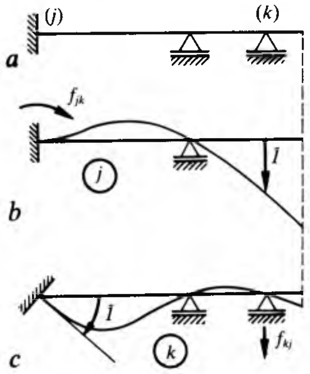
(reakcija) zbog djelovanja jediničnog bezdimenzijskog pomaka u ležajnoj vezi k jednaka sili u ležajnoj vezi k (reakciji) zbog djelovanja jediničnog bezdimenzijskog pomaka u ležajnoj vezi j:

$$f_{jk} = f_{kj}. \tag{78}$$

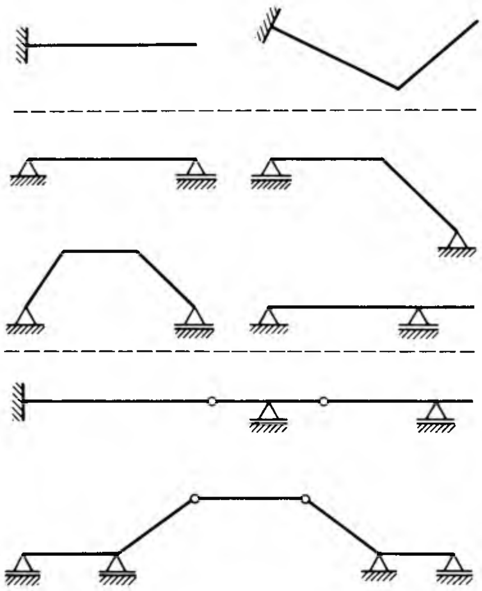
Primjer. Na dvopoljnu gredu (sl. 44a) djeluje u stanju j jedinični bezdimenzijski pomak u vezi k (44b), a u stanju k jedinični bezdimenzijski pomak u vezi j (sl. 44c). Može se pokazati da je zadovoljen uvjet (78). Obje su krutosti vrijednosno i dimenzijski jednake.



Sl. 44. Uz Rayleighov poučak

OSNOVE STATIČKI ODREĐENIH SUSTAVA

Opća svojstva i najčešći sustavi. Konstrukcija je statički određena ako se sve ležajne i unutrašnje sile za bilo kakvo opterećenje mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Svakom opterećenju odgovara samo jedno rješenje za ležajne i unutrašnje sile. Ako nema opterećenja, nema ni ležajnih ni unutrašnjih sila. Promjene temperature, pomaci ležaja i nepreciznosti izvedbe ne uzrokuju ležajne i unutrašnje sile. Ako se jedan od elemenata konstrukcije slomi, slomit će se cijela konstrukcija, jer nema redistribucije unutrašnjih sila kao u statički neodređenim konstrukcijama.



Sl. 45. Statički određene grede

Najčešći su fleksijski statički određeni sustavi: statički određene grede, trozglobni okviri, trozglobni lukovi i složeniji statički određeni okviri. Statički određene grede mogu biti konzole (sl. 45a), grede na dva ležaja ili proste grede (sl. 45b) i statički određene sastavljene ili Gerberove grede (sl. 45c). Prikazane grede kad su vertikalno opterećene mogu imati samo vertikalne ležajne sile.

Neposredna primjena uvjeta ravnoteže. Radi pronalaženja ležajnih i unutrašnjih sila mogu se neposredno primijeniti uvjeti ravnoteže.

