom durbina ta se pogreška smanjuje, ali se ne može potpuno ukloniti. Preveliko povećanje durbinom nije opravdano jer će vanjski uvjeti (nejednoliko zagrijavanje zraka, titranje likova, refrakcija i dr.) mnogo više utjecati na točnost mjerenja nego osjetljivost durbina.

Skup takvih utjecaja uzrokuje pogreške koje se mogu smatrati slučajnima. One mogu biti i pozitivne i negativne, a najčešće imaju malu vrijednost pa ne premašuju granice koje su karakteristične za promatranu vrstu mjerenja.

Na vrijednost slučajne pogreške djeluju različiti faktori, koji su takvi da se ne može odrediti veličina njihova utjecaja, ali i takvi da se ne mogu izbjeći. Među te faktore mogu se svrstati nesavršenstvo instrumenata (crtice na skali urezane su s nekom pogreškom, libela je nedovoljno osjetljiva, kretanje dijelova instrumenata nije dovoljno precizno i dr.), nesavršenost osjetila (na daljini od 25 cm ne može se razlikovati razmak od 0,07 mm, okom se ne može očitati točnije od 0,1 mm), promjenljivost vanjskih okolnosti (nejednako zagrijavanje mjernog pribora, nestabilnost stativa, jednostrana rasvjeta instrumenata, promjena temperature i vlage zraka i dr.) i nedovoljna stručnost i nedovoljno iskustvo opažača (ispitivanjem je utvrđeno da su mjerenja iskusnijih opažača točnija nego mjerenja početnika).

Ispitivanje rezultata mjerenja. Svaki rezultat mjerenja ponešto je pogrešan, pa je i te kako važno znati točnost tih rezultata, odnosno njihovu srednju pogrešku, da bi provedena mjerenja dobila stanovitu sigurnost. Pomoću rezultata mjerenja, osim toga, posredno se određuju vrijednosti drugih veličina, pa nije dovoljno poznavati samo točnost mjerenja, već i utjecaj tih mjerenja na izvedene veličine.

Zbog toga treba mjerene vrijednosti ispitati ponavljanjem mjerenja i njihovom usporedbom da bi se ustanovila njihova podudarnost. Ta se ispitivanja provode i zbog toga da se utvrdi da li su otklonjene sve grube i sistematske pogreške. Kad su, međutim, mjerenja manje točna, male se sistematske pogreške neće ni zapažati, pa se ne mogu ni eliminirati. Tada će se one pribrojiti slučajnim pogreškama.

Primjer mjerenja duljine preciznom čeličnom vrpcom duljine 50 m na ravnom terenu. Duljina je mjerena osam puta i rezultati mjerenja prikazani su u tabl. 1. Srednja vrijednost (aritmetička sredina) rezultata mjerenja iznosi 1648,239 m, pa su pogreške v pojedinog mjerenja razlike između izmjerene i srednje vrijednosti. Pogreška može biti pozitivna i negativna, a zbroj je pogrešaka, dakako, jednak nuli ($\Sigma v = 0$). Pogreške bi se mogle smatrati slučajnima da rezultati ne pokazuju da postoje i neke sistematske pogreške. Za vrijeme mjerenja registrirana je i temperatura zraka, pa je zabilježeno da su prva četiri mjerenja provedena na temperaturi od 20 °C, a ostala mjerenja na temperaturi od 15 °C. Duljina vrpce mijenja se s temperaturom prema izrazu $L_t = L_0(1 + \alpha\Delta t)$, gdje je α temperaturni koeficijent rastezanja (za čelik $\alpha = 0{,}000010$), a Δt razlika temperature mjerenja i temperature komparacije uz koju je određena duljina L_0 (temperatura komparacije u ovom primjeru iznosi 15 °C). Osim toga, naknadnim je provjeravanjem ustanovljeno da duljina čelične vrpce na temperaturi od 15 °C iznosi 50,002 m (50 m + 2 mm). Podaci o korekcijama zbog sistematskih pogrešaka i korigirani rezultati nalaze se u tabl. 2. Usporedbom korigiranih vrijednosti s njihovom srednjom vrijednošću dobivaju se slučajne pogreške mjerenja.

Tablica 1
REZULTATI MJERENJA DULJINE ČELIČNOM VRPCOM

Broj mjerenja	*Rezultat mjerenja* m	*Pogreška mjerenja* mm	*Temperatura zraka* °C
1	1648,204	−35	20
2	1648,154	−85	20
3	1648,216	−23	20
4	1648,203	−36	20
5	1648,248	+9	15
6	1648,322	+83	15
7	1648,295	+56	15
8	16,48,270	+31	15
Srednja vrijednost: 1648,239 m			

Tablica 2
REZULTATI MJERENJA DULJINE ČELIČNOM VRPCOM I KOREKTURE MJERENJA

Broj mjerenja	*Rezultat mjerenja* m	*Korektura zbog duljine vrpce* mm	*Korektura za temp. razlike* mm	*Korigirana vrijednost* m	*Slučajna pogreška* mm
1	1648,204	+66	+82	1648,352	+6
2	1648,154	+66	+82	1648,302	−44
3	1648,216	+66	+82	1648,364	+18
4	1648,203	+66	+82	1648,351	+5
5	1648,248	+66		1648,314	−32
6	1648,322	+66		1648,388	+42
7	1648,295	+66		1648,361	+15
8	1648,270	+66		1648,336	−10
Korigirana srednja vrijednost: 1648,346 m					

Vjerojatnost pogrešaka. Slučajne pogreške imaju sljedeće karakteristike: *a*) kad je provedeno mnogo mjerenja, s istom će se vjerojatnošću pojavljivati pozitivne i negativne pogreške i *b*) pojava manjih pogrešaka vjerojatnija je od pojave većih pogrešaka, pa je pojava mjerenja bez pogreške najvjerojatnija. Prema tome, aritmetska sredina pogrešaka mjerenja za vrlo mnogo mjerenja teži vrijednosti nula.

