

Sl. 99. Utjecajne linije momenata savijanja i poprečnih sila statički neodređene dvopoljne grede

čenja na mjestu x i pripadna ordinata utjecajne linije, a integral se proteže na području raspodijeljenog opterećenja; P'_k i $\eta'_k(V)$ jesu koncentrirani napadni moment na mjestu k i nagib (gradijent) utjecajne linije na tom mjestu, a suma se proteže na sve napadne momente. Veličine P_i i P_x su pozitivne ako su orijentirane naniže, gradijent η'_k je pozitivan ako se η povećava s porastom apscise, a P'_k ako djeluje u smjeru gibanja kazaljke na satu.

Za svaki pravocrtni odsječak utjecajne linije vrijedi

$$\int \eta_k(V) P_x dx = \eta'(V) P^r, \quad (143)$$

gdje je $P^r = \int P_x dx$ rezultanta raspodijeljenog opterećenja, a $\eta'(V)$ ordinata utjecajne linije na mjestu rezultante P^r . Ako se intenzivnost raspodijeljenog opterećenja uzduž apscise ne mijenja ($P_x = P$), vrijedi

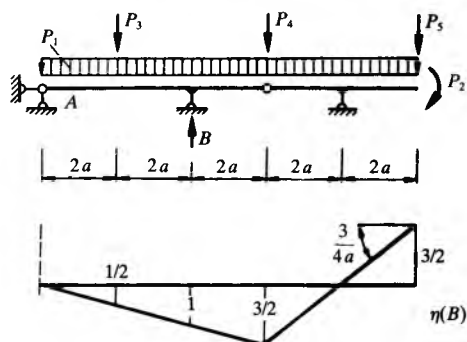
$$\int \eta_k(V) P dx = \Omega P, \quad (144)$$

gdje je Ω površina omeđena utjecajnom linijom, njenom zaključnom linijom i vertikalama na početku i na kraju raspodijeljenog opterećenja.

Pomoću utjecajnih linija lako se može odrediti i najnepovoljniji položaj pokretnih opterećenja.

Primjer. Za sastavljenu dvopoljnu Gerberovu gredu s prepustom (sl. 100) treba konstruirati utjecajnu liniju reakcije B i odrediti njenu veličinu. Ona se određuje izrazom:

$$B = \left[\left(\frac{1}{2} + 1 \right) / 2 \right] 6aP_1 - \frac{3}{4a}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{3}{2}P_4 - \frac{3}{2}P_5 = \frac{1}{2} \left(9aP_1 - \frac{3}{2a}P_2 + P_3 + 3P_4 - 3P_5 \right). \quad (145)$$



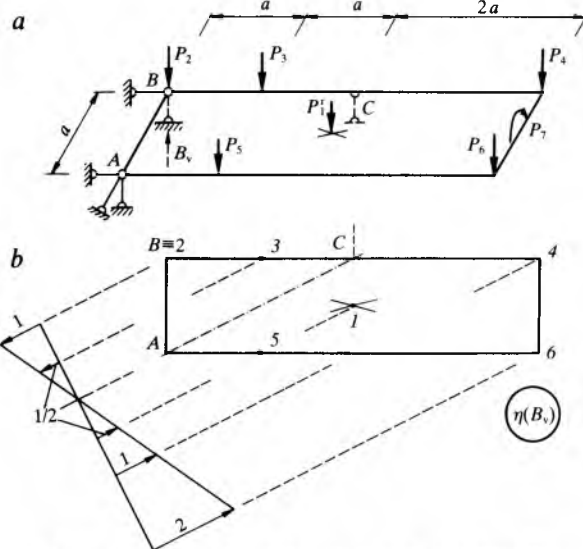
Sl. 100. Dvopoljna Gerberova greda

Utjecajne plohe i njihova primjena. Dok se za linijske (štapne) sustave upotrebljavaju utjecajne linije, za ravninske (dvodimenzijske) sustave upotrebljavaju se utjecajne plohe. Metode određivanja utjecajnih ploha i njihova primjena analogne su metodama određivanja utjecajnih linija i njihovim primjenama.

Primjer. Horizontalna fleksijski nedeformabilna ploča statički je određeno oslonjena na podlogu sa šest ležajnih štapića (sl. 101a); ležaji A i B zajedno čine bočno nepomičan cilindrični zglob, a ležajni štapić C oduzima ploči još preostali stupanj slobode, pa on onemogućuje rotaciju oko osi cilindričnog zgloba. Treba konstruirati utjecajnu plohu reakcije B , i odrediti vrijednost reakcije B , zbog djelovanja jednoliko raspodijeljenog opterećenja intenzivnosti P_1 na cijeloj površini ploče, koncentriranih sila P_2 do P_6 i napadnog momenta P_7 .