Uvjeti ravnoteže diska jesu: zbroj projekcija svih sila koje djeluju na disk na neku os x, zbroj projekcija svih sila na neku os y i zbroj momenata svih sila s obzirom na neku točku i moraju biti jednaki nuli:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum M_{(i)} = 0. \tag{79}$$

Osi x i y ne moraju biti ortogonalne. Alternativno, uvjeti ravnoteže mogu se formulirati i ovako: zbrojevi momenata svih sila koje djeluju na disk s obzirom na točke i, j i k moraju biti jednaki nuli:

$$\sum M_{(i)} = 0, \qquad \sum M_{(j)} = 0, \qquad \sum M_{(k)} = 0. \tag{80}$$

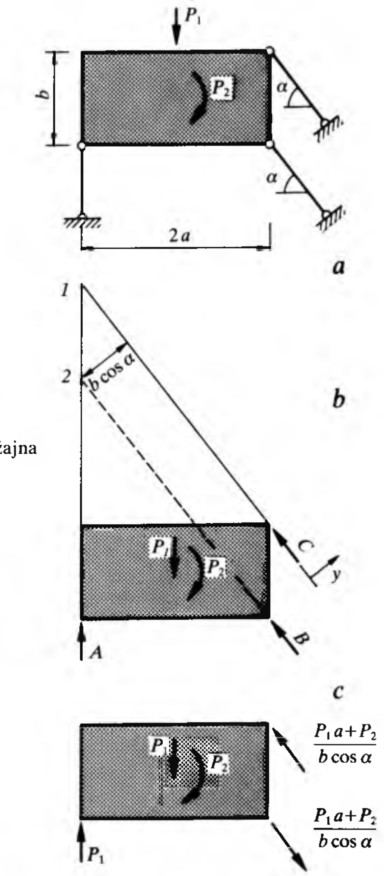
Mogu se i kombinirati neke jednadžbe (79) i (80), ali se moraju uzeti u obzir tri jednadžbe.

Primjer. Disk, oslonjen na tri ležajna štapića, opterećen je silama P_1 i P_2 (sl. 46a). Ako se presijeku ležajni štapići, njihovo se djelovanje na disk može prikazati ležajnim silama A, B, i C (sl. 46b). Uvjeti su ravnoteže: zbroj projekcija svih sila na os y okomitu na ležajne štapiće B i C, zbroj momenata svih sila s obzirom na točku *1* i zbroj momenata svih sila s obzirom na točku *2* moraju biti jednaki nuli:

$$\begin{aligned} &\sum F_y = A\cos\alpha - P_1\cos\alpha = 0, \\ &\sum M_{(1)} = Bb\cos\alpha + P_1 a + P_2 = 0, \\ &\sum M_{(2)} = Cb\cos\alpha - P_1 a - P_2 = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Iz tih jednadžbi slijedi (sl. 46c):

$$A = P_1, \qquad B = -\frac{P_1 a + P_2}{b\cos\alpha}, \qquad C = \frac{P_1 a + P_2}{b\cos\alpha}. \tag{82}$$



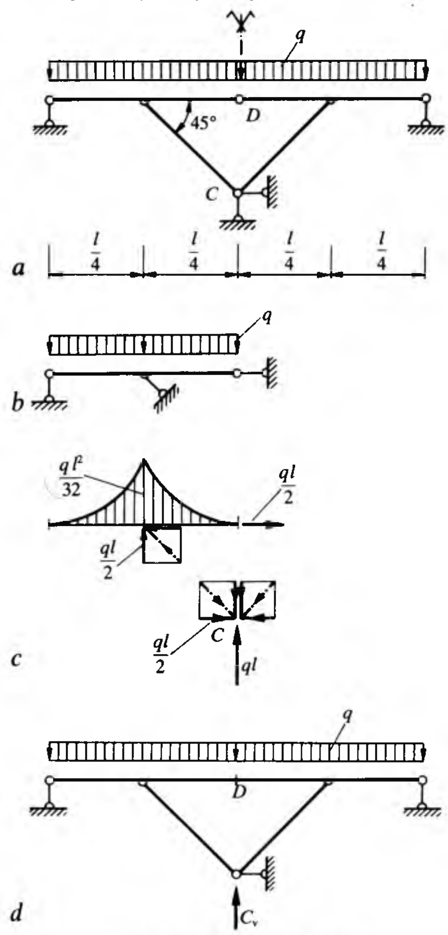
Sl. 46. Disk oslonjen na tri ležajna štapića