U praksi se ne može provesti beskonačno mnogo mjerenja, pa se zbog toga ne može ni odrediti prava vrijednost X mjerene veličine, već se smatra da je dovoljna kad se zna najvjerojatnija vrijednost x. Ta je vrijednost određena izrazom

$$x = \frac{\Sigma l_n}{n}, \tag{1}$$

gdje su l_n rezultati mjerenja, a n broj mjerenja, pa se vjerojatnost pogreške pojedinog mjerenja dobiva iz izraza

$$v_n = x - l_n. \tag{2}$$

Iz toga slijedi da je $\Sigma v_n = 0$.

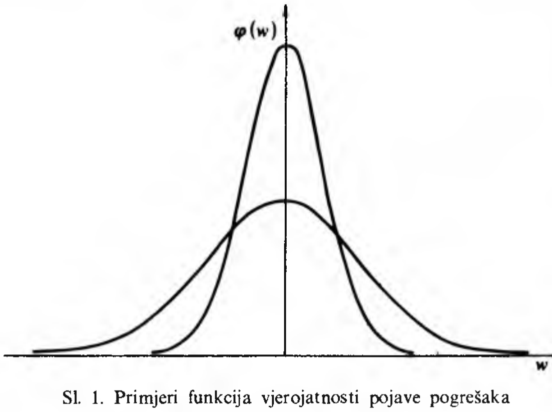
Kad se govori o nekoj određenoj vrijednosti pogreške (npr. pri mjerenju duljine o pogrešci od 2 mm), mora se zamisliti neki interval oko te vrijednosti (npr. interval 1,5···2,5 mm). Ako se pretpostavi da je taj interval dv konstantan i da je vrlo malen, vjerojatnost pojave pogreške v_n može se prikazati izrazom

$$V_n = \varphi(v_n)\mathrm{d}v, \tag{3}$$

gdje je φ funkcija raspodjele vjerojatnosti pojave pogrešaka. Vjerojatnost istodobne pojave više slučajnih događaja dobiva se umnoškom vjerojatnosti tih događaja, pa je

$$V = \prod_n V_n = \mathrm{d}v^n \prod_n \varphi(v_n). \tag{4}$$

Raspodjela vjerojatnosti pojave pogrešaka, u skladu s već spomenutim karakteristikama slučajnih pogrešaka, može se prikazati zvonolikom, tzv. Gaussovom krivuljom (sl. 1). Na apscisi



Sl. 1. Primjeri funkcija vjerojatnosti pojave pogrešaka

su vrijednosti stvarnih pogrešaka w, a na ordinati vjerojatnosti tih pogrešaka $\varphi(w)$. Krivulja s većom maksimalnom vjerojatnošću odgovara točnijim mjerenjima, jer se točna mjerenja ($w = 0$) češće pojavljuju, a vrlo netočna mjerenja (velika apsolutna vrijednost w) rjeđe. Krivulja s malom maksimalnom vjerojatnošću odgovara, dakako, manje točnim mjerenjima. Gaussova krivulja može se analitički prikazati izrazom

$$\varphi(w) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2 w^2). \tag{5}$$

Da bi se odredila najpovoljnija vrijednost parametra h, može se prema izrazu (4) postaviti da je

$$V = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \mathrm{d}w^n \exp(-h^2\,\Sigma w^2). \tag{6}$$

Maksimalna vrijednost za V dobiva se kad je

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma w^2}}. \tag{7}$$

Za ocjenu točnosti mjerenja uvodi se srednja kvadratna pogreška koja iznosi

$$m^2 = \frac{\Sigma w^2}{n}, \tag{8}$$

pa je

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{n}}. \tag{9}$$

Veličina m nazvana je *srednjom pogreškom.*

Pomoću srednje pogreške može se definirati i *maksimalna pogreška* koja se još uzima u obzir. Tako se, npr., najčešće računa samo s pogreškama koje su u granicama $\pm 3\,m$. Ako je, dakle, pogreška mjerenja veća od trostruke srednje pogreške, takvo se mjerenje dalje ne razmatra.

Također se pomoću srednje pogreške definira *relativna pogreška* pomoću izraza

$$w_s = \frac{m}{X}, \tag{10}$$

gdje je X prava vrijednost mjerene veličine. Ako je, npr., $m = 0{,}05$ mm, a $X = 1000$ m, relativna je pogreška $w_s = 0{,}05\,\text{mm}/(1000 \cdot 10^3\,\text{mm}) = 1/20000 = 5 \cdot 10^{-5}$.