Pretpostavlja se da je reakcija B tlačna; odgovarajuća deformacija je skraćenje vertikalnog štapića ležaja B za l . Utjecajna se ploha prikazuje osnovicom i vertikalnim presjekom (sl. 101b). Doprinos raspodijeljenog opterećenja reakciji B , iznosi $\eta'(B)P_1$, gdje je P_1 rezultanta raspodijeljenog opterećenja, a $\eta'(B)$ ordinata utjecajne plohe na mjestu rezultante P_1 , dakle u središtu ploče. Alternativno, doprinos raspodijeljenog opterećenja reakciji B , može se izračunati kao umnožak ΩP_1 , gdje je Ω volumen omeđen utjecajnom plohom, njenom zaključnom ravninom (srednjom ravninom ploče) i vertikalnim ravninama kroz obod ploče. Vrijednost je reakcije B :

$$B_v = -\frac{1}{2}4a^2P_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_3 - P_4 - \frac{1}{2}P_5 - 2P_6 + \frac{1}{a}P_7. \quad (146)$$



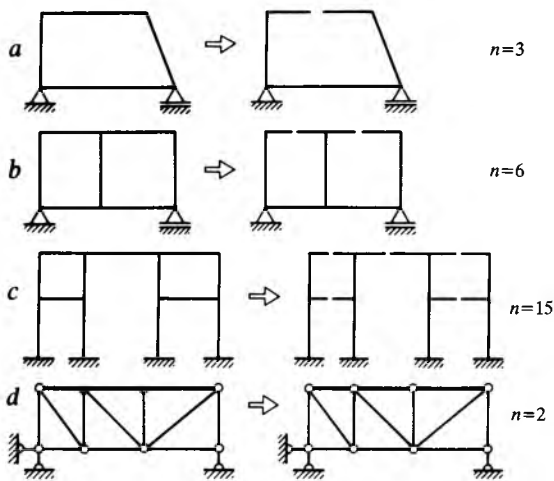
Sl. 101. Nedeformabilna ploča i utjecajna ploha reakcije B_v

METODA SILA

Osnovna svojstva statički neodređenih konstrukcija. Sustav je statički neodređen ako nije moguće sve ležajne i unutrašnje sile odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže. U nekim se statički neodređenim sustavima neke ležajne i unutrašnje sile mogu odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže. Postojanje prekobrojnih veza nuždan je i dovoljan uvjet da konstrukcija bude statički neodređena.

Osnovna su svojstva statički neodređenih sustava: a) ima mnogo rješenja za unutrašnje sile koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže, ali je samo jedno koje zadovoljava i uvjete kompatibilnosti deformacija; b) sve ili neke ležajne i unutrašnje sile ovise o dimenzijama poprečnih presjeka štapova i o modulima materijala; c) promjene temperature, pomaci ležaja i nepreciznosti izvedbe mogu uzrokovati ležajne i unutrašnje sile i d) isključuje li se prekobrojne veze, statički neodređeni sustav ostaje stabilan, dok statički određeni sustavi nemaju takvu rezervnu nosivost.

Praktično određivanje stupnja statičke neodređenosti. Stupanj statičke neodređenosti statički neodređenih sustava često se može, umjesto primjenom općih kriterija, jednostavnije odrediti tako da se ukloni toliko veza da sustav postane statički određen; broj je udaljenih veza stupanj statičke neodređenosti. Presijecanjem štapa ravninskog okvira uklanjaju se tri veze i to fleksijska, posmična i aksijalna krutost, a presijecanjem štapa rešetke ili zatege jedna veza – aksijalna krutost (sl. 102).

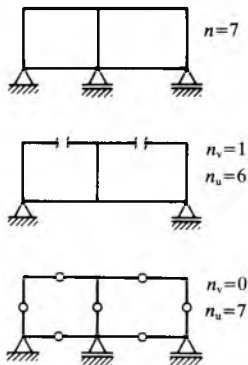


Sl. 102. Praktično utvrđivanje stupnja statičke neodređenosti

Ako se prekobrojnim smatraju neke ležajne veze, sustav je statički neodređen eksterno, ako se pak prekobrojnim smatraju neke interne veze, on je statički neodređen interno, a ako se prekobrojnim smatraju neke ležajne i neke unutrašnje veze, on je statički neodređen i eksterno i interno. Ako je n_v stupanj vanjske, a n_u stupanj unutrašnje statičke neodređenosti, tada je stupanj statičke neodređenosti sustava:

$$n = n_v + n_u. \quad (147)$$

Podjela stupnja statičke neodređenosti na vanjski i unutrašnji stupanj statičke neodređenosti nije karakteristika sustava nego ovisi o izboru prekobrojnih veza (sl. 103).