Uvjeti ravnoteže bloka su analogni, pa se mogu prikazati jednadžbama:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0; \\ &\sum M_{(x)} = 0, \qquad \sum M_{(y)} = 0, \qquad \sum M_{(z)} = 0. \end{aligned} \tag{83}$$

Uvjeti ravnoteže sustava diskova i blokova. Sustavi diskova i sustavi blokova analiziraju se na osnovi aksioma ravnoteže sustava tijela koji glasi: Sustav je tijela u ravnoteži ako su svi njegovi dijelovi u ravnoteži. Da bi se primijenio taj aksiom sustav se odvoji od ležaja i presijecanjem veza raščlani u dijelove; ležajne sile i sile u presječenim vezama pritom se pojavljuju kao vanjske sile. Svaki je dio u ravnoteži pod utjecajem opterećenja koje neposredno na njega djeluje i *oslobođenih* sila u vezama. Za cjelinu i dijelove (diskove, odnosno blokove) postavljaju se uvjeti ravnoteže, i tako se dobiva sustav od onoliko linearnih algebarskih jednadžbi koliko ima nepoznatih sila.

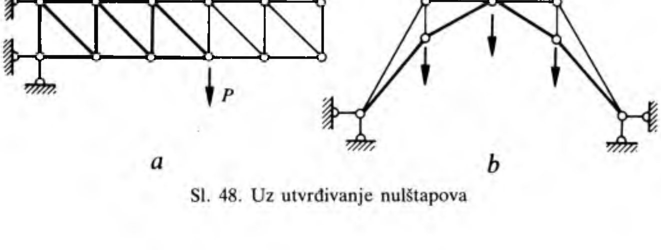
Primjer. Štapni sustav na sl. 47a simetričan je i simetrično opterećen, pa u zglobu D nema poprečne sile. Shema lijeve prečke prikazana je na sl. 47b, a njen momentni dijagram, reakcije i sile koje djeluju na srednji ležaj C na sl. 47c. Ukupno opterećenje prenosi se, dakle, na srednji ležaj, dok vanjski ležaji uz zadano opterećenje ostaju neopterećeni.



Sl. 47. Primjer štapnog sustava

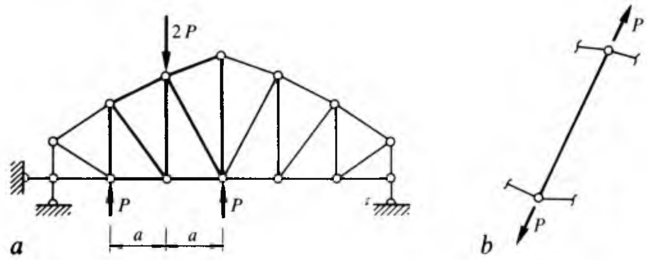
Posebni postupci određivanja uvjeta ravnoteže ponekad veoma pojednostavnjuju analizu.

Utvrđivanje nulštapova (nenapregnuti štapovi) konstrukcije. Nulštapovi konstrukcije uz zadano opterećenje mogu se utvrditi na osnovi teorema koji glasi: Bilo koje moguće rješenje za ležajne i unutrašnje sile konstrukcije koje zadovoljava uvjete ravnoteže ujedno je i stvarno rješenje. Tako je, npr., moguća ravnoteža konzolne rešetke ako se napadna sila prenosi samo prema upetom kraju (sl. 48a, napregnuti štapovi nacrtani su debljim, a nenapregnuti tanjim linijama); pripadne ležajne i unutrašnje sile rješenje su zadatka. Kad je, npr., donji pojas lučne rešetke (sl. 48b) oblikovan prema potpornoj liniji za zadano opterećenje, onda on može sam preuzeti, i stvarno preuzima, ukupno opterećenje, a svi su ostali štapovi nenapregnuti.



