gdje su $Q^{\circ}_{j,1}$ i $Q^{\circ}_{j,d}$ poprečne sile neposredno lijevo (l) i neposredno desno (d) od ležaja j, a $R^{\circ}_j = Q^{\circ}_{j,d} - Q^{\circ}_{j,l}$ ležajna sila u osnovnom sustavu.

Ako je uzduž svakog polja moment inercije presjeka konstantan, kutni pomaci α i β zbog djelovanja raspodijeljenih opterećenja intenzivnosti p i koncentriranih sila P iznose:

$$\beta = \alpha = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{1}{24} & \text{(sl. 110a)} \\ \frac{1-2\lambda^2+\lambda^3}{24} & \text{(sl. 110b)} \\ \frac{5}{192} & \text{(sl. 110c)} \\ \frac{17}{768} & \text{(sl. 110d)} \end{array}\right\} \cdot \frac{pl^3}{EI} \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{2n^2+1}{48n} & \text{(sl. 110e)} \\ \frac{n^2-1}{24n} & \text{(sl. 110f)} \end{array}\right\} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \end{cases} \tag{175}$$

dok su kutni pomaci zbog djelovanja jediničnog bezdimenzijskog ležajnog momenta (sl. 110g):

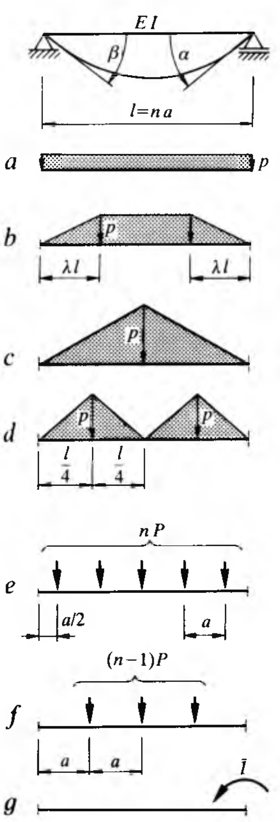
$$\beta = \frac{l}{6EI}, \qquad \alpha = \frac{l}{3EI}. \tag{176}$$

Ako je I_r neki po volji odabrani referentni moment inercije, npr. moment inercije koji se najčešće pojavljuje, modificirani rasponi polja iznose:

$$l_j' = \frac{I_r}{I_j} l_j \qquad (j = 1, \ldots, n+1), \tag{177}$$

a sustav jednadžbi kompatibilnosti dobiva jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned} 2(l_1' + l_2')M_1 + l_2' M_2 &= -6EI_r(\alpha_{1v} + \beta_{1v}), \\ l_j' M_{j-1} + 2(l_j' + l_{j+1}')M_j + l_{j+1}' M_{j+1} &= -6EI_r(\alpha_{jv} + \beta_{jv}), \\ l_n' M_{n-1} + 2(l_n' + l_{n+1}')M_n &= -6EI_r(\alpha_{nv} + \beta_{nv}), \\ \text{za } j = 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{178}$$

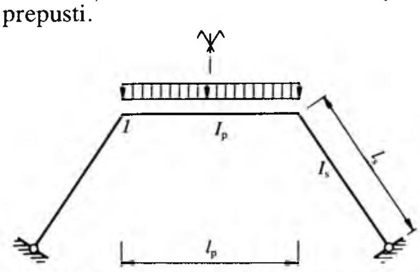


Sl. 110. Kutni pomaci ležajnih tangenata proste grede zbog djelovanja raznih opterećenja

Ako su modificirani rasponi svih polja jednaki ($l_j' = l'$ za $j = 1, 2, \ldots, n+1$), sustav jednadžbi kompatibilnosti postaje još jednostavniji

$$\begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= -6E\frac{I_r}{l'}(\alpha_{1v} + \beta_{1v}), \\ M_{j-1} + 4M_j + M_{j+1} &= -6E\frac{I_r}{l'}(\alpha_{jv} + \beta_{jv}), \\ M_{n-1} + 4M_n &= -6E\frac{I_r}{l'}(\alpha_{nv} + \beta_{nv}), \\ \text{za } j = 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{179}$$

Svi se poljni i ležajni momenti mogu brojčano izjednačiti ili njihove razlike smanjiti ako se vanjska polja nešto skrate (za $\sim 0{,}8 \cdots 0{,}85\%$) s obzirom na unutrašnja ili ako se primijene prepusti.



