na koti z i vanjskog momenta savijanja

$$M_{az} = \left[v_z + \frac{v}{a}z - \left(1+\frac{h}{a}\right)v\right]P \tag{143}$$

također na toj koti. Rubni su uvjeti:

$$v_0 = 0, \qquad v_0' = 0, \qquad v_h = v. \tag{144}$$

Kad se u opće rješenje diferencijalne jednadžbe uvrste rubni uvjeti (144), dobiva se homogen sustav od tri linearne algebarske jednadžbe; nepoznanice su dvije integracijske konstante i progib v vrha konzole. Uvjet da determinanta koeficijenata tog sustava bude jednaka nuli daje, uz oznaku

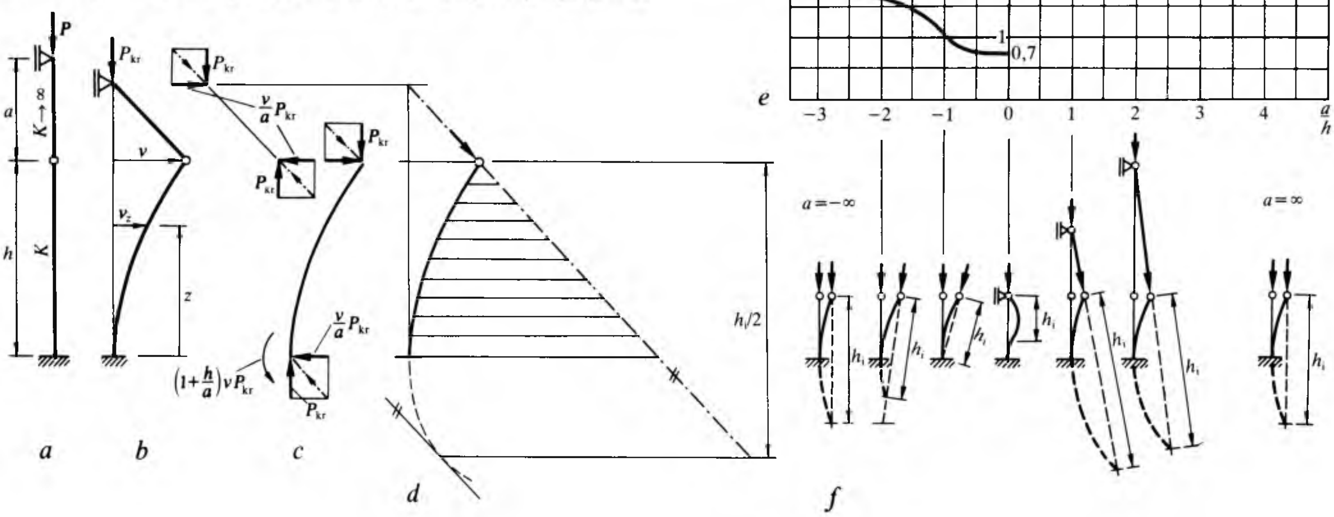
$$\varepsilon_{kr} = h\sqrt{\frac{P_{kr}}{K}} \tag{145}$$

za kritičnu vrijednost koeficijenta labilnosti štapa, kriterij stabilnosti

$$\frac{\varepsilon_{kr}}{\tan\varepsilon_{kr}} = \frac{1}{1+a/h}. \tag{146}$$

Momenti savijanja konzole u deformiranom stanju vide se na sl. 31d, dijagram koeficijenta $\beta(a/h)$ duljine izvijanja $h_i = \beta h$ na sl. 31e, a duljine izvijanja na sl. 31f.

Ako je $a = 0$, sila djeluje neposredno na vrh konzole, pa sustav degenerira u Eulerov štap III, te je $\beta = 0{,}7$. Ako je $a = \pm\infty$, konzola degenerira u Eulerov štap I, pa je $\beta = 2$.



