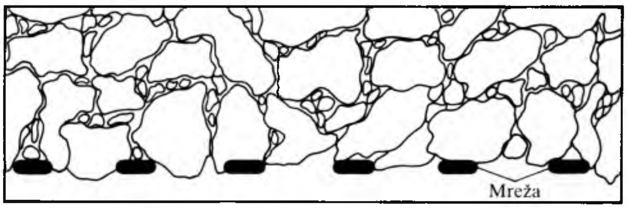
vlačno naprezanje koje djeluje povoljno na rasprostiranje opterećenja kroz sloj kamenog materijala. Svojom sposobnošću filtracije netkani tekstil pridonosi i konsolidaciji tla tokom vremena, jer se pod opterećenjem iz tla istiskuje i dio porne vode, koja se na prikladan način odvodi iz zone objekta. Djelovanje mreža nešto je drugačije. Takvi sustavi uspješno djeluju čak i kad je tlo slabo i kad ne postoje izgledi da mu se stanje popravi. Iznad mreže se ugrađuje zrnati kameni materijal krupne granulacije, pa u donjoj zoni sloja dio kamenih zrna ulazi u otvore mreže i tamo se uklješćuje. Time je kameni sloj pri dnu čvrsto spregnut s mrežom, pa je spriječeno bočno razmicanje kamenih zrna pod opterećenjem. Meko tlo, stoga, ne može ulaziti u sloj i kvariti mu svojstva pa je sačuvana cjelovitost sloja i njegova efektivna debljina.



Sl. 12. Armiranje donje zone kamenog sloja polimernom mrežom

Donja površina sustava, tj. mreža kojoj kroz otvore vire kamena zrna, vrlo je hrapava, što pridonosi armirajućem djelovanju, odnosno njegovoj spregnutosti s tlom. Poboljšava se i djelovanje tla koje je obuhvaćeno mrežom i kamenim slojem, pa nema prevelikih deformacija pod opterećenjem, a na površini se sloja ostvaruje potrebna nosivost. (sl. 12).

Izradba stabilizacije tla pomoću geotekstila. Prije početka rada na stabilizaciji potrebno je odrediti debljinu sloja zrnatog kamenog materijala. Debljina sloja mora biti takva da se na njegovoj površini može ostvariti nosivost koja je dovoljna za dalju uspješnu izradbu i oslanjanje nasipa ili za neposredno odvijanje prometa. Njegova debljina ovisi o stanju slabog tla, vrsti i jakosti geotekstila i vrsti zrnatog kamenog materijala, a određuje se na pokusnom odsječku ceste u stvarnim uvjetima. Orijentacijski, debljina kamenog materijala iznad netkanog tekstila iznosi 25···50 cm, a iznad polimernih mreža 15···30 cm.

Tlo na koje se postavlja geotekstil potrebno je najprije urediti. Ponekad se skida najgornji humusni sloj, osobito ako je to povezano i s odstranjivanjem panjeva, korijenja, šiblja i grmlja koje bi moglo probiti ili poderati geotekstil. Katkad se pak najgornji vegetativni sloj ne smije dirati, jer to može biti i najčvršći dio tla. Ako se može planirati, dobro je da se tlo izravna i da mu se dade određeni pad (oko 5%), jer to omogućuje kasnije otjecanje vode. U pogledu nosivosti tla ne postavljaju se nikakvi zahtjevi, dakako uz pretpostavku da je kvaliteta tla u dubini jednaka ili bolja nego pri površini, ali da nije lošija. Ako nije tako, potrebna su posebna geotehnička ispitivanja i rješenja.

Sl. 13. Polaganje netkanog tekstila na provlaženo tlo

Geotekstili se isporučuju i dopremaju na gradilište u rolama širine 2···4 m i duljine 100···300 m. Masa je role ograničena mogućnostima manipulacije i obično iznosi 100···200 kg. Razmotavanjem rola geotekstil se polaže neposredno na tlo (sl. 13). Trake treba međusobno spajati u uzdužnom i poprečnom smjeru. Netkani tekstili spajaju se preklapanjem, zavarivanjem i šivanjem. Spajanje je preklapanjem najjednostavnije, ali se tada troši više materijala. Preklopi moraju biti široki 20···50 cm, što ovisi o vrsti tla i o tome da li se radi o uzdužnom ili poprečnom preklopu. Kad je tlo slabije, preklopi moraju biti veći nego za bolje tlo, a preklopi poprečnog spoja moraju biti širi nego preklopi uzdužnog spoja. Ako se spojevi vare ili šivaju, oni su mnogo uži, 10···20 cm. Zavaruje se plamenikom tako da se tekstil u zoni spoja rastali, što omogućuje sljepljivanje s drugom trakom. Šiva se posebnim šivaćim strojevima pomoću kvalitetnog konca. Polimerne mreže spajaju se preklapanjem, vezanjem ili zabijanjem željeznih spojnica promjera 5···8 mm.

Sl. 14. Razastiranje zrnatoga kamenog materijala preko netkanog tekstila i zbijanje

Na razastrti se geotekstil razastire zrnati materijal (sl. 14), koji može biti krupni prirodni šljunak, prirodne drobine ili drobljeni kameni materijal, tucanik iz kamenoloma. Dovozi se i istovaruje s čela, tj. vozila se moraju kretati po nasipnom sloju. Vožnja preko sloja od zrnatog materijala moguća je i povoljno djeluje na zbijanje. Razastire se i planira lakim buldozerima ili grejderima, a isplanirani se sloj zbija lakšim vibracijskim napravama, vibropločama ili vibrovaljcima. Postignuta se nosivost najčešće ispituje pomoću kružne ploče.

LIT.: Road Research Laboratory, Mehanika tla pri projektovanju i građenju putova (prijevod). Građevinska knjiga, Beograd 1964. – *H. L. Jessberger,* Grundlagen und Anwendung der Bodenstabilisierung. VDI-Verlag, Düsseldorf 1967. – *A. Kezdi,* Stabilisierte Erdstrassen. VEB Verlag, Berlin 1973. – *C. A. O'Flaherty,* Highways, Volume II. Edward Arnold Ltd, London 1974. – *R. M. Koerner,* Designing with Geosynthetics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1986.