Izraz (6), kad se računa s vjerojatnim pogreškama (2), može se napisati u obliku

$$V = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \mathrm{d}v^n \exp(-h^2\,\Sigma v^2), \tag{11}$$

pa će V imati maksimalnu vrijednost kad je

$$\Sigma v^2 \rightarrow \text{minimum.} \tag{12}$$

Izraz (12) osnova je za račun izjednačenja.

RAČUN IZJEDNAČENJA

Da bi se dobila najvjerojatnija vrijednost mjerene veličine neposrednim ili posrednim mjerenjem, treba provesti izjednačenje uz zadovoljenje uvjeta (12).

Neposredna mjerenja. Kad se nekoliko puta mjeri neka veličina kojoj je stvarna vrijednost X, rezultati će mjerenja iznositi $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Tada je najvjerojatnija vrijednost aritmetička sredina L pojedinih mjerenja, pa je

$$L = \frac{\Sigma l_n}{n}. \tag{13}$$

Ako su w stvarne, a v vjerojatne pogreške, moraju vrijediti sljedeći izrazi

$$\begin{aligned} X - l_1 &= w_1, & L - l_1 &= v_1, \\ X - l_2 &= w_2, & L - l_2 &= v_2, \\ &\cdots & &\cdots \\ X - l_n &= w_n, & L - l_n &= v_n, \end{aligned} \tag{14}$$

pa ako se od lijevih odbiju desne jednadžbe, dobiva se niz izraza

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + X - L, \\ w_2 &= v_2 + X - L, \\ &\cdots \\ w_n &= v_n + X - L, \end{aligned} \tag{15}$$

a nakon zbrajanja

$$\Sigma w_n = \Sigma v_n + n(X - L), \tag{16}$$

Budući da je $\Sigma v_n = 0$, a $X - L$ prava pogreška aritmetičke sredine koja se može smatrati srednjom pogreškom M aritmetičke sredine, to je

$$M = X - L = \frac{\Sigma w_n}{n}. \tag{17}$$

Iz izraza (14) do (16) može se odrediti da je srednja pogreška pojedinog mjerenja

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}, \tag{18}$$

pa je *srednja pogreška aritmetičke sredine*

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} \tag{19}$$

Primjer. U šest mjerenja neke duljine dobiveni su rezultati mjerenja prikazani u tabl. 3. U istoj tablici nalaze se i podaci o pogreškama mjerenja. Srednja pogreška pojedinih mjerenja, prema (18), iznosi $m = \sqrt{88/5} = \pm 4{,}2$ cm, a srednja pogreška aritmetičke sredine, prema (19), $M = 4{,}2/\sqrt{6} = \pm 1{,}7$ cm.

Tablica 3
REZULTATI MJERENJA DULJINE S POGREŠKAMA MJERENJA

Broj mjerenja	*Izmjerena vrijednost* l m	*Pogreška* v cm	*Kvadrat pogreške* v^2 cm²
1	217,28	−2	4
2	217,22	+4	16
3	217,30	−4	16
4	217,30	−4	16
5	217,26	0	0
6	217,20	+6	36

$L = \frac{\Sigma l}{n} = 217{,}26$ m; $\Sigma v = 0$; $\Sigma v^2 = 88$

Prirast pogrešaka. Često se veličina za koju treba odrediti vrijednost ne mjeri ili se ne može mjeriti, pa se njezina vrijednost određuje posredno mjerenjem drugih veličina o kojima ovisi spomenuta veličina. Najvjerojatnija je vrijednost tražene veličine

$$Y = f(L_1, L_2, \ldots, L_n), \tag{20}$$

gdje su L aritmetičke sredine mjerenja pojedinih veličina o kojima ovisi vrijednost Y. Tada srednja pogreška funkcije Y iznosi

$$M = \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \cdots + a_n^2 m_n^2}, \tag{21}$$

gdje su a parcijalne derivacije funkcije F po L ($a_1 = \partial F/\partial L_1$, $a_2 = \partial F/\partial L_2, \ldots$), a m srednje pogreške mjerenja pojedinih veličina.

Ako je tražena veličina Y povezana s mjerenom veličinom L izrazom

$$Y = bL, \tag{22}$$

srednja će pogreška tražene veličine iznositi

$$M = bm, \tag{23}$$

gdje je m srednja pogreška veličine L, jer je $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}L = b$, pa je $M = \sqrt{b^2 m^2}$.

Kad je tražena veličina zbroj mjerenih veličina, odnosno kad je

$$Y = L_1 + L_2 + \cdots + L_n, \tag{24}$$

srednja je pogreška tražene veličine

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2}, \tag{25}$$

jer je $\partial Y/\partial L_1 = \partial Y/\partial L_2 = \cdots = \partial Y/\partial L_n = 1$. Ako su sve veličine L mjerene jednakom točnošću ($m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$), srednja pogreška iznosi

$$M = m\sqrt{n}, \tag{26}$$

Prema tome, posrednim se mjerenjem povećavaju pogreške, a to je povećanje to veće što je potrebno izmjeriti više veličina o kojima zavisi tražena veličina i, dakako, što je veća pogreška mjerenja mjerenih veličina.