Sl. 111. Trapezni okvir s nepomičnim čvorovima

Clapeyronova jednadžba (171) može se primijeniti i za okvire s translacijski nepomičnim čvorovima. Tako npr. Clapeyronova jednadžba čvora *1* trapeznog okvira (sl. 111), za koji je $l_s/I_s = l_p/I_p$, neposredno daje ležajni moment:

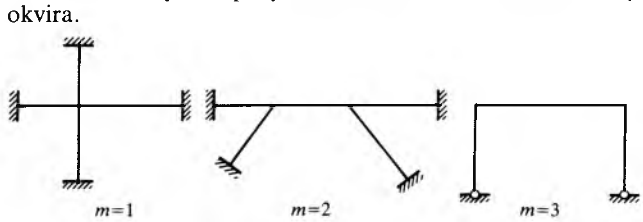
$$M_1 = -\frac{pl_p^2}{24}. \tag{180}$$

METODA POMAKA

Stupanj kinematičke neodređenosti (m) nekog sustava znači stupanj (elastične) pomičnosti njegovih čvorova, a to je broj veza koje treba uvesti da bi se svi čvorovi translacijski i kutno fiksirali.

Stupanj pomičnosti čvorova sustava jednak je zbroju stupnja kutne pomičnosti i stupnja translacijske pomičnosti njegovih čvorova. Stupanj kutne pomičnosti jednak je broju krutih čvorova koji se pri deformaciji sustava zbog djelovanja zadanog opterećenja kutno pomiču. Stupanj translacijske pomičnosti utvrđuje se na zglobnoj shemi koja se od zadanog sustava dobiva tako da se svi čvorovi zamijene zglobovima.

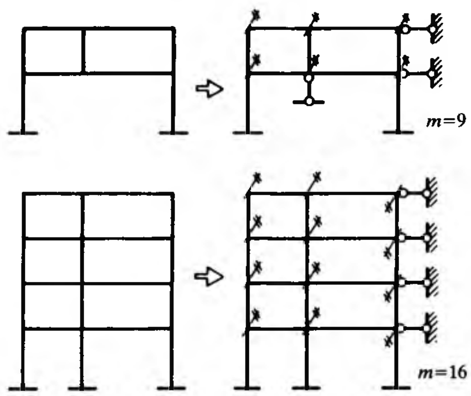
Kad se određuje stupanj kinematičke neodređenosti sustava, smatra se da su štapovi aksijalno nedeformabilni ($EA = \infty$) i zanemaruje se promjena udaljenosti krajeva pravocrtnih štapova zbog njihova savijanja pri deformaciji sustava. Na sl. 112 naveden je stupanj kinematičke neodređenosti triju okvira.



Sl. 112. Primjeri okvira i stupanj njihove kinematičke neodređenosti

Algoritam metode pomaka. Zadan je m puta kinematički neodređen sustav. Slika 113 prikazuje dva kinematički neodređena okvira i pripadne osnovne sustave.

Da bi se olakšao rad s metodom pomaka, za pravocrtne štapove konstantnog presjeka prikazane su na sl. 114 akcije ležaja na štap i pripadni momentni dijagrami zbog djelovanja dvaju tipičnih opterećenja i jediničnih pomaka ležaja; lijevi se stupac odnosi na štap koji je na oba kraja upet, srednji stupac na štap koji je na jednom kraju upet a na drugom zglobno oslonjen, te desni stupac na štap koji je na jednom



Sl. 113. Dva kinematički neodređena okvira i njihovi osnovni sustavi

mični te kutno nepomični ili zglobno oslonjeni. Tako se m kinematičkih prekobrojnih pomaka Y_j $(j = 1,2,\ldots,m)$ čvorova izjednačuje s nulom.