B. Babić

STABILNOST GRAĐEVNIH KONSTRUKCIJA, znanstvena grana koja proučava stabilnost ravnoteže građevnih konstrukcija.

Teorija stabilnosti građevnih konstrukcija relativno je mlada znanost; s usavršavanjem materijala i konstrukcijskih sustava ona postaje sve važnija, jer omogućuje građenje vitkijih i tako ekonomičnijih i elegantnijih konstrukcija. Početkom teorije stabilnosti smatra se studija *Sur la force de colonnes* (1759) L. Eulera, u kojoj je on pokazao da nosivost tlačenih štapova ne ovisi samo o čvrstoći njihova presjeka nego i o stabilnosti ravnoteže. Eulerove spoznaje potvrdio je i proširio J. L. Lagrange u svom radu *Sur la figure de colonnes* (1770). Da Eulerova formula vrijedi samo za štapove kojima je vitkost veća od neke granične vitkosti, utvrdio je E. Lamarle (1845). F. Engesser usavršio je Eulerov postupak primjenom dvostrukog modula elastičnosti (1889). Eksperimentalna verifikacija potječe od T. v. Karmana (*Die Knickfestigkeit gerader Stäbe,* 1910). W. Ritz je na osnovi ekstremalnih svojstava potencijalne energije razradio približno rješenje, pa je progibnu liniju pri izvijanju aproksimirao funkcijom s konačnim brojem ili s beskonačno mnogo parametara (1908). Prvi rad o stabilnosti štapnih sustava napisao je B. G. Galerkin (*Теория продольного изгиба*, 1909), a opće je analitičke kriterije stabilnosti formulirao R. Southwell (1915). Teoriju vlastitih funkcija, a napose vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora utjecajnih matrica za utvrđivanje kritičnog opterećenja prvi je primijenio F. R. Gantmaher (1950). Dalje su doprinose dali S. P. Timošenko, F. Jasinskij, V. Z. Vlasov i I. G. Bubnov. Primjena elektroničkih računala omogućuje rješavanje sve složenijih zadataka.

Uvjeti ravnoteže mogu se formulirati neposredno (v. *Statika građevnih konstrukcija*), primjenom poučka o virtualnim pomacima, primjenom energetskog poučka ili poučka o konzervaciji energije. *Poučak o virtualnim pomacima* glasi: Ako je sustav u ravnoteži, zbroj radova vanjskih i unutrašnjih sila pri virtualnoj deformaciji sustava jednak je nuli. *Energetski poučak* glasi: U stanju ravnoteže potencijalna energija sustava ima ekstremnu, tj. minimalnu ili maksimalnu vrijednost u usporedbi s vrijednostima u bliskim stanjima koja se dobivaju od polaznog stanja virtualnom deformacijom. Prva varijacija potencijalne energije U mora, dakle, biti jednaka nuli:

$$\delta U = 0 \tag{1}$$

Za sustav s jednim stupnjem slobode v vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = 0, \tag{2}$$

a za sustav s n stupnjeva slobode $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$\frac{\partial U}{\partial v_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Vrste ravnoteže. *Položajna stabilnost nedeformabilnog sustava* može se analizirati kuglom na glatkoj plohi. Kugla je na konkavnoj točki plohe (u udubini) u stabilnom, na konveksnoj točki (na uzvišenju) u labilnom, a na vodoravnom dijelu plohe u indiferentnom položaju. Pri pomaku kugle iz položaja stabilne ravnoteže potencijalna energija kugle raste zbog djelovanja sile teže, pri pomaku iz položaja labilne ravnoteže ona se smanjuje, a pri pomaku iz položaja indiferentne ravnoteže ona se ne mijenja. Potencijalna energija tijela je, dakle, minimalna ako se ono nalazi u stabilnoj, maksimalna ako je u labilnoj, a konstantna ako je u indiferentnoj ravnoteži.

Elastična stabilnost opterećenog deformabilnog sustava analizira se tako da mu se nametne virtualna deformacija ili pomak, tj. zamišljena, infinitezimalna deformacija ili pomak kompatibilan s njegovim ležajnim uvjetima. Ako se sustav nakon prestanka perturbacije vrati u polazni položaj, ravnoteža sustava u polaznom položaju je stabilna, odnosno sustav je u polaznom položaju stabilan. Ako se sustav nakon prestanka perturbacije ne vrati u polazni položaj, ravnoteža je sustava u polaznom položaju nestabilna, odnosno sustav je u polaznom položaju nestabilan. Stabilnost je, dakle, svojstvo sustava da se nakon prestanka perturbacije vrati u polazni položaj.

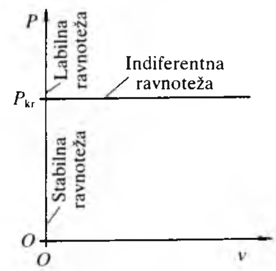
Ako se pri virtualnoj deformaciji sustava njegova potencijalna energija U poveća, ravnoteža je sustava u svojem polaznom položaju stabilna. Ako se potencijalna energija U pri virtualnoj deformaciji smanji ili ne promijeni, ravnoteža je nestabilna. To znači da relativni minimum potencijalne energije odgovara stabilnoj, relativni maksimum labilnoj, a konstantna potencijalna energija indiferentnoj ravnoteži. Vrsta ravnoteže ovisi, dakle, o vrijednosti druge varijacije potencijalne energije U. Za sustave s n stupnjeva slobode kriterij ravnoteže glasi:

$$\delta^2 U = \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0 \;\; \begin{matrix} \text{stabilna} \\ \text{indiferentna} \\ \text{labilna} \end{matrix} \left|\begin{matrix} \\ \text{nestabilna} \\ \end{matrix}\right. \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\ a\\ a \end{matrix}}\right\} \text{ravnoteža}, \tag{4}$$

a za sustav s jednim stupnjem slobode:

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}v^2} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0 \;\; \begin{matrix} \text{stabilna} \\ \text{indiferentna} \\ \text{labilna} \end{matrix} \left|\begin{matrix} \\ \text{nestabilna} \\ \end{matrix}\right. \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\ a\\ a \end{matrix}}\right\} \text{ravnoteža}. \tag{5}$$

Bifurkacija ravnoteže. Promatra se štapni sustav na koji u nedeformiranom stanju djeluju samo aksijalne tlačne sile, dakle, štapni sustav koji u osnovnom stanju nije savijen. Pri porastu opterećenja, kad opterećenje dostigne neku određenu vrijednost, sustav prelazi iz stanja stabilne u stanje nestabilne ravnoteže; taj se prijelaz naziva *bifurkacijom ravnoteže*, a pripadno opterećenje P_{kr} *kritičnim opterećenjem*.