Posredna mjerenja. Neka je tražena veličina L funkcija veličina $x_1,x_2,\ldots,x_r$ koje se mjere n puta. Za i-to mjerenje može se postaviti jednadžba

$$L_i + v_i = f_i(x_1,x_2,\ldots,x_r), \tag{27}$$

uz napomenu da postoji toliko jednadžbi koliko ima mjerenja. Ako se za $x_1,x_2,\ldots,x_r$ uvedu približne vrijednosti $x_{10} + \Delta x_1$, $x_{20} + \Delta x_2,\ldots,x_{r0} + \Delta x_r$, relacija (27) imat će oblik

$$L_i + v_i = f_i(x_{10} + \Delta x_1,\ x_{20} + \Delta x_2,\ldots,x_{r0} + \Delta x_r). \tag{28}$$

Razvojem u Taylorov red dobiva se

$$L_i + v_i = f_i(x_{10},x_{20},\ldots,x_{r0}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \mathrm{d}x_1 + + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r}\right)_0 \mathrm{d}x_r. \tag{29}$$

Ako se radi pojednostavnjenja uvedu oznake

$$a_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0,\ a_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0,\ldots,\ a_{ir} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_r}\right)_0, \tag{30a}$$

$$l_i = f_i(x_{10},x_{20},\ldots,x_{r0}) - L_i, \tag{30b}$$

izraz (29) može se napisati u obliku

$$v_i = a_{i1}\mathrm{d}x_1 + a_{i2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_{ir}\mathrm{d}x_r + l_i. \tag{31}$$

Budući da su veličine $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\ldots,\mathrm{d}x_r$ zapravo nepoznanice, pogodno ih je zamijeniti veličinama $x_1,x_2,\ldots,x_r$, pa je

$$v_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r + l_i. \tag{32}$$

Da bi se postigao minimum, mora biti

$$\frac{\partial \Sigma v_i^2}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial \Sigma v_i^2}{\partial x_2} = 0,\ldots,\frac{\partial \Sigma v_i^2}{\partial x_r} = 0, \tag{33}$$

pa se nakon deriviranja zbroja kvadrata izraza (31) dobiva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma v_i^2}{\partial x_1} &= 2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + 2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cdots + 2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_r} = 0,\\
\frac{\partial \Sigma v_i^2}{\partial x_2} &= 2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + 2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + 2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x_r} = 0,\\
&\cdots\\
\frac{\partial \Sigma v_i^2}{x_r} &= 2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_r} + 2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_r} + \cdots + 2v_r\frac{\partial v_n}{\partial x_r} = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Nakon skraćivanja i deriviranja izraza (32) dobiva se sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n &= 0,\\
a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n &= 0,\\
&\cdots\\
a_{1r}v_1 + a_{2r}v_2 + \cdots + a_{nr}v_n &= 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za v_i prema (32) u prvu jednadžbu (35) dobiva se

$$\begin{aligned}
&a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + l_1) +\\
&+ a_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + l_2) +\\
&+ \cdots +\\
&+ a_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r + l_n) = 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

pa se taj izraz može napisati u obliku

$$x_1\Sigma a_{i1}^2 + x_2\Sigma a_{i1}a_{i2} + \cdots + x_r\Sigma a_{i1}a_{ir} + \Sigma a_{i1}l_i = 0, \tag{37}$$

gdje se znak sume odnosi na indeks i, i to od $i = 1$ do $i = n$. Dakako, treba vrijednosti za v_i uvrstiti u sve jednadžbe (35), pa se dobiva sustav od r jednadžbi s isto toliko nepoznanica $x_1,x_2,\ldots,x_r$. Taj je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
&x_1\Sigma a_{i1}^2 + x_2\Sigma a_{i1}a_{i2} + \cdots + x_r\Sigma a_{ir}a_{ir} + \Sigma a_{i1}l_i = 0,\\
&x_1\Sigma a_{i1}a_{i2} + x_2\Sigma a_{i2}^2 + \cdots + x_r\Sigma a_{i2}a_{ir} + \Sigma a_{i2}l_i = 0,\\
&\cdots\\
&x_1\Sigma a_{i1}a_{ir} + x_2\Sigma a_{i2}a_{ir} + \cdots + x_r\Sigma a_{ir}^2 + \Sigma a_{ir}l_i = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Iz tog sustava jednadžbi mogu se izračunati vrijednosti svih nepoznanica bilo kojom metodom za rješavanje sustava linearnih jednadžbi (npr. metodom eliminacije nepoznanica). Uvrštavanjem vrijednosti nepoznanica u relaciju (32) dobivaju se vrijednosti pogrešaka za sva izvršena mjerenja ($i = 1,2,\ldots,n$). Iz tih rezultata određuje se srednja pogreška pomoću izraza

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-r}}, \tag{39}$$

gdje je n broj mjerenja, a r broj nepoznanica, odnosno broj mjerenih veličina.

Da bi se moglo načiniti izjednačenje, mora broj mjerenja biti veći od broja nepoznanica. Vrijednosti nepoznanica određene računom izjednačenja bit će to sigurnije što je više prekobrojnih mjerenja.

Najčešće se račun izjednačenja primjenjuje u geodeziji pri izračunavanju triangulacijskih mreža. Da bi se, naime, odredile koordinate neke točke, potrebno je iz dviju poznatih točaka odrediti smjerove prema traženoj točki, koja se određuje presjekom tih pravaca. Tada se za traženu točku dobiva jednoznačno rješenje, ali bez mogućnosti kontrole. Zbog toga se tražena točka određuje iz više poznatih točaka i pomoću presjeka više pravaca, pa se računom izjednačenja postiže veća točnost koordinata tražene točke. Često se, međutim, istodobno određuje položaj više točaka, pa se provodi račun izjednačenja zajednički za sve točke. Kad bi se, naime, izjednačenje odredilo za svaku točku posebno, pozicione pogreške prethodno određenih točaka povećavale bi pozicione pogreške poslije određenih točaka. Zbog toga je opravdano zajedničko izjednačenje.