Sl. 103. Dva osnovna sustava dvopoljnog okvirnog nosača te stupnjevi statičke neodređenosti

Algoritam metode sila. Zadan je n puta statički neodređen sustav. Sl. 104 pokazuje dva primjera jedanput statički neodređenih sustava.

a) *Izbor osnovnog sustava.* Najčešće se izabire statički određen osnovni sustav. Ukloni se n ležajnih i/ili unutrašnjih veza tako da se n prekobrojnih sila $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ koje djeluju u paru na objema stranama presjeka postavi jednaka nuli. Osnovni sustav za analizu utjecaja vanjskog djelovanja i osnovni sustavi za analizu utjecaja prekobrojnih sila ne moraju biti isti.

b) *Analiza osnovnog sustava na utjecaj vanjskog djelovanja (VD).* Odrede se unutrašnje sile S^{VD} , najčešće M^{VD} , Q^{VD} , N^{VD} i pomak Δ_j^{VD} na mjestu i u smjeru X_j zbog vanjskog djelovanja ($j = 1, 2, \dots, n$). Doprinos opterećenja (P) iznosi

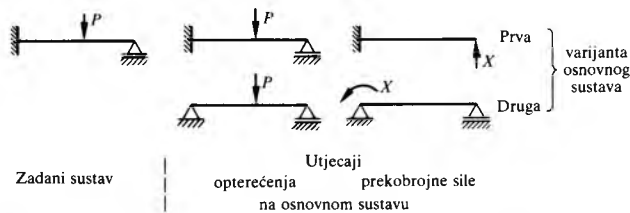
$$\Delta_j^p = \sum \int \frac{M_j M^p}{EI_j} ds + \sum \int \frac{N_j N^p}{EA_j} ds + \dots, \quad (148)$$

doprinos promjene temperature (t)

$$\Delta_j^t = \sum \epsilon_{t,j} \Omega_j, \quad (149)$$

a doprinos pomaka ležaja (c)

$$\Delta_j^c = - \sum R_j c. \quad (150)$$



Sl. 104. Dva jedanput statički neodređena sustava

Tako određeno stanje unutrašnjih sila i pomaka zadovoljava uvjete ravnoteže, ali ne zadovoljava uvjete kompatibilnosti deformacije.

c) *Prekobrojne veličine* jesu prekobrojne sile $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$. One poništavaju utjecaj uklanjanja veza i ostvaruju kompatibilnost deformacije.

d) *Međusobno nezavisna jedinična vlastita stanja.* To je n stanja opterećenja $X_j^o (j = 1, 2, \dots, n)$; X_j^o je stanje opterećenja definirano jediničnom bezdimenzijskom silom \bar{I} na mjestu i u orijentiranom smjeru X_j te $X_k = 0$ za $k \neq j$.

e) *Analiza osnovnog sustava na utjecaje jediničnih vlastitih stanja.* Odrede se unutrašnje sile S_j , najčešće M_j , Q_j , N_j , u stanju $X_j^o (j = 1, 2, \dots, n)$ i pomak δ_k na mjestu i u orijentiranom smjeru sile X_j u stanju $X_k^o (k = j, \dots, n)$. Prema Mohrovoj formuli slijedi

$$\delta_{jk} = \sum \int \frac{M_j M_k}{EI_j} ds + \sum \int \frac{N_j N_k}{EA_j} ds + \dots \quad (151)$$

Ako je za simetričnu konstrukciju od dvaju momentnih dijagrama M_j i M_k jedan simetričan a drugi antisimetričan, dijagrami su uzajamno ortogonalni, pa je

$$\sum \int \frac{M_j M_k}{EI} ds = 0. \quad (152)$$

Tako određena stanja zadovoljavaju uvjete ravnoteže, ali ne zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti deformacije.

f) *Kriterij određivanja prekobrojnih veličina.* Ukupni pomak Δ_j na mjestu i u orijentiranom smjeru prekobrojne sile X_j , dakle odbačene veze j , jednak je nuli, jer ta veza u stvarnom sustavu postoji, pa je

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k + \Delta_j^{VD} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (153)$$

g) *Linearni algebarski sustav jednadžbi prekobrojnih veličina,* tj. matricna jednadžba metode sila, glasi

$$[\delta]_n \{X\}_n + \{\Delta^{VD}\}_n = \{0\}_n. \quad (154)$$

Broj nepoznanica jednak je broju statički prekobrojnih sila. Matrica podatljivosti $[\delta]$ je simetrična. Kvadratični je izraz $\frac{1}{2}(X)[\delta]\{X\}$ pozitivan, a jednak je nuli samo ako su sve vrijednosti od X jednake nuli.