Sl. 1. Dijagram $P = P(v)$ tlačenog štapa

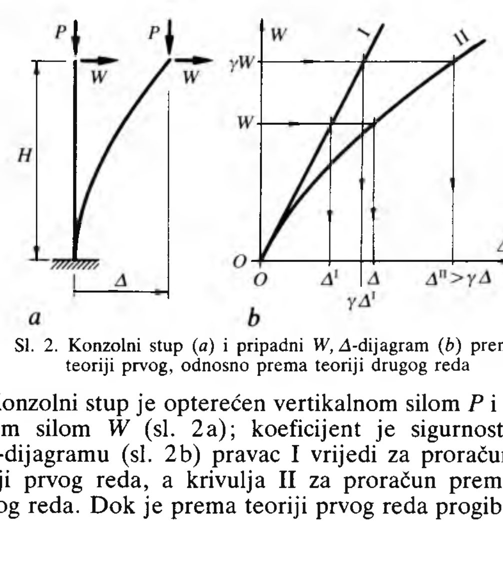
U linearnoj teoriji elastične stabilnosti ovisnost je opterećenja P o nekom karakterističnom pomaku v bilinearna (sl. 1); za $P < P_{\mathrm{kr}}$ ravnoteža je stabilna, za $P = P_{\mathrm{kr}}$ indiferentna, a za $P > P_{\mathrm{kr}}$ labilna. Građevne konstrukcije treba tako projektirati da uvijek budu u stabilnoj ravnoteži.

Utvrđivanje kritičnog opterećenja naziva se bifurkacijskim ili homogenim zadatkom stabilnosti konstrukcija.

Teorija drugog reda. Promatra se štapni sustav na koji djeluje bočno opterećenje i aksijalne tlačne sile, dakle sustav koji je u osnovnom stanju i savijen. Sustav aksijalnih sila naziva se i parametarskim opterećenjem. Uvjeti se ravnoteže ne formuliraju na nedeformiranom sustavu kao u teoriji prvog reda, tj. uobičajenoj statici (v. *Statika građevnih konstrukcija*), nego na deformiranom sustavu. Utjecaji bočnog i parametarskog opterećenja ne mogu se, kao u teoriji prvoga reda, utvrđivati odvojeno i onda superponirati, nego se određuju istodobno. Terminom *teorija drugog reda* želi se upozoriti na veću točnost u usporedbi s metodama statike.

Suština je teorije drugog reda da se uzimaju u obzir dodatne unutrašnje sile, pogotovo momenti savijanja, i deformacije što ih uzrokuju horizontalni pomaci gravitacijskog opterećenja zbog deformacije sustava. Ta deformacija nastaje zbog djelovanja horizontalnih sila, ekscentričnosti vertikalnih sila, zakreta temelja i nesavršenosti izvedbe. Te nesavršenosti nastaju zbog neizbježnih nepreciznosti u izvedbi konstrukcije, a uzimaju se u obzir kao nagibi vertikalnih elemenata konstrukcije, odnosno kao zakrivljenosti pravocrtnih stupova s bočno pridržanim krajevima. Kako se gravitacijsko opterećenje često označuje sa P, a horizontalni pomaci sa Δ, proračuni se drugog reda nazivaju i P,Δ-proračunima.

Zadaci teorije drugog reda formuliraju se nehomogenim jednadžbama, pa se nazivaju i *nehomogenim zadacima stabilnosti konstrukcija.* Kad nema bočnog opterećenja, oni degeneriraju u pripadni homogeni zadatak.

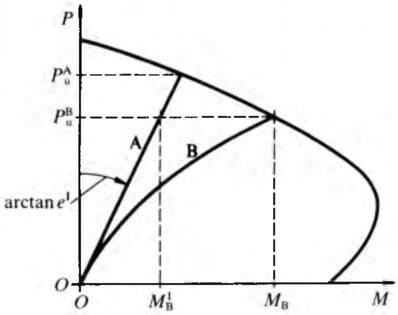


a b

Sl. 2. Konzolni stup (*a*) i pripadni W,Δ-dijagram (*b*) prema teoriji prvog, odnosno prema teoriji drugog reda

Konzolni stup je opterećen vertikalnom silom P i horizontalnom silom W (sl. 2a); koeficijent je sigurnosti γ. Na W,Δ-dijagramu (sl. 2b) pravac I vrijedi za proračun prema teoriji prvog reda, a krivulja II za proračun prema teoriji drugog reda. Dok je prema teoriji prvog reda progib Δ^{I} vrha stupa zbog djelovanja sile γW jednak γ-strukoj vrijednosti progiba zbog djelovanja sile W, prema teoriji drugog reda progib Δ vrha stupa zbog djelovanja sile γW veći je od γ-struke vrijednosti progiba zbog djelovanja sile W. Prema tome kad se primjenjuje teorija drugog reda ne smiju se koeficijentom sigurnosti γ množiti unutrašnje sile i progibi, nego opterećenja. Normalna naprezanja, naime, ne rastu proporcionalno silama nego brže od njih.