Primjer: Treba odrediti duljine četiriju letava koje su duge ~ 5 m, a na raspolaganju je samo komparator duljine 10 m. Duljina letve može se odrediti tek u kombinaciji s drugim letvama, i to postavljanjem po dvije letve u komparator, pa će se tako svakim mjerenjem dobiti duljina dviju letava. Mjerenjem duljine svih mogućih kombinacija po dvije letve dobivaju se sljedeći rezultati:

$$\begin{aligned}
l_1 + l_2 &= 10{,}00226\,\mathrm{m}; & l_1 + l_3 &= 10{,}00309\,\mathrm{m},\\
l_1 + l_4 &= 10{,}00229\,\mathrm{m}; & l_2 + l_3 &= 10{,}00233\,\mathrm{m},\\
l_2 + l_4 &= 10{,}00198\,\mathrm{m}; & l_3 + l_4 &= 10{,}00262\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

Prema tim rezultatima mjerenja duljine letava vrlo se malo razlikuju od 5 m, pa ako se te razlike za svaku letvu označe sa x_1, x_2, x_3 i x_4, mogu se one (izražene u mm) prikazati za sva provedena mjerenja izrazima:

$$\begin{aligned}
v_1 &= x_1 + x_2 - 2{,}26; & v_2 &= x_1 + x_3 - 3{,}09,\\
v_3 &= x_1 + x_4 - 2{,}29; & v_4 &= x_2 + x_3 - 2{,}33,\\
v_5 &= x_2 + x_4 - 1{,}98; & v_6 &= x_3 + x_4 - 2{,}62.
\end{aligned}$$

Kvadriranjem tih izraza dobiva se zbroj kvadrata pogrešaka mjerenja

$$\begin{aligned}
\Sigma v_i^2 = {} & 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 15{,}28\,x_1 - 13{,}14\,x_2 -\\
& - 16{,}08\,x_3 - 13{,}78\,x_4 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 +\\
& + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + 36{,}1135.
\end{aligned}$$

Da bi se dobile minimalne vrijednosti, mora biti

$$\frac{\partial \Sigma v_i^2}{x_r} = 0 \quad \text{za } n = 1\cdots4,$$

pa se deriviranjem izraza za Σv_i^2 dobiva sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 15{,}28 &= 0,\\
2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 13{,}14 &= 0,\\
2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 16{,}08 &= 0,\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 13{,}78 &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje tog sustava jednadžbi jest:

$$x_1 = 1{,}39\,\mathrm{mm};\quad x_2 = 0{,}86\,\mathrm{mm};\quad x_3 = 1{,}59\,\mathrm{mm};\quad x_4 = 1{,}02\,\mathrm{mm},$$

pa su izmjerene duljine letava

$$L_1 = 5{,}00139\,\mathrm{m};\quad L_2 = 5{,}00086\,\mathrm{m};\quad L_3 = 5{,}00159\,\mathrm{m};\quad L_4 = 5{,}00102\,\mathrm{m}.$$

Kad se vrijednosti nepoznanica uvrste u izraze za v_i, dobivaju se pogreške mjerenja (mm) koje iznose:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -0{,}01; & v_2 &= -0{,}11\\
v_3 &= +0{,}12; & v_4 &= +0{,}12,\\
v_5 &= -0{,}10; & v_6 &= -0{,}01,
\end{aligned}$$

pa je srednja pogreška mjerenja

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-r}} = \sqrt{\frac{0{,}0511}{6-4}} = 0{,}1598.$$

Uvjetna mjerenja posebna su vrsta posrednih mjerenja. Uvjetna se mjerenja primjenjuju kad je moguće postaviti neki matematički uvjet što ga rezultati mjerenja moraju zadovoljiti. Tako je, npr., za određivanje svih elemenata trokuta (tri stranice i tri kuta) potrebno poznavati jednu stranicu i dva kuta. Ako je izmjeren još jedan od kutova kao kontrola, postoji jedno prekobrojno mjerenje, što omogućuje izjednačenje uz uvjet da zbroj svih kutova trokuta iznosi 180°. Taj uvjet, međutim, zbog pogrešaka mjerenja neće praktički nikada biti ispunjen, pa je potrebno utvrditi korekcije mjerenja.

Ako se sa α'_1, α'_2 i α'_3 označe izmjerene vrijednosti kutova u trokutu, može se postaviti jednadžba

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 - 180° = w. \tag{40}$$

Izjednačenjem treba odrediti korekciju v_1, v_2 i v_3 za svaki kut. Te korekcije moraju zadovoljavati uvjet

$$\alpha'_1 + v_1 + \alpha'_2 + v_2 + \alpha'_3 + v_3 - 180° = 0, \tag{41}$$

pa iz (40) i (41) slijedi

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \tag{42}$$

Korigirane su vrijednosti kutova: $\alpha_1 = \alpha'_1 + v_1$, $\alpha_2 = \alpha'_2 + v_2$, i $\alpha_3 = \alpha'_3 + v_3$.

