Kriteriji geometrijske stabilnosti konstrukcija. Adekvatnost ležajnih i internih veza može se provjeriti kriterijima geometrijske stabilnosti konstrukcija. Često je, međutim, adekvatnost ili neadekvatnost veza očita.

Nuždan uvjet. Da sustav ne bi bio konačno pomičan, on ne smije imati nijedan stupanj slobode ($n = 0$). Taj je uvjet nuždan, ali nije dovoljan za postizanje geometrijske stabilnosti sustava. Ako ležajne i/ili unutrašnje veze nisu pravilno raspoređene, sustav je konačno ili infinitezimalno pomičan unatoč tome što je taj uvjet zadovoljen, tj. da ima dovoljno veza.

Statički kriterij. Za neopterećenu konstrukciju koja zadovoljava nužni uvjet formira se sustav jednadžbi ravnoteže; sustav je linearan i algebarski, a broj jednadžbi je m. Veličina je matrice koeficijenata $m \cdot m$. To je matrica $[A]$. Ako je rang matrice $[A]$ jednak m, matrica je regularna, a sustav jednadžbi ima jednoznačno rješenje i konstrukcija je geometrijski stabilna.

Ako je rang matrice $[A]$ manji od m, dakle njena je determinanta jednaka nuli, matrica je singularna, a sustav jednadžbi nema jednoznačnog rješenja i konstrukcija je konačno ili infinitezimalno pomična. Matrica je singularna ako su elementi jednog retka nule, ako su dva retka jednaka ili proporcionalna ili ako je jedan od redaka linearna kombinacija drugih redaka.

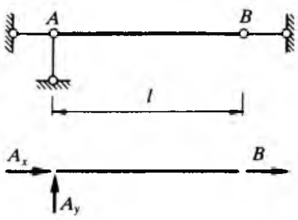
Zadovoljenje je statičkog kriterija nuždan i dovoljan uvjet geometrijske stabilnosti konstrukcije. Uvjeti su, dakle, statičke određenosti konstrukcije dovoljan broj veza i regularnost matrice koeficijenata sustava jednadžbi ravnoteže.

Sustav jednadžbi ravnoteže opterećenog skoro infinitezimalno pomičnog sustava vrlo je osjetljiv. Tako npr. za $m = 2$ jednadžbe ravnoteže predstavljaju dva pravca koji su skoro paralelni, pa je teško točno odrediti njihovo sjecište, tj. rješenje sustava.

Primjer. Sustav jednadžbi ravnoteže neopterećene proste grede (sl. 32) može se formulirati u obliku

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

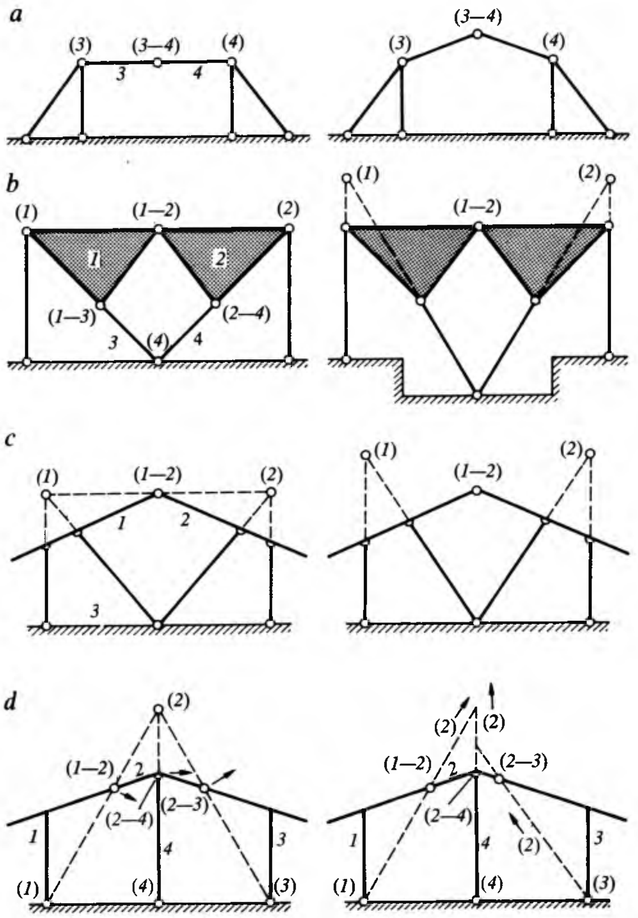
Drugi su i treći redak matrice koeficijenata proporcionalni, pa je njena determinanta nula. Sustav je, dakle, infinitezimalno pomičan.



Sl. 32. Infinitezimalno pomično oslonjena prosta greda

Kinematički kriterij. Ako se za konstrukciju koja zadovoljava spomenuti nužni uvjet može skicirati plan polova, ona je mehanizam i time konačno ili infinitezimalno pomična. Ako se, međutim, pri skiciranju plana polova pojave kontradikcije, tj. ako polovi i relativni polovi koji bi morali ležati na pravcu ne leže na pravcu, plan se polova ne može nacrtati, pa je konstrukcija geometrijski stabilna.

Na sl. 33 lijevo prikazani su *primjeri* infinitezimalno oblikovno izmjenljivih sustava (svi zadovoljavaju nužni uvjet), a desno geometrijski stabilni sustavi koji su od lijevih izmjenljivih dobiveni korekcijom rasporeda štapova ili veza. U primjeru na sl. 33a podignut je srednji zglob, pa polovi (*3*) i (*4*) te relativni pol (*3–4*) više nisu na pravcu. U primjeru na sl. 33b spušten je srednji ležaj, pa polovi (*1*) i (*2*) te relativni pol (*1–2*) više nisu na pravcu. U primjeru na sl. 33c promijenjen je smjer srednjih stupova tako da polovi (*1*) i (*2*) te ralativni pol (*1–2*) više nisu na pravcu. U primjeru na sl. 33d pomaknut je zglob desne prečke, pa se za pol (*2*) dobivaju dvije nesukladne pozicije; sustav je, dakle, infinitezimalno oblikovno izmjenljiv samo onda ako je simetričan.



Sl. 33. Primjeri infinitezimalno oblikovno izmjenljivih sustava (lijevo) i pripadnih geometrijski stabilnih sustava (desno)

OSNOVE ELASTOSTATIKE KONSTRUKCIJA

Jednadžbe elastostatike. Elastostatika utvrđuje ležajne i unutrašnje sile te deformacije statički opterećenih linearno deformabilnih konstrukcija. Primjenjuju se tri grupe jednadžbi: statičke, geometrijske i fizikalne.

Opterećenja se nazivaju statičkima ako je proces opterećivanja i rasterećivanja konstrukcije dovoljno polagan i postupan, tako da su inercijske sile u usporedbi s ostalima u svakom trenutku zanemarljive.

Statičke jednadžbe ili *jednadžbe ravnoteže* međusobno povezuju vanjske i unutrašnje sile. Sile su u njima uvijek u prvom stupnju, tako da su uvijek linearne.