Na sl. 3 prikazan je interakcijski dijagram uzdužne sile P i momenta uklještenja M armiranobetonskog konzolnog stupa prema sl. 2a. Tu je $e^{\mathrm{I}} = WH/P$ ekscentričnost uzdužne sile u presjeku uklještenja stupa bez utjecaja njegove deformacije, gdje je H visina stupa. Pravac A vrijedi za kratki stup, tj. stup kojemu se može zanemariti utjecaj ovisnosti progiba Δ o sili P, a krivulja B za vitki stup, tj. stup kojemu se taj utjecaj mora uzeti u obzir. Lomna uzdužna sila $P_{\mathrm{u}}^{\mathrm{B}}$ vitkog stupa manja je od lomne uzdužne sile $P_{\mathrm{u}}^{\mathrm{A}}$ kratkog stupa istoga presjeka i materijala. Lom obaju stupova nastaje drobljenjem betona na jače tlačenom rubu presjeka.



Sl. 3. Interakcijski dijagram uzdužne sile P i momenta uklještenja M za kratki (A) i vitki (B) armiranobetonski konzolni stup

Zakon superpozicije za tlačene štapove glasi: Utjecaj više bočnih opterećenja jednak je zbroju utjecaja pojedinih bočnih opterećenja ako se parametarsko opterećenje, tj. uzdužna sila, ne mijenja.

Ako parametarsko opterećenje teži u beskonačnost, tada i progibi sustava teže u beskonačnost za bilo koju vrijednost bočnog opterećenja. Taj se kriterij može iskoristiti za utvrđivanje kritične vrijednosti parametarskog opterećenja.

Analize pokazuju da se konstrukcijski elementi i konstrukcije kao cjeline mogu proračunati prema teoriji prvog reda ako za sve elemente vrijedi $N/N_{\mathrm{kr}} < 0{,}1$, gdje je N uzdužna sila promatranog elementa pomnožena koeficijentom sigurnosti γ, a N_{kr} kritična vrijednost te uzdužne sile. Ako je vrijednost omjera N/N_{kr} u području $0{,}1 \cdots 0{,}2$, proračun se prema teoriji drugoga reda bočno pomičnih sustava može približno načiniti tako da se unutrašnje sile i progibi prema teoriji prvoga reda pomnože koeficijentom povećanja

$$\alpha = \frac{1}{1 - N/N_{\mathrm{kr}}}. \tag{6}$$

Ako je vrijednost omjera $N/N_{\mathrm{kr}} > 0{,}2$, konstrukcija je prekomjerno deformabilna, pa je treba pojačati.

METODE PRORAČUNA

Promatra se sustav koji je u ravnoteži pod utjecajem parametarskog (sila P) i bočnog opterećenja (sila Q). Odaberu se međusobno neovisni stupnjevi slobode, a to su geometrijski parametri $v_1, v_2, \ldots, v_n$ koji jednoznačno opisuju pripadnu deformaciju. Ako je $n = \infty$, deformacija se opisuje funkcijom $v(z)$, gdje je z apscisa orijentirana uzduž osi štapa.

Uzdužne sile štapova od parametarskog opterećenja čine vektor

$$\{N\} = \{\nu\} N, \tag{7}$$

gdje je N referentna, obično najveća uzdužna sila. Bočne sile čine vektor $\{Q\}$, a pomaci vektor $\{v\}$.

Metoda ravnoteže. Primjenom relacija geometrijske suvislosti deformacije i zakona elastičnosti formuliraju se, na deformiranom sustavu, uvjeti ravnoteže. Ako je broj stupnjeva slobode n konačan, dobiva se sustav od n linearnih algebarskih jednadžbi, a ako je $n = \infty$, dobivaju se diferencijalne i pripadne rubne jednadžbe.

Kad se radi o bifurkacijskom zadatku, sustav jednadžbi je homogen. Trivijalno rješenje $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$, odnosno $v(z) \equiv 0$, pokazuje da je nedeformirano stanje ravnotežno stanje pri bilo kakvoj vrijednosti parametarskog opterećenja; ravnoteža je, međutim nestabilna ako je parametarsko opterećenje jednako kritičnom opterećenju ili veće od njega. Rješenja koja odgovaraju deformiranom sustavu dobivaju se iz uvjeta da je determinanta koeficijenata sustava jednadžbi jednaka nuli.

Kad se radi o fleksijskom štapu, pri zadanoj progibnoj liniji moment M_{i} unutrašnjih sila u bilo kojem presjeku ne ovisi, a moment M_{a} vanjskih sila ovisi o sili P. Dok je sila P malena, dotle je $M_{\mathrm{i}} > M_{\mathrm{a}}$, a kad ona postane velika, bit će $M_{\mathrm{i}} < M_{\mathrm{a}}$. Kad sila P poprimi kritičnu vrijednost P_{kr}, onda je $M_{\mathrm{i}} = M_{\mathrm{a}}$, pa sustav prelazi iz stabilne u nestabilnu ravnotežu.

Energetska metoda za sustave s konačnim brojem stupnjeva slobode. Energetske su metode primjenjive samo ako napadne sile pri deformaciji sustava ne mijenjaju smjer.

Potencijal se *sustava* u svojem osnovnom položaju sastoji od doprinosa unutrašnjih sila, tj. deformacijske energije U_{i}, te doprinosa, potencijala, vanjskih sila. Potencijal vanjskih sila jednak je zbroju radova uzdužnih sila W_N i bočnog opterećenja W_Q sa suprotnim predznakom:

$$U = U_{\mathrm{i}} - W_N - W_Q. \tag{8}$$

Deformacijska energija U_{i} može se izraziti kao funkcija krutosti S i pomaka v, rad uzdužnih sila W_N kao funkcija geometrijskih krutosti S^{G} i pomaka v, a rad bočnog opterećenja W_Q kao zbroj radova bočnih sila Q na pripadnim pomacima v:

$$U_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} S_{jk} v_j v_k = \frac{1}{2} (v)[S]\{v\}, \tag{9}$$

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} S_{jk}^{\mathrm{G}} v_j v_k = \frac{1}{2} (v)[S^{\mathrm{G}}]\{v\}, \tag{10}$$

$$W_Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j v_j = (v)\{Q\}. \tag{11}$$

Elementi matrice krutosti $[S]$ i matrice geometrijske krutosti $[S^{\mathrm{G}}]$ sustava mogu se odrediti kao druge parcijalne derivacije deformacijske energije, odnosno rada uzdužnih sila po pripadnim pomacima:

$$S_{jk} = \frac{\partial^2 U_{\mathrm{i}}}{\partial v_j \partial v_k}, \qquad S_{jk}^{\mathrm{G}} = \frac{\partial^2 W_N}{\partial v_j \partial v_k}. \tag{12}$$

Matrica geometrijske krutosti $[S^{\mathrm{G}}]$ često se izražava u obliku

$$[S^{\mathrm{G}}] = N[s^{\mathrm{G}}], \tag{13}$$

gdje je $[s^{\mathrm{G}}]$ bezdimenzijska matrica geometrijske krutosti.