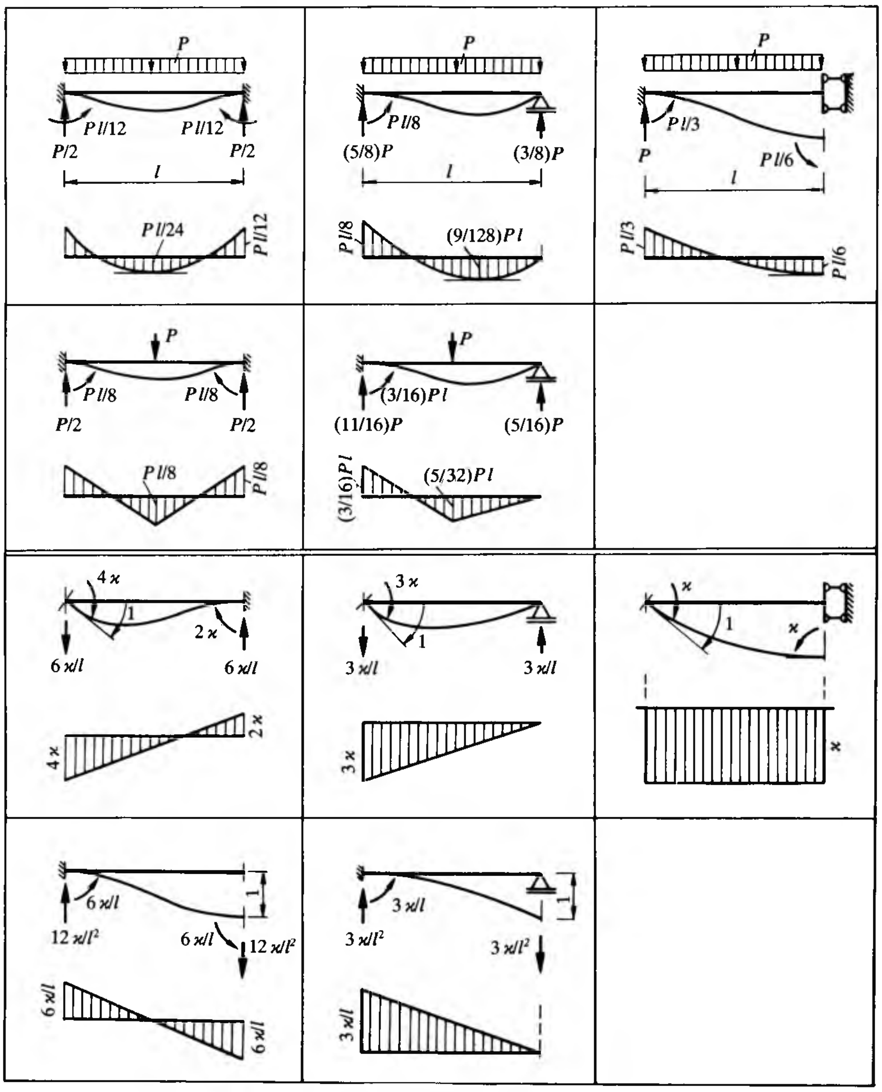
b) Analiza osnovnog sustava na utjecaj opterećenja (stanje pomaka Y_P). Odrede se unutrašnje sile S^P, najčešće M^P, Q^P, N^P, te akcija F_j^P dodatne veze j na sustav zbog vanjskog djelovanja $(j = 1,2,\ldots,m)$.

Pritom može poslužiti sl. 114, a akcija F_j^P može se odrediti i pomoću jednadžbe

$$F_j^P = -\sum \int \frac{M^{o,P} M_j}{EI_j} \mathrm{d}x, \tag{182}$$

gdje je $M^{o,P}$ moment savijanja zbog zadanog opterećenja utvrđen na nekom statički određenom osnovnom sustavu koji se od zadanoga dobiva odbacivanjem veza.

Tako određeno stanje zadovoljava uvjete kompatibilnosti, ali ne zadovoljava uvjete ravnoteže.



Sl. 114. Progibne linije, reakcije i momentni dijagrami jednopoljnog štapa

kraju upet a na drugom kutno upet i pomičan okomito na os štapa. P je ukupna vrijednost jednoliko raspodijeljenog opterećenja, a

$$\varkappa = \frac{EI}{l} \tag{181}$$

fleksijska krutost štapa.

a) Izbor osnovnog sustava. Kinematički određen osnovni sustav dobiva se tako da se sustavu koji je m puta kinematički neodređen doda m nedeformabilnih kutnih i translatornih veza, tako da krajevi svih štapova budu translatorno nepo-

c) Prekobrojne veličine jesu kinematički prekobrojni pomaci Y_j $(j = 1,2,\ldots m)$ čvorova. Oni poništavaju utjecaj dodavanja veza i ostvaruju ravnotežu sustava.