h) *Rješenje sustava jednadžbi prekobrojnih veličina.* Ako je

$$|[\delta]_n| \neq 0, \quad (155)$$

jednadžba ima samo jedno rješenje:

$$\{X\}_n = -[\delta]_n^{-1} \{\Delta^{VD}\}. \quad (156)$$

Sustav se jednadžbi obično rješava Gausovim algoritmom; opće se rješenje jednadžbe (156), koje se osniva na inverziji matrice koeficijenata, primjenjuje ako treba odvojeno analizirati utjecaje više vanjskih djelovanja.

i) *Ukupne mehaničke veličine stvarnog sustava* dobivaju se superpozicijom doprinosa S^{VD} vanjskog djelovanja i doprinosa statički prekobrojnih sila $X_1 \dots X_n$ u osnovnom sustavu:

$$S = S^{VD} + \sum_{j=1}^n S_j X_j \quad (157)$$

odnosno za pojedina vanjska djelovanja:

$$M = M^{VD} + \sum_{j=1}^n M_j X_j, \quad Q = Q^{VD} + \sum_{j=1}^n Q_j X_j, \quad (158)$$

$$N = N^{VD} + \sum_{j=1}^n N_j X_j.$$

Tako određeno stanje unutrašnjih sila zadovoljava uvjete ravnoteže i uvjete kompatibilnosti deformacije.

Energetska osnova metode sila. Osnovni sustav pod utjecajem napadnih $P_1 \dots P_r$ i prekobrojnih sila $X_1 \dots X_n$ mehanički je ekvivalentan zadanom sustavu.

Rad prekobrojne sile X_j jest $X_j \Delta_j / 2$, a rad je svih prekobrojnih sila

$$W_X = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n X_j \Delta_j = \frac{1}{2} (X)_n \{ \Delta \}_n \quad (159)$$

Pomaci Δ_j na kojima prekobrojne sile vrše rad sastoje se od doprinosa Δ_j^X prekobrojnih i doprinosa Δ_j^P napadnih sila:

$$\Delta_j = \Delta_j^X + \Delta_j^P = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k + \Delta_j^P, \quad (160)$$

odnosno u matricnom obliku

$$\{ \Delta \}_n = \{ \Delta^X \}_n + \{ \Delta^P \}_n = [\delta]_n \{ X \}_n + \{ \Delta^P \}_n \quad (161)$$

Rad W_X prekobrojnih sila (X) sastoji se od njihova rada

$$W_{XX} = \frac{1}{2} (X)_n \{ \Delta^X \}_n = \frac{1}{2} (X)_n [\delta]_n \{ X \}_n \quad (162)$$

na pomacima $\{ \Delta^X \}$ zbog prekobrojnih sila i njihova rada

$$W_{PX} = \frac{1}{2} (X)_n \{ \Delta^P \}_n \quad (163)$$

na pomacima $\{ \Delta^P \}$ zbog napadnih sila.

Pomaci na kojima napadne sile vrše rad sastoje se od doprinosa prekobrojnih sila i doprinosa napadnih sila:

$$W_P = W_{XP} + W_{PP}. \quad (164)$$

Na osnovi Bettijeva poučka rad je W_{XP} napadnih sila na pomacima zbog prekobrojnih sila jednak radu W_{PX} prekobrojnih sila na pomacima zbog napadnih sila.

Ukupni je rad vanjskih sila:

$$W = W_{XX} + 2W_{PX} + W_{PP}. \quad (165)$$

Deformacijska energija sustava jednaka je radu vanjskih sila:

$$U = \frac{1}{2} (X)_n [\delta]_n \{ X \}_n + (X)_n \{ \Delta^P \}_n + W_{PP}. \quad (166)$$

Drugi Castiglianov poučak, $dU(X)/d\{X\} = \{0\}$, daje, primjenom pravila za deriviranje produkta matrica, jednadžbu metode sila:

$$[\delta]_n \{ X \}_n + \{ \Delta^P \}_n = \{ 0 \}_n, \quad (167)$$

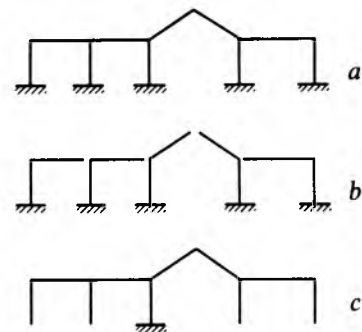
koja je na drugi način već izvedena (154).

Jednadžba metode sila i drugi Castiglianov poučak, dakle uvjet minimuma deformacijske energije $U(X)$ izražene kao funkcije prekobrojnih sila, mehanički su ekvivalentni.