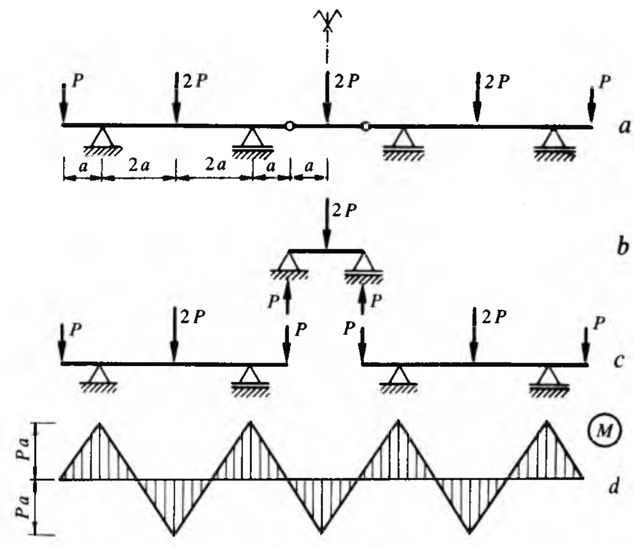
Sl. 48. Uz utvrđivanje nulštapova

Utjecaj uravnoteženog opterećenja. Ako na dio statički određene konstrukcije djeluje uravnoteženo opterećenje, ostali su dijelovi konstrukcije nenapregnuti (sl. 49a i b). Očito je da je ravnoteža opterećenog dijela konstrukcije moguća, pa prema tome i stvarna.



Sl. 49. Uz utjecaj uravnoteženog opterećenja

Raščlanjivanje konstrukcije u osnovne i pridružene dijelove. Osnovni su oni dijelovi konstrukcije koji ostaju stabilni i kad se udalje pridruženi dijelovi. Pridruženi su oni dijelovi koji su stabilni samo kad su povezani s osnovnim dijelovima. Opterećenje na nekom osnovnom dijelu napreže samo taj dio. Opterećenje na nekom pridruženom dijelu napreže i taj i osnovni dio ili dijelove s kojima je spojen. Najprije se analiziraju pridruženi dijelovi; njihove ležajne sile opterećuju osnovni dio ili dijelove s kojima su spojeni. U sastavljenoj gredi, npr., na sl. 50a srednji je dio između unutrašnjih zglobova pridruženi dio (sl. 50b), a lijevo i desno od njega su osnovni dijelovi (sl. 50c) konstrukcije. Momentni dijagram (sl. 50d) pokazuje da su sve apsolutne vrijednosti ekstremnih momenata savijanja jednake.



Sl. 50. Raščlanjenje sastavljene grede u pridruženi dio i osnovne dijelove

Metoda osnovnog sustava. Osnovni se sustav dobiva od zadanoga tako da se uvede dodatna veza, npr. ukruti jedan od zglobova, ili presiječe neka druga veza i utjecaj te veze zamijeni nepoznatom silom. Ležajne i unutrašnje sile određuju se na osnovi ravnoteže osnovnog sustava i uvjeta da u uvedenoj vezi nema sile, jer ta veza u stvarnom sustavu ne postoji.

Primjer. Treba riješiti sustav prema sl. 47a metodom osnovnog sustava. U tu se svrhu ukruti zglob D i odbaci vertikalni štapić ležaja C, a njegovo se djelovanje zamijeni nepoznatom silom C_v (sl. 47d). Iz uvjeta

$$M_D = \frac{ql^2}{8} - \frac{C_v}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \qquad (84)$$

slijedi da je

$$C_v = ql. \qquad (85)$$

Primjena poučka virtualnih pomaka. Ležajne i unutrašnje sile mogu se odrediti i primjenom poučka virtualnih pomaka. Prednosti su primjene poučka virtualnih pomaka prema neposrednoj primjeni uvjeta ravnoteže: *a*) nije potrebno sustav rastaviti i analizirati odvojene elemente; *b*) računa se samo s aktivnim silama, tj. s onima koje pri virtualnoj deformaciji sustava obavljaju rad; *c*) ne treba proračunavati sve ležajne i unutrašnje sile, nego samo one koje su potrebne; *d*) proračun je često brži i jednostavniji, a ta je prednost to veća što je više opterećenja s kojima treba računati.