d) Međusobno nezavisna jedinična vlastita stanja. To je m stanjâ pomaka y_j^o $(j = 1,2,\ldots,m)$, gdje y_j^o označuje stanje pomaka definirano jediničnim bezdimenzijskim pomakom $\bar{1}$ na mjestu i u orijentiranom smjeru Y_j uz $Y_k = 0$ za $k \neq j$.

e) Analiza osnovnog sustava na utjecaje jediničnih vlastitih stanja. Pomoću sl. 114 odrede se unutrašnje sile S_j, najčešće M_j, Q_j, N_j, u stanju Y_j^o $(j = 1,2,\ldots,m)$, te akcije f_{jk} dodatne veze j na sustav u stanju Y_k^o $(k = j,\ldots,m)$. Akcije f_{jk} mogu se odrediti i pomoću izraza

$$f_{jk}=\sum\int\frac{M_jM_k}{EI_j}\mathrm{d}x. \qquad (183)$$

Tako određena stanja zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti, ali ne zadovoljavaju uvjete ravnoteže.

f) Kriterij utvrđivanja prekobrojnih veličina. Ukupna akcija F_j dodatne veze j na sustav jednaka je nuli, jer te veze u stvarnom sustavu nema, pa je

$$F_j=\sum_{k=1}^{m} f_{jk}Y_j+F_j^{\mathrm{P}}=0 \qquad (j=1,\dots,m). \qquad (184)$$

g) Linearni algebarski sustav jednadžbi prekobrojnih veličina, tj. matrična jednadžba metode pomaka glasi

$$[f]_m\{Y\}_m+\{F^{\mathrm{P}}\}_m=\{0\}_m. \qquad (185)$$

Broj nepoznanica jednak je broju kinematički prekobrojnih pomaka. Matrica je krutosti $[f]$ simetrična. Sustav je jednadžbi pozitivno definitan, tj. kvadratični je izraz $\frac{1}{2}(Y)[f]\{Y\}$ pozitivan, a jednak je nuli samo ako su sve vrijednosti Y jednake nuli.

h) Rješenje sustava jednadžbi prekobrojnih veličina. Ako je

$$|[f]_m|\neq 0, \qquad (186)$$

sustav jednadžbi ima samo jedno rješenje:

$$\{Y\}_m=[f]_m^{-1}\{F^{\mathrm{P}}\}_m. \qquad (187)$$

i) Ukupne mehaničke veličine stvarnog sustava dobivaju se superpozicijom doprinosa S^{P} vanjskog djelovanja i doprinosa kinematički prekobrojnih pomaka $Y_1, Y_2\dots, Y_n$ na osnovnom sustavu, pa općeniti izraz glasi

$$S=S^{\mathrm{P}}+\sum_{j=1}^{m}S_jY_j. \qquad (188)$$

Tako utvrđeno stanje unutrašnjih sila zadovoljava i uvjete kompatibilnosti deformacije i uvjete ravnoteže.

Energetska osnova metode pomaka. Osnovni sustav pod utjecajem napadnih sila $P_1\dots P_r$ i akcija $F_1\dots F_m$ dodatnih veza zbog kinematički prekobrojnih pomaka $Y_1\dots Y_m$ tih veza mehanički je ekvivalentan zadanom sustavu.

Rad akcije F_j dodatne veze j iznosi $F_jY_j/2$, a rad akcija svih dodatnih veza

$$W_Y=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}F_jY_j=\frac{1}{2}(Y)_m\{F\}_m. \qquad (189)$$

Akcije F_j dodatnih veza sastoje se od doprinosa F_j^{Y} kinematički prekobrojnih pomaka i doprinosa F_j^{P} napadnih sila, pa je

$$F_j=F_j^{\mathrm{Y}}+F_j^{\mathrm{P}}=\sum_{j=1}^{m}f_{jk}Y_k+F_j^{\mathrm{P}}, \qquad (190)$$

odnosno u matričnom obliku

$$\{F\}_m=\{F^{\mathrm{Y}}\}_m+\{F^{\mathrm{P}}\}_m=[f]_m\{Y\}_m+\{F^{\mathrm{P}}\}_m. \qquad (191)$$