Preporuke za izbor osnovnog sustava za primjenu metode sila. a) Rad osnovnog sustava pod utjecajem vanjskih djelovanja

neka je što bliži radu zadanog sustava. Tada nepreciznosti pri određivanju prekobrojnih sila i njihova djelovanja samo neznatno utječu na točnost rezultata. Ako su, npr., u jednadžbi superpozicije (157) doprinos S^{VD} vanjskog djelovanja i doprinos $\sum S_j X_j$ prekobrojnih sila brojačno bliski, a suprotna predznaka, vrijednost S može biti vrlo netočna. Ako se osnovni sustav spretno odabere, a traže se samo približni rezultati, može se utjecaj prekobrojnih sila zanemariti, što znači da se zadani sustav može aproksimirati osnovnim.

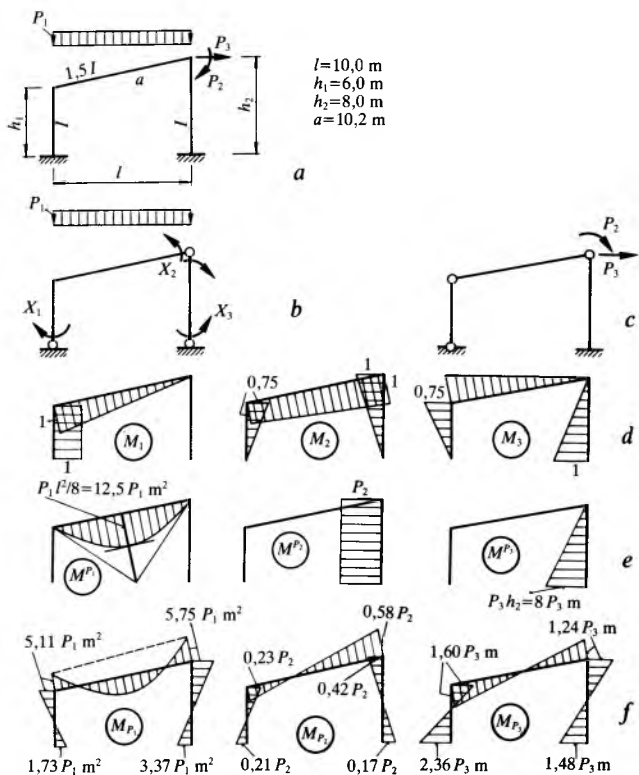
b) Utjecaji jediničnih stanja treba da se protežu na što manje područje sustava. Tada je više pobočnih koeficijenata jednako nuli pa je sustav jednadžbi kompatibilnosti lakše riješiti. Odabere li se, npr., za kontinuirani nosač osnovni sustav u obliku niza prostih greda, što znači da se umetnu zglobovi nad unutrašnjim ležajima, matrica će podatljivosti biti tridijagonalna. Odabere li se osnovni sustav tako da se uklone unutrašnji ležaji, nijedan pobočni koeficijent neće biti jednak nuli, što znači da će matrica podatljivosti biti puna. Višepoljne sustave povoljno je raščlaniti u odvojene dijelove.



Sl. 105. Četveropoljni okvir (a), povoljan (b) i nepovoljan osnovni sustav (c)

Tako je, npr., za četveropoljni okvir na sl. 105a povoljan osnovni sustav na sl. 105b, a nepovoljan osnovni sustav na sl. 105c, jer nijedan pobočni koeficijent nije jednak nuli.

c) Ako je zadani sustav simetričan, preporučuje se da osnovni sustav bude simetričan s obzirom na isti element simetrije.



Sl. 106. Portalni okvir s nagnutom prečkom

Primjer 1. Treba odrediti dijagrame momenta savijanja portalnog okvira s nagnutom prečkom za dana opterećenja (sl. 106a). Utjecaji se poprečnih i uzdužnih sila zanemaruju. Za analizu utjecaja prekobrojnih sila X_1 , X_2 i X_3 te opterećenja P_1 prihvaćen je osnovni sustav na sl. 106b, a za analizu utjecaja opterećenja P_2 i P_3 osnovni sustav na sl. 106c; pripadni momentni dijagrami prikazani su na sl. 106d i e.

Koeficijenti i slobodni članovi jednadžbe metode sila izračunavaju se množenjem pripadnih dijagrama. Sustav jednadžbi glasi:

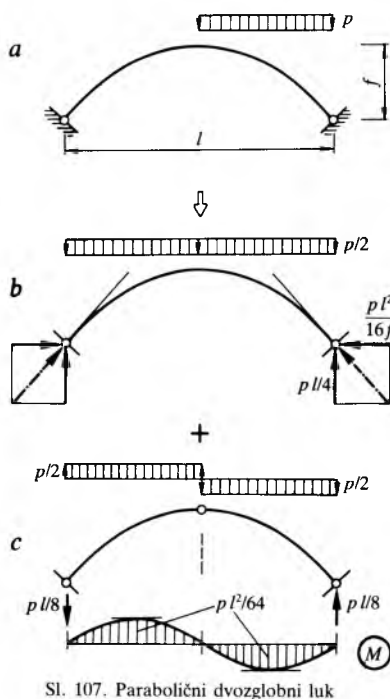
	X_1	X_2	X_3	P_1	P_2	P_3	
1	12,40	7,625	-5,925	-42,500	0	0	(168)
2	7,625	13,55	-2,875	-74,375	-6,000	-16,00	
3	-5,925	-2,875	7,600	31,875	-6,000	-32,00	
		m		m ³	m	m ²	

a njegovo je rješenje

	P_1	P_2	P_3	
X_1	1,73	-0,21	-2,36	(169)
X_2	-5,75	-0,58	-1,24	
X_3	3,37	-1,17	-6,52	
	m ²	1	m	

Konačni dijagrami momenta savijanja vide se na sl. 106f posebno za svako opterećenje.

Primjer 2. Simetričan dvozgloblni luk oblikovan je po paraboli drugog stupnja. Pri opterećenju jednoliko raspodijeljenom po horizontali os se luka poklapa s potpornom linijom, pa u presjecima luka nema ni momenata savijanja ni poprečnih sila. Da bi se analizirao utjecaj pokretnog opterećenja intenzivnosti p na polovici luka (sl. 107a), ono se rastavi u simetričnu i antisimetričnu komponentu. Simetrična komponenta (sl. 107b) u presjecima luka uzrokuje samo uzdužne sile. Antisimetrična komponenta (sl. 107c) čini moment i uravnotežuje se momentom para vertikalnih reakcija. Svaka se polovica luka ponaša kao prosta greda, pa se momentni dijagram sastoji od dviju parabola s tjemjenima u četvrtini raspona.



Sl. 107. Parabolični dvozgloblni luk

Kontinuirani nosač (sl. 108a), bilo greda ili ploča sa $n + 1$ poljem i $n + 2$ ležaja, n puta je statički neodređen. Jedan od povoljnih osnovnih sustava, niz prostih greda, dobiva se tako da se u nosač nad unutrašnjim ležajima umetnu zglobovi (sl. 108b); tada su ležajni momenti M_1, M_2, \dots, M_n prekobrojne veličine.

Deformacija osnovnog sustava zbog djelovanja opterećenja prikazana je na sl. 108c, gdje su α_{jp} i β_{jp} kutni pomaci tangente progibne linije neposredno lijevo i neposredno desno od ležaja j . Ako se ležaji pomiču (sl. 108d), tada je:

$$\alpha_{jc} = \frac{c_{j-1} - c_j}{l_j}, \quad \beta_{jc} = \frac{c_{j+1} - c_j}{l_{j+1}} \quad (170)$$

U stanju M_j^0 osnovnog sustava, tj. kad je $M_j = \bar{1}$ i $M_k = 0$ za $k \neq j$ (sl. 108e), deformiraju se samo oba susjedna polja (sl. 108f). Ako se sa v označi vanjsko djelovanje, jednadžba kompatibilnosti deformacije u čvoru j glasi:

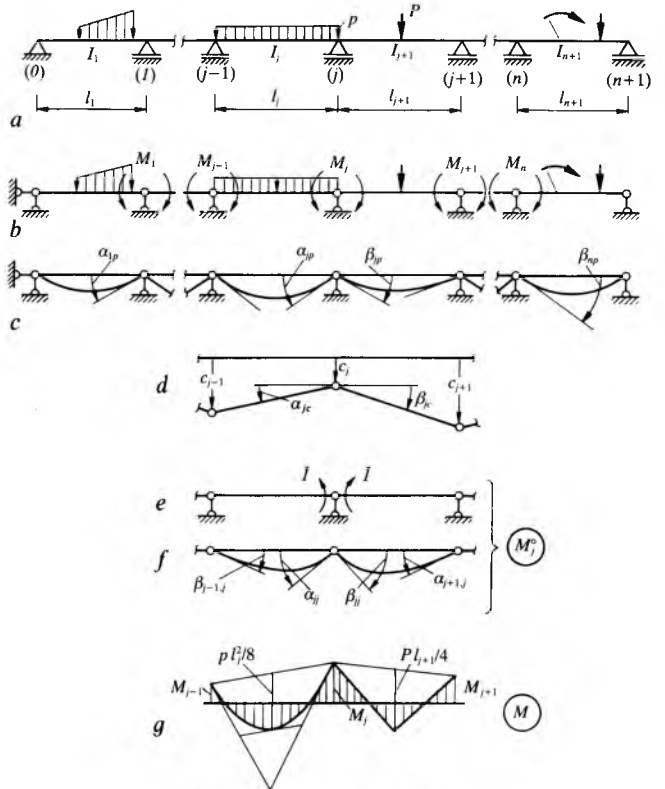
$$\beta_{j-1,j} M_{j-1} + (\alpha_{jj} + \beta_{jj}) M_j + \alpha_{j+1,j} M_{j+1} = -\alpha_{jv} - \beta_{jv} \quad (171)$$