Geometrijske jednadžbe ili *jednadžbe kompatibilnosti deformacija* međusobno povezuju deformacije i pomake sustava. Pretpostavlja se da su specifične deformacije i pomaci beskonačno maleni, tako da su i geometrijske jednadžbe linearne. Deformacije i pomaci građevnih konstrukcija vrlo su maleni, ali ne beskonačno, pa navedene pretpostavke vrijede samo približno; one su, međutim, prihvatljive, jer su specifične deformacije u usporedbi s jedinicom i pomaci u usporedbi s dimenzijama konstrukcije zanemarljivi. Tako, npr., specifična deformacija pri savijanju štapa. tj. zakrivljenost, iznosi $\Delta''/(1+\Delta'^2)^{3/2}$, pa je to strogo uzevši nelinearna funkcija gradijenta Δ' progibne linije Δ. Kako je, međutim, vrijednost nagiba, a pogotovo njena kvadrata, u usporedbi s jedinicom uvijek zanemarljiva, specifična je deformacija jednaka drugoj derivaciji Δ'' pomaka po apscisi, pa je geometrijska jednadžba linearna. Deformacija, dakle, samo neznatno mijenja inicijalni oblik sustava. Uostalom, deformacije i pomaci moraju biti vrlo maleni da bi se osigurala upotrebljivost konstrukcije.

Fizikalne jednadžbe povezuju naprezanja i deformacije. Pretpostavlja se da je materijal linearno elastičan. Jednadžbe su linearne i osnivaju se na Hookeovu zakonu. Strogo uzevši, svi se građevni materijali ponašaju donekle nelinearno, ali je pri relativno malim naprezanjima aproksimacija karakteristike pravcem opravdana. Nadalje se pretpostavlja da se moduli materijala s vremenom ne mijenjaju.

Ako su sve grupe jednadžbi linearne; sustav se naziva linearno deformabilnim.

Zakon superpozicije utjecaja više sila ili zakon nezavisnosti djelovanja sila, kad se primjenjuje na linearno deformabilne sustave, glasi: Ukupni je utjecaj više sila jednak zbroju utjecaja pojedinih sila. Redoslijed je opterećivanja pritom irelevantan. Zakon se odnosi na sve mehaničke veličine, dakle na ležajne i unutrašnje sile te na pomake.

Neka na sustav djeluju sile $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Tada je neka mehanička veličina

$$V = \sum_{k=1}^{n} v_k F_k, \tag{22}$$

gdje su v utjecajni koeficijenti veličine V. Koeficijent v_k jednak je V u stanju F_k°, što znači da na sustav na mjestu i u orijentiranom smjeru sile F_k djeluje jedinična bezdimenzijska sila i da ostalih sila nema. Na osnovi (22) vrijedi da je $v_k = \partial V / \partial F_k$. Dimenzija k-tog utjecajnog koeficijenta odgovara omjeru dimenzija mehaničke veličine V i sile F_k.

Primjenom matrica može se izraz (22) napisati u obliku

$$V = (v)\{F\} = (F)\{v\}, \tag{23}$$

gdje je (v) redni vektor (vektor-redak), a $\{v\}$ stupčani vektor (vektor stupac) utjecajnih koeficijenata $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dok je $\{F\}$ stupčani vektor, a (F) redni vektor sila $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Analogno je za mehaničku veličinu V_j:

$$V_j = \sum_{k=1}^{n} v_{jk} F_k = (v_j)\{F\} = (F)\{v_j\}. \tag{24}$$

Za vektor m mehaničkih veličina $V_1, V_2, \ldots, V_m$ koje ovise o n sila $F_1, F_2, \ldots, F_n$, na osnovi zakona superpozicije vrijedi

$$\{V\}_m = [v]_{m \cdot n} \{F\}_n, \tag{25}$$

gdje je

$$[v]_{m \cdot n} = \begin{bmatrix} (v_1) \\ \vdots \\ (v_j) \\ \vdots \\ (v_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \cdots v_{1k} \cdots v_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_{j1} \cdots v_{jk} \cdots v_{jn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_{m1} \cdots v_{mk} \cdots v_{mn} \end{bmatrix} \tag{26}$$

utjecajna matrica mehaničkih veličina $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Utjecajni koeficijent v_{jk} jednak je V_j u stanju F_k°, tj. u stanju koje je definirano opterećenjem $F_k = \bar{1}$, $F_r = 0$ za $r \neq k$. Njegova dimenzija odgovara omjeru dimenzija V_j i F_k.

Tako se, npr., neka unutrašnja sila S i vektor m unutrašnjih sila $S_1, S_2, \ldots, S_m$, mogu izraziti pomoću napadnih sila $P_1, P_2, \ldots, P_n$, izrazima

$$S = \sum_{k=1}^{n} s_k P_k = (s)\{P\}, \tag{27}$$

$$\{S\}_m = [s]_{m \cdot n} \{P\}_n. \tag{28}$$

Relacije između sila i pomaka. Neka na konstrukciju djeluju sile $F_1, F_2, \ldots, F_n$, (sl. 34a, $n = 4$) i neka su pripadni pomaci $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (sl. 34b).

Problem se može analizirati pomoću matrice podatljivosti i matrice krutosti.

Matrica podatljivosti. U stanju F_1° (sl. 34c) pomaci na mjestu i u orijentiranom smjeru sila $F_1, F_2, \ldots, F_n$, iznose $\delta_{11}, \delta_{21}, \ldots, \delta_{n1}$; oni čine vektor pomaka (δ_1). U stanju F_2° (sl. 34d) pomaci na mjestu i u orijentiranom smjeru sila $F_1, F_2, \ldots, F_n$ iznose $\delta_{12}, \ldots, \delta_{n2}$; oni čine vektor pomaka (δ_2). Analogno stanju F_3° odgovara vektor pomaka (δ_3), a stanju F_4° vektor pomaka (δ_4). Općenito je δ_{jk} pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru sile F_j u stanju F_k°, dakle kada je $F_k = \bar{1}$ i $F_r = 0$ za $r \neq k$; prvi indeks pokazuje mjesto i orijentirani smjer pomaka, a drugi uzrok pomaka. Dimenzija pomaka δ_{jk} odgovara omjeru dimenzija pomaka Δ_j i sile F_k.

Veličine δ_{jk} za $k = 1, 2, \ldots, n$ utjecajni su koeficijenti pomaka Δ_j; oni čine vektor (δ_j).