Rad W_Y akcija $\{F\}$ dodatnih veza sastoji se od rada

$$W_{YY}=\frac{1}{2}(Y)_m\{F^{\mathrm{Y}}\}_m=\frac{1}{2}(Y)_m[f]_m\{Y\}_m \qquad (192)$$

akcija $\{F^{\mathrm{Y}}\}$ zbog kinematički prekobrojnih pomaka i rada

$$W_{PY}=\frac{1}{2}(Y)_m\{F^{\mathrm{P}}\}_m \qquad (193)$$

akcija $\{F^{\mathrm{P}}\}$ zbog napadnih sila.

Pomaci na kojima vrše rad napadne sile sastoje se od doprinosa prekobrojnih pomaka i doprinosa napadnih sila, pa je rad napadnih sila

$$W_P=W_{YP}+W_{PP}. \qquad (194)$$

Na osnovi Bettijeva poučka rad W_{YP} napadnih sila na pomacima zbog prekobrojnih pomaka jednak je radu W_{PY} akcija veza zbog prekobrojnih pomaka na pomacima zbog djelovanja napadnih sila, pa je ukupni rad vanjskih sila

$$W=W_{YY}+2W_{PY}+W_{PP}. \qquad (195)$$

Deformacijska energija sustava jednaka je radu vanjskih sila:

$$U=\frac{1}{2}(Y)_m[f]_m\{Y\}_m+(Y)_m\{F^{\mathrm{P}}\}_m+W_{PP}. \qquad (196)$$

Prvi Castiglianov poučak, $\mathrm{d}U(Y)/\mathrm{d}\{Y\}=\{0\}$, primjenom pravila za deriviranje produkta matrica daje jednadžbu metode pomaka

$$[f]_m\{Y\}_m+\{F^{\mathrm{P}}\}_m=\{0\}_m, \qquad (197)$$

koja je na drugi način već izvedena u (185).

Jednadžba metode pomaka i prvi Castiglianov poučak, dakle uvjet minimuma deformacijske energije $U(Y)$ izražene kao funkcije prekobrojnih pomaka, mehanički su ekvivalentni.

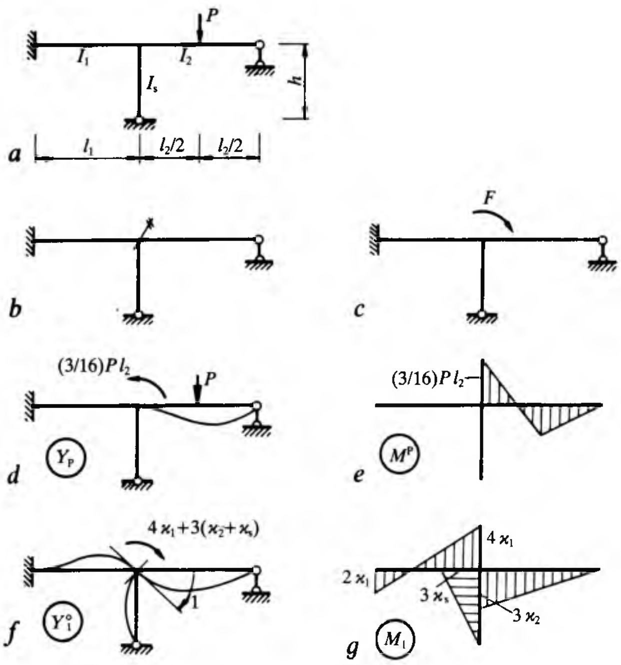
Primjer 1. Treba odrediti momentni dijagram i dijagram poprečne sile jedanput kinematički neodređena dvopoljnog okvira na sl. 115a.