Kad se želi primijeniti poučak virtualnih pomaka, pretpostavi se orijentacija tražene unutrašnje ili ležajne sile S. Sustavu se nametne virtualna deformacija određena pomakom na mjestu i u orijentiranom smjeru sile S, pa se sustav pretvara u mehanizam. Pomak koji pripada sili S označi se sa $\bar{\delta}_S$, a projekcija pomaka hvatišta neke vanjske sile P_k na orijentirani smjer te sile sa $\bar{\delta}_k$. Na osnovi poučka virtualnih pomaka vrijedi

$$S\bar{\delta}_S = \sum_k P_k \bar{\delta}_k, \tag{86}$$

pa je

$$S = \sum_k \frac{\bar{\delta}_k}{\bar{\delta}_S} P_k. \tag{87}$$

Sume se protežu na sve vanjske, uglavnom napadne sile.

Radi pojednostavnjenja analize umjesto s $\bar{\delta}_S$ računa se s jediničnim bezdimenzijskim pomakom $\bar{\delta} = \bar{1}$ na mjestu i u orijentiranom smjeru sile S te s pripadnom projekcijom $\bar{\delta}_k$ pomaka hvatišta sile P_k na orijentirani smjer te sile. Tako se dobiva

$$S = \sum_k \bar{\delta}_k P_k = \sum_k s_k P_k = (s)\,\{P\}, \tag{88}$$

gdje je $s_k = \bar{\delta}_k$ utjecajni koeficijent sile S, dakle $s_k = S$ u stanju P_k°, tj. kada je $P_k = \bar{1}$ i $P_j = 0$ za $j \neq k$.

Primjer. Na dvopoljnu Gerberovu gredu s prepustom djeluje koncentrirana sila P_1, moment P_2 i podijeljeno opterećenje intenzivnosti P_3 (sl. 51a). Treba odrediti moment savijanja M_1 u presjeku grede ispod sile P_1.

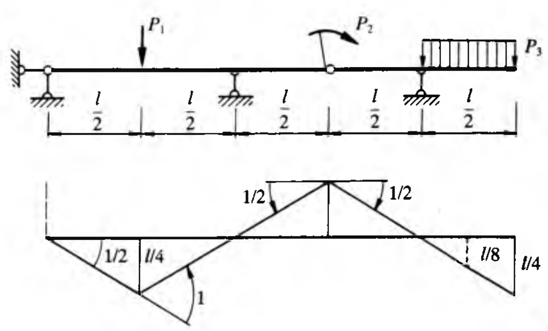
Pretpostavi se da je moment M_1 pozitivan, tj. da u donjem dijelu presjeka uzrokuje vlak. Gredi se na mjestu i u orijentiranom smjeru momenta M_1 nametne jedinični bezdimenzijski pomak (sl. 51b), pa se sustav pretvori u mehanizam. Utjecajni su koeficijenti:

$$m_{11} = \frac{1}{4}, \qquad m_{12} = -\frac{1}{2}, \qquad m_{13} = \frac{l^2}{16}, \tag{89}$$

a M_1 iznosi:

$$M_1 = \sum_{k=1}^{3} m_{1k} P_k. \tag{90}$$

Progibna je linija mehanizma (sl. 51b) ujedno utjecajna linija momenta savijanja M_1 grede.