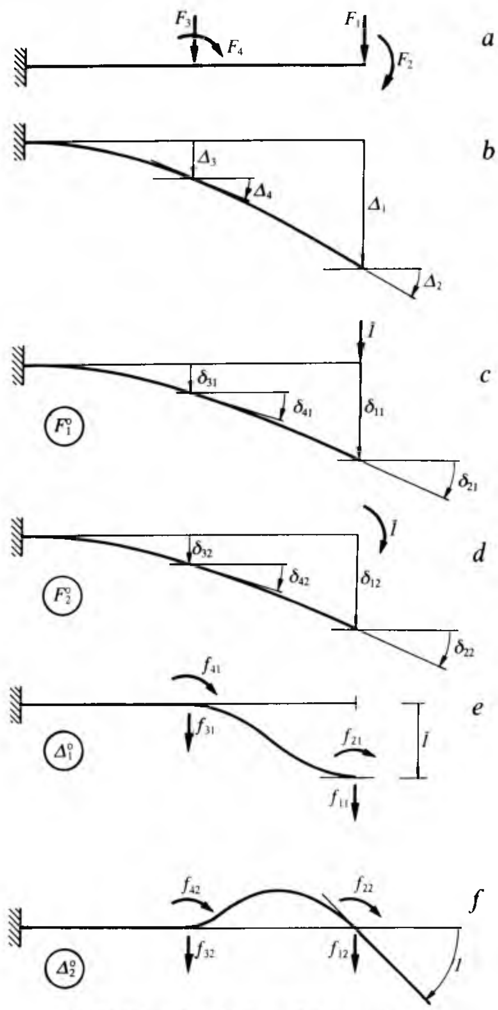
Pomak je na mjestu i u orijentiranom smjeru sile F_j

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} F_k = (\delta_j)\{F\} = (F)\{\delta_j\}, \tag{29}$$

gdje je $\{\delta_j\} = (\delta_j)^T$, a $(\delta)_j$ redni vektor utjecajnih koeficijenata $\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn}$. Utjecajni koeficijenti δ pomaka zovu se podatljivosti i čine *matricu podatljivosti* sustava:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} (\delta_1) \\ \vdots \\ (\delta_j) \\ \vdots \\ (\delta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} \cdots \delta_{1k} \cdots \delta_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \delta_{j1} \cdots \delta_{jk} \cdots \delta_{jn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \delta_{n1} \cdots \delta_{nk} \cdots \delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Prema izrazu (29) vrijedi $\delta_{jk} = \partial \Delta_j / \partial F_k$. Na osnovi Maxwellova teorema matrica je podatljivosti simetrična s obzirom na svoju glavnu dijagonalu.



Sl. 34. Konzola na koju djeluju napadne sile

Vektor pomaka može se izraziti pomoću vektora sila:

$$\{\Delta\} = [\delta]\{F\}, \tag{31}$$

pa matrica podatljivosti pretvara vektor sila u vektor pripadnih pomaka.

Matrica krutosti. U stanju Δ_1° (sl. 34e), kad je pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ_1 jednak bezdimenzijskoj jedinici, a ostali su pomaci jednaki nuli, na konstrukciju na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ djeluju sile $f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{n1}$; one čine vektor sila (f_1). U stanju Δ_2° (sl. 34f), kad je pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ_2 jednak bezdimenzijskoj jedinici, a ostali pomaci jednaki nuli, na konstrukciju djeluju sile $f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{n2}$; one čine vektor sila (f_2). Analogno stanju Δ_3° odgovara vektor sila (f_3), a stanju Δ_4° vektor sila (f_4). Općenito je f_{jk} sila na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ_j u stanju Δ_k°, tj. kad je $\Delta_k = \bar{1}$ i $\Delta_r = 0$, za $r \neq k$; prvi indeks pokazuje mjesto i orijentirani smjer sile, a drugi uzrok sile. Dimenzija sile f_{jk} odgovara omjeru dimenzija sile F_j i pomaka Δ_k.

Veličine f_{jk}, za $k = 1,2,\ldots,n$, utjecajni su koeficijenti sile F_j i oni čine vektor (f_j).

Stanje $\Delta_j^\circ (j = 1,2,\ldots,n)$ može se ostvariti tako da se sustavu nametnu veze koje sprečavaju sve pomake osim Δ_j i da mu se na mjestu j nametne jedinični bezdimenzijski pomak; sile f_{kj}, za $k = 1,2,\ldots,n$, odgovaraju silama u tim vezama.

Sila je na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ_j:

$$F_j = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\Delta_k = (f_j)\{\Delta\} = (\Delta)\{f_j\}, \tag{32}$$

gdje je $\{f_j\} = (f_j)^{\mathrm{T}}$, a (f_j) redni vektor utjecajnih koeficijenata $f_{j1}, \ldots, f_{jn}$.

Utjecajni koeficijenti sila zovu se krutosti i čine matricu krutosti:

$$[f] = \begin{bmatrix} (f_1) \\ \vdots \\ (f_j) \\ \vdots \\ (f_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} \cdots f_{1k} \cdots f_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_{j1} \cdots f_{jk} \cdots f_{jn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_{n1} \cdots f_{nk} \cdots f_{nn} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Na osnovi izraza (32) vrijedi $f_{jk} = \partial F_j / \partial \Delta_k$. Na osnovi Rayleighova teorema matrica je krutosti simetrična s obzirom na svoju glavnu dijagonalu.

Vektor sila može se izraziti pomoću vektora pomaka

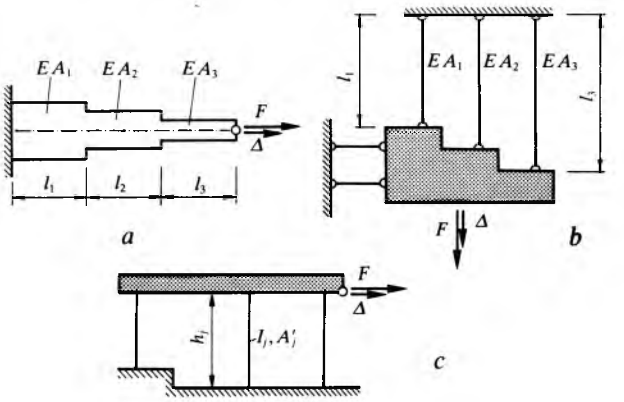
$$\{F\} = [f]\{\Delta\}, \tag{34}$$

pa matrica krutosti pretvara vektor pomaka u vektor sila.

Može se pokazati da je matrica krutosti inverzna matrica matrice podatljivosti, a matrica podatljivosti da je inverzna matrica matrice krutosti, pa je produkt obiju matrica jedinična matrica:

$$[f] = [\delta]^{-1}; \qquad [\delta] = [f]^{-1}; \qquad [\delta][f] = \ulcorner 1 \lrcorner. \tag{35}$$

Sustav od serijski nanizanih elemenata. Podatljivost sustava od serijski nanizanih elemenata jednaka je zbroju podatljivosti njegovih elemenata. Tako je podatljivost konzolnog štapa od koaksijalnog niza odsječaka konstantnog presjeka (sl. 35a),



Sl. 35. Primjer konstrukcije od serijski spojenih elemenata (*a*) i primjeri konstrukcija od paralelno spojenih elemenata (*b* i *c*)

tj. pomak hvatišta u orijentiranom smjeru sile F zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske sile na mjestu i u orijentiranom smjeru te sile, jednaka zbroju doprinosa svih odsječaka. Krutost štapa, tj. sila na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ koja uzrokuje jedinični bezdimenzijski pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru tog pomaka, recipročna je vrijednost podatljivosti:

$$f = \frac{1}{\delta}, \tag{36}$$

gdje je

$$\delta = \sum_{j=1}^{3} \delta_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{l_j}{EA_j}, \tag{37}$$

a l_j je duljina, E modul elastičnosti i A_j presjek odsječka j.