Ako se uvede matrica krutosti drugog reda, definirana izrazom

$$[\bar{S}] = [S] - [S^{\mathrm{G}}], \tag{14}$$

izraz za potencijal U sustava u jednadžbi (8), uzimajući u obzir jednadžbe (9) do (11), može se napisati u obliku:

$$U = \frac{1}{2} (v)[\bar{S}]\{v\} - (v)\{Q\}, \tag{15}$$

gdje okrugle zagrade označuju redni vektor, uglate zagrade matricu, a vitičaste stupčani vektor.

Vektor parcijalnih derivacija potencijala U po pomacima v, tj. gradijent potencijala jest

$$\{\nabla U\} = [\bar{S}]\{v\} - \{Q\}. \tag{16}$$

Red svih matrica i vektora jednak je broju stupnjeva slobode n.

Nehomogeni zadatak. Sustavu se u njegovu ravnotežnom, tj. osnovnom položaju opisanom pomacima $\{v\}$ nametne virtualna deformacija opisana varijacijama $\{\delta v\}$ tih pomaka. Pripadna je varijacija potencijala sustava:

$$\delta U = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial v_j} \delta v_j = (\delta v)\{\nabla U\}. \qquad (17)$$

Ravnoteža zahtijeva da bude $\delta U = 0$. Kako virtualni pomaci δv mogu biti po volji, mora $\{\nabla U\}$ biti nulvektor, pa je, prema jednadžbi (16):

$$[\bar{S}]\{v\} = \{Q\}. \qquad (18)$$

Rješenje jednadžbe (18) po vektoru pomaka jest

$$\{v\} = [\bar{S}]^{-1}\{Q\}, \qquad (19)$$

pa je za sutav s jednim stupnjem slobode:

$$v = \frac{Q}{\bar{S}}. \qquad (20)$$

Onda se unutrašnje sile mogu odrediti na uobičajeni način.

Homogeni zadatak. Izraz za potencijal sustava u položaju koji odgovara varijacijama $\{\delta v\}$ pomaka $\{v\}$ u ravnotežnom položaju, dakle u položaju koji je susjedan osnovnom položaju, razvije se u Taylorov red oko pomaka $\{v\}$:

$$U(v_1 + \delta v_1, \ldots, v_n + \delta v_n) = U(v_1, v_2, \ldots, v_n) + $$
$$+ \delta U(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \frac{1}{2}\delta^2 U(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \ldots \qquad (21)$$

Varijacije su trećega i višeg reda jednake nuli, jer se pretpostavlja da je sustav linearno elastičan, a deformacije infinitezimalne.

Promjena potencijala pri varijaciji pomaka iznosi:

$$\Delta U = U(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2, \ldots, v_n + \delta v_n) - U(v_1, v_2 \ldots, v_n) =$$
$$= \delta U(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \frac{1}{2}\delta^2 U(v_1, v_2, \ldots, v_n). \qquad (22)$$

Kako je na osnovi uvjeta ravnoteže $\delta U = 0$, bit će

$$\Delta U = \frac{1}{2}\delta^2 U(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial v_j \partial v_k}\delta v_j \delta v_k =$$
$$= \frac{1}{2}(\delta v)\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v_j \partial v_k}\right]\{\delta v\}. \qquad (23)$$

Za sustave s jednim, odnosno s dva stupnja slobode jednadžba (23) glasi:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2 U}{dv^2}(\delta v)^2,$$
$$\Delta U = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v_1^2}(\delta v_1)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial v_1 \partial v_2}\delta v_1 \delta v_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial v_2^2}(\delta v_2)^2\right]. \qquad (24)$$

Na osnovi jednadžbe (8) bit će

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v_j \partial v_k}\right] = \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial v_j \partial v_k}\right] - \left[\frac{\partial^2 W_N}{\partial v_j \partial v_k}\right] - \left[\frac{\partial^2 W_Q}{\partial v_j \partial v_k}\right]. \qquad (25)$$

Prva matrica na desnoj strani je matrica krutosti, druga je matrica geometrijske krutosti, jednadžba (12), a treća je nulmatrica, jer je W_Q linearna funkcija pomaka, jednadžba (11). Jednadžba (23) tada dobiva oblik:

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\delta v)[\bar{S}]\{\delta v\}. \qquad (26)$$

Kako varijacije pomaka mogu biti po volji, iz uvjeta $\delta^2 U > 0$ slijedi da je matrica krutosti drugog reda $[\bar{S}]$ pozitivno definitna, tj. da je njena determinanta različita od nule.

Kriterij bifurkacije ravnoteže jest $\delta^2 U = 0$, pa se za pronalaženje kritične uzdužne sile N_{kr} može postaviti jednadžba $|[\bar{S}]| = 0$ odnosno, uzevši u obzir jednadžbu (14):

$$|[S] - N_{kr}[s^G]| = 0. \qquad (27)$$

Dobiva se algebarska jednadžba n-tog stupnja u kojoj je sila N_{kr} nepoznanica. Ona ima n realnih rješenja, a slijed $N_{kr,1}, N_{kr,2}, \ldots, N_{kr,n}$ tih rješenja zove se spektar kritičnih sila. Kad pri porastu opterećenja uzdužna sila N poprimi svoju najmanju kritičnu vrijednost $N_{kr,1}$, ravnoteža postaje nestabilna. Veće vrijednosti kritične sile $N_{kr,2}, \ldots, N_{kr,n}$ nemaju praktičnog značenja, pa se $N_{kr,1}$ smatra kritičnom silom i kratkoće radi označuje sa N_{kr}.