Sl. 31. Konzola opterećena preko pendela (a), deformacija sustava (b), akcija na pendel i na konzolu (c), momenti savijanja u izvinutom stanju (d), dijagram koeficijenta $\beta(a/h)$ duljine izvijanja (e) i duljine izvijanja (f)

Ako je $a = -h$, pravac sile uvijek prolazi donjim krajem konzole, pa ona degenerira u Eulerov štap II, te je $\beta = 1$. Analiza pokazuje da je ponašanje konzole najnepovoljnije ako je $0 \leqq a/h \leqq 2$, jer tada h_i ima najveću vrijednost.

TANKOZIDNI KONZOLNI STUP

Treba utvrditi kritičnu vrijednost ukupnog opterećenja tankozidnog konzolnog stupa (sl. 32). Značenje oznaka: z je os krutosti stupa, g os mase ili težišna os stupa, H visina stupa, x i y su glavne osi poprečnog presjeka stupa, x_G i y_G koordinate osi mase, I_x i I_y momenti inercije poprečnog presjeka stupa za smjerove x i y, a I_z deplanacijski moment inercije poprečnog presjeka stupa s obzirom na os z, r je polumjer inercije poprečnog presjeka stupa s obzirom na os z, G ukupno opterećenje stupa i D os rotacije stupa pri izvijanju.

Bezdimenzijski su geometrijski parametri poprečnog presjeka stupa

$$t_y = \frac{I_y}{I_x}, \qquad t_z = \frac{I_z}{r^2 I_x}. \tag{147}$$

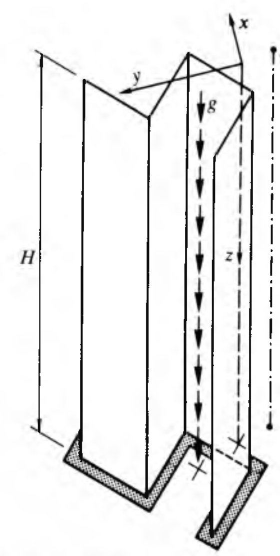
Pretpostavlja se da se pri izvijanju oblik poprečnih presjeka ne mijenja; u praksi se nepromjenljivost oblika poprečnih presjeka ostvaruje poprečnim dijafragmama (u zgradama stropnim diskovima).

Koaksijalni stupovi. Tako se nazivaju stupovi kojima se poklapaju težišna os i os krutosti ($z \equiv g$). Tu spadaju dvostrukoravninskosimetrični, kososimetrični i cikličkosimetrični profili.

Međusobno su neovisna izvijanja u smjeru osi x i y, odnosno preciznije, u glavnim ravninama xz i yz, te torzijsko izvijanje oko osi z. Prema tome, ukupno kritično opterećenje koje izvija u smjeru x, ukupno kritično opterećenje koje izvija u smjeru y te ukupno kritično opterećenje koje torzijski izvija oko osi z iznose:

$$G_{kr,x} = k\frac{K_x}{H^2}, \qquad G_{kr,y} = t_y G_{kr,x}, \qquad G_{kr,z} = t_z G_{kr,x} \tag{148}$$

gdje je $K_x = EI_x$ fleksijska krutost presjeka štapa u smjeru x, a koeficijent k kritične sile ovisi o rasporedu opterećenja uzduž visine stupa (v. *Eulerovi štapovi* i *Konzola* u ovom članku). Mjerodavna je, dakako, najmanja od tih triju vrijednosti.



Sl. 32. Tankozidni konzolni stup

Akoaksijalni stupovi jesu stupovi kojima se težišna os ne poklapa s osi krutosti ($z \neq g$). Njihova su ravninska izvijanja u smjeru osi x i y te torzijsko izvijanje spregnuti, pa nastaje fleksijsko-torzijsko izvijanje. R. Rosman je, međutim, pokazao da se fleksijsko-torzijsko izvijanje može interpretirati kao torzijsko izvijanje oko osi rotacije D (sl. 32).