Sustav od paralelno nanizanih elemenata. Krutost sustava od paralelno nanizanih elemenata jednaka je zbroju krutosti njegovih elemenata. Tako je krutost sustava od nedeformabilnog bloka obješena o tri štapa (sl. 35b), tj. sila na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ koja proizvodi jedinični bezdimenzijski pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru tog pomaka, jednaka zbroju doprinosa svih štapova. Podatljivost sustava, tj. pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru sile F zbog djelovanja jedinične sile na mjestu i u orijentiranom smjeru te sile, jednaka je recipročnoj vrijednosti krutosti:

$$\delta = \frac{1}{f}, \tag{38}$$

gdje je

$$f = \sum_{j=1}^{3} f_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{EA_j}{l_j}. \tag{39}$$

Neka je višepoljni okvir s nedeformabilnom prečkom opterećen bočnom silom (sl. 35c). Podatljivost i krutost stupa j iznose:

$$\delta_j = \frac{h_j^3}{12EI_j} + \frac{1}{GA_j'}, \qquad K_j = \frac{1}{\delta_j}, \tag{40}$$

gdje je h_j visina, I_j moment tromosti, G modul smicanja, a A_j' posmična površina stupa.

Krutost okvira jednaka je zbroju doprinosa svih stupova:

$$K = \sum K_j, \tag{41}$$

pa je bočni pomak prečke

$$\Delta = \frac{P}{K}. \tag{42}$$

Ako stupovi na svome donjem kraju imaju zglob, podatljivost je:

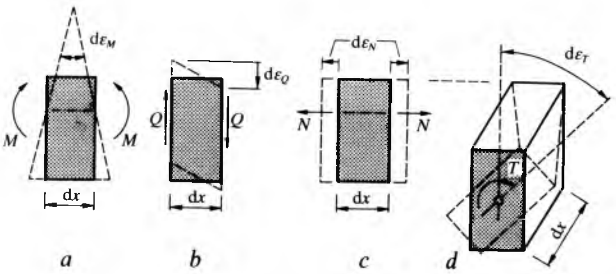
$$\delta_j = \frac{h_j^3}{3EI_j} + \frac{1}{GA_j'}. \tag{43}$$

Specifične deformacije štapova. Kad su ravninski sustavi opterećeni u svojoj ravnini, poprečni su presjeci štapova najčešće napregnuti momentom savijanja te poprečnom i uzdužnom silom. Kad su ravninski sustavi opterećeni okomito na svoju ravninu, štapovi mogu biti napregnuti i torzijom. Mješovita torzija često se aproksimira jednom od graničnih torzija, naime čistom, tj. *de Saint-Venantovom* ili *deplanacijskom torzijom.* Kad se računa s čistom torzijom, zanemaruje se utjecaj bimomenta i računa se samo s torzijskim momentom, a kad se računa s deplanacijskom torzijom, zanemaruje se utjecaj torzijskog momenta i računa se samo s bimomentom.

Specifične deformacije štapova, tj. deformacije odsječka štapa jedinične duljine zbog djelovanja momenta savijanja M, poprečne sile Q, uzdužne sile N, torzijskog momenta T, bimomenta B i promjene temperature (jednolično po poprečnom presjeku) za Δt, iznose:

$$\varepsilon_M = \frac{M}{EI}, \qquad \varepsilon_Q = \frac{Q}{GA'}, \qquad \varepsilon_N = \frac{N}{EA},$$
$$\varepsilon_T = \frac{T}{GJ}, \qquad \varepsilon_B = \frac{B}{EJ_\omega}, \qquad \varepsilon_t = \alpha_t \Delta t, \tag{44}$$

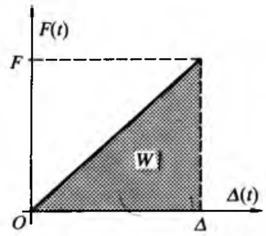
gdje su E i G modul elastičnosti i modul smicanja materijala, I je mjerodavni moment tromosti, A' posmična površina, A površina presjeka štapa, J posmično-torzijski i J_ω deplanacijski moment tromosti poprečnog presjeka štapa, a α_t linearni koeficijent toplinskog rastezanja materijala (°C^{-1}).



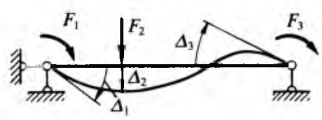
Sl. 36. Deformacije diferencijalnog isječka štapa

Pripadne deformacije diferencijalnog isječka štapa duljine dx jesu umnožak duljine dx i odnosne specifične deformacije (sl. 36).

Rad vanjskih sila. Ako na sustav djeluje vanjska sila, te ako ona polagano raste od nule do svoje konačne vrijednosti F, pripadni pomak raste od nule do svoje konačne vrijednosti Δ (sl. 37). Ovisnost je pomaka o sili linearna. Rad sile na deformaciji sustava proporcionalan je površini trokuta što ga zatvaraju apscisa, pravac kroz ishodište i okomica kroz njenu krajnju točku. Rad je jednak polovici umnoška konačne vrijednosti sile i konačne vrijednosti pomaka.



Sl. 37. Grafička interpretacija rada vanjske sile



Sl. 38. Prosta greda na koju djeluju tri sile

Ako na sustav djeluje više sila koje sve istodobno polagano rastu od nule do svojih konačnih vrijednosti $F_1, F_2, \ldots, F_n$, a pripadni pomaci na mjestu i u orijentiranom smjeru tih sila od nule do svojih konačnih vrijednosti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (sl. 38, $n=3$), rad svih sila na deformaciji sustava jednak je zbroju doprinosa pojedinih sila:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} F_j \Delta_j, \tag{45}$$

gdje je Δ_j pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru sile F_j zbog djelovanja svih sila.

Izrazi li se pomak Δ_j pomoću utjecajnih koeficijenata tog pomaka (29), a sila F_j pomoću utjecajnih koeficijenata te sile (32), izraz (45) poprima oblik

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} F_j F_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{jk} \Delta_j \Delta_k. \tag{46}$$

Primjenom matrica izraz (46) dobiva oblik

$$W = \frac{1}{2}(\Delta)\{F\} = \frac{1}{2}(F)\{\Delta\}. \tag{47}$$

Izrazi li se (Δ) pomoću matrice podatljivosti, a (F) pomoću matrice krutosti, dobiva se

$$W = \frac{1}{2}(F)[\delta]\{F\} = \frac{1}{2}(\Delta)[f]\{\Delta\}. \tag{48}$$

Rad je vanjskih sila prikazan pozitivno definitnom kvadratičnom formom sila, što odgovara *prvim* izrazima na desnoj strani jednadžbi (46) i (48) ili pozitivno definitnom kvadratičnom formom pomaka, što odgovara *drugim* izrazima na desnoj strani jednadžbi (46) i (48).