i naziva se tromomentnom ili Clapeyronovom jednadžbom kontinuiranog nosača. Jednadžbu (171) treba napisati za sve unutrašnje ležaje nosača ($j = 1, 2, \dots, n$), s tim da su prva jednadžba zbog $M_0 = 0$ i posljednja zbog $M_{n+1} = 0$ dvomomentne, pa je

$$(\alpha_{11} + \beta_{11}) M_1 + \alpha_{21} M_2 = -\alpha_{1v} - \beta_{1v}, \quad (172)$$

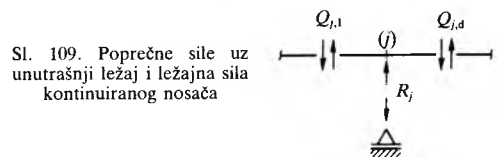
$$\beta_{n-1,n} M_{n-1} + (\alpha_{nn} + \beta_{nn}) M_n = -\alpha_{nv} - \beta_{nv}.$$

Dakle, matrica je koeficijentata sustava jednadžbi tridijagonalna, a to bitno pojednostavnjuje njegovo rješenje.



Sl. 108. Kontinuirani nosač

Nakon što se rješenjem sustava jednadžbi kompatibilnosti utvrde ležajni momenti, momentni dijagram nosača (sl. 108g) dobiva tako da se od zaključne linije određene ležajnim momentima nanesu momentni dijagrami prostih greda.



Sl. 109. Poprečne sile uz unutrašnji ležaj i ležajna sila kontinuiranog nosača

Poprečna sila neposredno lijevo i poprečna sila neposredno desno od ležaja j te ležajna sila R_j (sl. 109) iznose:

$$Q_{j,l} = Q_{j,l}^0 - \frac{M_{j-1} - M_j}{l_j}, \quad Q_{j,d} = Q_{j,d}^0 + \frac{M_{j+1} - M_j}{l_{j+1}}, \quad (173)$$

$$R_j = Q_{j,d} - Q_{j,l} = R_j^0 + \frac{M_{j-1} - M_j}{l_j} + \frac{M_{j+1} - M_j}{l_{j+1}}, \quad (174)$$

gdje su $Q_{j,l}^o$ i $Q_{j,d}^o$ poprečne sile neposredno lijevo (l) i neposredno desno (d) od ležaja j , a $R_j^o = Q_{j,d}^o - Q_{j,l}^o$ ležajna sila u osnovnom sustavu.

Ako je uzduž svakog polja moment inercije presjeka konstantan, kutni pomaci α i β zbog djelovanja raspodijeljenih opterećenja intenzivnosti p i koncentriranih sila P iznose:

$$\beta = \alpha = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{24} \\ \frac{1-2\lambda^2+\lambda^3}{24} \\ \frac{5}{192} \\ \frac{17}{768} \\ \frac{2n^2+1}{48n} \\ \frac{n^2-1}{24n} \end{array} \right\} \cdot \frac{p l^3}{EI} \quad \begin{array}{l} \text{(sl. 110a)} \\ \text{(sl. 110b)} \\ \text{(sl. 110c)} \\ \text{(sl. 110d)} \\ \text{(sl. 110e)} \\ \text{(sl. 110f)} \end{array} \quad (175)$$

dok su kutni pomaci zbog djelovanja jediničnog bezdimenzij-skog ležajnog momenta (sl. 110g):

$$\beta = \frac{l}{6EI}, \quad \alpha = \frac{l}{3EI} \quad (176)$$

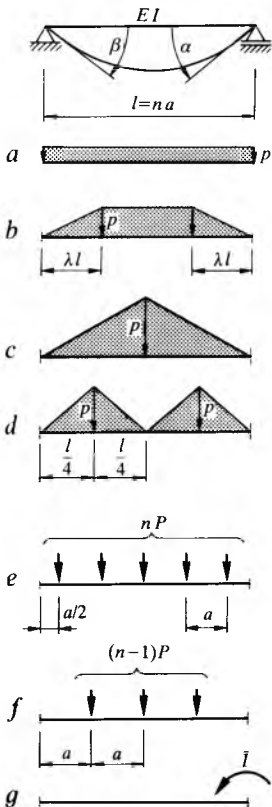
Ako je I_r neki po volji odabrani referentni moment inercije, npr. moment inercije koji se najčešće pojavljuje, modificirani rasponi polja iznose:

$$l'_j = \frac{I_r}{I_j} l_j \quad (j = 1, \dots, n+1), \quad (177)$$

a sustav jednačbi kompatibilnosti dobiva jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned} 2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 &= -6EI_r(\alpha_{1v} + \beta_{1v}), \\ l'_j M_{j-1} + 2(l'_j + l'_{j+1})M_j + l'_{j+1} M_{j+1} &= -6EI_r(\alpha_{jv} + \beta_{jv}), \\ l'_n M_{n-1} + 2(l'_n + l'_{n+1})M_n &= -6EI_r(\alpha_{nv} + \beta_{nv}), \end{aligned} \quad (178)$$

za $j = 2, 3, \dots, n-1$.