Osnovni se sustav dobiva ukliještenjem srednjeg čvora (sl. 115b). Na sl. 115c vidi se pozitivno orijentirana akcija uvedene veze na okvir, sl. 115d prikazuje osnovni sustav na koji djeluje zadano opterećenje, pripadnu progibnu liniju i akciju uvedene veze na okvir, sl. 115e pripadni momentni dijagram, sl. 115f osnovni sustav na koji djeluje jedinični pomak uvedene veze i pripadnu akciju uvedene veze na okvir, a sl. 115g pripadni momentni dijagram. Kako je

$$F_1^{\mathrm{P}}=-\frac{3}{16}Pl_2,\qquad f_{11}=4\varkappa_1+3(\varkappa_2+\varkappa_s), \qquad (198)$$

jednadžba $Y_1=-F_1^{\mathrm{P}}/f_{11}$ metode pomaka daje kutni pomak srednjeg čvora

$$Y_1=\frac{\frac{3}{16}Pl_2}{4\varkappa_1+3(\varkappa_2+\varkappa_s)}. \qquad (199)$$



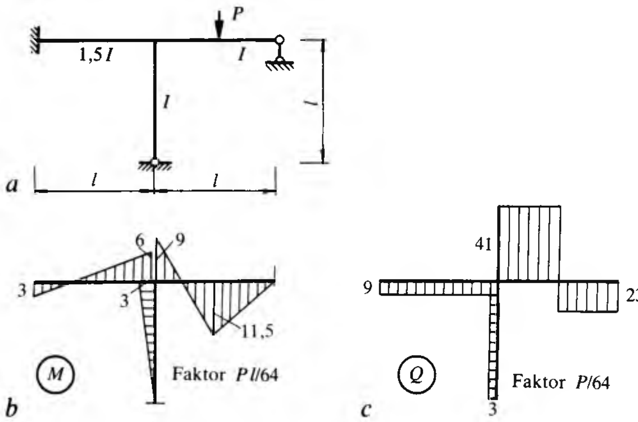
Sl. 115. Uz analizu dvopoljnog okvira metodom pomaka

Za poseban slučaj tog okvira (sl. 116a), kad je $l_1=l_2=h=l$, $\varkappa_1=1{,}5\,EI/l$, $\varkappa_2=\varkappa_s=EI/l$, dobiva se

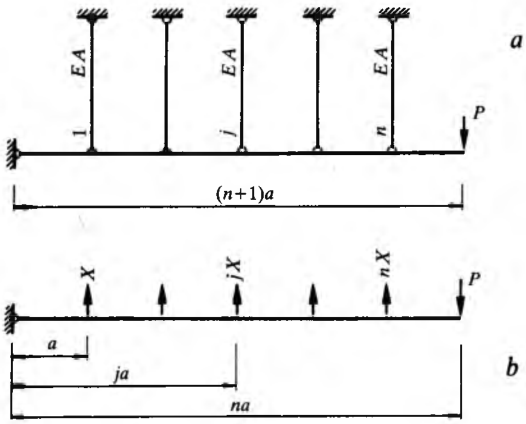
$$f_{11}=\frac{12EI}{l},\qquad Y_1=\frac{Pl^2}{64EI}. \qquad (200)$$

Na sl. 116b vidi se dijagram momenta savijanja, a na sl. 116c dijagram poprečne sile okvira.

Primjer 2. Nedeformabilna greda na lijevom je kraju zglobno fiksirana, obješena na n štapova aksijalne krutosti EA, a na desnom je kraju opterećena silom P (sl. 117a). Jedanput kinematički neodređen zadatak može se riješiti bez primjene općeg algoritma na osnovi elementarnog razmatranja. Kako je greda nedeformabilna, deformacija je sustava određena zaokretom grede oko njena lijevog kraja. Produljenje štapa j veće je j puta od produljenja štapa 1; označi li se sila u štapu 1 sa X, tada sila u štapu j iznosi jX (sl. 117b). Za ravnotežu grede treba da bude



Sl. 116. Poseban slučaj okvira prema sl. 115



Sl. 117. Obješena greda

$$\sum_{j=1}^{n} jX \cdot ja = (n+1)a \cdot P. \tag{201}$$

Kako je

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{202}$$

nepoznanica, tj. sila u štapu *1*, iznosi

$$X = \frac{6}{n(2n+1)} P. \tag{203}$$

DUALNOST I USPOREDBA METODE SILA I METODE POMAKA

Dualnost. Metoda sila, koja se naziva i metodom podatljivosti ili metodom fleksibilnosti ako deformacije potječu uglavnom od savijanja, konvencionalna je metoda za proračun statički neodređenih konstrukcija. Metoda pomaka, koja se naziva i metodom krutosti, konvencionalna je metoda za proračun kinematički neodređenih konstrukcija, najčešće okvira.