Rad vanjskih sila sa suprotnim predznakom naziva se *potencijalom vanjskih sila.*

Primjer. Obostrano upeti štap fleksijske krutosti $\varkappa = EI/l$ izložen je pomacima ležaja (sl. 39); kutni pomak ležaja *1* i *2* u smjeru gibanja kazaljke na satu označen je sa φ_1 i φ_2, a kutni pomak osi štapa suprotno od gibanja kazaljke na satu sa ψ. Pripadne su akcije ležaja na štap:

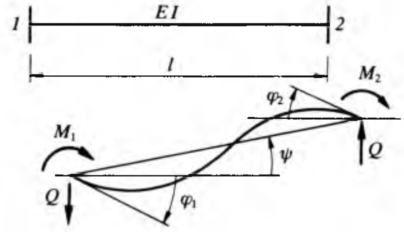
$$\begin{aligned} M_1 &= 2\varkappa(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\psi),\\ M_2 &= 2\varkappa(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\psi),\\ Ql &= 6\varkappa(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\psi). \end{aligned} \tag{49}$$

Rad je ležajnih sila

$$W = \frac{1}{2}(M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + Ql\psi), \tag{50}$$

pa ako se ležajne sile izraze pomoću pomaka (49), dobiva se

$$W = 2\varkappa[\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 + 3(\varphi_1 + \varphi_2)\psi + 3\psi^2]. \tag{51}$$



Sl. 39. Obostrano upeti štap na koji djeluju pomaci ležaja

Rad unutrašnjih sila. Rad neke unutrašnje sile na deformaciji diferencijalnog odsječka štapa jednak je polovici umnoška konačne vrijednosti unutrašnje sile i konačne vrijednosti pripadne deformacije, a rad svih unutrašnjih sila jednak je zbroju doprinosa pojedinih unutrašnjih sila:

$$dU = \frac{M}{2}d\varepsilon_M + \frac{Q}{2}d\varepsilon_Q + \frac{N}{2}d\varepsilon_N + \frac{T}{2}d\varepsilon_T, \tag{52}$$

gdje utjecaji bimomenta i temperaturnog rastezanja nisu uzeti u obzir. Ako se za specifične deformacije uvrste pripadni izrazi (44), tada je rad unutrašnjih sila uzduž svih štapova nekog štapnog sustava:

$$U = \sum\int\frac{M^2}{2EI}dx + \sum\int\frac{Q^2}{2GA'}dx + \sum\int\frac{N^2}{2EA}dx + \sum\int\frac{T^2}{2GJ}dx. \tag{53}$$

U tom se izrazu integrira uzduž osi štapova, a zbrajaju se doprinosi svih štapova. Kako se unutrašnje sile u izrazu za U (53) pojavljuju u kvadratu, rad je unutrašnjih sila uvijek pozitivan.

U uobičajenim okvirnim konstrukcijama uzima se u obzir samo doprinos momenata savijanja, što odgovara prvom članu izraza (53), jer su doprinosi ostalih unutrašnjih sila zanemarivo maleni.

Ako je štapna konstrukcija prostorna, obično djeluju momenti savijanja i poprečne sile u objema glavnim ravninama štapova. Označe li se glavne osi poprečnih presjeka sa y i z, momenti savijanja u glavnim ravninama štapa xy i xz sa M_y i M_z, a poprečne sile u smjerovima y i z sa Q_y i Q_z, bit će rad unutrašnjih sila

$$\begin{aligned} U = {} & \sum\int\frac{M_y^2}{2EI_y}dx + \sum\int\frac{M_z^2}{2EI_z}dx + \sum\int\frac{Q_y^2}{2GA_y'}dx + \\ & + \sum\int\frac{Q_z^2}{2GA_z'}dx + \sum\int\frac{N^2}{2EA}dx + \sum\int\frac{T^2}{2GJ}dx, \end{aligned} \tag{54}$$

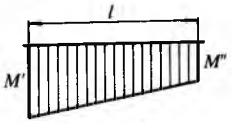
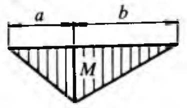
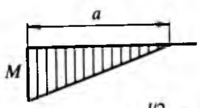
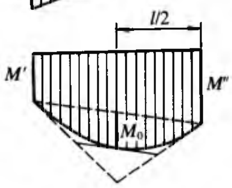
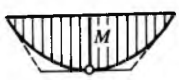
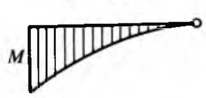
gdje su I_y i I_z momenti tromosti, a A_y' i A_z' posmične površine poprečnog presjeka štapa za smjerove y i z.

U rešetki su štapovi napregnuti samo aksijalnim silama, a kako su one uzduž štapa konstantne, dobiva se

$$U = \frac{1}{2}\sum N\cdot\Delta l = \sum\frac{N^2 l}{2EA}. \tag{55}$$

Da bi se izračunali integrali u izrazu za U podintegralna se funkcija izrazi kao funkcija apscise (x), pa se vrijednost integrala računa analitički ili numerički. Radi pojednostavljenja praktičnog rada, tabl. 2 daje vrijednosti integrala $\int M^2 dx$ za pravocrtne štapove konstantnog presjeka i za najčešće momentne linije.

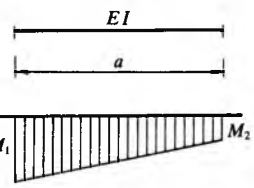
Tablica 2
INTEGRALI KVADRATA FUNKCIJA

M	$\int_{(l)} M^2 \mathrm{d}x$
	$\frac{1}{3}(M'^2+M'M''+M''^2)$
	$\frac{1}{3}M^2$
	$\frac{a}{3}M^2$
	$\frac{1}{3}\left[M'^2+M'M''+M''^2+2(M'+M'')M_0+\frac{8}{5}M_0^2\right]$
	$\frac{8l}{15}M^2$
	$\frac{1}{5}M^2$

Primjer. Treba odrediti rad momenata savijanja na odsječku duljine a štapa (sl. 40) neke okvirne konstrukcije; momentna je linija pravac. Prema tabl. 2 rad je momenata

$$U=\frac{a}{6EI}(M_1^2+M_1M_2+M_2^2). \tag{56}$$

Rad unutrašnjih sila zove se i deformacijska energija sustava.



Sl. 40. Odsječak štapa i pripadni momentni dijagram

Zakon o konzervaciji energije. Kako je pretpostavljeno da je proces opterećivanja dovoljno polagan i da u toku opterećivanja postoji ravnoteža te da je utjecaj kinetičke energije zanemariv, rad je vanjskih sila jednak deformacijskoj energiji sustava:

$$W=U. \tag{57}$$

To je zakon o konzervaciji energije elastičnih sustava. Rad se vanjskih sila akumulira u deformiranom tijelu u obliku deformacijske energije. Energija, dakle, samo prelazi iz jednog u drugi oblik.