Radi pojednostavnjenja, kritična se vrijednost ukupnog opterećenja piše u obliku

$$G_{\mathrm{kr}} = c\,G_{\mathrm{kr},x}, \tag{149}$$

gdje se bezdimenzijskim koeficijentom c uvodi u račun spregnutost ravninskih izvijanja u smjeru osi x i y te torzijskog izvijanja oko osi z, pa se c naziva *koeficijentom spregnutosti.*

Na osnovi jednadžbi (147), (148) i (149) bit će

$$c = \frac{I_D}{r_D^2 I_x}, \tag{150}$$

gdje je I_D deplanacijski moment inercije, a r_D polumjer inercije poprečnog presjeka s obzirom na još nepoznatu os rotacije D. Ako se I_D i r_D izraze kao funkcije koordinata x_G i y_G težišne osi te koordinata x_D i y_D osi rotacije, pa se oni uvrste u jednadžbu (150), tada c postaje funkcija koordinata osi rotacije x_D i y_D. Iz uvjeta

$$\frac{\partial c}{\partial x_D} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial y_D} = 0 \tag{151}$$

dobivaju se koordinate osi rotacije

$$x_D = \frac{x_G}{1 - t_y/c}, \qquad y_D = \frac{y_G}{1 - 1/c}. \tag{152}$$

Uvrste li se u izraz za c, dobiva se kubna jednadžba koeficijenta spregnutosti

$$\left(1 - \frac{x_G^2 + y_G^2}{r^2}\right)c^3 - \left[\left(1 - \frac{x_G^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{y_G^2}{r^2}\right)t_y + t_z\right]c^2 + (t_y + t_z + t_y t_z)c - t_y t_z = 0. \tag{153}$$

Svi su koeficijenti bezdimenzijski, a ovise o krutostima presjeka i o koordinatama težišne osi. Kubna jednadžba ima tri korijena, a mjerodavan je najmanji, c_1; on je manji od najmanje od triju vrijednosti 1, t_y *i* t_z.

Nakon što se odredi c_1, primjenom jednadžbi (148) i (149) izračuna se kritično ukupno opterećenje stupa:

$$G_{\mathrm{kr}} = c_1 k \frac{K_x}{H^2}. \tag{154}$$

Položaj se osi rotacije stupa određuje jednadžbama (152).

Primjer. Stup na sl. 32 sastoji se od četiri međusobno kruto spojena zida. Svaki od zidova ima širinu b i površinu poprečnog presjeka A. Momenti su inercije $I_x = 0{,}4167\,A b^2$, $I_y = 1{,}667\,A b^2$ i $I_z = 0{,}2233\,A b^4$, a kvadrat polumjera inercije $r^2 = 1{,}093\,b^2$. Geometrijski su parametri $t_y = 4$ i $t_z = 0{,}4901$, a koeficijent spregnutosti $c = 0{,}392$. Kritično je ukupno opterećenje $G_{\mathrm{kr}} = 0{,}392\,k K/H^2$. Vrijednost koeficijenta k ovisi o raspoređenosti opterećenja uzduž visine stupa. Ako je npr. G raspoređen jednoliko, dobiva se da je $k = 7{,}837$.

ZGLOBNI NIZOVI ŠTAPOVA S KONSTANTNOM UZDUŽNOM SILOM

Dvopoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajem opterećena je aksijalnom silom P i bočnom silom Q (sl. 33a). Stupanj je slobode bočni pomak v srednjeg ležaja (sl. 33b), a pripadni je uzdužni pomak kraja grede

$$u = \frac{v^2}{l}. \tag{155}$$

Deformacijska je energija sustava, jer se štapovi smatraju aksijalno nedeformabilnima, jednaka deformacijskoj energiji pera $Cv^2/2$, rad je aksijalne sile Pu, a rad bočne sile Qv. Onda je potencijal sustava

$$U = \left(\frac{C}{2} - \frac{P}{l}\right)v^2 - Qv. \tag{156}$$

Uvjet (2) daje jednadžbu ravnoteže:

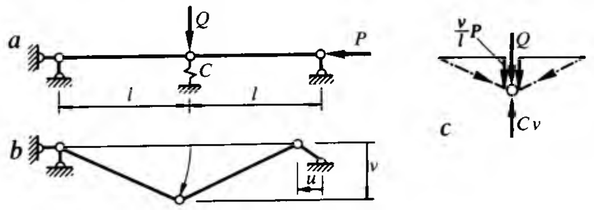
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = Cv - 2\frac{P}{l}v - Q = 0. \tag{157}$$

Njeno se mehaničko značenje vidi na sl. 33c: zbroj sila koje djeluju na srednji zglob grede jednak je nuli.

Rješenje je jednadžbe ravnoteže:

$$v = \frac{1}{1 - \dfrac{2P}{lC}} \cdot \frac{Q}{C} = \alpha v^{\mathrm{I}}, \tag{158}$$

gdje je v^{I} bočni pomak u polovištu grede bez utjecaja aksijalne sile, a α koeficijent povećanja pomaka v^{I} zbog utjecaja aksijalne sile.



Sl. 33. Dvopoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajem opterećena aksijalnom i bočnom silom (*a*), deformacija pri izvijanju (*b*) i srednji zglob sa silama koje na njega djeluju (*c*)

Kritična vrijednost P_{kr} sile P slijedi iz kriterija $\alpha = \infty$:

$$P_{\mathrm{kr}} = \frac{Cl}{2}. \tag{159}$$

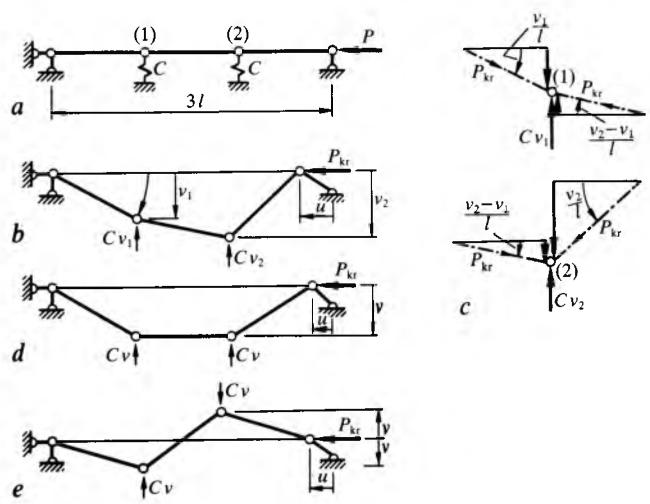
Izraz za koeficijent povećanja α može se napisati i u uobičajenom obliku

$$\alpha = \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_{\mathrm{kr}}}}. \tag{160}$$

Kritično opterećenje P_{kr} može se odrediti i iz uvjeta $\mathrm{d}^2U/ /(\mathrm{d}v^2) = 0$ (5):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v}\right) = C - 2\frac{P_{\mathrm{kr}}}{l} = 0. \tag{161}$$

Tropoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajima opterećena je aksijalnom silom P (sl. 34a). Treba odrediti kritičnu vrijednost te sile.



Sl. 34. Tropoljna zglobna greda s elastičnim unutrašnjim ležajima opterećena aksijalnom silom (*a*), deformacija pri izvijanju (*b*), zglobovi (1) i (2) sa silama koje na njih djeluju (*c*), deformacija pri simetričnom (*d*) i antimetričnom izvijanju (*e*)

Metoda ravnoteže. Za stupnjeve slobode sustava odabiru se bočni pomaci v_1 i v_2 unutrašnjih ležaja (sl. 34b). Jednadžbe se ravnoteže postavljaju kao uvjeti da su zbroj svih bočnih sila koje djeluju na zglob (1) i zbroj svih bočnih sila koje djeluju na čvor (2) jednaki nuli (sl. 34c):