Deformacija koja odgovara sili N_{kr} slijedi iz sustava jednadžbi (18), pa je

$$[\bar{S}(N_{kr})]\{v\} = \{0\}, \qquad (28)$$

gdje je $[\bar{S}(N_{kr})]$ matrica $[\bar{S}]$ u kojoj je $N = N_{kr}$. Kako je sustav jednadžbi (28) homogen, ne mogu se odrediti apsolutne vrijednosti pomaka, nego samo njihovi omjeri, i zbog toga samo oblik, ali ne i veličina deformacije.

Za sustav s jednim stupnjem slobode ($n = 1$) dobiva se

$$\bar{S} = S - N_{kr}s^G = 0, \qquad N_{kr} = \frac{S}{s^G}. \qquad (29)$$

Energetska metoda za sustave s beskonačno mnogo stupnjeva slobode. Analizira se štap duljine l i fleksijske krutosti K opterećen aksijalno i bočnim opterećenjem intenziteta q. Dominantne unutrašnje sile jesu uzdužna sila N i moment savijanja M, a progibi su označeni sa v. Apscisa z orijentirana je uzduž osi štapa.

Deformacijska energija štapa može se izraziti kao funkcija progiba ili kao funkcija momenta savijanja:

$$U_i = \frac{1}{2}\int_{(l)} K v''^2 dz = \frac{1}{2}\int_{(l)} \frac{M^2}{K} dz. \qquad (30)$$

Rad uzdužne sile W_N i rad bočnog opterećenja W_Q iznose

$$W_N = \frac{1}{2}\int_{(l)} N v'^2 dz, \qquad W_Q = \frac{1}{2}\int_{(l)} q v\, dz, \qquad (31)$$

pa je potencijal sustava prema (8):

$$U = \frac{1}{2}\int_{(l)} (K v''^2 - N v'^2 - q v) dz. \qquad (32)$$

Uvjet ekstremalnosti potencijala U daje diferencijalnu jednadžbu progibne linije ili jednadžbu ravnoteže štapa:

$$(K v'')'' + (N v')' = q. \qquad (33)$$

Za rješavanje jednostavnih zadataka može se (33) napisati i u obliku

$$K v'' + N v = 0. \qquad (34)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (33) odnosno (34), uz pripadne rubne uvjete, daje jednadžbu progibne linije. Unutrašnje se sile tada određuju na poznati način.

Primjena poučka o konzervaciji energije. Homogeni zadaci stabilnosti mogu se riješiti i primjenom poučka o konzervaciji energije koji glasi:

$$U = U_i - W_N = 0, \qquad (35)$$

pri čemu se U_i i W_N izraze kao funkcije pomaka $v_1 \ldots v_n$. Jednadžba (35) rješava se po uzdužnoj sili N, koja tako postaje funkcija omjera tih pomaka. Omjeri pomaka odrede se iz homogenog sustava linearnih algebarskih jednadžbi:

$$\frac{\partial N}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial v_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial N}{\partial v_n} = 0, \qquad (36)$$

i onda uvrste u izraz za N. Rezultat je kritična vrijednost N_{kr} uzdužne sile N.

Postupak se može obrazložiti ovako. Pri pretpostavljenoj deformaciji opisanoj stupnjevima slobode $v_1, v_2, \ldots, v_n$ deformacijska energija U_i ne ovisi, a rad uzdužne sile W_N ovisi o uzdužnoj sili N. Dok je uzdužna sila N malena, dotle je $U_i > W_N$, a kad ona postane velika, onda je $U_i < W_n$. Kad je $N = N_{kr}$, onda je $U_i = W_N$, pa dotad stabilna ravnoteža prelazi u nestabilnu.

Sattlerova metoda pomaka. Pomaci $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sustava s n stupnjeva slobode na koji djeluju parametarsko i eventualno bočno opterećenje određuju se Mohrovom formulom statike (v. *Statika građevnih konstrukcija*)

$$v_1 = \Phi_1(v_1, v_2, \ldots, v_n), \qquad v_2 = \Phi_2(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots,$$
$$v_n = \Phi_n(v_1, v_2, \ldots, v_n). \tag{37}$$

Prebace li se izrazi s desne strane jednadžbe na lijevu stranu, dobiva se, ako nema bočnog opterećenja, homogen sustav linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Uvjet da determinanta koeficijenata tog sustava jednadžbi bude jednaka nuli daje kritičnu vrijednost N_{kr} uzdužne sile N.

Za fleksijski sustav s jednim stupnjem slobode vrijedi:

$$v = \sum \int M\overline{M} \mathrm{d}z = \Phi(v), \qquad v - \Phi(v) = 0. \tag{38}$$

Ako je zadatak homogen, iz uvjeta $v \neq 0$ dobiva se kritična vrijednost N_{kr} uzdužne sile N.

Ostale metode. Za određivanje stabilnosti okvirnih konstrukcija mogu se primijeniti i *metoda sila* i *metoda pomaka* (v. *Statika građevnih konstrukcija*). Pri utvrđivanju koeficijenata sustava kanonskih jednadžbi, tj. pomaka u metodi sila, odnosno reakcija prekobrojnih veza u metodi pomaka, mora se uzeti u obzir i utjecaj uzdužnih sila u štapovima. Kritična uzdužna sila određena je uvjetom da je determinanta sustava tih koeficijenata jednaka nuli.

Dinamička metoda rješavanja homogenih zadataka sastoji se u tome da se formulira jednadžba vlastitih vibracija sustava i odredi njihova osnovna perioda T. Perioda ovisi i o uzdužnoj sili N; ona vrijednost N pri kojoj $T \to \infty$, ili pri kojoj amplitude vibracija postaju beskonačno velike, kritična je vrijednost (N_{kr}) uzdužne sile.