Energetski poučci. Pomaci, sile, podatljivosti i krutosti često se mogu jednostavnije i brže izračunati primjenom energetskih poučaka nego pomoću njihovih definicija.

Neka je konstrukcija opterećena silama $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (sl. 34a, $n=4$) i neka su pripadni pomaci $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (sl. 34b). Deformacijska energija konstrukcije jednaka je radu vanjskih sila:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} F_j \Delta_j. \tag{58}$$

Drugi Castiglianov poučak. Izraze li se u (58) pomaci pomoću sila, deformacijska energija postaje funkcija sila, $U=U(F)$. Drugi Castiglianov poučak glasi: Parcijalna derivacija deformacijske energije $U(F)$ kao funkcije sila po nekoj sili F_j jednaka je pomaku Δ_j na mjestu i u orijentiranom smjeru te sile:

$$\Delta_j=\frac{\partial U(F)}{\partial F_j} \quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{59}$$

Primjenom matrica može se n jednadžbi (59) napisati u obliku

$$\{\Delta\}=\frac{\mathrm{d}U(F)}{\mathrm{d}\{F\}}, \tag{60}$$

pa se drugi Castiglianov poučak može formulirati i ovako: Vektor pomaka $\{\Delta\}$ koji pripada vektoru sila $\{F\}$ jednak je gradijentu deformacijske energije $U(F)$.

Ako na mjestu i u smjeru nekoga traženog pomaka Δ_k nema sile, zamišlja se da djeluje fantomska sila F_k, uz uvjet da se u konačnom izrazu za Δ_k stavi da je $F_k=0$.

Može se pokazati da je podatljivost δ_{jk} (sl. 34c i d) jednaka drugoj parcijalnoj derivaciji deformacijske energije $U(F)$ po silama F_j i F_k:

$$\delta_{jk}=\frac{\partial^2 U(F)}{\partial F_j \partial F_k} \quad (j=1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots,n). \tag{61}$$

Prvi Castiglianov poučak. Izraze li se u (58) sile pomoću pomaka, deformacijska energija postaje funkcija pomaka, $U=U(\Delta)$. Prvi Castiglianov poučak glasi: Parcijalna derivacija deformacijske energije $U(\Delta)$ kao funkcije pomaka po nekom pomaku Δ_j jednaka je sili F_j na mjestu i u orijentiranom smjeru tog pomaka:

$$F_j=\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_j} \quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{62}$$

Primjenom matrica može se n jednadžbi (62) napisati u obliku

$$\{F\}=\frac{\mathrm{d}U(\Delta)}{\mathrm{d}\{\Delta\}}, \tag{63}$$

pa prvi Castiglianov poučak glasi: Vektor sile $\{F\}$ koji pripada vektoru pomaka $\{\Delta\}$ jednak je gradijentu deformacijske energije $U(\Delta)$.

Može se pokazati da je krutost f_{jk} (sl. 34e i f) jednaka drugoj parcijalnoj derivaciji deformacijske energije $U(\Delta)$ po pomacima Δ_j i Δ_k:

$$f_{jk}=\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_j \partial \Delta_k} \quad (j=1,2,\ldots,\mathrm{n};\ \mathrm{k}=1,2,\ldots,n). \tag{64}$$

To je energetski izraz za krutosti.

Primjer. Konstrukcija od četiri štapa (sl. 41a) ima na svome slobodnom kraju pomake Δ_1 i Δ_2. Treba odrediti sile F_1 i F_2 koje te pomake uzrokuju.

Pomacima Δ_1 i Δ_2 odgovara produljenje štapa j (sl. 41b, $j=1,2,\ldots,4$):

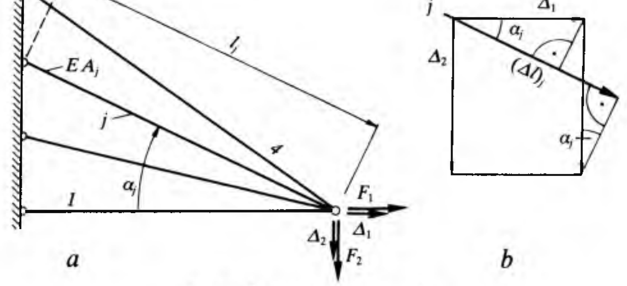
$$(\Delta l)_j=\Delta_1\cos\alpha_j+\Delta_2\sin\alpha_j. \tag{65}$$

Deformacijska je energija toga štapa $\frac{EA_j}{2l_j}(\Delta l)_j^2$, a deformacijska je energija sustava jednaka zbroju doprinosa njegovih štapova:

$$U=\sum_j \frac{EA_j}{2l_j}(\Delta l)_j^2. \tag{66}$$

Izrazi li se Δ_j pomoću Δ_1 i Δ_2 (65), dobiva se

$$U=\left(\sum_j \frac{EA_j}{2l_j}\cos^2\alpha_j\right)\Delta_1^2+\left(\sum_j \frac{EA_j}{2l_j}\sin^2\alpha_j\right)\Delta_2^2+\left(\sum_j \frac{EA_j}{l_j}\cos\alpha_j\sin\alpha_j\right)\Delta_1\Delta_2. \tag{67}$$



Sl. 41. Četveroštapna konzola

Parcijalnim deriviranjem deformacijske energije $U(\Delta)$ dobivaju se krutosti sustava:

$$f_{11}=\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_1^2}=\sum_j \frac{EA_j}{l_j}\cos^2\alpha_j,$$
$$f_{22}=\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_2^2}=\sum_j \frac{EA_j}{l_j}\sin^2\alpha_j, \qquad (68)$$
$$f_{12}=f_{21}=\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_1 \partial \Delta_2}=\sum_j \frac{EA_j}{l_j}\cos\alpha_j \sin\alpha_j.$$

Tako se sile F_1 i F_2 mogu izraziti pomoću zadanih pomaka Δ_1 i Δ_2, pa je

$$F_1=f_{11}\Delta_1+f_{12}\Delta_2; \qquad F_2=f_{21}\Delta_1+f_{22}\Delta_2. \qquad (69)$$

Poučak virtualnih pomaka. Neka se sustavu koji je u ravnoteži pod utjecajem vanjskih sila P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ i pripadnih unutrašnjih sila S nametne virtualna deformacija. To je infinitezimalna, zamišljena, proizvoljna i kinematički moguća deformacija, tj. deformacija koja je kompatibilna s ležajnim uvjetima, a koja bi mogla biti uzrokovana bilo kakvim opterećenjem ili kojim vanjskim utjecajem. Virtualni pomaci na mjestu i u orijentiranom smjeru sila P_k iznose $\bar{\delta}_k$, a virtualne specifične deformacije $\bar{\varepsilon}_S$. Za vrijeme virtualne deformacije vanjske se i unutrašnje sile sustava ne mijenjaju, ali vrše beskonačno mali virtualan rad. Poučak virtualnih pomaka glasi: Pri bilo kakvoj virtualnoj deformaciji uravnoteženog sustava rad je vanjskih sila jednak radu unutrašnjih sila:

$$\sum P_k \bar{\delta}_k=\sum \sum_S \int S\,\bar{\varepsilon}_S \mathrm{d}x. \qquad (70)$$

Integrira se uzduž osi štapa; drugi se znak sume na desnoj strani odnosi na sve unutrašnje sile (M, Q, N, T), a prvi znak sume na sve štapove.