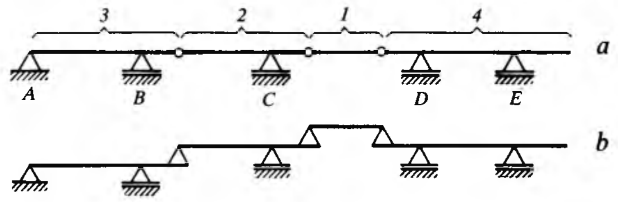


Sl. 51. Dvopoljna Gerberova greda s prepustom

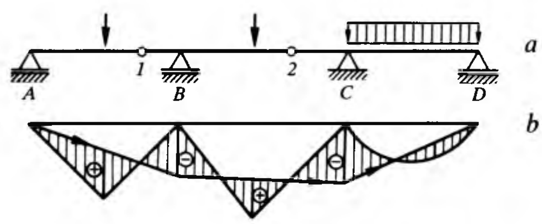
TIPIČNI FLEKSIJSKI STATIČKI ODREĐENI SUSTAVI

Sastavljene grede. Broj zglobova statički određenih sastavljenih greda koje nigdje nisu uklijėštene jednak je broju ležaja umanjenom za 2; unutrašnja polja smiju imati najviše dva, a vanjska najviše jedan zglob. Prednost je statički određenih sastavljenih greda u usporedbi s nizom prostih greda smanjenje momenata savijanja, a mana im je da slom jednog polja može uzrokovati lančani slom nekih ili svih ostalih polja.

Mehaničko ponašanje sastavljenih greda pokazat će se, u skladu s raščlambom na osnovne i pridružene dijelove konstrukcije, na primjeru četveropoljne grede na sl. 52a. Element *1* je prosta greda oslonjena na elemente *2* i *4*; na nju djeluje samo njezino neposredno opterećenje. Element *2* je greda s prepustom oslonjena na ležaj C i element *3*; na nju djeluje njezino opterećenje i ležajna akcija elementa *1*. Element *3* je greda s prepustom oslonjena na ležaje A i B; na nju djeluje njezino opterećenje i ležajna akcija elementa *2*. Element *4* je greda sa dva prepusta oslonjena na ležaje D i E; na nju djeluju njezino opterećenje i ležajna akcija elementa *1*. Opisana hijerarhija elemenata vidi se na sl. 52b.



Sl. 52. Četveropoljna sastavljena greda



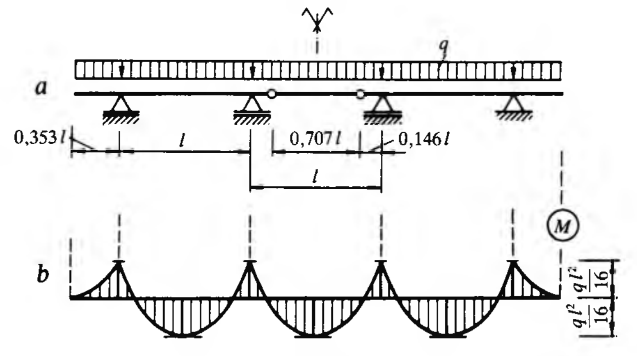
Sl. 53. Polugrafičko utvrđivanje momentnog dijagrama sastavljene grede

Polugrafičko utvrđivanje unutrašnjih sila pokazat će se na primjeru tropoljne sastavljene grede (sl. 53a). Svako se polje grede smatra, bez obzira na zglobove, prostom gredom. Skicira se pripadni dijagram momenta savijanja (sl. 53b) i, ako treba, dijagram poprečne sile. U zglobovima moraju momenti savijanja biti jednaki nuli; zato se zaključna linija povlači tako da moment bude na lijevom kraju grede, u zglobovima i na desnom kraju grede jednak nuli. Rezultirajući je momentni dijagram šrafiran. Dijagramu poprečne sile, koji odgovara nizu prostih greda, superponiraju se doprinosi ležajnih momenata. U nekom polju duljine l s momentima M_d na desnom i M_l na lijevom kraju taj doprinos iznosi

$$\Delta Q = \frac{M_d - M_l}{l}. \tag{91}$$

Momente treba uvrstiti s pripadnim predznacima.

Tropoljna greda s prepustima ima sve poljne i ležajne momente brojčano jednake ako se adekvatno postave zglobovi u srednjem polju i adekvatno odredi duljina prepusta (sl. 54).



Sl. 54. Sastavljena greda s brojčano jednakim poljnim i ležajnim momentima savijanja