U praksi, međutim, postavljaju se mreže trokuta, pa se izjednačenje provodi istodobno za cijelu mrežu da bi se spriječilo gomilanje pogrešaka. Tako se, npr., pri određivanju triangulacije I reda čitav teritorij zemlje prekriva mrežom trokuta sa stranicama od 30···40 km. Trokuti mreže međusobno se izjednačuju pomoću uvjetnih mjerenja.

Neka je uvjetnim mjerenjem potrebno odrediti vrijednosti veličina $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ za koje postoje izmjerene vrijednosti $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i koje nisu međusobno neovisne, nego su vezane sa r međusobno nezavisnih funkcija, odnosno uvjeta

$$\begin{aligned} &f_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0, \\ &f_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0, \\ &\ldots \\ &f_r(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Broj izmjerenih veličina n mora biti veći od broja uvjeta r da bi se mogli rezultati mjerenja izjednačiti. Kad bi se umjesto vrijednosti Y uvrstile pripadne izmjerene vrijednosti y, uvjeti (43) ne bi bili ispunjeni zbog pogrešaka mjerenja, pa bi se na desnoj strani izraza (43) pojavile pogreške $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Da se to ne bi dogodilo, treba svakoj izmjerenoj vrijednosti y dodati pripadnu korekciju v

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_1 + v_1, \\ Y_2 &= y_2 + v_2, \\ &\ldots \\ Y_n &= y_n + v_n, \end{aligned} \tag{44}$$

pa će uvjeti (43) glasiti

$$\begin{aligned} &f_1(y_1 + v_1,\ y_2 + v_2, \ldots, y_n + v_n) = 0, \\ &f_2(y_1 + v_1,\ y_2 + v_2, \ldots, y_n + v_n) = 0, \\ &\ldots\ldots \\ &f_r(y_1 + v_1,\ y_2 + v_2, \ldots, y_n + v_n) = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Razvojem u Taylorov red, a uz zanemarenje članova višeg reda, dobiva se

$$\begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} v_n = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_n} v_n = 0, \\ &\ldots \\ &f_r(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{\partial f_r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial f_r}{\partial y_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial f_r}{\partial y_n} v_n = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Ako se postavi da je $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w_i$, te ako se uvedu jednostavnije oznake za diferencijalne kvocijente tako da je

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} = a_{ik}, \tag{47}$$

gdje je i indeks funkcije f, a k indeks mjerenja, izrazi (46) mogu se napisati u obliku

$$\begin{aligned} &a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \cdots + a_{1n} v_n + w_1 = 0, \\ &a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{2n} v_n + w_2 = 0, \\ &\ldots \\ &a_{r1} v_1 + a_{r2} v_2 + \cdots + a_{rn} v_n + w_r = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

koji u još jednostavnijem obliku glase

$$\begin{aligned} &\Sigma a_{1k} v_k + w_1 = 0, \\ &\Sigma a_{2k} v_k + w_2 = 0, \\ &\ldots \\ &\Sigma a_{rk} v_k + w_r = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

gdje je $k = 1,2,\ldots,n$. Najvjerojatnije vrijednosti korekcija $v_1, v_2, \ldots, v_n$ treba odrediti uz uvjet da suma Σv_k^2 bude minimalna. Da bi se odredile vrijednosti korekcija, treba formirati pomoćnu funkciju

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Sigma v_k^2 - 2\lambda_1(\Sigma a_{1k} v_k + w_1) - \\ - 2\lambda_2(\Sigma a_{2k} v_k + w_2) - \cdots - 2\lambda_r(\Sigma a_{rk} v_k + w_r), \end{aligned} \tag{50}$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ Lagrangeovi multiplikatori, dok je koeficijent 2 uveden da bi se dobio jednostavniji rezultat. Nužan je uvjet ekstrema da prve derivacije pomoćne funkcije φ po svim korekcijama v budu jednake nuli. Deriviranjem funkcije φ po $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dobiva se

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_r a_{r1}, \\ v_2 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_r a_{r2}, \\ &\ldots \\ v_n &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_r a_{rn}. \end{aligned} \tag{51}$$

Prema tim izrazima izračunat će se korekcije v, ali prije toga treba odrediti vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Radi toga treba vrijednosti za v uvrstiti u jednadžbe (49), pa se dobiva sustav od r linearnih jednadžbi s nepoznanicama $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \Sigma a_{1k}^2 + \lambda_2 \Sigma a_{1k} a_{2k} + \cdots + \lambda_k \Sigma a_{1k} a_{rk} + w_1 = 0, \\ &\lambda_1 \Sigma a_{1k} a_{2k} + \lambda_2 \Sigma a_{2k}^2 + \cdots + \lambda_k \Sigma a_{2k} a_{rk} + w_2 = 0, \\ &\ldots \\ &\lambda_1 \Sigma a_{1k} a_{rk} + \lambda_2 \Sigma a_{2k} a_{rk} + \cdots + \lambda_k \Sigma a_{rk}^2 + w_r = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

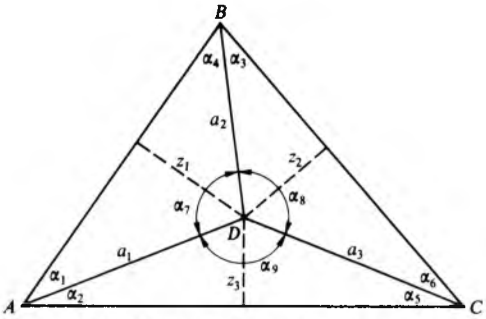
gdje se znak sume odnosi na vrijednosti $k = 1,2,\ldots,n$. Rješenjem sustava linearnih jednadžbi (52) dobivaju se vrijednosti koeficijenata $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, što omogućuje određivanje korekcija v (51).