Poučak virtualnih pomaka služi za pronalaženje unutrašnjih i ležajnih sila te utjecajnih linija unutrašnjih i ležajnih sila sustava zbog djelovanja zadanog opterećenja. Poučak je ekvivalentan uvjetima ravnoteže, a može glasiti: Sustav je u ravnoteži ako je ukupni rad vanjskih i unutrašnjih sila pri virtualnoj deformaciji sustava jednak nuli.

Primjena poučka virtualnih pomaka često brže vodi do cilja od neposredne primjene uvjeta ravnoteže, jer se računa s manje sila; u analizu se, naime, ne uključuju one sile kojih se hvatišta pri virtualnoj deformaciji ne pomiču (to su obično reakcije) ili se pomiču okomito na smjer sile.

Poučak virtualnih sila. Neka se sustavu koji je u ravnoteži i koji ima pomake Δ_k i specifične deformacije ε_S nametnu na mjestu i u orijentiranom smjeru pomaka Δ_k beskonačno male virtualne sile $\bar{P}_k$, a odgovaraju im virtualne unutrašnje sile $\bar{S}$. Za vrijeme virtualnog opterećivanja deformacija se sustava ne mijenja. Poučak virtualnih sila glasi: Pri virtualnom opterećenju uravnoteženog sustava rad je virtualnih vanjskih sila jednak radu virtualnih unutrašnjih sila:

$$\sum \bar{P}_k \Delta_k=\sum \sum_S \int \bar{S}\,\varepsilon_S \mathrm{d}x. \qquad (71)$$

Integrira se uzduž štapa; drugi se znak sume na desnoj strani odnosi na sve unutrašnje virtualne sile ($\bar{M}$, $\bar{Q}$, $\bar{N}$, $\bar{T}$), a prvi znak sume na sve štapove.

Poučak virtualnih sila služi za pronalaženje pomaka i utjecajnih linija pomaka sustava zbog zadanog vanjskog djelovanja.

Poučci virtualnih pomaka i virtualnih sila dva su dualna poučka i zovu se *poučci virtualnog rada.* U poučku virtualnih pomaka virtualni rad obavljaju vanjske i unutrašnje sile sustava na virtualnoj deformaciji, a u poučku virtualnih sila virtualni rad vrše virtualne vanjske i unutrašnje sile na deformaciji zadanog sustava.

U praktičnoj primjeni skraćuju se u jednadžbama poučka virtualnih pomaka apsolutne vrijednosti pomaka i deformacija, a u jednadžbama poučka virtualnih sila apsolutne vrijednosti vanjskih i unutrašnjih sila, pa ostaju samo njihovi omjeri; stoga virtualne deformacije, odnosno virtualne sile, ne moraju biti beskonačno malene.

Bettijev poučak glasi: Ako na sustav djeluju dva odvojena opterećenja j i k, rad je vanjskih (ili unutrašnjih) sila opterećenja j na pomacima koji su nastali djelovanjem opterećenja k jednak radu vanjskih (ili unutrašnjih) sila opterećenja k na pomacima koji su nastali djelovanjem opterećenja j:

$$W_{jk}=W_{kj}, \qquad U_{jk}=U_{kj}. \qquad (72)$$

Primjer. Na konzolni štap (sl. 42a) djeluju dva odvojena opterećenja j (sl. 42b) i k (sl. 42c). Pomak u stanju j na mjestu i u orijentiranom smjeru sile u stanju k iznosi

$$\Delta_{2j}=(P_{1j}+P_{3j})\frac{a}{EA}+P_{3j}\frac{b}{EA}, \qquad (73)$$

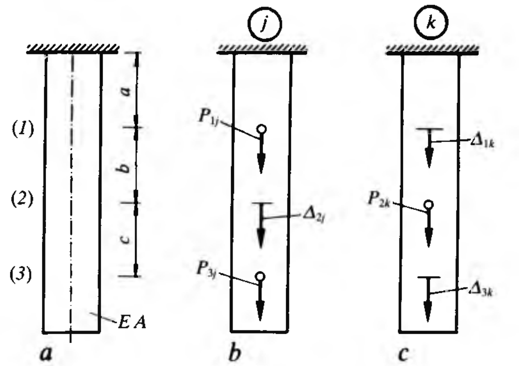
dok su pomaci u stanju k na mjestu i u orijentiranom smjeru sila u stanju j

$$\Delta_{1k}=P_{2k}\frac{a}{EA}, \qquad \Delta_{3k}=P_{2k}\frac{a+b}{EA}. \qquad (74)$$

Rad vanjskih sila stanja j na pripadnim pomacima stanja k te rad vanjskih sila stanja k na pripadnim pomacima stanja j iznose

$$W_{jk}=P_{2k}\Delta_{2j}, \qquad W_{kj}=P_{1j}\Delta_{1k}+P_{3j}\Delta_{3k}. \qquad (75)$$

Uvrste li se za pomake pripadne vrijednosti prema jednadžbama (73) i (74), vidjet će se da je zadovoljena prva jednadžba (72).



Sl. 42. Uz Bettijev poučak

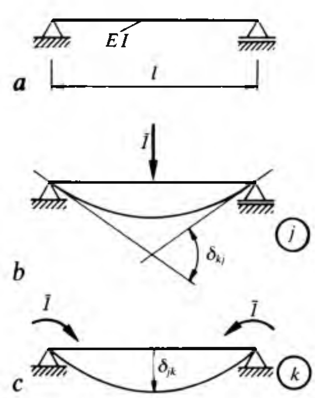
Maxwellov poučak o uzajamnosti podatljivosti poseban je slučaj Bettijeva poučka i glasi: Pomak na mjestu i u orijentiranom smjeru j zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske sile na mjestu i u orijentiranom smjeru k jednak je pomaku na mjestu i u orijentiranom smjeru k zbog djelovanja jedinične bezdimenzijske sile na mjestu i u orijentiranom smjeru j:

$$\delta_{jk}=\delta_{kj}. \qquad (76)$$

Primjer. Na prostu gredu (sl. 43a) djeluje u stanju j jedinična bezdimenzijska koncentrirana sila (sl. 43b), a u stanju k par jediničnih bezdimenzijskih momenata (sl. 43c). Može se pokazati da je

$$\delta_{jk}=\delta_{kj}=\frac{l^2}{8EI}. \qquad (77)$$

Obje su podatljivosti i vrijednosno i dimenzijski jednake, iako se jednom radi o translatornom, a drugi put o kutnom pomaku.