Pojednostavnjenje složenih zadataka postiže se raščlambom sustava u podsustave ili primjenom metode elastičnih čvorova.

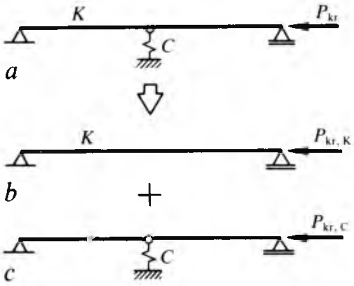
Raščlamba sustava u podsustave. Tri poučka daju približnu vrijednost kritične sile koja nije veća od točne vrijednosti, pa se njihovom primjenom ne smanjuje sigurnost konstrukcije.

1. *Sustav kojega krutosti pridonose dvije ili više krutosti* zamisli se da je raščlanjen u dva ili više podsustava s pojedinim krutostima zadanog sustava, ali s istim opterećenjem. Kritična sila (napadna ili uzdužna) zadanog sustava približno je jednaka zbroju kritičnih sila podsustavâ:

$$N_{kr} \approx \sum_j N_{kr,j}. \tag{39}$$

Tako se, npr., za dvopoljni fleksijski štap s elastičnim srednjim ležajem (sl. 4) dobiva

$$P_{kr} \approx P_{kr,K} + P_{kr,C} \tag{40}$$



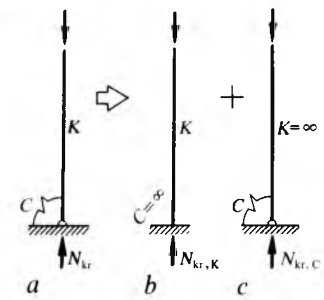
Sl. 4. Raščlamba sustava (a) krutosti kojega pridonose dvije krutosti u dvama sustavima (b i c) s pojedinačnim krutostima

2. *Sustav kojega podatljivosti pridonose dvije ili više podatljivosti* zamisli se da je raščlanjen u dva ili više podsustava s pojedinim podatljivostima zadanog sustava, ali s istim opterećenjem. Recipročna vrijednost kritične sile zadanog sustava približno je jednaka zbroju recipročnih vrijednosti kritičnih sila podsustavâ:

$$\frac{1}{N_{kr}} \approx \sum_j \frac{1}{N_{kr,j}}. \tag{41}$$

Tako se, npr., za elastično upetu fleksijsku konzolu (sl. 5) dobiva

$$N_{kr} \approx \frac{1}{\dfrac{1}{N_{kr,K}} + \dfrac{1}{N_{kr,C}}}. \tag{42}$$



Sl. 5. Raščlamba sustava (a) podatljivosti kojega pridonose dvije podatljivosti u dvama sustavima (b i c) s pojedinačnim podatljivostima

3. *Sustav na koji djeluju dva ili više opterećenja.* Ukupno opterećenje P zamisli se da je raščlanjeno u dva ili više pojedinih opterećenja $v_j P$. Recipročna vrijednost kritične sile zadanog sustava približno je jednaka zbroju omjerâ vrijednosti v_j i kritične sile $P_{kr,j}$ podsustava:

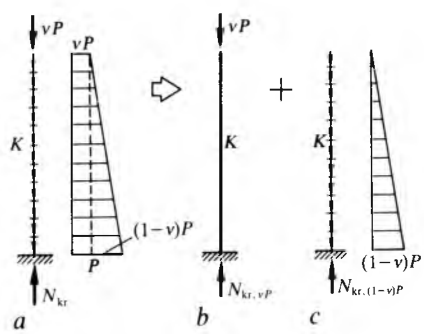
$$\frac{1}{P_{kr}} \approx \sum_j \frac{v_j}{P_{kr,j}}. \tag{43}$$

Koeficijent k kritične sile i koeficijent β duljine izvijanja zadanog sustava povezani su s pripadnim koeficijentima podsustava relacijama:

$$k = \sum_j \frac{v_j}{k_j}, \qquad \beta^2 = \sum_j v_j \beta_j^2. \tag{44}$$

Tako se, npr., za fleksijsku konzolu opterećenu silom na vrhu i s raspodijeljenim opterećenjem (sl. 6) dobiva

$$N_{kr} \approx \frac{1}{\dfrac{v}{N_{kr,vP}} + \dfrac{1-v}{N_{kr,(1-v)P}}}. \tag{45}$$



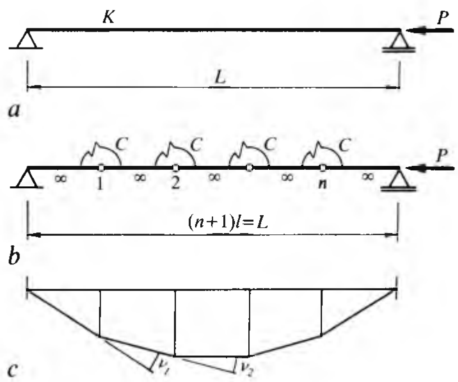
Sl. 6. Raščlamba sustava (a) s dva opterećenja u dvama sustavima (b i c) s pojedinačnim opterećenjima

Metoda elastičnih čvorova. Sustav s beskonačno mnogo stupnjeva slobode zamijeni se sustavom s konačnim brojem stupnjeva slobode tako da se podatljivost, koja je raspodijeljena uzduž štapova, zamisli da je koncentrirana u konačnom broju čvorova. Time se kontinuirano zakrivljena progibna linija zamijeni poligonom, a diferencijalna jednadžba sustavom linearnih algebarskih jednadžbi.