Primjer. Na mreži (sl. 2) izmjereni su kutovi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$, pa je potrebno izvršiti izjednačenje. Rezultati su mjerenja:

$\alpha_1 = 17°43'57{,}19''$, $\alpha_2 = 31°27'40{,}94''$, $\alpha_3 = 56°18'29{,}42''$,

$\alpha_4 = 13°6'9{,}86''$, $\alpha_5 = 18°31'23{,}33''$, $\alpha_6 = 42°52'19{,}22''$,

$\alpha_7 = 149°9'47{,}99''$, $\alpha_8 = 80°49'9{,}45''$, $\alpha_9 = 130°1'2{,}56''$.



Sl. 2. Uz primjer za uvjetno mjerenje

Budući da su α_1, α_4 i α_7; α_2, α_5 i α_9; te α_3, α_6 i α_8 kutovi trokutâ ***ABD***, ***ACD*** i ***BCD***, te budući da kutovi α_7, α_8 i α_9 čine puni kut, nesuglasice mjerenja iznose:

$$w_1 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 - 180° = -4{,}96'', \tag{53a}$$

$$w_2 = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 - 180° = -1{,}91'', \tag{53b}$$

$$w_3 = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_8 - 180° = 6{,}83'', \tag{53c}$$

$$w_4 = \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 - 360° = 0. \tag{53d}$$

Sinusni uvjet može se izvesti iz umnoška omjera udaljenosti između vrhova trokuta ABC i točke D, koje su na sl. 2 označene sa a_1, a_2 i a_3, pa se može postaviti

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_1}=1. \tag{54}$$

Udaljenosti a_1, a_2 i a_3 mogu se prikazati izrazima

$$a_1=\frac{z_1}{\sin\alpha_1}=\frac{z_3}{\sin\alpha_2}, \tag{54a}$$

$$a_2=\frac{z_1}{\sin\alpha_4}=\frac{z_2}{\sin\alpha_3}, \tag{54b}$$

$$a_3=\frac{z_2}{\sin\alpha_6}=\frac{z_3}{\sin\alpha_5}, \tag{54c}$$

pa se nakon uvrštenja u (54) dobiva

$$\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3\cdot\sin\alpha_5}{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_4\cdot\sin\alpha_6}=1. \tag{55}$$

To se naziva sinusnim uvjetom. Da bi se dobio pogodniji oblik, promatra se logaritam sinusnog uvjeta, pa se pripadna nesuglasica određuje iz izraza

$$w_5=\lg\sin\alpha_1+\lg\sin\alpha_3+\lg\sin\alpha_5-\lg\sin\alpha_2-\\ -\lg\sin\alpha_4-\lg\sin\alpha_6=0{,}0000395. \tag{56}$$

Na temelju izraza (53) i (56) mogu se postaviti sljedeće uvjetne jednadžbe

$$\alpha_1+\alpha_4+\alpha_7-180°=w_1, \tag{57a}$$

$$\alpha_2+\alpha_5+\alpha_9-180°=w_2, \tag{57b}$$

$$\alpha_3+\alpha_6+\alpha_8-180°=w_3, \tag{57c}$$

$$\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9-360°=w_4, \tag{57d}$$

$$\lg\sin\alpha_1+\lg\sin\alpha_3+\lg\sin\alpha_5-\lg\sin\alpha_2-\lg\sin\alpha_4-\\ -\lg\sin\alpha_6+w_5=0. \tag{57e}$$

One su formirane prema (45), a radi pojednostavnjenja izostavljene su pogreške $v_1,v_2,\dots,v_9$. Razvojem u Taylorov red (46) i nakon deriviranja dobiva se

$$v_1+v_4+v_7-4{,}96=0, \tag{58a}$$

$$v_3+v_6+v_8-1{,}91=0, \tag{58b}$$

$$v_2+v_5+v_9+6{,}83=0, \tag{58c}$$

$$v_7+v_8+v_9=0, \tag{58d}$$

$$0{,}658v_1-0{,}344v_2+0{,}140v_3-0{,}905v_4+0{,}629v_5-\\ -0{,}227v_6+3{,}950=0. \tag{58e}$$

U jednadžbi (58e) koeficijenti su prema izrazu

$$d_k=\frac{0{,}43429}{\varrho''}\cot\alpha_k, \tag{59}$$

jer je

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\sin\alpha_k)}{\mathrm{d}\alpha_k}=\cot\alpha_k. \tag{60}$$

U izrazu (59) faktor 0,43429 služi za preračunavanje prirodnih u dekadske logaritme, a ϱ'' je broj sekunda jednog radijana, jer su nesuglasice izražene sekundama. Osim toga, da bi se pojednostavnilo računanje, jednadžba (58e) pomnožena je sa 10^5.