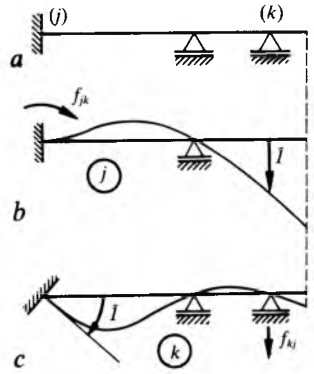
Sl. 43. Uz Maxwellov poučak

Rayleighov poučak o uzajamnosti krutosti poseban je slučaj Bettijeva poučka i glasi: Sila je u ležajnoj vezi j

(reakcija) zbog djelovanja jediničnog bezdimenzijskog pomaka u ležajnoj vezi k jednaka sili u ležajnoj vezi k (reakciji) zbog djelovanja jediničnog bezdimenzijskog pomaka u ležajnoj vezi j:

$$f_{jk} = f_{kj}. \tag{78}$$

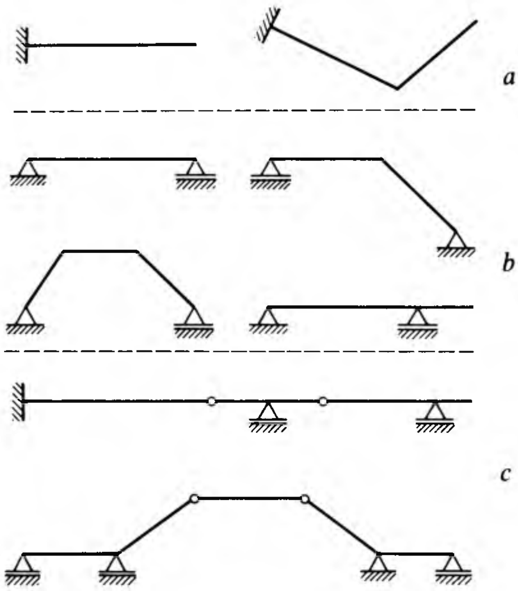
Primjer. Na dvopoljnu gredu (sl. 44a) djeluje u stanju j jedinični bezdimenzijski pomak u vezi k (44b), a u stanju k jedinični bezdimenzijski pomak u vezi j (sl. 44c). Može se pokazati da je zadovoljen uvjet (78). Obje su krutosti vrijednosno i dimenzijski jednake.



Sl. 44. Uz Rayleighov poučak

OSNOVE STATIČKI ODREĐENIH SUSTAVA

Opća svojstva i najčešći sustavi. Konstrukcija je statički određena ako se sve ležajne i unutrašnje sile za bilo kakvo opterećenje mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Svakom opterećenju odgovara samo jedno rješenje za ležajne i unutrašnje sile. Ako nema opterećenja, nema ni ležajnih ni unutrašnjih sila. Promjene temperature, pomaci ležaja i nepreciznosti izvedbe ne uzrokuju ležajne i unutrašnje sile. Ako se jedan od elemenata konstrukcije slomi, slomit će se cijela konstrukcija, jer nema redistribucije unutrašnjih sila kao u statički neodređenim konstrukcijama.



Sl. 45. Statički određene grede

Najčešći su fleksijski statički određeni sustavi: statički određene grede, trozglobni okviri, trozglobni lukovi i složeniji statički određeni okviri. Statički određene grede mogu biti konzole (sl. 45a), grede na dva ležaja ili proste grede (sl. 45b) i statički određene sastavljene ili Gerberove grede (sl. 45c). Prikazane grede kad su vertikalno opterećene mogu imati samo vertikalne ležajne sile.

Neposredna primjena uvjeta ravnoteže. Radi pronalaženja ležajnih i unutrašnjih sila mogu se neposredno primijeniti uvjeti ravnoteže.

Uvjeti ravnoteže diska jesu: zbroj projekcija svih sila koje djeluju na disk na neku os x, zbroj projekcija svih sila na neku os y i zbroj momenata svih sila s obzirom na neku točku i moraju biti jednaki nuli:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum M_{(i)} = 0. \tag{79}$$

Osi x i y ne moraju biti ortogonalne. Alternativno, uvjeti ravnoteže mogu se formulirati i ovako: zbrojevi momenata svih sila koje djeluju na disk s obzirom na točke i, j i k moraju biti jednaki nuli:

$$\sum M_{(i)} = 0, \qquad \sum M_{(j)} = 0, \qquad \sum M_{(k)} = 0. \tag{80}$$

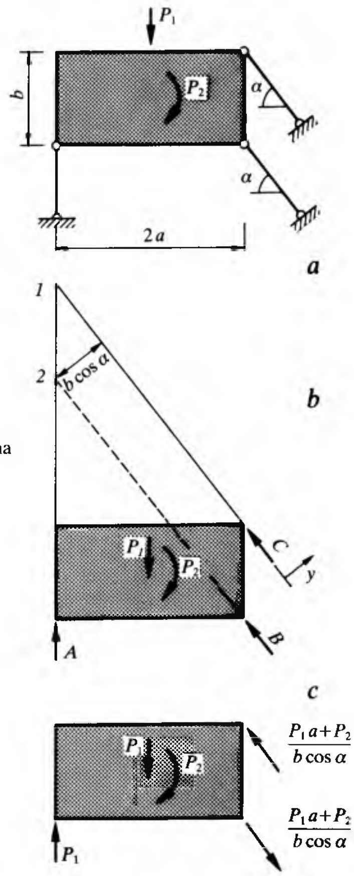
Mogu se i kombinirati neke jednadžbe (79) i (80), ali se moraju uzeti u obzir tri jednadžbe.

Primjer. Disk, oslonjen na tri ležajna štapića, opterećen je silama P_1 i P_2 (sl. 46a). Ako se presijeku ležajni štapići, njihovo se djelovanje na disk može prikazati ležajnim silama A, B, i C (sl. 46b). Uvjeti su ravnoteže: zbroj projekcija svih sila na os y okomitu na ležajne štapiće B i C, zbroj momenata svih sila s obzirom na točku *1* i zbroj momenata svih sila s obzirom na točku *2* moraju biti jednaki nuli:

$$\begin{aligned} &\sum F_y = A\cos\alpha - P_1\cos\alpha = 0,\\ &\sum M_{(1)} = Bb\cos\alpha + P_1 a + P_2 = 0,\\ &\sum M_{(2)} = Cb\cos\alpha - P_1 a - P_2 = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Iz tih jednadžbi slijedi (sl. 46c):

$$A = P_1, \qquad B = -\frac{P_1 a + P_2}{b\cos\alpha}, \qquad C = \frac{P_1 a + P_2}{b\cos\alpha}. \tag{82}$$



Sl. 46. Disk oslonjen na tri ležajna štapića

Uvjeti ravnoteže bloka su analogni, pa se mogu prikazati jednadžbama:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0;\\ &\sum M_{(x)} = 0, \qquad \sum M_{(y)} = 0, \qquad \sum M_{(z)} = 0. \end{aligned} \tag{83}$$

Uvjeti ravnoteže sustava diskova i blokova. Sustavi diskova i sustavi blokova analiziraju se na osnovi aksioma ravnoteže sustava tijela koji glasi: Sustav je tijela u ravnoteži ako su svi