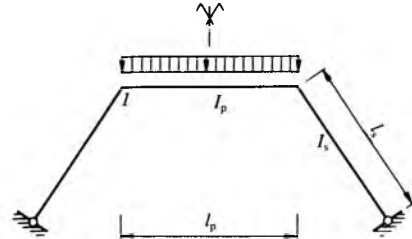
Sl. 110. Kutni pomaci ležajnih tangenata proste grede zbog djelovanja raznih opterećenja

Ako su modificirani rasponi svih polja jednaki ($l'_j = l'$ za $j = 1, 2, \dots, n+1$), sustav jednačbi kompatibilnosti postaje još jednostavniji

$$\begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= -6E \frac{I_r}{l'} (\alpha_{1v} + \beta_{1v}), \\ M_{j-1} + 4M_j + M_{j+1} &= -6E \frac{I_r}{l'} (\alpha_{jv} + \beta_{jv}), \\ M_{n-1} + 4M_n &= -6E \frac{I_r}{l'} (\alpha_{nv} + \beta_{nv}), \end{aligned} \quad (179)$$

za $j = 2, 3, \dots, n-1$.

Svi se poljni i ležajni momenti mogu brojčano izjednačiti ili njihove razlike smanjiti ako se vanjska polja nešto skrate (za $\sim 0,8 \dots 0,85\%$) s obzirom na unutrašnja ili ako se primijene prepusti.



Sl. 111. Trapezni okvir s nepomičnim čvorovima

Clapeyronova jednačba (171) može se primijeniti i za okvire s translacijski nepomičnim čvorovima. Tako npr. Clapeyronova jednačba čvora 1 trapeznog okvira (sl. 111), za koji je $l_s/I_s = l_p/I_p$, neposredno daje ležajni moment:

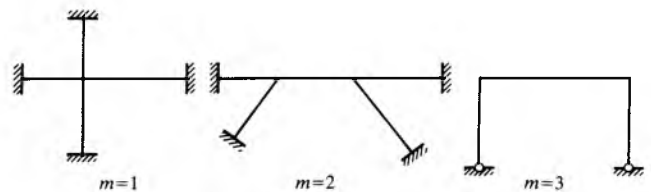
$$M_1 = -\frac{p l_p^2}{24} \quad (180)$$

METODA POMAKA

Stupanj kinematičke neodređenosti (m) nekog sustava znači stupanj (elastične) pomičnosti njegovih čvorova, a to je broj veza koje treba uvesti da bi se svi čvorovi translacijski i kutno fiksirali.

Stupanj pomičnosti čvorova sustava jednak je zbroju stupnja kutne pomičnosti i stupnja translacijske pomičnosti njegovih čvorova. Stupanj kutne pomičnosti jednak je broju krutih čvorova koji se pri deformaciji sustava zbog djelovanja zadanog opterećenja kutno pomiču. Stupanj translacijske pomičnosti utvrđuje se na zglobnoj shemi koja se od zadanog sustava dobiva tako da se svi čvorovi zamijene zglobovima.

Kad se određuje stupanj kinematičke neodređenosti sustava, smatra se da su štapovi aksijalno nedeformabilni ($EA = \infty$) i zanemaruje se promjena udaljenosti krajeva pravocrtnih štapova zbog njihova savijanja pri deformaciji sustava. Na sl. 112 naveden je stupanj kinematičke neodređenosti triju okvira.



Sl. 112. Primjeri okvira i stupanj njihove kinematičke neodređenosti

Algoritam metode pomaka. Zadan je m puta kinematički neodređen sustav. Slika 113 prikazuje dva kinematički neodređena okvira i pripadne osnovne sustave.

Da bi se olakšao rad s metodom pomaka, za pravocrtne štapove konstantnog presjeka prikazane su na sl. 114 akcije ležaja na štap i pripadni momentni dijagrami zbog djelovanja dvaju tipičnih opterećenja i jediničnih pomaka ležaja; lijevi se stupac odnosi na štap koji je na oba kraja upet, srednji stupac na štap koji je na jednom kraju upet a na drugom zglobno oslonjen, te desni stupac na štap koji je na jednom