Da bi se odredili koeficijenti uz Lagrangeove multiplikatore u jednadžbama (52), pogodno je koeficijente uz tražene pogreške u jednadžbama (58) napisati u obliku

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{ccccccccc} k=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0{,}658 & -0{,}344 & 0{,}140 & -0{,}905 & 0{,}629 & -0{,}227 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array} \tag{61}$$

Svaki od elemenata u (61) predstavlja koeficijent a_{ik}, pa je jednostavno odrediti sume umnožaka koeficijenata koje dolaze u izrazima (52). Tako, npr., Σa_{1k}^2 nije ništa drugo nego zbroj kvadrata elemenata prvog retka matrice (61), dok je $\Sigma a_{1k}a_{2k}$ zbroj umnožaka elemenata u prvom i drugom retku, dakako u istom stupcu itd. Tako se dolazi do sustava jednadžbi (52):

$$3\lambda_1+\lambda_4-0{,}247\lambda_5=4{,}96, \tag{62a}$$

$$3\lambda_2+\lambda_4-0{,}087\lambda_5=1{,}91, \tag{62b}$$

$$3\lambda_3+\lambda_4+0{,}285\lambda_5=-6{,}83, \tag{62c}$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4=0, \tag{62d}$$

$$-0{,}247\lambda_1-0{,}087\lambda_2+0{,}285\lambda_3+1{,}837\lambda_5=3{,}95. \tag{62e}$$

Rješenje toga sustava jednadžbi daje:

$$\lambda_1=1{,}5205,$$
$$\lambda_2=0{,}5885,$$
$$\lambda_3=-2{,}1279,$$
$$\lambda_4=0{,}0063,$$
$$\lambda_5=-1{,}5878,$$

pa se pogreške mogu izračunati iz izraza (51), uzimajući u obzir koeficijente a_{ik} iz matrice (61). Pogreške, dakle, iznose

$$v_1=1{,}5205-1{,}0448=0{,}4758,$$
$$v_2=-2{,}1279+0{,}5462=-1{,}5817,$$
$$v_3=0{,}5885-0{,}2223=0{,}3662,$$
$$v_4=1{,}5205+1{,}4370=2{,}9575,$$
$$v_5=-2{,}1279-0{,}9987=-3{,}1266,$$
$$v_6=0{,}5885+0{,}3604=0{,}9489,$$
$$v_7=1{,}5205+0{,}0063=1{,}5268,$$
$$v_8=0{,}5885+0{,}0063=0{,}5948,$$
$$v_9=-2{,}1279+0{,}0063=-2{,}1216.$$

Prema tome, popravljene vrijednosti kutova iznose

$$\alpha_1=17°43'57{,}19''+0{,}48''=17°43'57{,}67'',$$
$$\alpha_2=31°27'40{,}94''-1{,}58''=31°27'39{,}36'',$$
$$\alpha_3=56°18'29{,}42''+0{,}37''=56°18'29{,}79'',$$
$$\alpha_4=13°6'9{,}86''+2{,}96''=13°6'12{,}82'',$$
$$\alpha_5=18°31'23{,}33''-3{,}13''=18°31'20{,}20'',$$
$$\alpha_6=42°52'19{,}22''+0{,}95''=42°52'20{,}17'',$$
$$\alpha_7=149°9'47{,}99''+1{,}53''=149°9'49{,}52'',$$
$$\alpha_8=80°49'9{,}45''+0{,}59''=80°49'10{,}04'',$$
$$\alpha_9=130°1'2{,}56''-2{,}12''=130°1'0{,}44''.$$

Rezultat proračuna može se kontrolirati prema zbroju kutova u trokutima, odnosno prema zbroju kutova koji čine puni kut.

LIT.: *F. R. Helmert*, Die Ausgleichungsrechnung. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin ²1924. — *N. Čubranić*, Račun izjednačenja. Tehnička knjiga, Zagreb 1958. — *V. Vranić*, Vjerojatnost i statistika. Tehnička knjiga, Zagreb 1958. — *Jordan-Eggert-Kneissl*, Handbuch der Vermessungskunde, I. Teil. Metzler Verlag, Stuttgart ¹⁰1961. — *A. Muminagić, V. Jovanović*, Račun izravnanja. Građevinski fakultet, Beograd 1965. — *H. Wolf*, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmlers Verlag, Bonn 1968. — *W. Grossmann*, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg ³1969. — *H. Wolf*, Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung. Dümmlers Verlag, Bonn 1975. — *N. Čubranić*, Viša geodezija I. Liber, Zagreb ³1980. — *N. Čubranić*, Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Liber, Zagreb ²1980.

N. Čubranić

POLIGONOMETRIJA, geodetska osnova za premjeravanje zemljišta i iskolčenje građevina koja se osniva na mjerenju duljina u poligonu i kutova među stranicama poligona. *Poligon* je niz dužina spojenih u lomnim točkama (v. *Planimetrija*). Lomne točke su poligonske točke, a dužine su poligonske stranice. Poligon je potpuno definiran ako se poznaju koordinate lomnih točaka. Koordinate se određuju na osnovi poznatih duljina poligonskih stranica d i poznatih prijelomnih kutova među njima β (sl. 1).

Niz poligonskih stranica koje se nastavljaju jedna na drugu nazivaju se *poligonskim vlakom*. Glavni poligonski vlakovi spa-