Cilj je obiju metoda da se utvrde ležajne i unutrašnje sile koje, za sustav kao cjelinu i za sve njegove dijelove, zadovoljavaju i uvjete ravnoteže i uvjete kompatibilnosti (konzistentnosti, suvislosti) deformacija.

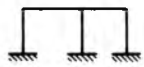
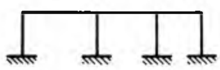
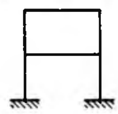
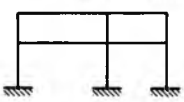
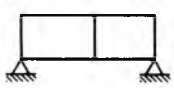
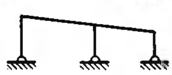
Metoda sila i metoda pomaka dualne su (recipročne, konjugirane) metode. Zadani sustav izložen zadanom vanjskom djelovanju (opterećenja, promjene temperature, pomaci ležaja ili drugih veza) analizira se primjenom osnovnog sustava izloženog vanjskom djelovanju i statički, odnosno kinematički prekobrojnim veličinama. Zadani i osnovni sustav mehanički su ekvivalentni. U metodi sila utjecaj vanjskog djelovanja na osnovni sustav zadovoljava uvjete ravnoteže; superponira mu se n uravnoteženih stanja tako da budu zadovoljeni i uvjeti kompatibilnosti. U metodi pomaka utjecaj vanjskog djelovanja na osnovni sustav zadovoljava uvjete kompatibilnosti; superponira mu se m kinematički kompatibilnih stanja tako da budu zadovoljeni i uvjeti ravnoteže.

Usporedba. *a*) U osnovnom sustavu, pri primjeni metode sila, utjecaji se statički prekobrojnih sila i vanjskog djelovanja često rasprostiru na veće područje sustava. U osnovnom sustavu, pri primjeni metode pomaka, utjecaji se kinematički prekobrojnih pomaka obično rasprostiru samo na dva susjedna štapa, a utjecaj vanjskog djelovanja samo na odnosni štap; s obzirom na vanjsko djelovanje sustav je, dakle, raščlanjen na niz međusobno neovisnih štapova. *b*) Koeficijenti i slobodni članovi u jednadžbi metode sila pronalaze se množenjem dijagrama, a koeficijenti i slobodni članovi u jednadžbi metode pomaka lakše i brže pomoću sl. 114. *c*) U metodi silâ unutrašnje se i ležajne sile pronalaze neposredno, a u metodi pomaka posredno, na osnovi pomaka. *d*) Metoda sila pojmovno je razumljivija. *e*) Za programiranje i primjenu na elektroničkim računalima metoda je pomaka povoljnija od metode sila, jer je proračun koeficijenata i slobodnih članova jednadžbe prekobrojnih veličina lakše sistematizirati.

U tabl. 4 navedeni su stupanj n statičke neodređenosti i stupanj m kinematičke neodređenosti za nekoliko okvira; kad je okvir simetričan, vrijednosti za n i m navedene su odvojeno za simetrično i antimetrično vanjsko djelovanje.

Tablica 4

STUPNJEVI STATIČKE (n) I KINEMATIČKE (M) NEODREĐENOSTI NEKOLIKO OKVIRA

	Okvir					
	nesimetričan		*simetričan*			
	Opterećenje					
	proizvoljno		*simetrično*		*antimetrično*	
	n	*m*	*n*	*m*	*n*	*m*
	3	3	2	1	1	2
	6	4	3	1	3	3
	9	5	5	2	4	3
	6	6	4	2	2	4
	12	8	6	2	6	6
	6	8	3	3	4	3
	3	4				

ENERGETSKE METODE

Proračun statički neodređenih sustava primjenom drugog Castiglianova poučka. Deformacijska energija sustava izrazi se kao funkcija napadnih sila P i prekobrojnih sila X, $U = U(X)$. Sustav linearnih algebarskih jednadžbi za pronalaženje prekobrojnih sila slijedi iz uvjeta

$$\frac{\partial U(X)}{\partial X_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{204}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\frac{\mathrm{d}U(X)}{\mathrm{d}\{X\}} = \{0\}. \tag{205}$$

Ako je sustav na mjestu prekobrojnih sila izložen zadanim pomacima veza, npr. ležaja (c_k pomak na mjestu i u