Tako se, npr., prosta greda duljine L i fleksijske podatljivosti $1/K$ po jedinici duljine (sl. 7 a) zamijeni prostom gredom od $n+1$ nedeformabilnih odsječaka duljine $l = L/(n+1)$ odvojenim sa n elastičnih čvorova koncentrirane podatljivosti $C = 1/K$ (sl. 7b). Stupnjevi su slobode kutni pomaci v_1, v_2, ... u čvorovima (sl. 7c). Matrica koeficijenata u jednadžbi bifurkacije ravnoteže,

$$\begin{vmatrix} 2-\frac{l^2}{K}P_{\mathrm{kr}} & -1 & & & \\ -1 & 2-\frac{l^2}{K}P_{\mathrm{kr}} & -1 & & \\ & -1 & 2-\frac{l^2}{K}P_{\mathrm{kr}} & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0, \quad (46)$$

simetrična je s obzirom na obje dijagonale, tako da je broj nepoznanica jednak broju čvorova uzduž polovice raspona grede.



Sl. 7. Prosta greda s raspodijeljenom podatljivošću (a), pripadna prosta greda s elastičnim čvorovima (b) i njena progibna linija pri izvijanju (c)

Za $n = 1$ i $n = 5$ opisana metoda daje

$$P_{\mathrm{kr}} = 8\frac{K}{L^2} \quad \text{odnosno} \quad P_{\mathrm{kr}} = 9{,}54\frac{K}{L^2}. \qquad (47)$$

Rezultati su za 23% odnosno za 3,2% manji od točne vrijednosti $\pi^2 K/L^2$.

Metoda se može primijeniti i na štapne sustave, npr. na okvire.

ŠTAPOVI S UZDUŽNOM SILOM KONSTANTNE VRIJEDNOSTI I NEPROMJENLJIVA SMJERA

Nedeformabilna elastično upeta konzola opterećena je aksijalnom silom P i bočnom silom W (sl. 8a).

Metoda ravnoteže. Na deformiranom sustavu (sl. 8b) formulira se uvjet ravnoteže da je zbroj momenata koji djeluju na donji kraj konzole jednak nuli:

$$(PH - C)v + WH = 0. \qquad (48)$$

U jednadžbi ravnoteže parametarsko se opterećenje pojavljuje u članu koji sadrži pomak, a bočno opterećenje u apsolutnom članu. Rješenje za kutni pomak glasi

$$v = \frac{1}{1-\frac{PH}{C}} \cdot \frac{WH}{C} = \alpha v^{\mathrm{I}}, \qquad (49)$$

gdje je $v^{\mathrm{I}} = WH/C$ pomak bez utjecaja parametarske sile P, dakle prema teoriji prvog reda, a $\alpha = 1/(1 - PH/C)$ koeficijent povećanja pomaka v^{I} zbog djelovanja sile P. Pomak je, dakle, proporcionalan bočnoj sili W, a nelinearno ovisan o parametarskoj sili P.

Kad sila P toliko poraste da poprimi kritičnu vrijednost

$$P_{\mathrm{kr}} = \frac{C}{H}, \qquad (50)$$

koeficijent povećanja α i pomak v postaju beskonačno veliki za bilo koju vrijednost bočne sile W. To je trenutak bifurkacije ravnoteže. Kriterij bifurkacije ravnoteže može se dakle izraziti i u obliku $\alpha = \infty$.

Moment uklještenja stupa iznosi

$$M = PvH + WH = \frac{1}{1-\frac{PH}{C}} WH = \alpha WH = \alpha M^{\mathrm{I}}. \qquad (51)$$

Koeficijent α povećanja momenta M^{I} uklještenja prema teoriji prvog reda u ovom je primjeru jednak koeficijentu povećanja pomaka.

Energetska metoda. Kako je štap nedeformabilan, deformacijska je energija sustava jednaka deformacijskoj energiji pera:

$$U_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}Cv^2. \qquad (52)$$

Horizontalna je projekcija pomaka vrha stupa

$$H\sin v \approx Hv, \qquad (53a)$$

a vertikalna

$$u = (1 - \cos v)H \approx H\frac{v^2}{2}, \qquad (53b)$$

pa je rad vanjskih sila

$$W_{\mathrm{a}} = PH\frac{v^2}{2} + WHv, \qquad (54)$$

a potencijal sustava

$$U = (C - PH)\frac{v^2}{2} - WHv. \qquad (55)$$

Uvrsti li se izraz za U u jednadžbu (2), dobiva se opet rezultat jednadžba (49).

Da bi se analizirala ravnoteža, odredi se druga varijacija potencijala sustava:

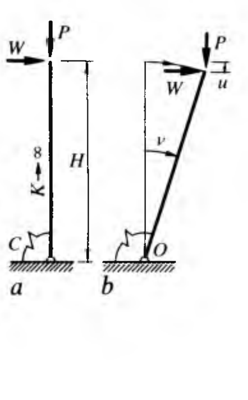
$$\delta^2 U = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}v^2}(\delta v)^2 = (C - PH)(\delta v)^2. \qquad (56)$$

Kad je $P < C/H$, onda je $\delta^2 U > 0$, što znači da je ravnoteža stabilna, kad je $P > C/H$ onda je $\delta^2 U < 0$, pa je ravnoteža labilna, a kad je $P = C/H = P_{\mathrm{kr}}$ onda je $\delta^2 U = 0$, pa je ravnoteža indiferentna.

Eulerovi štapovi. Kritičnu je vrijednost aksijalnog opterećenja P jednopoljnih fleksijskih štapova konstantne krutosti utvrdio L. Euler za šest najjednostavnijih tipova oslanjanja (sl. 9). Ona iznosi:

$$P_{\mathrm{kr}} = k\frac{K}{H^2} = \pi^2\frac{K}{(\beta H)^2}, \qquad (57)$$

gdje je K fleksijska krutost poprečnog presjeka štapa definirana kao umnožak modula elastičnosti E i mjerodavnog momenta inercije I, H duljina štapa, k bezdimenzijski koeficijent kritične sile, a β bezdimenzijski koeficijent duljine izvijanja štapa. Umnožak βH jest duljina izvijanja H_{i} štapa. Oblik progibne linije i geometrijsko značenje duljine izvijanja H_{i} Eulerovih štapova prikazani su na sl. 10. H. Kupfer je



Sl. 8. Elastično upeta nedeformabilna konzola opterećena na vrhu (a) i pripadna deformacija (b)